CHAPTER 5

Circles

Then

You learned about special segments and angle relationships in triangles.

Now

In this chapter, you will:

- Learn the relationships between central angles, arcs, and inscribed angles in a circle.
- Define and use secants and tangents.
- Use an equation to identify or describe a circle.

Why? ▲

SCIENCE The actual shape of a rainbow is a complete circle. The portion of the circle that can be seen above the horizon is a special segment of a circle called an arc.

الدرس 5-1

الدوائر والمحيط

.. السابق

- تعرّفت على أجزاء متوازيات الأضلاع واستخدمتها.

.. الحالي

1 تحديد أجزاء الدوائر واستخدامها.

2 حلّ المسائل التي تشتمل على محيط دائرة.

.. لماذا؟

- تتحرك لعبة المقص في مدينة الألعاب والموضحة بالشكل جيئةً وذهابًا باتجاه عقارب الساعة. وفي بعض الأوقات، يكون الراكب رأسا على عقب على ارتفاع 43 m فوق سطح الأرض، بحيث يمرّون "بزمن في الهواء". وفيه يشعرون بانعدام الوزن. يساوي عرض الجولة، أو *قطرها*، 13.4 m. ويمكنك إيجاد المسافة التي يقطعها الراكب خلال دورةٍ واحدةٍ باستخدام هذا المقياس.

المفردات الجديدة

circle دائرة
center مركز
radius نصف القطر
chord وتر
diameter قطر الدائرة
concentric circles الدوائر متحدة المركز
circumference محيط الدائرة
pi (π) باي
inscribed محاط
circumscribed محيط

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

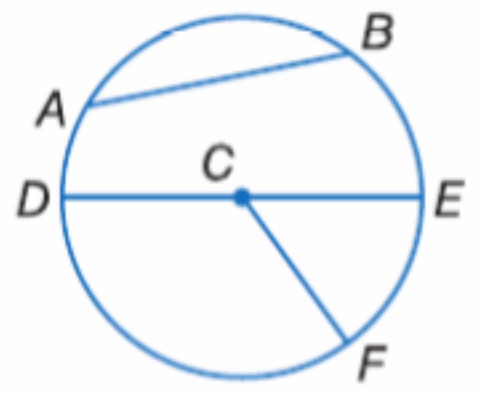
1 القطع في الدوائر

إن **الدائرة** هي المحل الهندسي لمجموعة من جميع نقاط المستوى متساوية البعد عن نقطة ثابتة تدعى **مركز** الدائرة.


الدائرة C أو ⊙C

للقطع التي تقطع دائرةً أسماؤها خاصة.

المفهوم الرئيسي القطع الخاصة في دائرة



إن **نصف القطر** (جمعها أنصاف الأقطار) قطعةٌ مستقيمةٌ تقع إحدى نقطتاها الطرفيتان في المركز والأخرى على الدائرة.

أمثلة $\overline{CD}$، $\overline{CE}$، $\overline{CF}$ نصفا قطر في الدائرة ⊙C.

الوتر قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة.

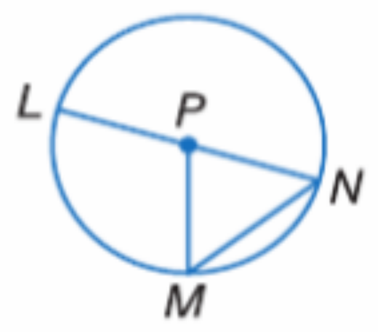
أمثلة $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ وتران في الدائرة ⊙C.

القطر في دائرة هو وترٌ يمرّ من المركز ويتكون من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

مثال $\overline{DE}$ هو قطر في الدائرة ⊙C. يتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطر الواقعين على استقامة واحدة $\overline{CD}$ و $\overline{CE}$.

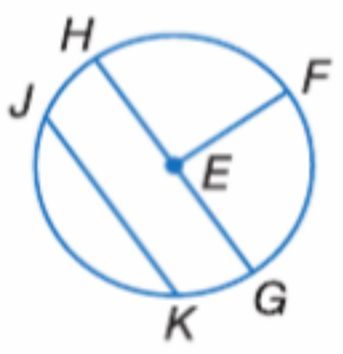
مثال 1 تحديد القطع في دائرة.

a. سمِّ الدائرة وحدّد نصف قطرٍ فيها.



يقع مركز الدائرة عند النقطة P، ولذلك فهي تسمى الدائرة P أو الدائرة ⊙P. نوضح ثلاثة أنصاف قطر: $\overline{PL}$ و $\overline{PN}$ و $\overline{PM}$.

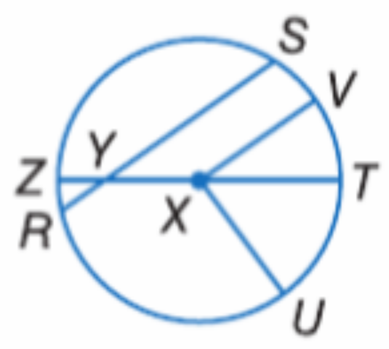
b. حدّد وترًا وقطرًا في الدائرة.



نوضح وترين اثنين: $\overline{JK}$ و $\overline{HG}$. $\overline{HG}$ يمر بالمركز. إذًا $\overline{HG}$ قطرٌ في الدائرة.

تمرين موجّه

1. سمِّ الدائرة إضافةً إلى نصف قطرٍ ووترٍ وقطرٍ فيها.



قراءة في الرياضيات

الدقة تستخدم كلمتا نصف *القطر* و *القطر* لوصف طولين وقطعتين مستقيمتين. وبما أن للدائرة الكثير من أنصاف الأقطار والأقطار المختلفة، فإن الكلمتين *نصف القطر* و*القطر* تشيران إلى طولين لا قطعتين مستقيمتين.

بالتعريف، فإن المسافة من مركز الدائرة إلى أي نقطةٍ على محيطها هي واحدةٌ دائمًا. ولذلك، فإن جميع الأقطار r في الدائرة متطابقة. وبما أن القطر d يتركب من قطرين اثنين، فجميع أقطار الدائرة متطابقة أيضًا.

المفهوم الأساسي علاقات نصف القطر والقطر

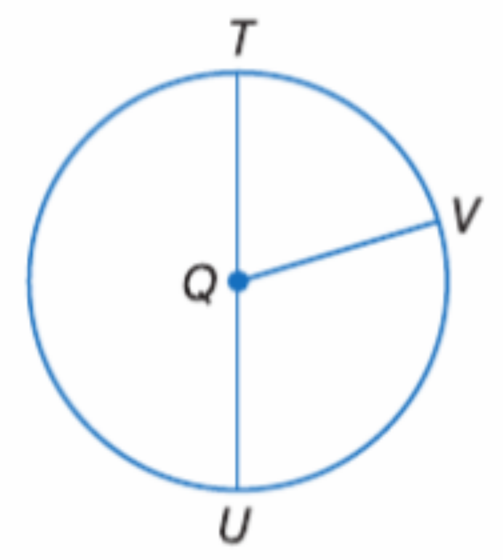
إذا كان لدائرةٍ نصف القطر r والقطر d، فإن العلاقات التالية تنطبق عليها.

قانون نصف القطر $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$

قانون القطر $d = 2r$

مثال 2 إيجاد نصف القطر والقطر

إذا كان طول $QV = 8$ cm، فما قطر الدائرة $\odot Q$؟



قانون قطر الدائرة $d = 2r$

بالتعويض والتحويل لأبسط صورة. $= 2(8) = 16$

قطر الدائرة $\odot Q$ يساوي 16 cm.

تمرين موجّه

2A. إذا كان طول $TU = 14$ m. فما هو نصف قطر الدائرة $\odot Q$؟

2B. إذا كان طول $QT = 11$ m. فما هو طول QU ؟

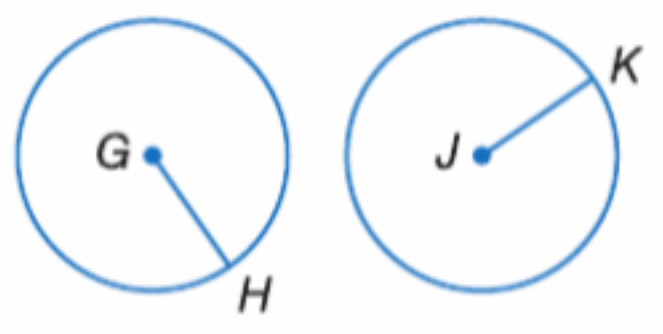
وكما الأشكال الأخرى، فيمكن لدائرتين أن تكونا متطابقتين أو متشابهتين أو أن تشتركا بعلاقات خاصةٍ أخرى.

مراجعة المفردات

النقاط متّحدة المستوى نقاط تقع في المستوى نفسه

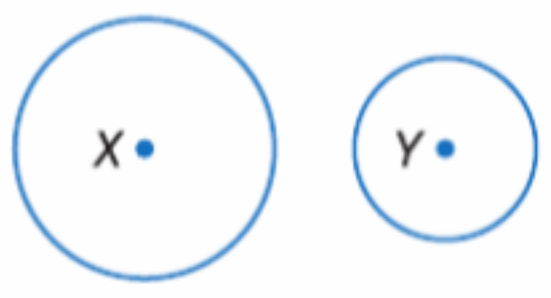
المفهوم الأساسي أزواج الدوائر

تتطابق دائرتان حصرًا إذا كانتا تضمان نصفي قطرٍ متطابقين.



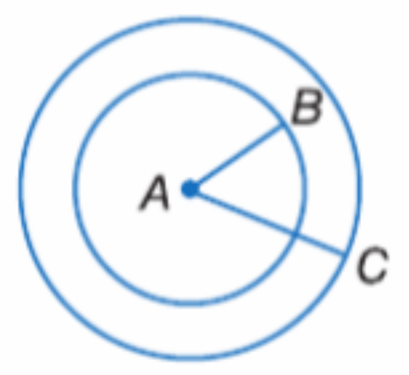
مثال $\overline{GH} \cong \overline{JK}$، إذًا $\odot G \cong \odot J$.

كل الدوائر متشابهة.



مثال $\odot X \sim \odot Y$

الدوائر متحدة المركز هي دوائر متّحدة المستوى لها المركز نفسه.



مثال الدائرة $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ والدائرة $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ متّحدتا المركز.

وستبرهن على أن جميع الدوائر متشابهةٌ في التمرين 52.

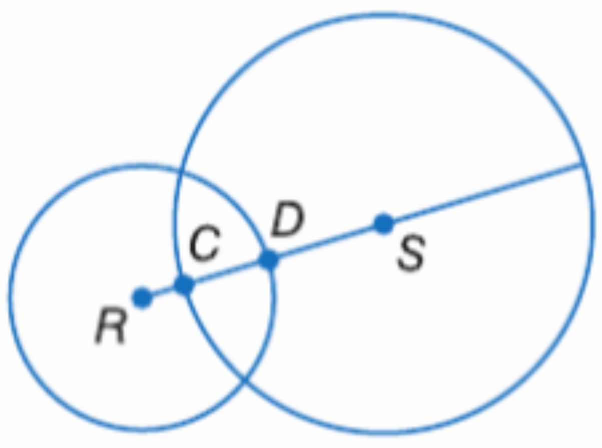
يمكن لدائرتين أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين اثنتين.

نقطتا تقاطع	نقطة تقاطع واحدة	لا نقاط تقاطع
		

تضم القطعة المستقيمة التي تربط مركزي الدائرتين المتقاطعتين نصفي قطري الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في الدوائر المتقاطعة

قطر الدائرة $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر الدائرة $\odot R$ يساوي 20 وحدة، و 9 وحدة $= DS$. أوجد CD.



بما أن قطر الدائرة $\odot S$ يساوي 30. فإن $CS = 15$.

$\overline{CD}$ جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

بحسب مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$CD + DS = CS$
بالتعويض	$CD + 9 = 15$
بطرح 9 من كل طرف.	$CD = 6$

تمرين موجّه

3. استخدم التمثيل البياني أعلاه لإيجاد RC.

2 المحيط

إن **محيط** الدائرة هو المسافة حول الدائرة. وبالتعريف، فإن النسبة $\frac{C}{d}$ هي عدد غير نسبي يدعى **باي (π)**. ويمكن اشتقاق قانونين لحساب المحيط عبر استخدام التعريف.

تعريف باي	$\frac{C}{d} = \pi$
بضرب كل طرف بـ d.	$C = \pi d$
$d = 2r$	$C = \pi(2r)$
بسط.	$C = 2\pi r$

المفهوم الأساسي المحيط

الشرح إذا كان لدائرة القطر d ونصف القطر r. فإن المحيط C يساوي القطر مضروبًا بالعدد باي أو ضعف نصف القطر مضروبًا بالعدد باي.

الرموز $C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد المحيط

كرة المضرب أوجد محيط منصة هبوط الطائرات الموصوفة على الجهة اليمين.

قانون المحيط	$C = \pi d$
بالتبديل	$= \pi(24)$
بسط.	$= 24\pi$
باستخدام آلة حاسبة.	≈ 75.4

يساوي محيط منصة هبوط الطائرات 24π cm أو حوالي 75.4 cm.

تمرين موجّه

أوجد محيط كل دائرة موصوفة، وقرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

4A. نصف القطر= 2.5 cm

4B. قطر الدائرة= 16 m

الربط بالحياة اليومية

في عام 2005. لعب روجيه فيدرير وأندريه أغاسي كرة المضرب على منصة هبوط الطائرات الحوامة في برج العرب بالإمارات العربية المتحدة. وكان قطر منصة الهبوط يساوي 24 m وارتفاعها قرابة 213 m.

المصدر: موقع برج العرب، مباني إمبوريس

يمكن استخدام قوانين المحيط أيضا لتحديد قطر دائرةٍ ونصف قطرها عند إعطاء المحيط.

مثال 5 إيجاد قطر الدائرة ونصف قطرها

أوجد قطر دائرةٍ ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ إذا كان محيط الدائرة 106.4 mm.

قانون المحيط $C = \pi d$

بالتعويض $106.4 = \pi d$

بقسمة كل طرف على π. $\frac{106.4}{\pi} = d$

باستخدام الآلة الحاسبة. $33.87 \text{ mm} \approx d$

قانون نصف القطر $r = \frac{1}{2}d$

$d \approx 33.87$ $\approx \frac{1}{2}(33.87)$

باستخدام الآلة الحاسبة. $\approx 16.94 \text{ mm}$

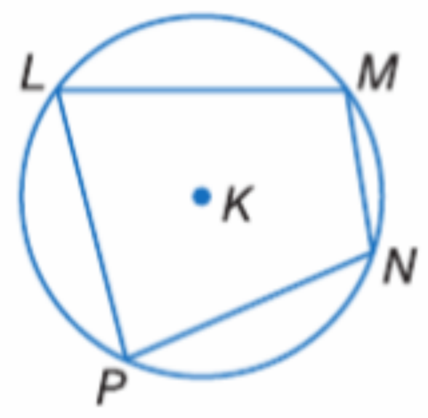
تمرين موجّه

5. أوجد قطر دائرةٍ ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ إذا كان محيط الدائرة 77.8 cm.

> **نصيحة دراسية**
>
> **مستويات الدقة** بما أن π غير نسبي، فلا يمكن إعطاء قيمته في صورة كسرٍ عشري منتهٍ. ويعطي استخدام القيمة 3 لـ π تقديرًا سريعا خلال الحسابات. ويعطي استخدام القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقديرًا أدق. وللحصول على التقريب الأدق، استخدم المفتاح π على الآلة الحاسبة. وما لم يذكر خلاف ذلك، افترض أننا استخدمنا في هذا النص آلةً حاسبةً تضم الزر π لتوليد الإجابات.

يكون المضلع **محاطًا** بدائرةٍ إذا كانت جميع رؤوسه تقع على الدائرة. وتعدّ الدائرة **محيطة** للمضلع إذا كانت تضمّ رؤوس المضلع جميعها.

- المضلع *LMNP* محاط *بالدائرة* ⊙*K*.
- الدائرة *K* محيطة للشكل الرباعي *LMNP*.



مثال 6 على الاختبار المعياري محيط مضلع محاط بدائرة

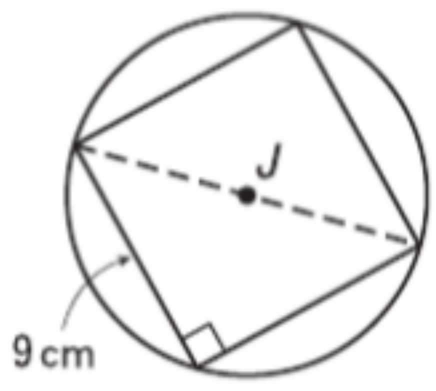
إجابة قصيرة يحاط مربعٌ طول ضلعه 9 cm بالدائرة ⊙*J*. أوجد المحيط الدقيق للدائرة ⊙*J*.

قراءة فقرة الاختبار

ينبغي عليك إيجاد قطر الدائرة واستخدامه لحساب محيطها.

حل فقرة الاختبار

أولاً، صمم رسما تخطيطيًا. قطر المربع هو قطر الدائرة وهو وتر مثلث قائم.



نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$

بالتعويض $9^2 + 9^2 = c^2$

بسط. $162 = c^2$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. $9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ سنتيمترات.

أوجد المحيط بدلالة π عبر تعويض $9\sqrt{2}$ بدلاً من *d* في $C = \pi d$.

المحيط الدقيق هو $9\pi\sqrt{2}$ cm.

> **نصيحة دراسية**
>
> **الدائرة المحيطية** إن *الدائرة المحيطية* هي دائرةٌ تمرّ بجميع رؤوس مضلع.

تمرين موجّه

أوجد المحيط الدقيق لكل دائرةٍ باستخدام المضلع المعطى.

6A. مثلث قائم الزاوية محاط بدائرة وطولا ساقيه 7 m و 3 m

6B. مربع محاط طول ضلعه 10 m

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2

لحل التمارين 1-4، عد إلى الدائرة $\odot N$.

1. سمِّ الدائرة

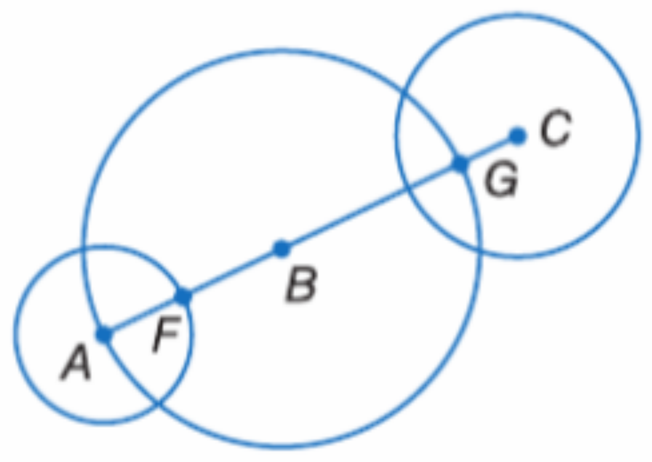
2. حدِّد كلاً مما يلي.

a. وتر **b.** قطر **c.** نصف قطر

3. إذا كان $CN = 8$ cm. أوجد DN.

4. إذا كان $EN = 13$ m. فكم يساوي قطر الدائرة؟

مثال 3



أقطار الدوائر $\odot A$ و $\odot B$ و $\odot C$ هي 8 cm و 18 cm و 11 cm على التوالي. أوجد كل قياس.

5. FG

6. FB

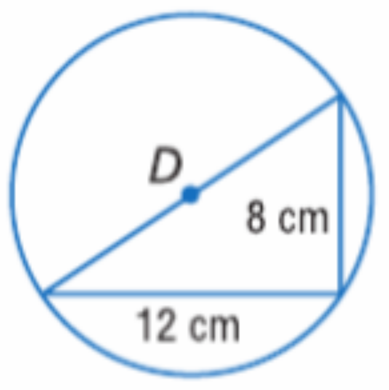
مثال 4

7. **ألعاب الملاهي** للعبة الملاهي الدائرية الموصوفة في بداية هذا الدرس القطر 13.4 m. فما هو نصف قطر اللعبة ومحيطها؟ قرِّب إلى أقرب جزء من مئة عند الضرورة.

مثال 5

8. **التمثيل بالنماذج** يساوي محيط بركة السباحة الدائرية حوالي 56.5 m. فما قطر البركة ونصف قطرها؟ قرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

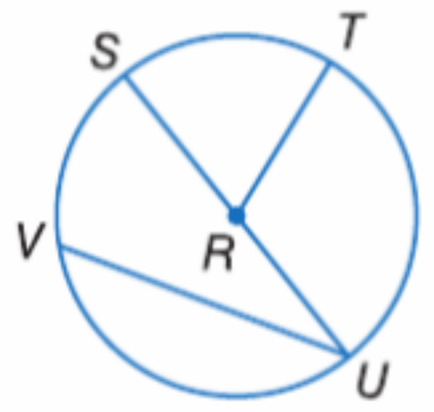
مثال 6



9. **إجابة قصيرة** المثلث القائم الموضح محاط بالدائرة $\odot D$.
أوجد المحيط الدقيق للدائرة $\odot D$.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2



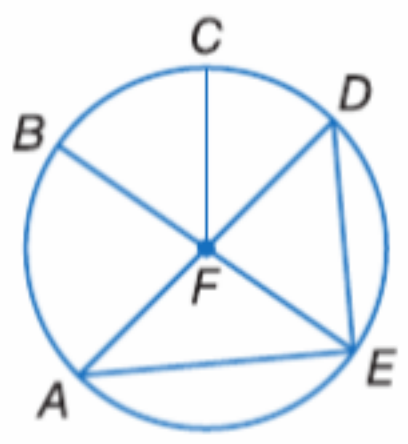
لحل التمارين 10-13، عد إلى الدائرة $\odot R$.

10. سمِّ مركز الدائرة.

11. حدِّد وترًا هو قطرٌ في الدائرة أيضا.

12. هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ اشرح.

13. إذا كان طول $SU = 16.2$ cm. فما طول RT؟



لحل التمارين 14-17، عد إلى الدائرة $\odot F$.

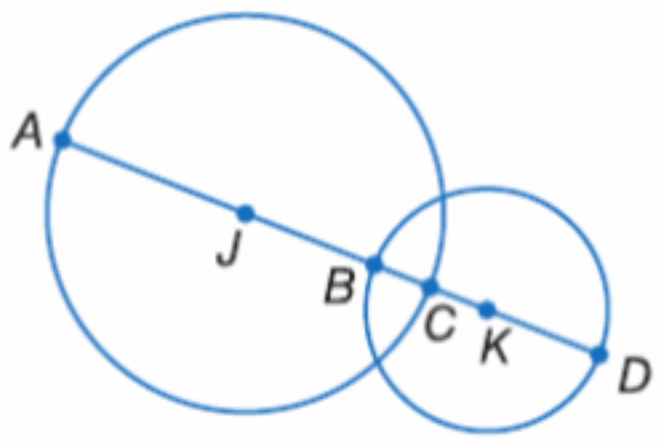
14. حدِّد وترًا لا يعدّ قطرًا في الدائرة.

15. إذا كان $CF = 14$ cm. فما هو قطر الدائرة؟

16. هل $\overline{AF} \cong \overline{EF}$؟ اشرح.

17. إذا كان طول $DA = 7.4$ cm. فما هو طول EF؟

مثال 3 للدائرة J نصف قطر يساوي 10 وحدات، وللدائرة $\odot K$ نصف قطر يساوي 8 وحدات، و $BC = 5.4$ وحدات. أوجد كلّ القياسات.



18. CK
19. AB
20. JK
21. AD

مثال 4

22. **البيتزا** أوجد نصف القطر والمحيط لقطعة البيتزا الموضحة. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة عند الضرورة.

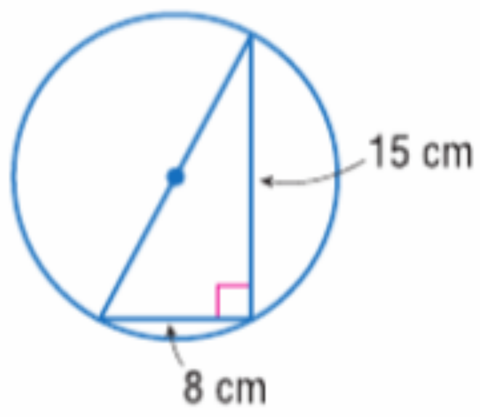
23. **الدراجات** قطرا عجلة إحدى الدراجات يساويان 26 cm. أوجد نصف قطر العجلة ومحيطها. وقرّب إلى أقرب جزء من المئة عند الضرورة.

مثال 5 أوجد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة.

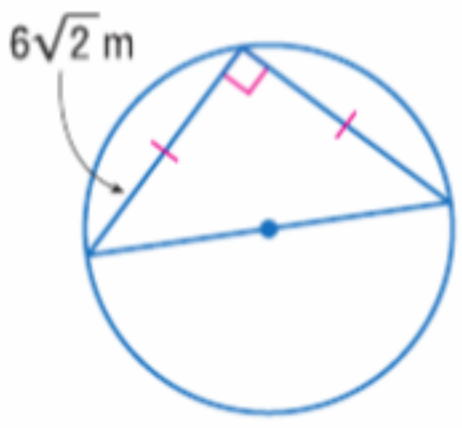
24. $C = 18$ cm
25. $C = 124$ m
26. $C = 375.3$ cm
27. $C = 2608.25$ m

مثال 6 **الاستنتاج المنطقي** أوجد المحيط الدقيق لكل دائرةٍ باستخدام المضلّع المحيط لها أو المحاط بها.

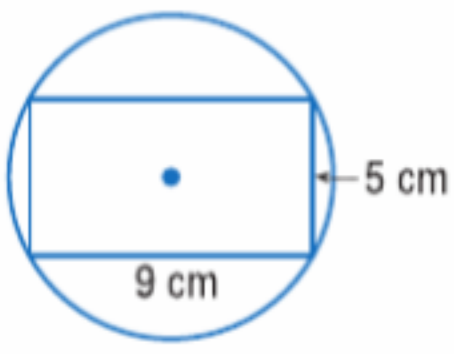
28.



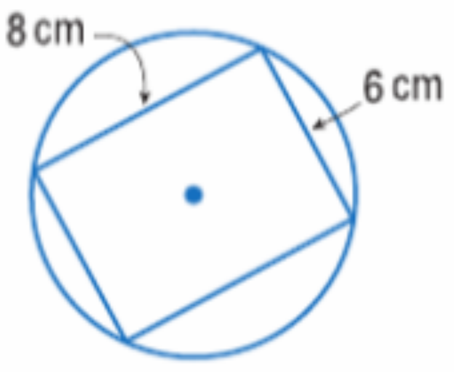
29.



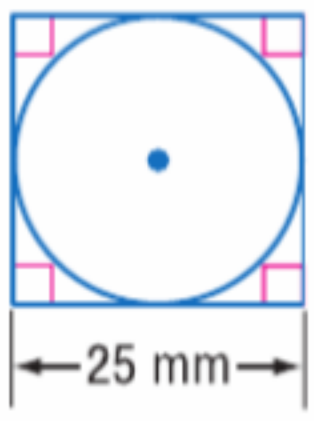
30.



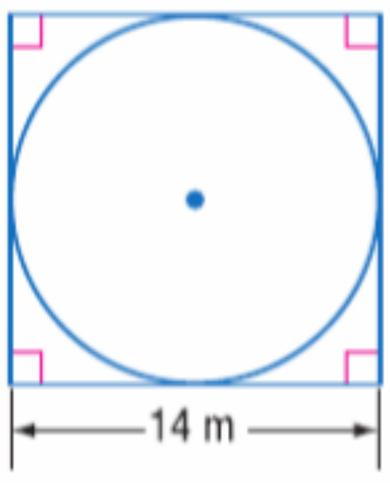
31.



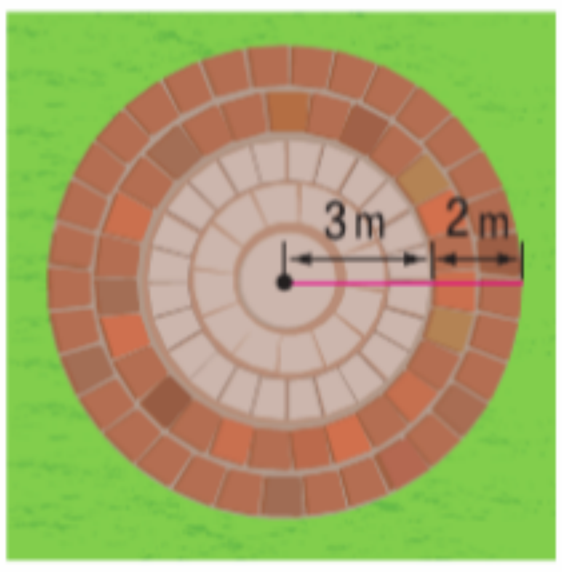
32.



33.



34. **جولف القرص** تشبه لعبة جولف القرص لعبة الجولف المعتادة. باستثناء استخدام قرص طائرٍ بدلاً من الكرة والعصا. وفي المنافسات الاحترافية. يبلغ الوزن الأقصى للقرص بالجرامات 8.3 أمثال القطر بالسنتيمتر. فما هو أقصى وزن مسموحٍ به لقرص محيطه 66.92 cm؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



35. **الفناءات المرصوفة** ينوي السيد على بناء الفناء المرصوف الموضح.

a. ما المحيط التقريبي للفناء؟

b. إذا غيّر السيد علي خطته بحيث يصبح للدائرة الداخلية محيط يساوي 25 m تقريبًا، فكم ينبغي أن يساوي نصف قطر الدائرة مقربًا إلى أقرب متر؟

يعطى فيما يلي نصف قطر دائرةٍ أو قطرها أو محيطها. أوجد كلا من القياسات المجهولة مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة.

36. $d = 8\frac{1}{2}$ cm, $r =$ __?__, $C =$ __?__
37. $r = 11\frac{2}{5}$ m, $d =$ __?__, $C =$ __?__
38. $C = 35x$ cm, $d =$ __?__, $r =$ __?__
39. $r = \frac{x}{8}$, $d =$ ____, $C =$ __?__

حدّد ما إذا كانت الدوائر الموضحة في الأشكال أدناه تبدو *متطابقةً* أم *متّحدة المركز* أم غير ذلك.

.40

.41

.42

.43 شكل الجزيرة الموضحة قريب من شكل الدائرة. فإذا كانت كل وحدة في الشبكة الإحداثية تمثل 25 m. فما المسافة التي يتعين على شخص ما قطعها ليدور حول الحلقة بكاملها؟ قرّب إلى أقرب عشر.

.44 **تمثيل النماذج** يجري إنشاء ممرٍ من القرميد حول بركةٍ دائرية. يساوي محيط البركة 68 m. وسيكون بعد الحافة الخارجية للممر 4 m عن البركة في محيطها كلّه. فما هو المحيط التقريبي للممرّ؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

.45 **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة عملية تغيير أبعاد الدوائر.

.a **سؤال هندسي** استخدم فرجارًا لرسم ثلاث دوائر يساوي معامل القياس بين كل دائرةٍ والدائرة الأكبر 1:2.

.b **سؤال جدوليّ** احسب نصف قطر كل دائرةٍ (مقربًا إلى أقرب عشر) ومحيطها (مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة). ودوّن نتائجك في جدول.

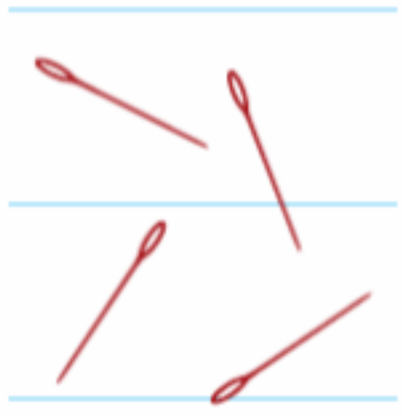
.c **سؤال لفظي** اشرح السبب في أن هذه الدوائر الثلاث ستكون متشابهةً هندسيًا.

.d **سؤال لفظي** خمن النسبة بين محيطي دائرتين حين تكون النسبة بين نصفي قطريهما 2.

.e **سؤال تحليلي** معامل المقياس من الدائرة $\odot A$ إلى الدائرة $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلةً تربط المحيط (C_A) للدائرة $\odot A$ بالمحيط (C_B) للدائرة $\odot B$.

.f **سؤال عددي** إذا كان معامل المقياس من الدائرة $\odot A$ إلى الدائرة $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$ وكان محيط الدائرة $\odot A$ يساوي 12 cm فما محيط الدائرة $\odot B$؟

.46 **إبرة بوفون** قس طول إبرة (أو عود لتنظيف الأسنان) ℓ بالسنتيمتر. ثم ارسم مجموعة مستقيمات أفقيةً تبعد عن بعضها المسافة ℓ سنتيمترًا على ورقةٍ بيضاء فارغة.



.a اسقط الإبرة على الورقة. وحين تحط الإبرة على الورقة، سجل إن كانت تلمس أحد المستقيمات. ودوّن عدد مرات إصابة خط بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط.

.b احسب النسبة بين ضعف عدد مرات السقوط وبين عدد مرات إصابة مستقيمٍ بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط.

.c ما الرابط بين القيم التي توصلت إليها في الجزء b فيما يتعلق بـــ π؟

47 **خرائط** توضح الدوائر متحدة المركز على الخريطة المناطق التي تبعد 8 km و 16 km و 24 km و 32 km و 40 km و 48 km عن مركز مدينة فينيكس.

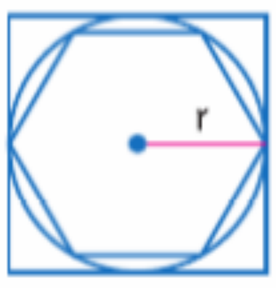
a. فكم يزيد محيط الدائرة الخارجية عن محيط الدائرة المركزية؟

b. عند زيادة أنصاف أقطار الدوائر بمقدار 8 km، فكم ستزيد محيطاتها؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك وصف العلاقات القائمة بين الدوائر والمستقيمات؟ انظر الهامش.

49. **الاستنتاج** ترسم في الشكل دائرةٌ نصف قطرها r داخل مضلّعٍ منتظمٍ وتحيط بمضلعٍ آخر.



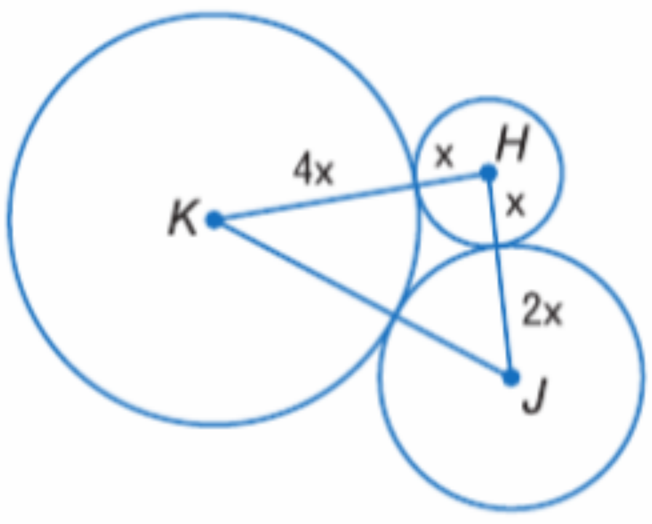
a. ما هما محيطا المضلّعين المحيط للدائرة والمحاط بالدائرة بدلالة r؟ اشرح.

b. هل المحيط C الخاص بالدائرة أكبر أو أصغر من محيط المضلّع المحيط للدائرة؟ وماذا عن المضلع الحاط بالدائرة؟ اكتب متباينةً مركبةً تقارن C بهذين المحيطين.

c. أعد كتابة المتباينة في الجزء b بدلالة القطر d الخاص بالدائرة وفسر معنى تلك المتباينة.

d. عندما يزداد عدد أضلاع المضلعين المحيط والمحاط، فما الذي سيحدث للحدّين الأعلى والأدنى للمتباينة في الجزء C. وما الذي يشير إليه ذلك؟

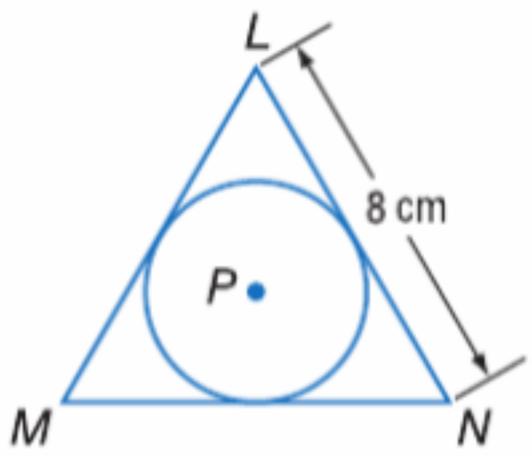
50. **التحدي** مجموع محيطات الدوائر H و J و K الموضحة على الجهة اليمنى يساوي 56π وحدة. أوجد KJ.



51. **التبرير** هل المسافة من مركز دائرةٍ إلى نقطةٍ بداخلها أصغر من قطر تلك الدائرة *أحيانًا أم دائمًا* أم *ليست كذلك على الإطلاق*؟ اشرح

52. **الفرضيات** استخدم تعريف المحل الهندسي لدائرة وعمليات تغيير الأبعاد لإثبات تشابه جميع الدوائر.

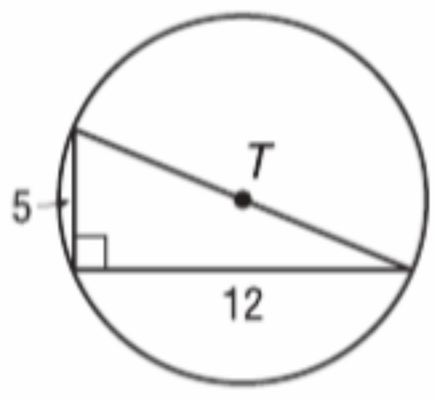
53. **التحدي** في الشكل، ترسم الدائرة $\odot P$ داخل المثلث متساوي الأضلاع LMN فما هو محيط الدائرة $\odot P$؟



54. **الكتابة في الرياضيات** ابحث واكتب عن تاريخ العدد باي وأهميته في دراسة الهندسة.

تدريب على الاختبار المعياري

55. إجابة شبكية ما محيط الدائرة $\odot T$؟ قرّب لأقرب عشر.



56. ما هو نصف قطر فناءٍ دائري محيطه 10 m؟

A 1.6 m
B 2.5 m
C 3.2 m
D 5 m

57. الجبر يخطط عمر بستانا دائريًا لزراعة الخضروات، مع وجود سورٍ يطوّق حدود البستان. فإذا كان يسمح له أن يستخدم طولاً يصل إلى 50 m من أجل السور، فما هو نصف القطر الذي يمكنه استخدامه لتشييد البستان؟

F 10　**G** 9　**H** 8　**J** 7

58. SAT/ACT ما هو نصف قطر دائرةٍ مساحتها $\frac{\pi}{4}$ بالوحدات المربعة؟

A 0.4 وحدات
B 0.5 وحدات
C وحدتان
D 4 وحدات
E 16 وحدات

مراجعة شاملة

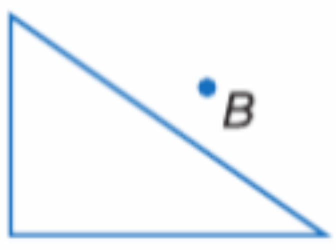
انسخ كلا من الأشكال إضافةً إلى النقطة B. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه B بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

59. $r = \frac{1}{5}$

60. $r = \frac{2}{5}$

61. $r = 2$

62. $r = 3$

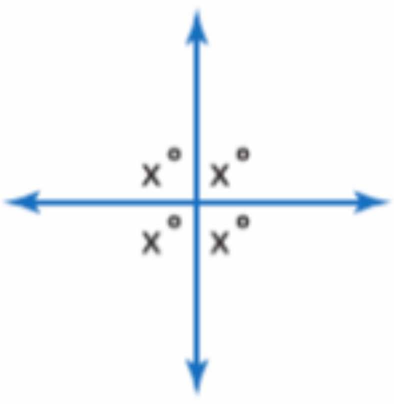


63. الهندسة المعمارية إن هرم اللوفر هو المدخل الرئيسي إلى متحف اللوفر بباريس في فرنسا. ويتركب هيكله بصورةٍ رئيسةٍ من قطعٍ زجاجية ذات شكل رباعي، كما هو موضح في الصورة على الجهة اليمنى. صف طريقةً يمكن استخدامها لإثبات أن أشكال القطع هي متوازيات أضلاع.

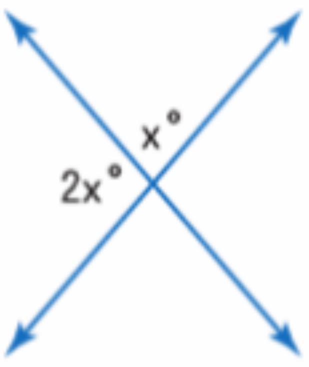
مراجعة المهارات

أوجد قيمة x.

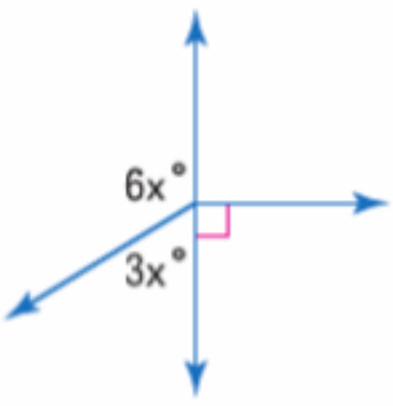
64.



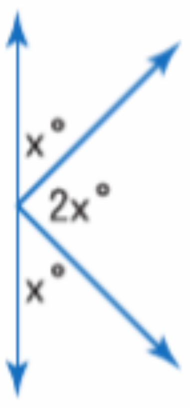
65.



66.



67.



الدرس 5-2 قياس الزوايا والأقواس

السابق
- لقد قِست الزوايا وحدّدت الزوايا المتطابقة.

الحالي
1. تحديد الزوايا المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى وأنصاف الدوائر، وإيجاد قياسها.
2. إيجاد أطوال الأقواس.

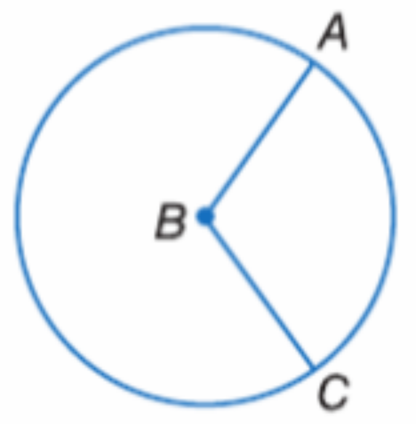
لماذا؟
- تقع النجوم الثلاثون في العلم الموضح على مسافات متساويةٍ عن بعضها بعضا وتبعد عن نقطةٍ ثابتةٍ مسافةً واحدة. تختلف المسافة بين النجوم اعتمادًا على قياس العلم. ولكن قياس الزاوية المركزية المشكلة من مركز الدائرة وأي نجمتين متتاليتين هي نفسها دائما.

المفردات الجديدة
الزاوية المركزية central angle
قوس arc
القوس الأصغر minor arc
القوس الأكبر major arc
نصف الدائرة semicircle
الأقواس المتطابقة congruent arcs
الأقواس المتجاورة adjacent arcs
طول القوس arc length

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الزوايا والأقواس

إن **الزاوية المركزية** في دائرةٍ هي زاويةٌ يقع رأسها عند مركز الدائرة. وهي تضم نصفي قطرٍ في الدائرة. الزاوية $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في الدائرة $\odot B$.



تذكر أن *الدرجة* تساوي $\frac{1}{360}$ من الدوران حول نقطة. وهذا يعطي العلاقة التالية.

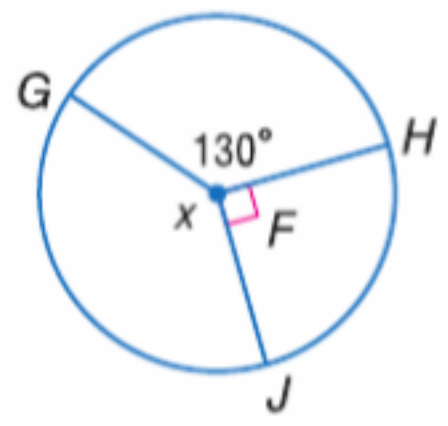
المفهوم الأساسي مجموع الزوايا المركزية

الشرح مجموع قياس الزوايا المركزية في دائرة دون وجود نقاط داخلية مشتركة يساوي 360.

مثال $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360$

مثال 1 إيجاد قياس الزوايا المركزية

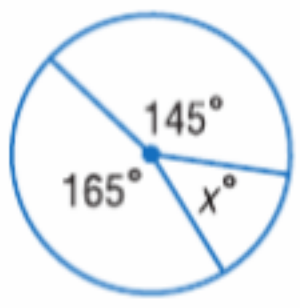
أوجد قيمة x.



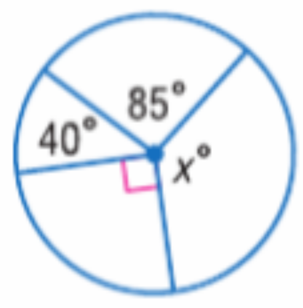
$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360$	مجموع قياس الزوايا المركزية
$130 + 90 + m\angle GFJ = 360$	بالتعويض
$220 + m\angle GFJ = 360$	بسط.
$m\angle GFJ = 140$	بطرح 220 من كل طرف.

تمرين موجّه

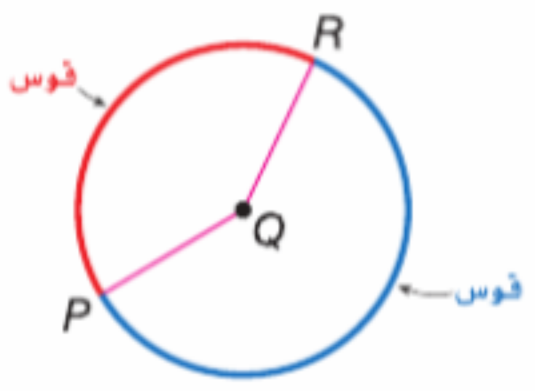
1A.



1B.



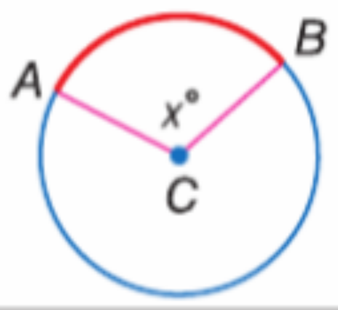
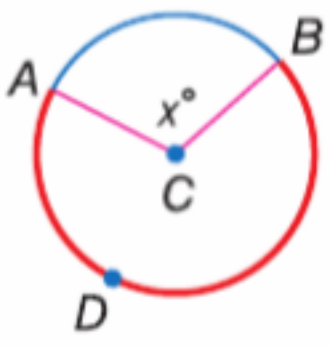
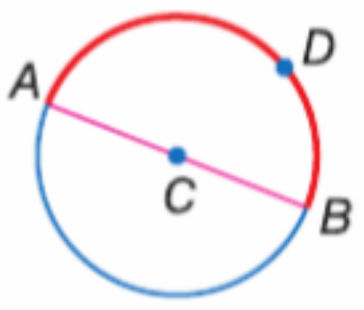
إن **القوس** هو جزءٌ من دائرةٍ يحدَّد بنقطتين اثنتين. تقسم الزاوية المركزية الدائرة إلى قوسين يعتمد قياساهما على قياس الزاوية المركزية.



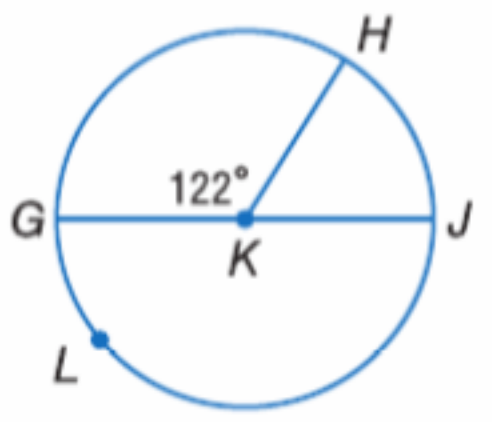
نصيحة دراسية

تسمية الأقواس تسمى الأقواس تبعا لنقطتيها الطرفيتين. وتسمى الأقواس الكبرى وأنصاف الدوائر بحسب النقطتين الطرفيتين إضافةً إلى نقطة أخرى على القوس تقع بين هاتين النقطتين الطرفيتين.

المفهوم الأساسي الأقواس وقياسها

القوس	القياس	
القوس الأصغر هو أقصر قوس يربط نقطتين طرفيتين على الدائرة.	قياس القوس الأصغر أقل من 180 ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x$	
القوس الأكبر هو أطول قوس يربط نقطتين طرفيتين على الدائرة.	قياس القوس الأكبر أكبر من 180. ويساوي 360 ناقصا قياس القوس الأصغر الذي له النقطتان الطرفيتان نفسهما. $m\widehat{ADB} = 360 - m\widehat{AB} = 360 - x$	
نصف الدائرة هو قوس تقع نقطتاه الطرفيتان على قطر الدائرة.	يساوي قياس نصف الدائرة 180. $m\widehat{ADB} = 180$	

مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياسها



$\overline{GJ}$ هو قطر الدائرة $\odot K$ حدّد إن كان كل قوس قوسا أكبر أو قوسًا أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.

a. $m\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر. إذًا $m\widehat{GH} = m\angle GKH$ أو 122.

b. $m\widehat{GLH}$

$\widehat{GLH}$ قوس أكبر يشترك في بالنقاط نفسها مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$.

$$m\widehat{GHL} = 360 - m\widehat{GH}$$
$$= 360 - 122 \text{ or } 238$$

c. $m\widehat{GLJ}$

$\widehat{GLJ}$ نصف دائرة إذًا $m\widehat{GLJ} = 180$.

تمرين موجّه

$\overline{PM}$ هو قطرٌ في الدائرة $\odot R$. حدّد إذا كان كل قوس قوسا أكبر أو قوسا أصغر، أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.

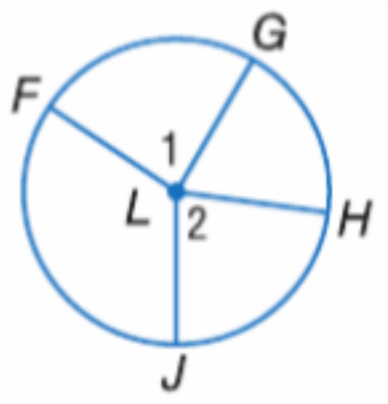
2A. $\widehat{MQ}$ **2B.** $\widehat{MNP}$ **2C.** $\widehat{MNQ}$

مهنة من الحياة اليومية

الباحث التاريخي يتضمن البحث في المتاحف دراسة القطع الأثرية والتحقق منها ووصفها. ولكي يعمل المرء باحثًا تاريخيًا، فيشترط عليه أن ينال درجة البكالوريوس في التاريخ. عد إلى التمرينين 42-43.

الأقواس المتطابقة هي أقواس تقع في الدوائر نفسها أو في دوائر متطابقة لها القياس نفسه.

النظرية 5.1



الشرح في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق قوسان أصغران إذا وفقط إذا كانت زاويتاهما المركزيتان متطابقتين.

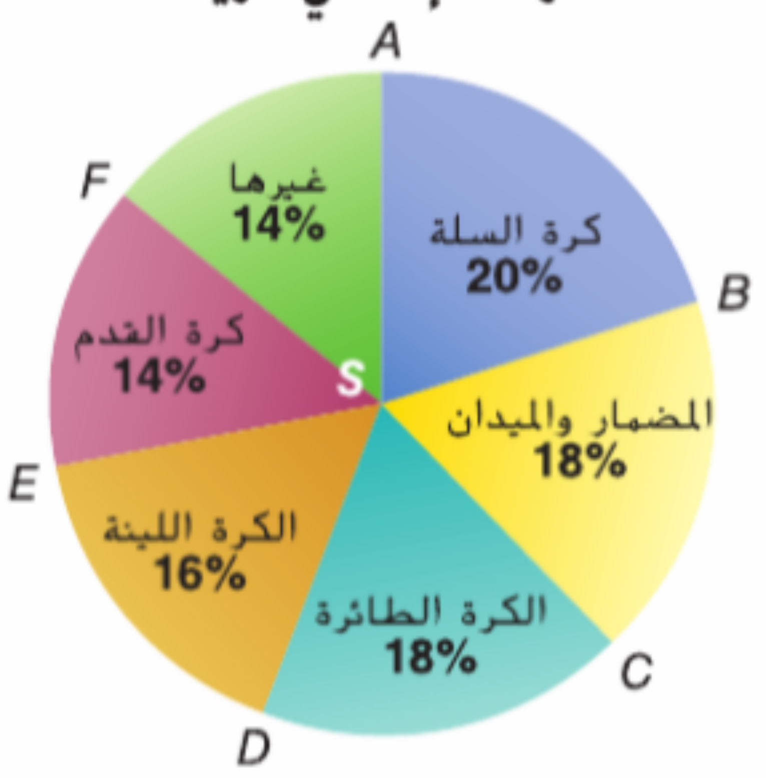
مثال إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.
إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

سوف تثبت النظرية 5.1 في التدريب 52.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد قياس الأقواس من التمثيلات البيانية للدوائر

الرياضة عد إلى التمثيل البياني للدائرة. وأوجد كلا من القياسات.

مشاركة الإناث في الرياضة



a. $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ قوس أصغر. $m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تمثل 18% من الكلّ أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360)$ بإيجاد النسبة 18% من 360.

$= 64.8$ بسط.

b. $m\widehat{BC}$

النسبتان المئويتان للكرة الطائرة ولعبة المضمار والميدان متساويتان. إذًا فالزاويتان المركزيتان متطابقتان والقوسان المتناظران متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8$

تمرين موجّه

3A. $m\widehat{EF}$

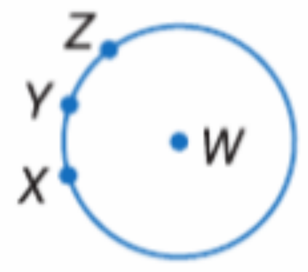
3B. $m\widehat{FA}$

القوسان المتجاوران هما قوسان في الدائرة لهما نقطة مشتركةٌ واحدةٌ بالتحديد. في الدائرة $\odot M$، $\widehat{HJ}$ و $\widehat{JK}$ قوسان متجاوران. وكما في حالة الزوايا المتجاورة، فيمكنك جمع قياسات الأقواس المتجاورة.

المسلّمة 5.1 مسلّمة جمع الأقواس

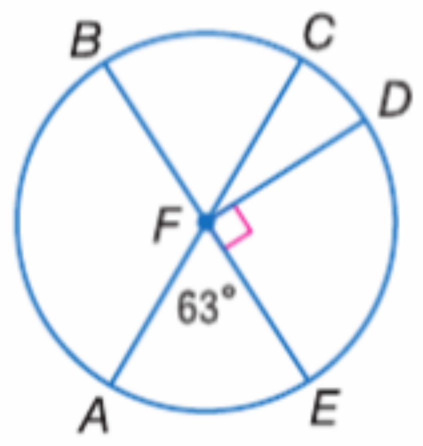
الشرح إن قياس قوس مشكلٍ من قوسين متجاورين هو مجموع قياسي القوسين.

مثال $m\widehat{XYZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



مثال 4 استخدام جمع الأقواس لإيجاد قياس الأقواس

أوجد كلا من القياسات في الدائرة $\odot F$.



a. $m\widehat{AED}$

$m\widehat{AED} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ $\quad m\widehat{AE} = m\angle AFE, m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63 + 90 \text{ or } 153$ بالتعويض

b. $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= 63 + 180 \text{ or } 243$ $\widehat{EDB}$ نصف دائرة، إذًا $m\widehat{EDB} = 180$.

تمرين موجّه

4A. $m\widehat{CE}$

4B. $m\widehat{ABD}$

الربط بتاريخ الرياضيات

إقليدس (325-265 ق.م.)

تعد كتب إقليدس الـ 13 حول *العناصر* أعمالاً بالغة التأثير في العلم. وهي تؤسس للهندسة وفروع الرياضيات على نحو منطقي. ويخصص كتاب *العناصر* الثالث للدوائر والأقواس والزوايا.

2 طول القوس

طول القوس هو المسافة بين النقطتين الطرفيتين على طول قوس، وتقاس بالوحدات الخطية. وبما أن القوس جزءٌ من دائرة، فإن طوله يساوي جزء من محيطها.

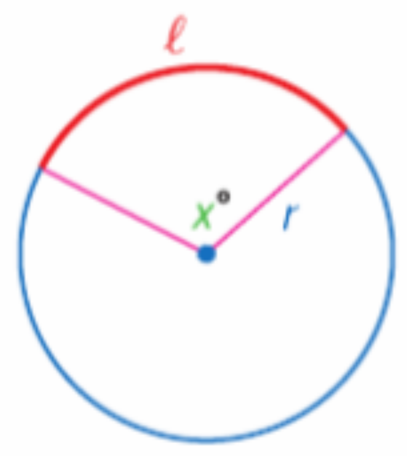
انتبه!
طول القوس يعطى طول القوس بالوحدات الخطية، كالسنتيمتر. ويعطى قياس القوس بالدرجات.

المفهوم الأساسي طول القوس

الشرح نسبة **طول قوس** ℓ إلى **محيط** دائرةٍ يساوي نسبة **قياس القوس بالدرجات** إلى 360.

تناسب $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x}{360}$ أو

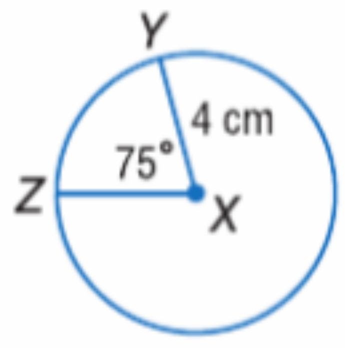
المعادلة $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$



مثال 5 إيجاد طول قوس

أوجد طول $\widehat{ZY}$ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

a.

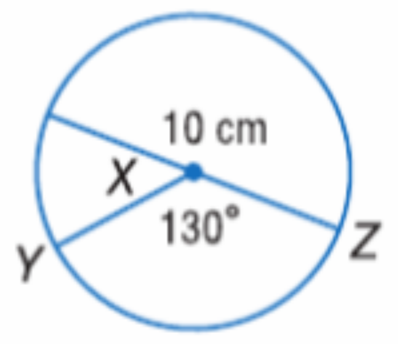


$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ معادلة طول القوس

$= \frac{75}{360} \cdot 2\pi(4)$ بالتعويض

≈ 5.24 cm باستخدام آلة حاسبة.

b.

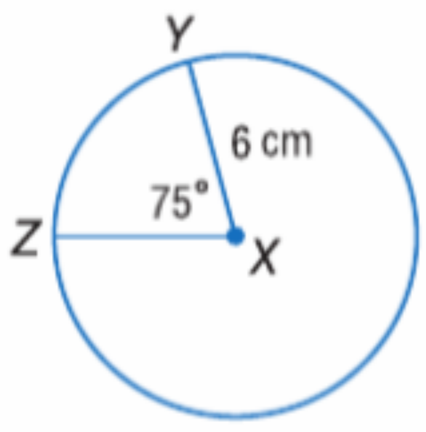


$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ معادلة طول القوس

$= \frac{130}{360} \cdot 2\pi(5)$ بالتعويض

≈ 11.34 cm باستخدام آلة حاسبة.

c.



$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ معادلة طول القوس

$= \frac{75}{360} \cdot 2\pi(6)$ بالتعويض

≈ 7.85 cm باستخدام آلة حاسبة.

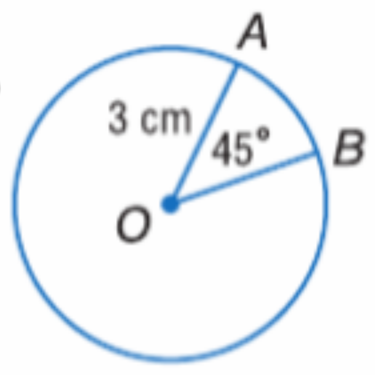
لاحظ أن للقوس $\widehat{ZY}$ القياس نفسه 75 في كلا المثالين 5a و 5c. ولكن طولي القوسين مختلفان. ويعود ذلك إلى أنهما في دائرتين لهما نصفا قطرٍ مختلفتان.

نصيحة دراسية
طريقة بديلة كان من الممكن حساب أطوال الأقواس في الأمثلة 5a و 5b و 5c باستخدام تناسب أطوال الأقواس $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x}{360}$

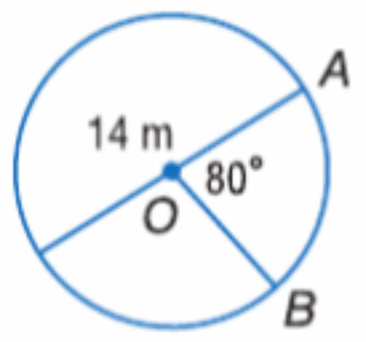
تمرين موجّه

أوجد طول $\widehat{AB}$ ثم قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

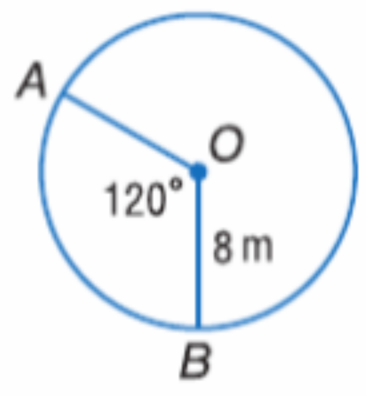
5A.



5B.

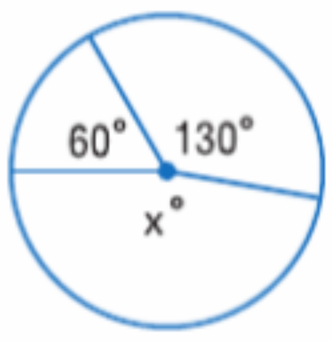


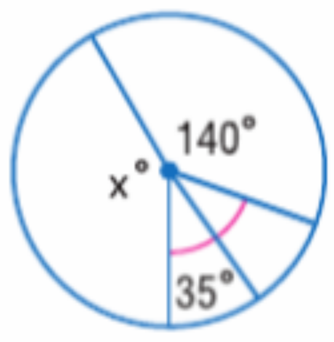
5C.



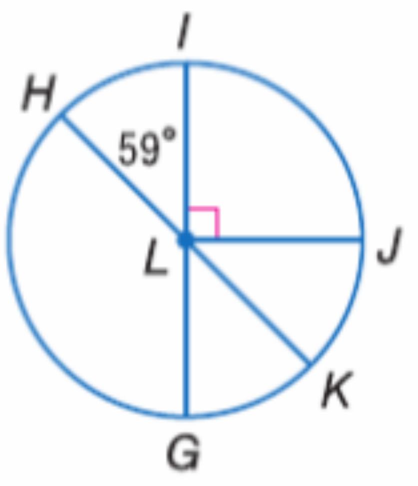
التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد قيمة x.

1.


2.


مثال 2 **الضبط** $\overline{HK}$ و $\overline{IG}$ قطران في الدائرة $\odot L$. حدّد إن كان كل قوس قوسا أكبر أو قوسا أصغر أو نصف دائرة . ثم أوجد قياسه.



3. $m\widehat{IHJ}$

4. $m\widehat{HI}$

5. $m\widehat{HGK}$

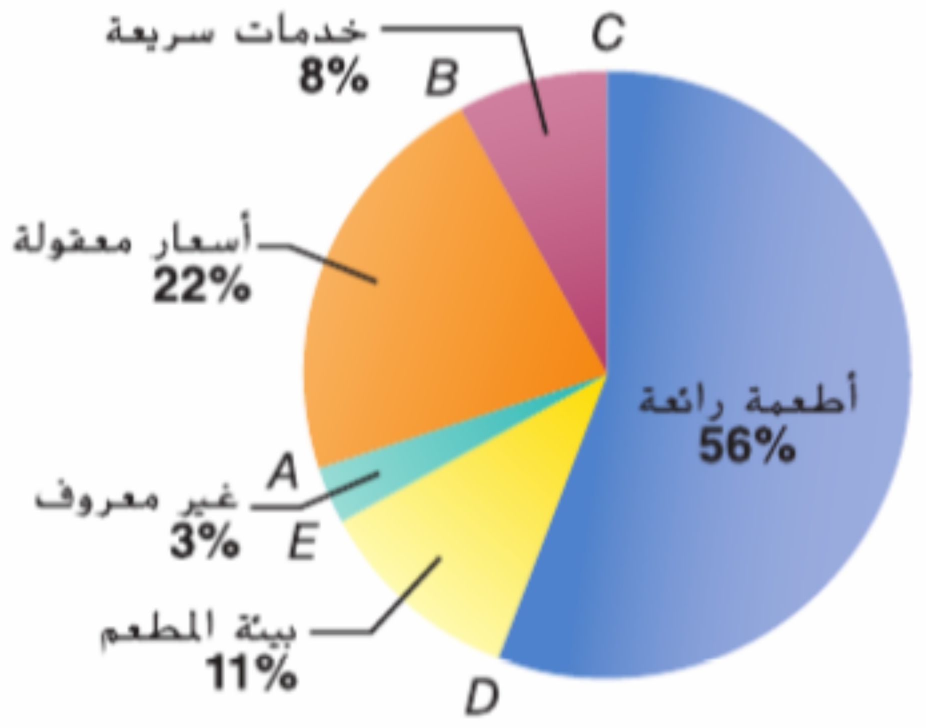
مثال 3 .6 **المطاعم** يعرض التمثيل البياني نتائج استطلاعٍ جرى على روّاد المطاعم بشأن أهمّ الجوانب التي يجب أن تتميز بها المطاعم التي يرتادونها.

a. أوجد $m\widehat{AB}$.

b. أوجد $m\widehat{BC}$.

c. صف نوع القوس الذي تمثله الفئة "أطعمة رائعة".

ما يريده مرتادو المطاعم



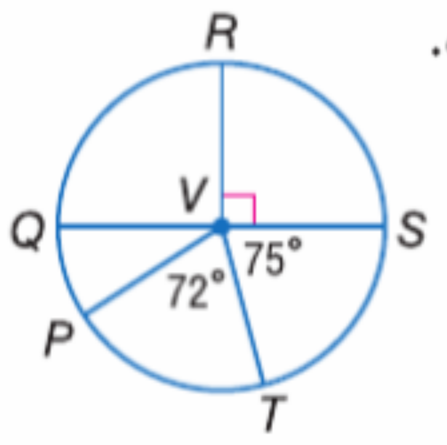
موقع: يو إس تودي

مثال 4 $\overline{QS}$ قطرٌ في الدائرة $\odot V$ أوجد كلا من القياسات.

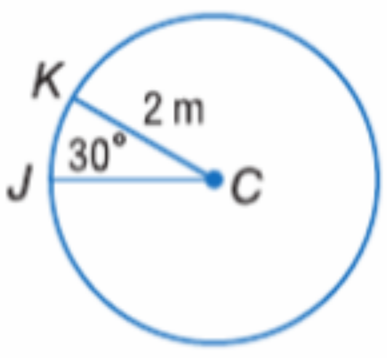
.7 $m\widehat{STP}$

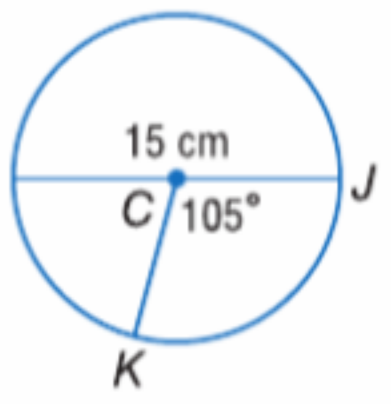
.8 $m\widehat{QRT}$

.9 $m\widehat{PQR}$



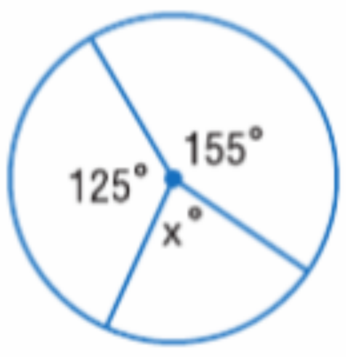
مثال 5 أوجد طول $\widehat{JK}$ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

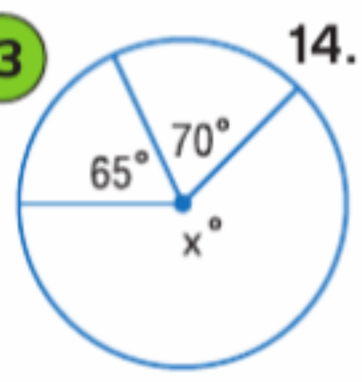
10.


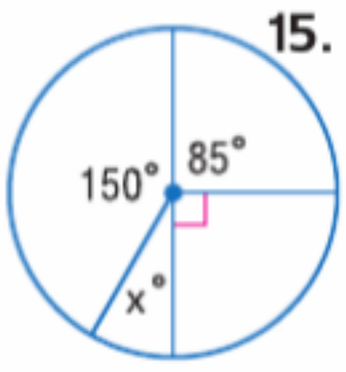
11.


التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة x.

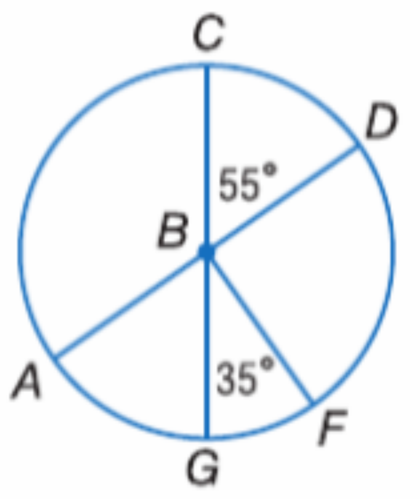
12.


13


14.


15.


مثال 2 $\overline{AD}$ و $\overline{CG}$ قطران في الدائرة $\odot B$. حدّد إن كان كل قوس قوسا أكبر أو قوسا أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.



16. $m\widehat{CD}$ **17.** $m\widehat{AC}$ **18.** $m\widehat{CFG}$

19. $m\widehat{CGD}$ **20.** $m\widehat{GCF}$ **21.** $m\widehat{ACD}$

22. $m\widehat{AG}$ **23.** $m\widehat{ACF}$

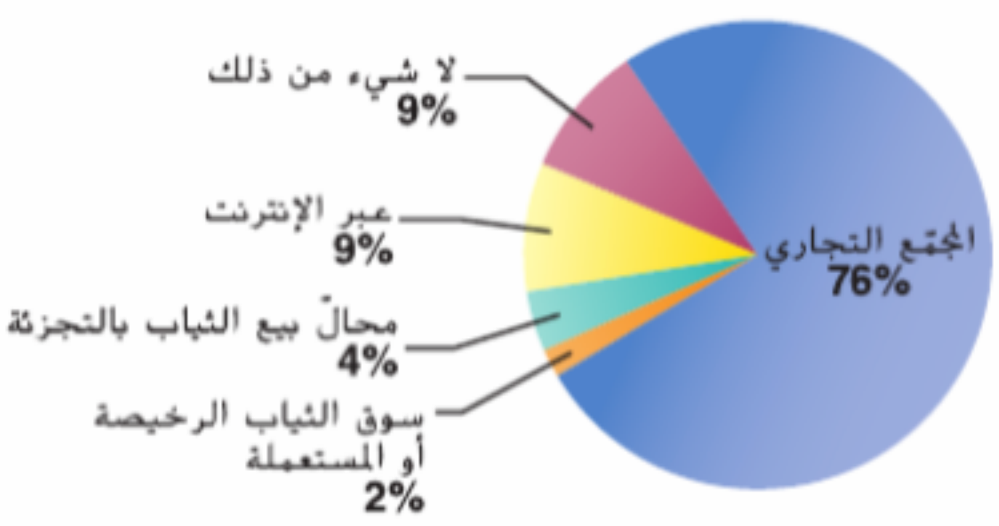
مثال 3 **24. التسوق** يعرض التمثيل البياني نتائج استبيان سئل فيه مراهقون عن المكان الأفضل لتسوّق الملابس بالنسبة إليهم.

a. ما قياسا القوسين المقابلين لفئتي للمجمع التجاري ومحالّ بيع الثياب بالتجزئة؟

b. صف نوعي القوسين المقابلين لفئتي "المجمع التجاري" وفئة "لا شيء من ذلك."

c. هل ثمة أيّ أقواس متطابقة في هذا التمثيل البياني؟ اشرح.

أفضل الأماكن للتسوق بغرض شراء الثياب



25. تمثيل النماذج يعرض الجدول نتائج استطلاع سئل فيه أشخاص عن المدة التي يمكن أن تبقى فيها الأطعمة على الأرض مع بقاء تناولها آمنًا.

a. إذا أردت إنشاء تمثيل بياني دائري لهذه المعلومة، فكم سيكون قياس القوس المقابل لأول فئتين؟

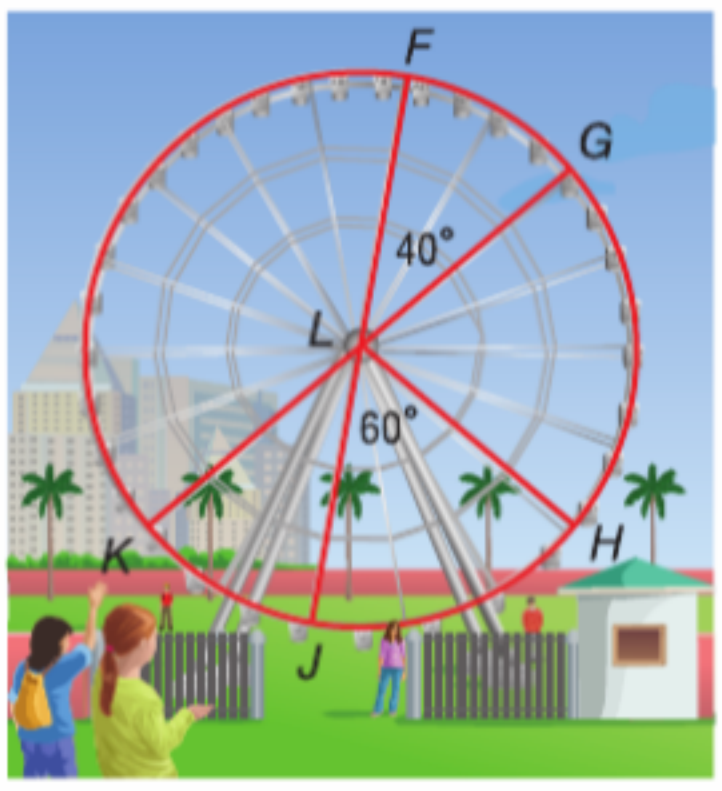
b. صف نوعي القوسين المقابلين للفئة الأولى والفئة الأخيرة.

c. هل ثمة أيّ أقواس متطابقة في هذا التمثيل البياني؟ اشرح.

الطعام الساقط على الأرض	
هل تأكل طعامًا سقط على الأرض؟	
ليس من الآمن تناوله	78%
ثلاث ثوان*	10%
خمس ثوان*	8%
عشر ثوان*	4%

المصدر: الجمعية الأمريكية لمرض السكري
* طول زمن بقاء الطعام على الأرض.

المثالان 4 ,2 **الترفيه** استخدم الأرجوحة الدوارة الموضحة لإيجاد قياس كل مما يلي.



26. $m\widehat{FG}$ **27.** $m\widehat{JH}$

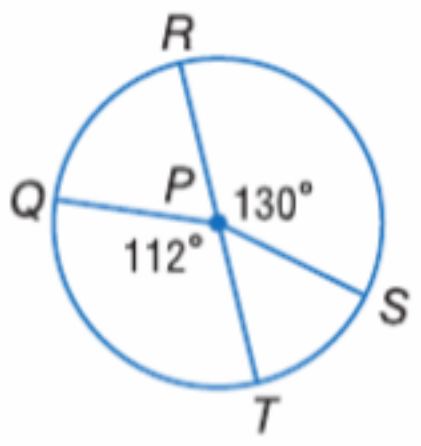
28. $m\widehat{JKF}$ **29.** $m\widehat{JFH}$

30. $m\widehat{GHF}$ **31.** $m\widehat{GHK}$

32. $m\widehat{HK}$ **33.** $m\widehat{JKG}$

34. $m\widehat{KFH}$ **35.** $m\widehat{HGF}$

مثال 5 **استخدم الدائرة $\odot P$ لإيجاد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.**



36. $\widehat{RS}$، إذا كان طول نصف القطر 2 cm

37. $\widehat{QT}$، إذا كان طول قطر الدائرة 9 cm

38. $\widehat{QR}$، إذا كان $PS = 4$ mm

39. $\widehat{RS}$، إذا كان $RT = 15$ cm

40. $\widehat{QRS}$، إذا كان $RT = 11$ m

41. $\widehat{RTS}$، إذا كان $PQ = 3$ m

التاريخ يوضح الشكل نجوما موزعةً حول نقطة مركزية.

.42 ما هو قياس الزاوية المركزية A؟ اشرح كيف حدّدت إجابتك.

.43 إذا ضوعف طول قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس من النجمة B إلى النجمة التالية C؟

.44 **المزارع** لمزرعة *البيتزا* في ماديرا بكاليفورنيا شكل دائرة مقسمة إلى ثمان شرائح متساوية، كما هو موضح في الجهة اليسرى. وتستخدم كل دائرةٍ لزراعة أو رعي مكوّنات البيتزا.

.a فما هي القياسات الكلية للشرائح التي تضم الزيتون والطماطم والفليفلة؟

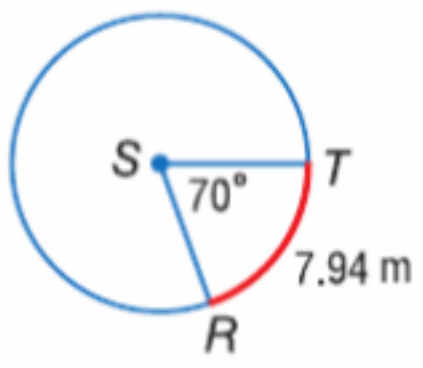
.b يبلغ قطر الدائرة 38.1 m. فما طول قوس الشريحة الواحدة؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

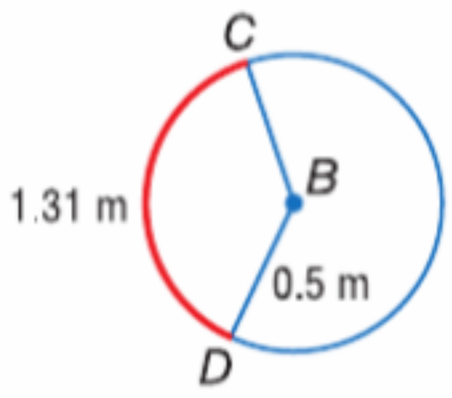
الاستنتاج أوجد كلا من القياسات. وقرّب كل قياس خطيٍ إلى أقرب مئةٍ وكل قياس قوس إلى أقرب درجة.

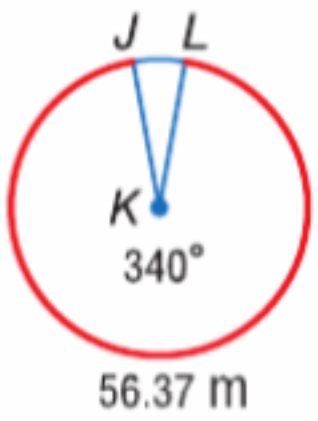
.45 محيط الدائرة $\odot S$

.46 $m\widehat{CD}$

.47 نصف قطر الدائرة $\odot K$

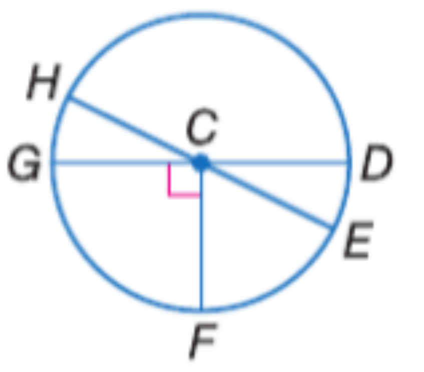




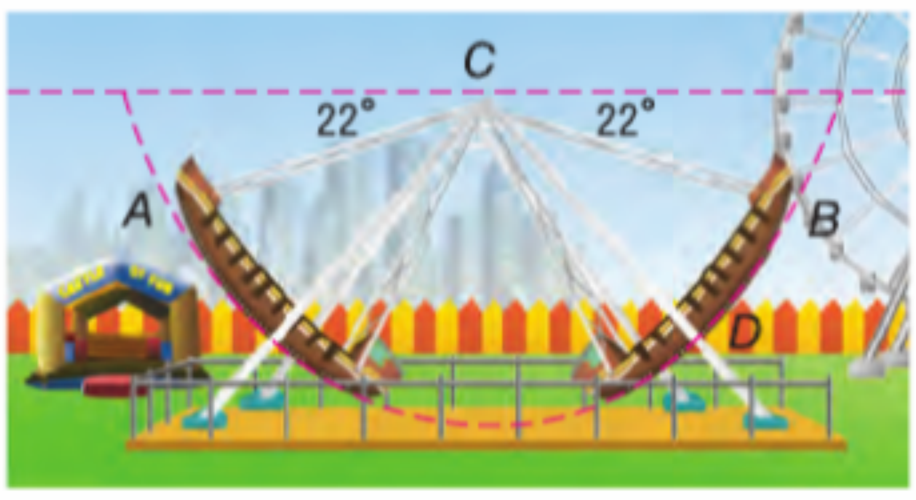


الجبر في الدائرة $\odot C$، لدينا $m\angle HCG = 2x$ و $m\angle HCD = 6x + 28$. أوجد كلاً من القياسات.

50. $m\widehat{HGF}$ **49.** $m\widehat{HD}$ **48.** $m\widehat{EF}$



51 **ألعاب الملاهي** تتبع أرجوحة سفينة القراصنة مسارًا نصف دائري، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.



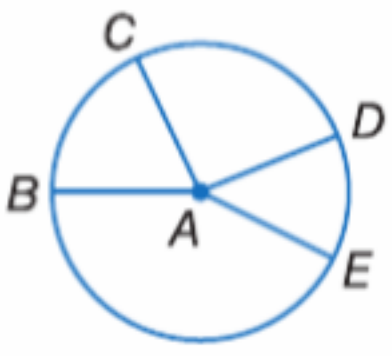
.a ما قياس $m\widehat{AB}$؟

.b إذا كان $CD = 62$ m ، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

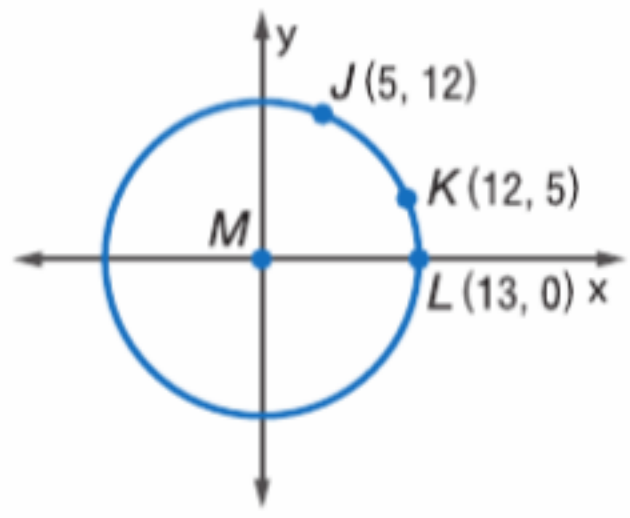
.52 **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 6.1

المعطى: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب برهانه: $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$



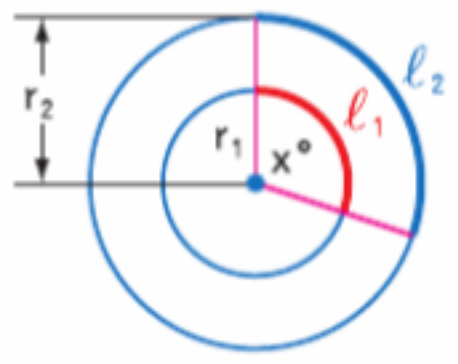
53 **الهندسة الإحداثية** في التمثيل البياني، تقع النقطة M عند نقطة الأصل. أوجد كلا من القياسات في الدائرة $\odot M$. وقرّب كلّ قياس خطي إلى أقرب جزءٍ من مئة وكل قياس قوس إلى أقرب درجة مئوية.



a. $m\widehat{JL}$ **b.** $m\widehat{KL}$ **c.** $m\widehat{JK}$

d. طول $\widehat{JL}$ **e.** طول $\widehat{JK}$

54. **طول القوس وقياس الراديان** في هذه المسألة، سوف تستخدم دائرات متحدة المركز لتثبت أن طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية في دائرة يعتمد على نصف قطر الدائرة.



a. قارن قياسي القوس ℓ_1 والقوس ℓ_2. ثمّ قارن طولي القوس ℓ_1 والقوس ℓ_2. إلامَ تشير المقارنتان؟

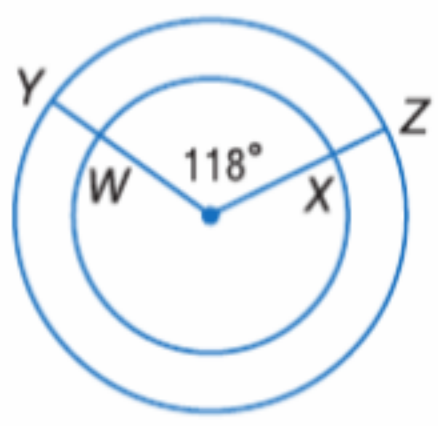
b. استخدم تحويلات التشابه (تغيير الأبعاد/التمدّد) لشرح السبب في أن طول القوس ℓ الذي تحصره زاوية مركزية في دائرة يتناسب مع نصف قطر الدائرة r. أي اشرح ما يمكن أن لاحظه في هذا التمثيل. $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2}$.

c. اكتب تعبيرين لطولي القوسين ℓ_1 و ℓ_2. واستخدم هذين التعبيرين لتحديد ثابت التناسب k في $\ell = kr$.

d. التعبير الخاص بـ k والذي كتبته في الجزء c يعطي *قياس* زاوية بالراديان. فاستخدمه لإيجاد القياس بالراديان لزاوية قياسها $90°$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

55. **تحليل خاطئ** تقول سالي إن $\widehat{WX}$ و $\widehat{YZ}$ متطابقتان نظرًا إلى أن زاويتيهما المركزيتين لهما القياس نفسه. وتقول رنا إنهما غير متطابقتين. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



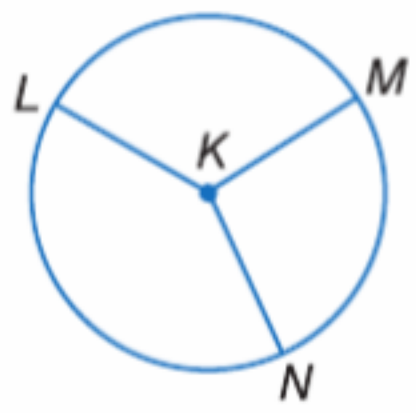
الفرضيات **حدّد ما إذا كانت كل عبارةٍ مما يلي صحيحةً *أحيانًا* أو *دائمًا* أو *غير صحيحة على الإطلاق*. واشرح استنتاجك.**

56. قياس قوس أصغر أقل من 180.

57. إذا كانت زاويةٌ مركزيةٌ منفرجة، فالقوس المقابل لها قوس أكبر.

58. يعتمد مجموع قياسي القوسين المتجاورين في دائرة على قياس نصف القطر.

59. **التحدي** يحقق قياس $\widehat{LM}$ و $\widehat{MN}$ و $\widehat{NL}$ النسبة 5:3:4. أوجد قياس كل قوس.



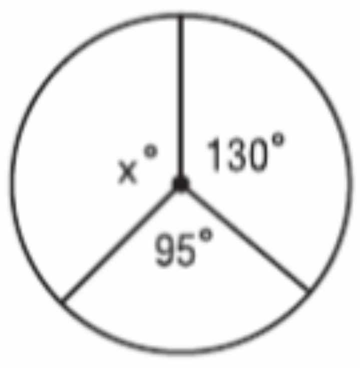
60. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرةً وحدّد ثلاث نقاط على محيطها. قدّر قياس الأقواس الثلاثة غير المتداخلة المشكلة. ثم استخدم منقلةً لإيجاد قياس كل قوس. ودوّن قياس الأقواس على دائرتك.

61. **التحدي** التوقيت الظاهر على ساعةٍ ذات عقارب هو 8:10. فما قياس الزاوية التي يشكلها عقربا الساعة؟

62. **الكتابة في الرياضيات** صف الأنواع الثلاثة المختلفة للأقواس في دائرة إضافةً إلى طريقة إيجاد قياس كلٍ منها.

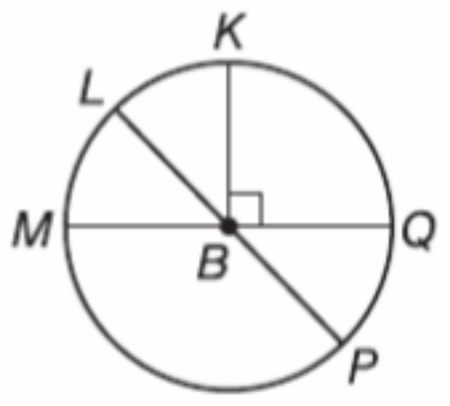
تدريب على الاختبار المعياري

63. ما هي قيمة x؟



A 120
B 135
C 145
D 160

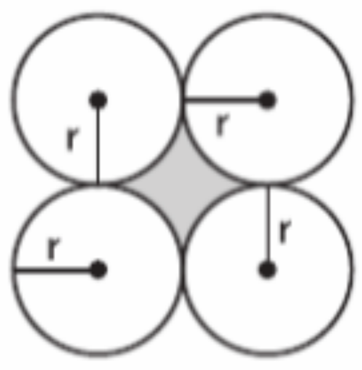
64. **إجابة شبكية** في الدائرة $\odot B$، $m\angle LBM = 3x$ و $m\angle LBQ = 4x + 61$. ما قياس الزاوية $\angle PBQ$؟



65. **الجبر** يمثِّل عرض مستطيلٍ بـ x وطوله بـ y. فما التعبير الذي يمثل مساحة المستطيل على النحو الأفضل إذا ضوعف طوله وعرضه ثلاث مرات؟

F $3xy$
H $9xy$
G $3(xy)^2$
J $(xy)^3$

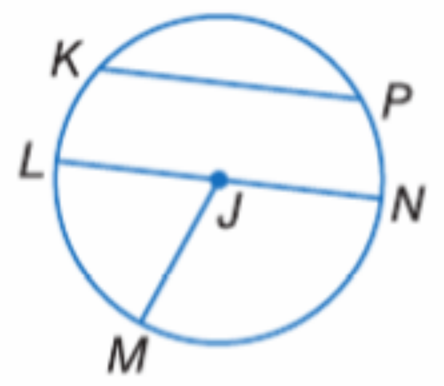
66. SAT/ACT ما هي مساحة المنطقة المظللة إذا كان $r = 4$ ؟



A $64 - 16\pi$
B $16 - 16\pi$
C $16 - 8\pi$
D $64 - 8\pi$
E $64\pi - 16$

مراجعة شاملة

عد إلى الدائرة $\odot J$. (الدرس 1-5)



67. سمِّ مركز الدائرة.

68. حدّد وترًا هو قطرٌ في الدائرة أيضا.

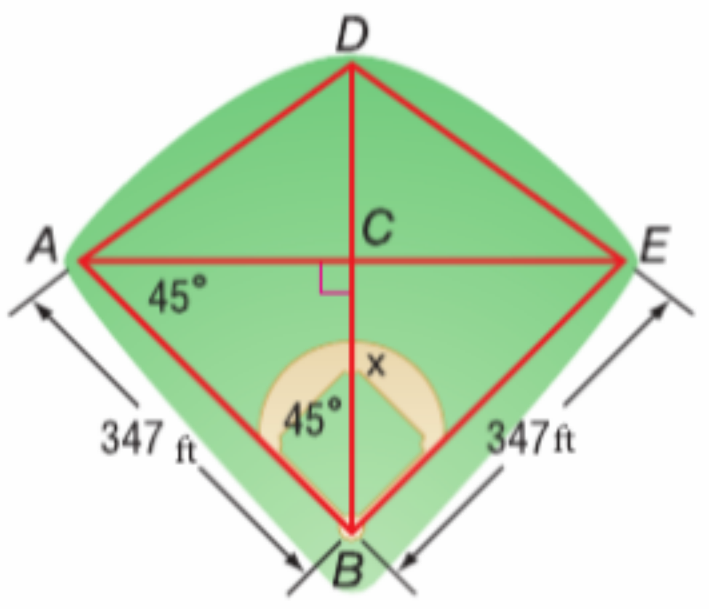
69. إذا كان طول $LN = 12.4$. فما طول JM؟

مثّل صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير للأبعاد مركزه نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.

70. $X(-1, 2), Y(2, 1), Z(-1, -2); r = 3$

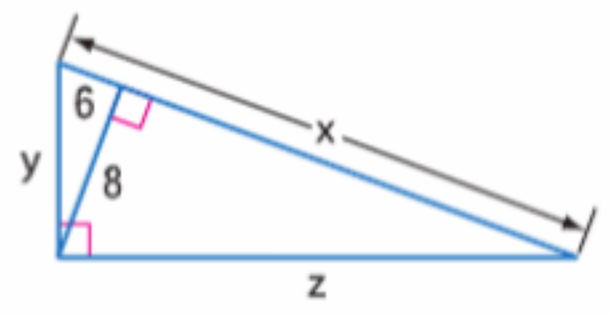
71. $A(-4, 4), B(4, 4), C(4, -4), D(-4, -4); r = 0.25$

72. **البيسبول** يوضح الرسم التخطيطي أبعاد منتزه كوميسكي في شيكاغو. $\overline{BD}$ هي القطعة المستقيمة من القاعدة الرئيسية إلى النهاية المقابلة للملعب، و $\overline{AE}$ هي القطعة المستقيمة من ميسرة الملعب إلى ميمنته. فإذا كان لاعب منتصف الملعب يقف عن النقطة C، فكم يبعد عن القاعدة الرئيسية؟

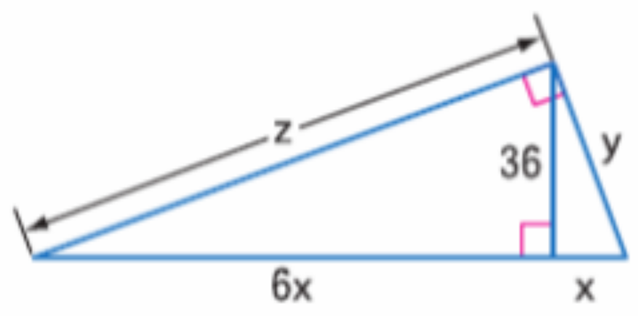


أوجد قيمة x, y, z

73.



74.



مراجعة المهارات

أوجد قيمة x.

75. $24^2 + x^2 = 26^2$

76. $x^2 + 5^2 = 13^2$

77. $30^2 + 35^2 = x^2$

الدرس 5-3 الأقواس والأوتار

:: السابق

- لقد استخدمت العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مجهولة.

:: الحالي

1 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار واستخدامها.

2 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار و الأقطار واستخدامها.

:: لماذا؟

- تستخدم إطارات التطريز في الحياكة وخياطة الملاحف والتطريز المتصالب والعادي. كل نقطتين طرفيتين في ندفة الثلج المبيّنة هما نقطتان طرفيتان لوترٍ وقوس في الوقت نفسه.

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

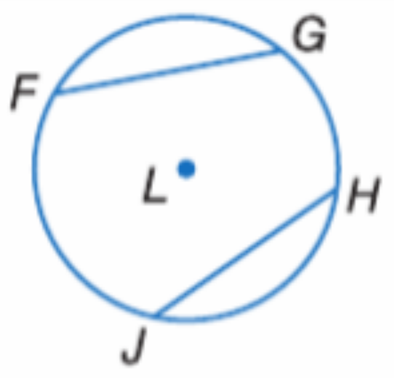
1 الأقواس والأوتار

القوس هو قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على محيط الدائرة. وإذا لم يكن الوتر قطرًا، فإن نقطتيه الطرفيتين تقسمان الدائرة إلى قوس أكبر وقوس أصغر.

النظرية 5.2

الشرح في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق قوسان أصغران فقط إذا كان وتراهما المتناظران متطابقين.

مثال $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ فقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$.



البرهان النظرية 5.2 (الجزء 1)

المعطى: في الدائرة $\odot P$ ؛ $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

المطلوب إثباته: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\odot P,\ \widehat{QR} \cong \widehat{ST}$	1. المعطيات
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. إذا كان قوسان متطابقين ≅، فإن زاويتيهما المركزيتان ∡ متطابقتان ≅.
3. $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3. جميع أنصاف الأقطار في دائرةٍ متطابقة ≅.
4. $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4. ضلع-زاوية-ضلع
5. $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5. مسلمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة

ستثبت الجزء 2 من النظرية 5.2 في التمرين 25.

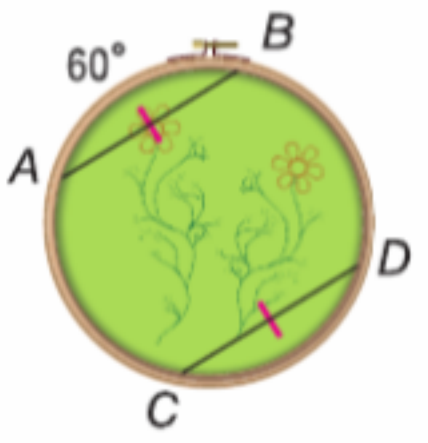
مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس قوس

حرَف في إطار التطريز، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $m\widehat{AB} = 60$.

أوجد $m\widehat{CD}$.

$\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتران متطابقان، فإن القوسين $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ متطابقان.

$m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60$

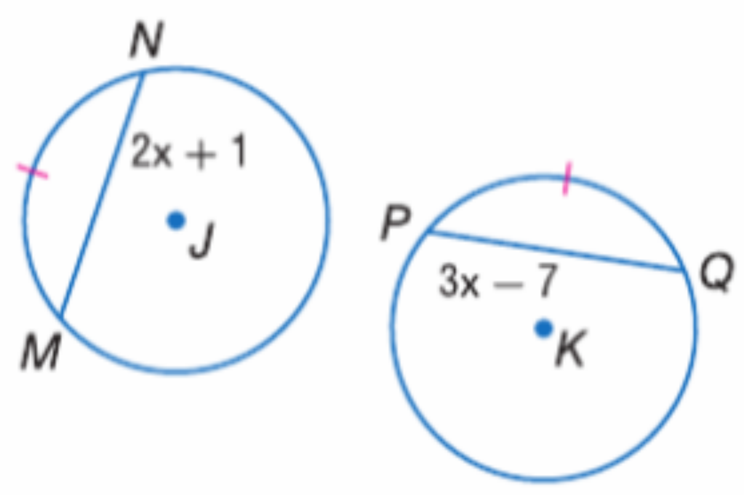


تمرين موجّه

1. إذا كان $m\widehat{AB} = 78$ في إطار التطريز، فأوجد $m\widehat{CD}$.

مثال 2 استخدام الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار

الجبر في الشكلين، لدينا $\odot K \cong \odot J$ و $\widehat{PQ} \cong \widehat{MN}$.
أوجد PQ.



$\widehat{MN}$ و $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين.
إذًا فالوتران المتناظران $\overline{MN}$ و $\overline{PQ}$ متطابقان.

بحسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة $MN = PQ$

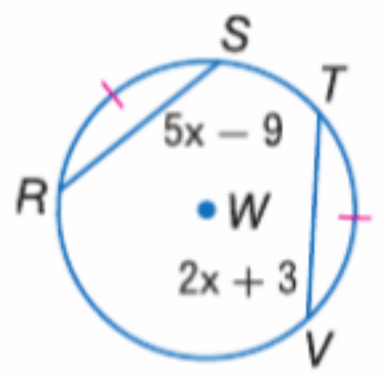
بالتعويض $2x + 1 = 3x - 7$

بسط. $8 = x$

إذًا، $PQ = 3(8) - 7$ أو 17.

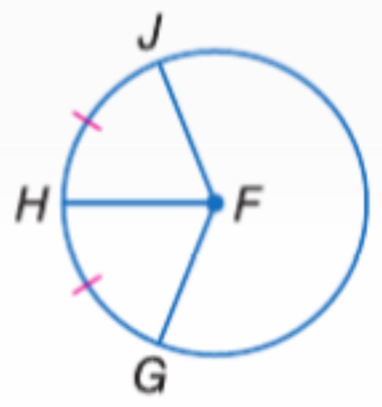
تمرين موجّه

2. في الدائرة $\odot W$، $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$. أوجد RS.



نصيحة دراسية

منصفات الأقواس في الشكل أدناه، $\overline{FH}$ منصف للقوس $\widehat{JG}$.



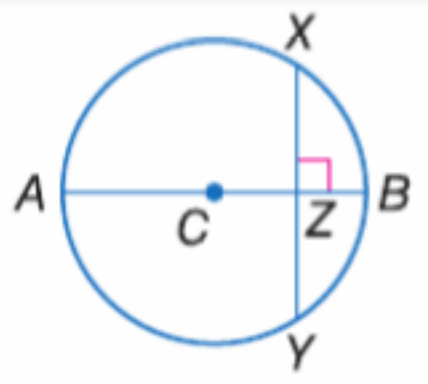
2 الأقواس والأوتار المنصفة

إذا قسم مستقيمٌ أو قطعةٌ مستقيمةٌ أو شعاعٌ قوسًا إلى قوسين متطابقين، إذًا فهو ينصِّف ذلك القوس.

النظريات

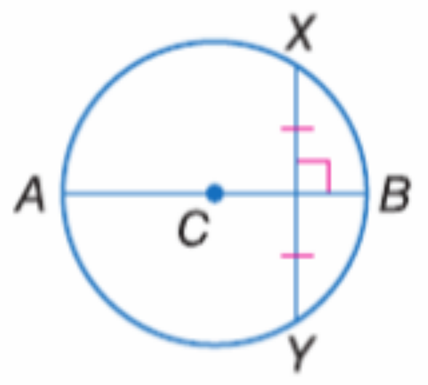
5.3 إذا كان أحد أقطار دائرة (أو أحد أنصاف أقطارها) عموديًا على وترٍ فيها، فإنه يقطع قوسها.

مثال إذا كان نصف القطر $\overline{AB}$ عموديًا على الوتر $\overline{XY}$، فإن $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$ و $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



5.4 المنصف العمودي لوترٍ هو قطرٌ (أو نصف قطرٍ) في الدائرة.

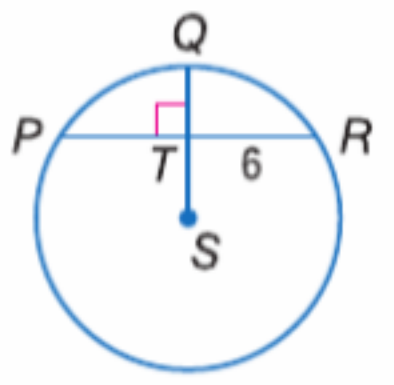
مثال إذا كان $\overline{AB}$ منصفًا عموديًا للوتر $\overline{XY}$، فإن $\overline{AB}$ قطرٌ في الدائرة $\odot C$.



سوف تقوم بإثبات نظريتي 5.3 و 5.4 من خلال التمرينين 26 و 28 على الترتيب.

مثال 3 استخدام نصف قطر عمودي على وتر

في الدائرة $\odot S$، $m\widehat{PQR} = 98$. أوجد $m\widehat{PQ}$.



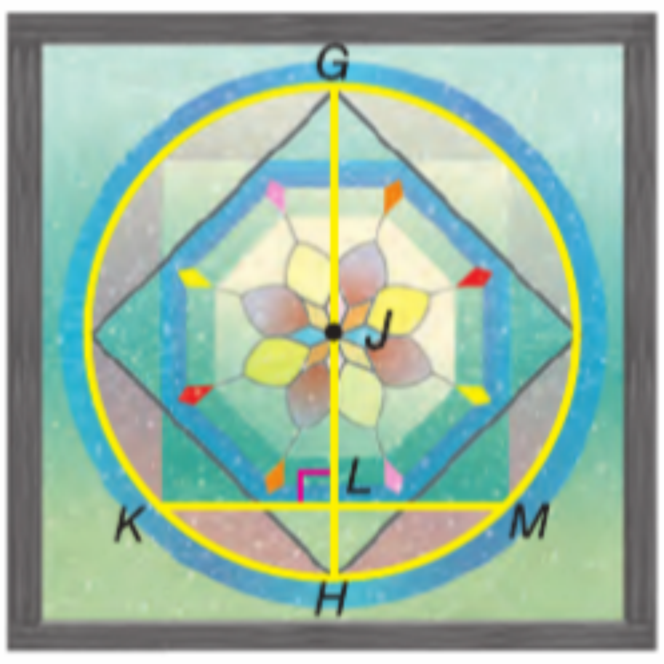
نصف القطر $\overline{SQ}$ عمودي على الوتر $\overline{PR}$. إذًا بموجب النظرية 5.3. $\overline{SQ}$ ينصف $\widehat{PQR}$. لذلك، فإن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.

بالتعويض، $m\widehat{PQ} = \frac{98}{2}$ أو 49.

تمرين موجّه

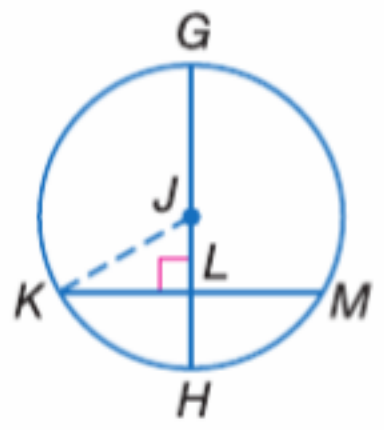
3. في الدائرة $\odot S$. أوجد PR.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قطر عمودي على وتر



الزجاج الملون في النافذة المصنوعة من الزجاج الملون، يساوي القطر $\overline{GH}$ الطول 30 cm ويساوي الوتر $\overline{KM}$ الطول 22 cm. أوجد JL.

الخطوة 1 ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



يشكل هذا مثلثًا قائمًا $\triangle JKL$.

الخطوة 2 أوجد JK و KL.

بما أن $GH = 30\ cm$، فإن $JH = 15\ cm$ جميع أنصاف أقطار دائرةٍ متطابقة. إذًا $JK = 15\ cm$.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عموديٌ على $\overline{KM}$، $\overline{GH}$ ينصف الوتر $\overline{KM}$ بموجب النظرية 5.3. إذًا، $KL = \frac{1}{2}(22)$ أو 11 cm.

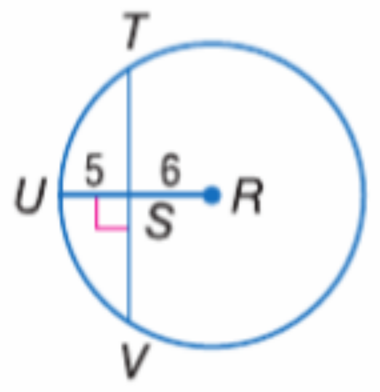
الخطوة 3 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة JL.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$11^2 + JL^2 = 15^2$	$JK = 15$ و $KL = 11$
$121 + JL^2 = 225$	بسط.
$JL^2 = 104$	بطرح 121 من كل طرف.
$JL = \sqrt{104}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

إذًا طول JL يساوي $\sqrt{104}$ أو 10.20 cm.

تمرين موجّه

4. في الدائرة $\odot R$، أوجد TV. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.



الربط بالحياة اليومية

لتشكيل النوافذ الزجاجية الملوّنة، يسخن الزجاج إلى حرارة 2000 درجة مئوية، إلى أن يصبح قوامه مشابهًا لقوام الحلوى. وتنتج الألوان عبر إضافة أكاسيد معدنية.

المصدر: الزجاج الفنّي الملوّن من ربح

نصيحة دراسية

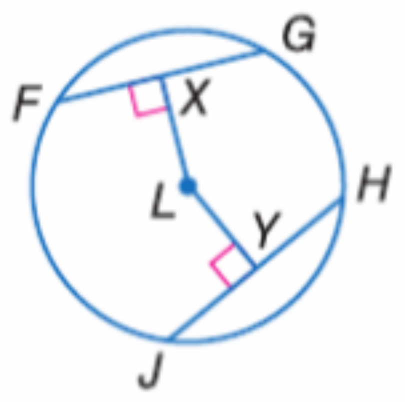
رسم قطع مستقيمة يمكنك إضافة أي معلومات تعرفها إلى الشكل لمساعدتك في حل المسألة. في المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$

إضافةً إلى النظرية 5.2، يمكنك استخدام النظرية التالية لتحديد ما إذا كان وتران في دائرةٍ متطابقين.

النظرية 5.5

الشرح في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق وتران إذا وفقط إذا كانا متساويي البعد عن المركز.

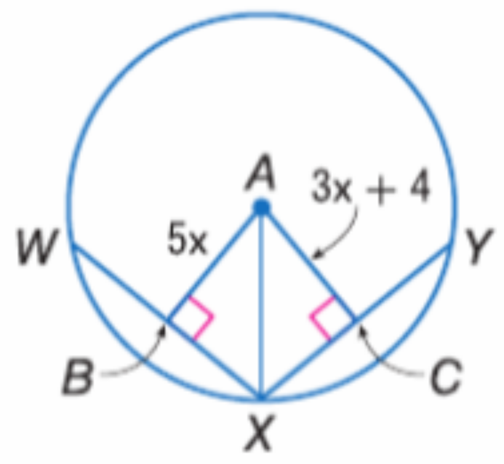
مثال $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$



سوف تقوم بإثبات النظرية 5.5 في التمرينين 29 و 30.

مثال 5 الأوتار متساوية البعد عن المركز

الجبر **في الدائرة $\odot A$، لديك $WX = XY = 22$. أوجد AB.**



بما أن الوترين $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ متطابقان، فهما متساويا البعد عن A.
إذًا، $AB = AC$.

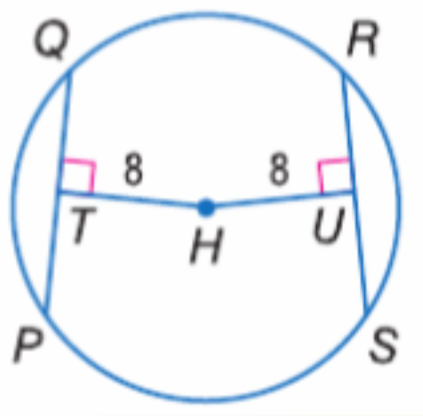
$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بسط.

إذًا، $AB = 5(2)$ أو 10.

تمرين موجّه

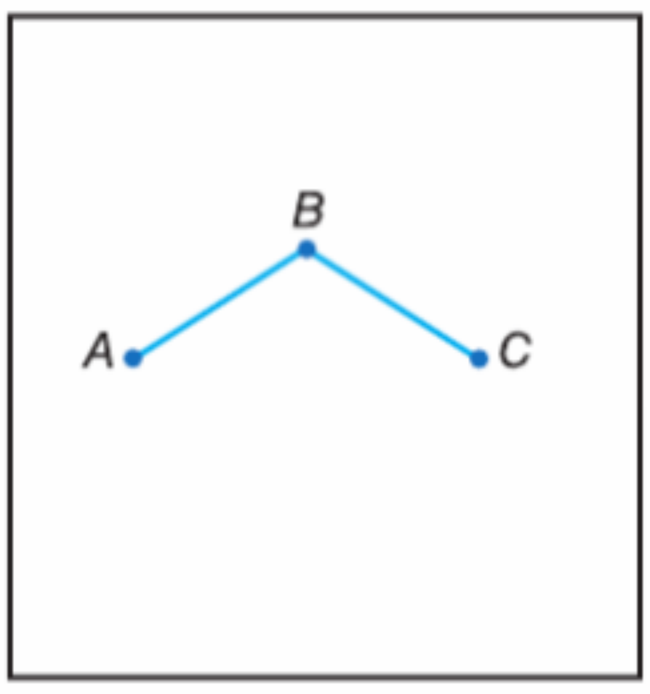


5. في الدائرة $\odot H$. $PQ = 3x - 4$ و $RS = 14$. أوجد قيمة x.

يمكنك استخدام النظرية 5.5 لإيجاد النقطة متساوية البعد عن ثلاث نقاط لا تقع على استقامةٍ واحدة.

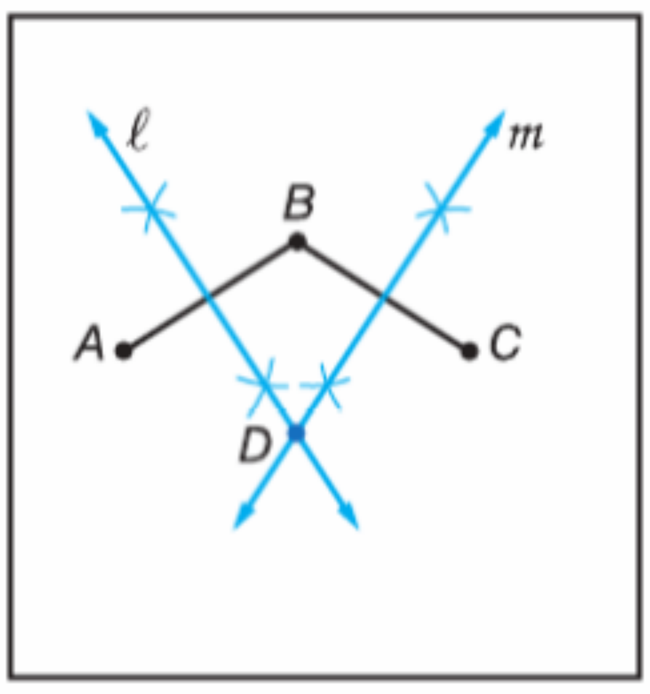
الإنشاء رسم دائرة تمرّ من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1



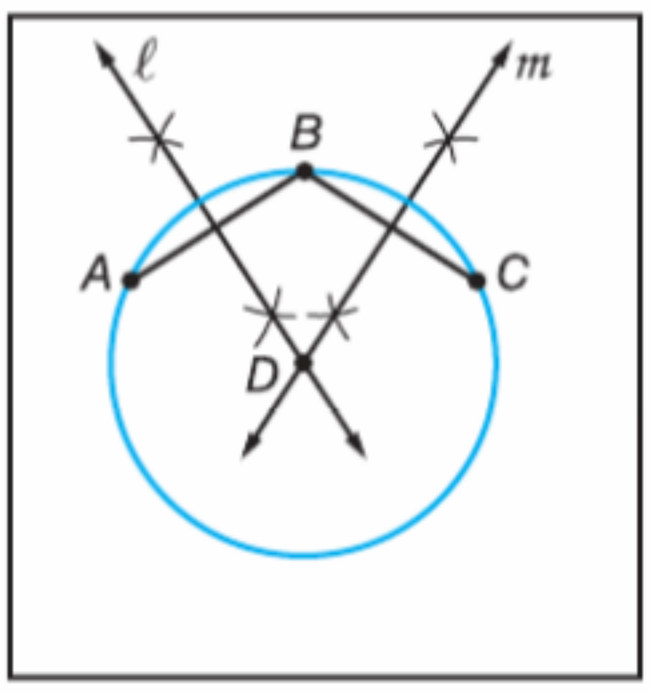
ارسم النقاط الثلاثة التي ليست على استقامة واحدة. وهي A, B, C. ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$.

الخطوة 2



أنشئ المنصفين العموديين ℓ و m لـ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. سمِّ نقطة التقاطع D.

الخطوة 3

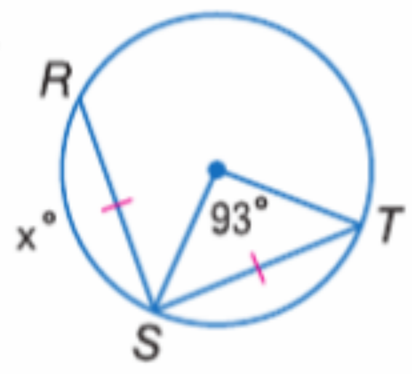


بموجب النظرية 5.4، يضم المستقيمان ℓ و m قطرين للدائرة $\odot D$. ضع رأس الفرجار على النقطة D. وارسم دائرةً تمر بالنقاط A و B و C.

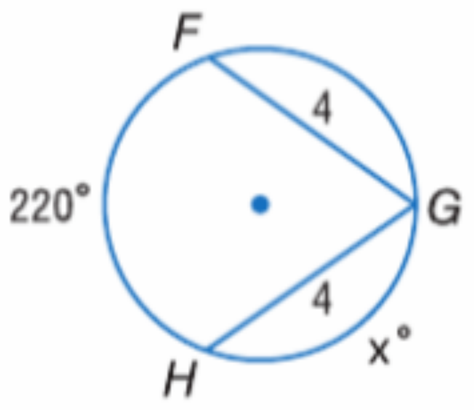
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **الجبر** أوجد قيمة x.

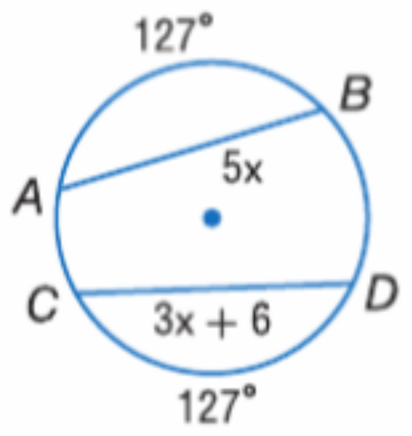
1.



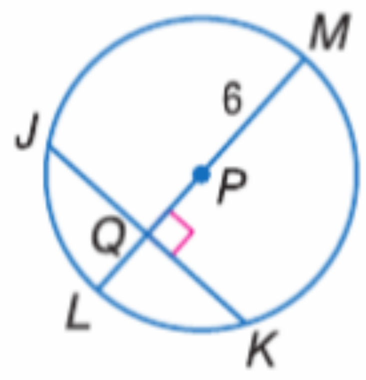
2.



3.



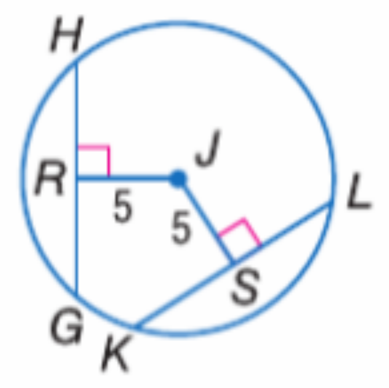
المثالان 3 و 4 **في الدائرة $\odot P$، لديك $JK = 10$ و $m\widehat{JLK} = 134$. أوجد كلا من القياسات.**
قرّب إلى أقرب جزء من مئة.



4. $m\widehat{JL}$

5. PQ

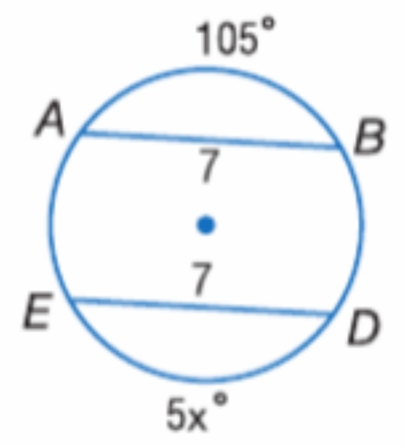
مثال 5 **6.** في الدائرة $\odot J$. لديك $GH = 9$ و $KL = 4x + 1$. أوجد قيمة x.



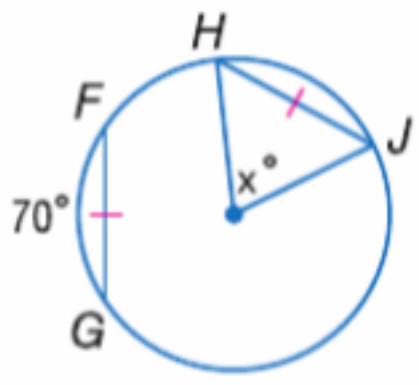
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **الجبر** أوجد قيمة x.

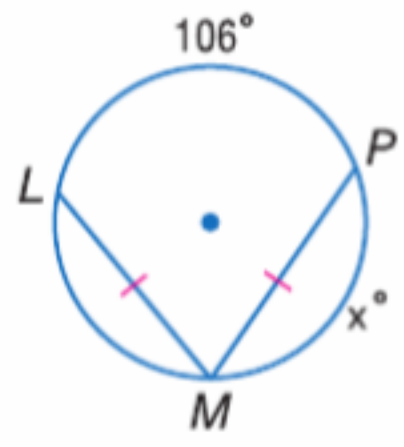
7.



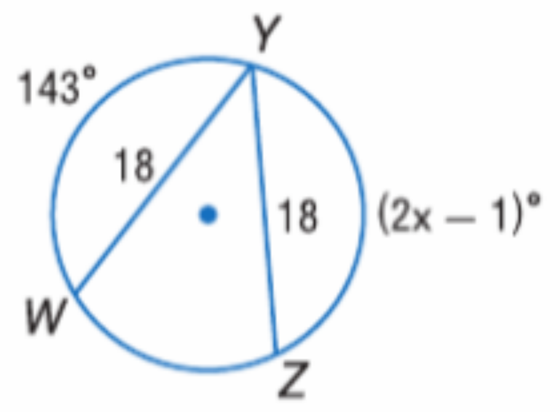
8.



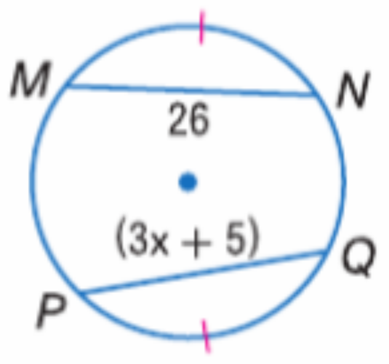
9.



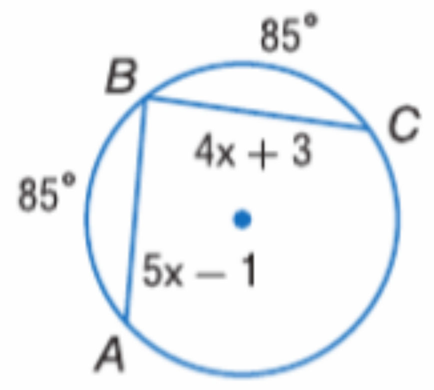
10.



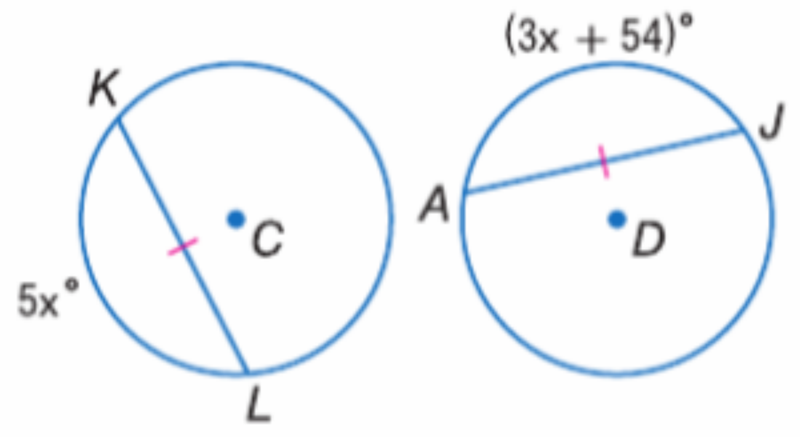
11.



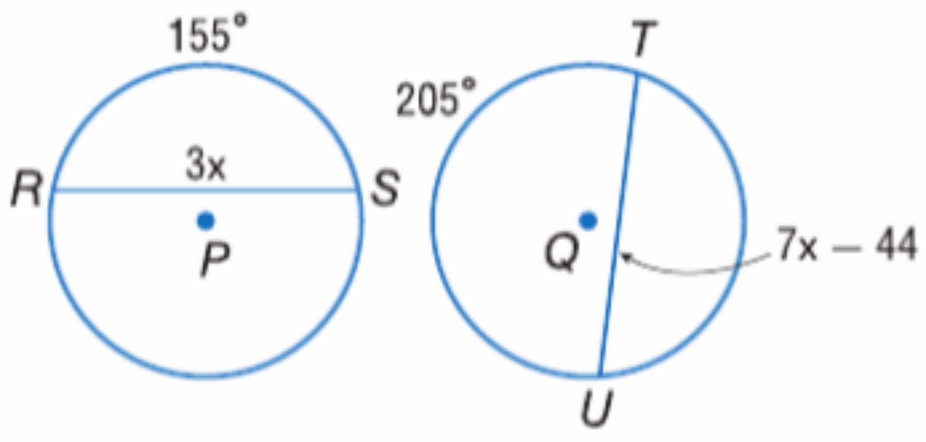
12.



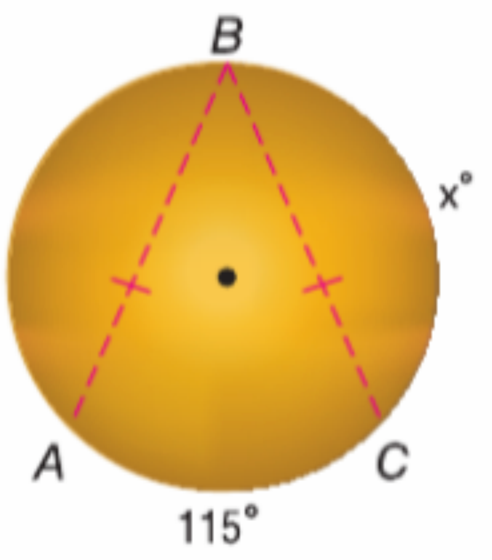
13 $\odot C \cong \odot D$



14. $\odot P \cong \odot Q$



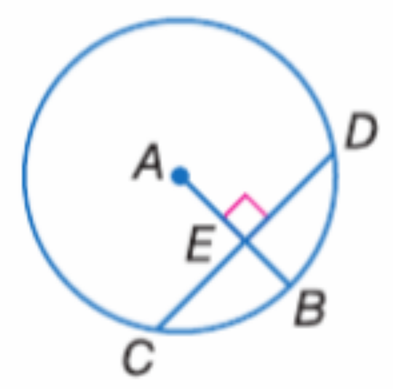
15. **التمثيل بالنماذج** تحضر وفاء دورةً في صناعة الحليّ في مركز الفنون المحلي. وهي تريد تشكيل قرطين مستطيلين من دائرة معدنية. وتعلم أن $\widehat{AC}$ يساوي 115. فإذا أرادت فصل جزأين متساويين بحيث يكون $\widehat{AB} = \widehat{BC}$، ما قياس x؟



المثالان 3 و 4 **في الدائرة $\odot A$، نصف القطر يساوي 14 و $CD = 22$. أوجد كلا من القياسات. أقرب جزء من المئة عند الضرورة.**

16. CE

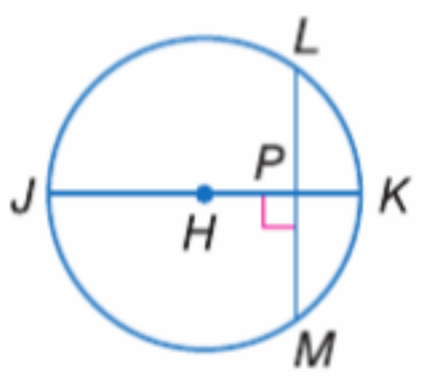
17. EB



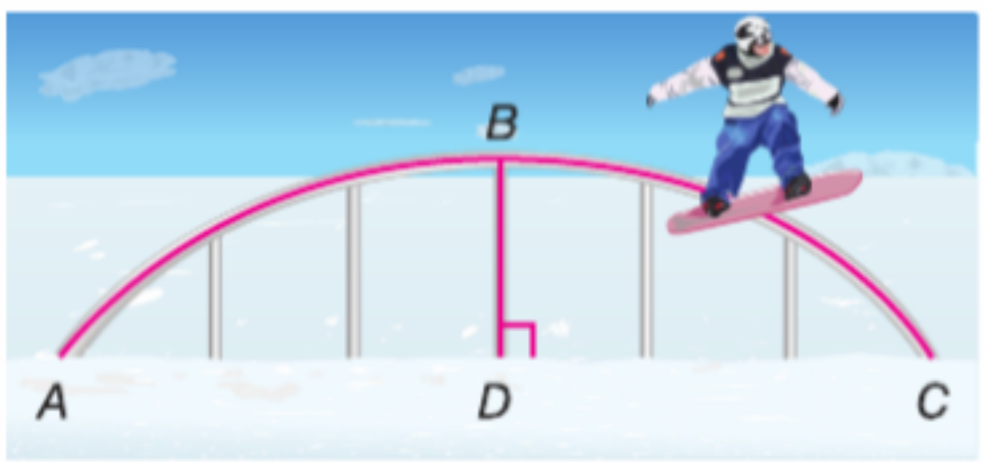
في الدائرة $\odot H$ القطر يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84$. أوجد كلا من القياسات. قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة عند الضرورة.

18. $m\widehat{LK}$

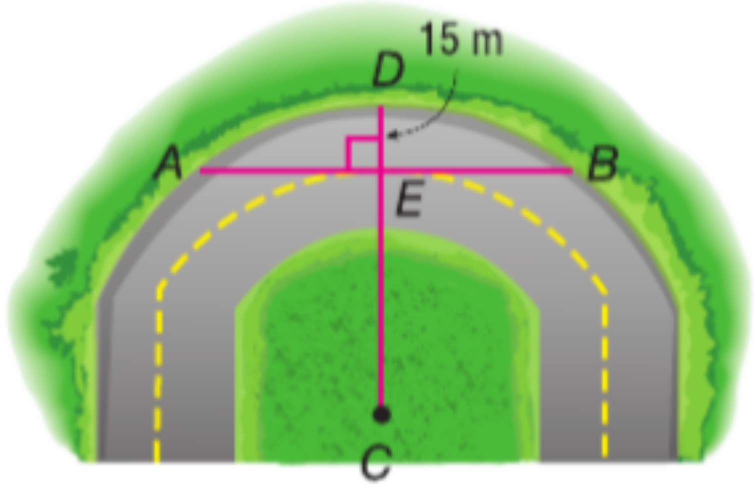
19. HP



20. **التزلج على الجليد** المسار الموضح المخصص للتزحلق على الجليد هو دائرة فيها $\overline{BD}$ جزء من القطر. فإذا كان $\widehat{ABC}$ يساوي حوالي 32% من دائرة كاملة. فماذا يساوي $m\widehat{AB}$؟

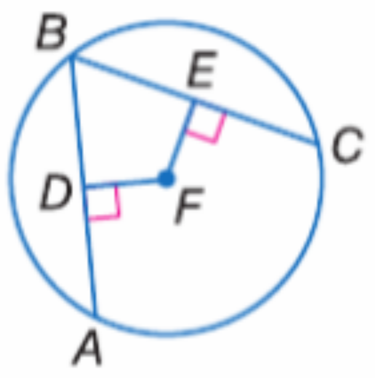


21. **الطرقات** الطريق المنحني الموجود على اليسار هو جزء من الدائرة $\odot C$ والتي يساوي نصف قطرها 88 m. ما هو طول AB؟ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

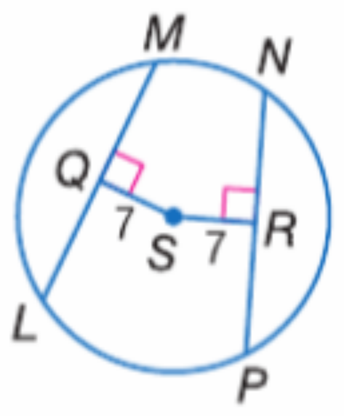


مثال 5

22. **الجبر** في الدائرة $\odot F$، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. $DF = 3x - 7$ و $FE = x + 9$. ما قيمة x؟



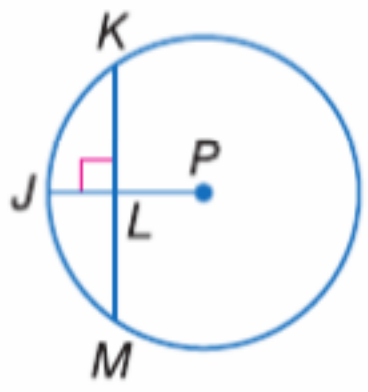
23. **الجبر** في الدائرة $\odot S$، $LM = 16$ و $PN = 4x$. ما قيمة x؟



البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

24. **المعطى:** $\odot P$، $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب برهانه: $\overline{JP}$ ينصف $\overline{KM}$ و $\widehat{KM}$.



البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين.

25. فقرة برهان للنظرية 5.2 الجزء 2

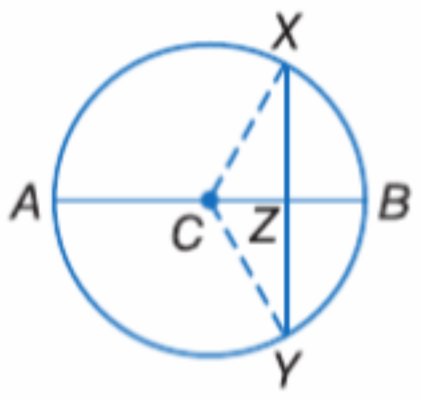
المعطى: $\odot P$، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب برهانه: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

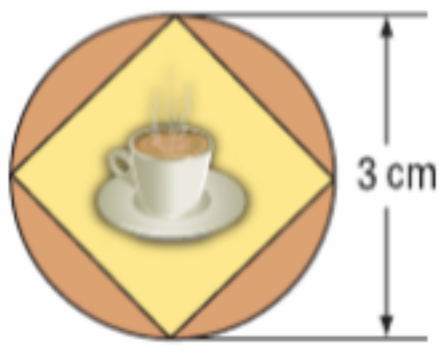
26. برهان من عمودين النظرية 5.3

المعطى: $\odot C$، $\overline{AB} \perp \overline{XY}$

المطلوب برهانه: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}, \widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



27. **التصميم** تصمم أنيسة شعارًا لمقهى صديقتها وفقا للتصميم المبين على الجهة اليسرى. حيث تتساوى الأوتار من حيث الطول. فما قياس كلٍ من الأقواس وطول كلٍ من الأوتار؟



28. **الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 5.4.

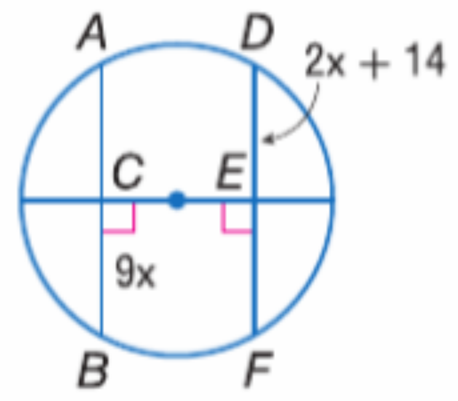
الفرضيات اكتب برهانا من عمودين للجزء المشار إليه في النظرية 5.5.

29. في الدائرة، إذا كان وتران متساويا البعد عن مركز الدائرة، فإنهما يكونان متطابقين.

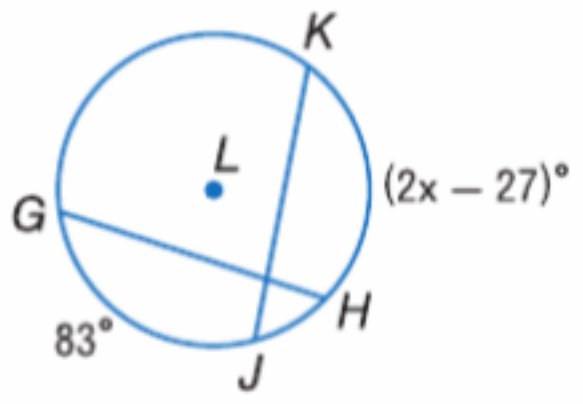
30. في الدائرة، إذا كان وتران متطابقين، فإنهما يكونان متساويي البعد عن مركز الدائرة.

الجبر أوجد قيمة x.

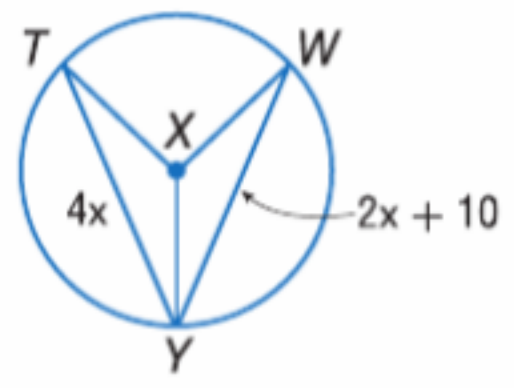
31. $\overline{AB} \cong \overline{DF}$



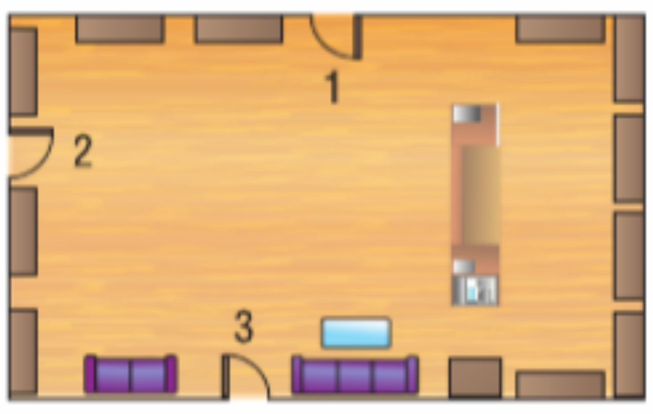
32. $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$



33. $\widehat{WTY} \cong \widehat{TWY}$

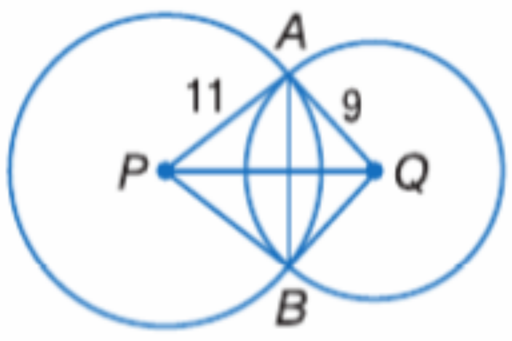


34. الإعلان يريد أحد موظفي متجرٍ للكتب أن ينصب شاشة لعرض الكتب الجديدة. فإذا كانت هناك ثلاثة مداخل إلى المتجر كما هو موضح على الجهة اليمنى. فأين يجب أن توضع الشاشة للحصول على الظهور الأفضل أمام الرواد؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

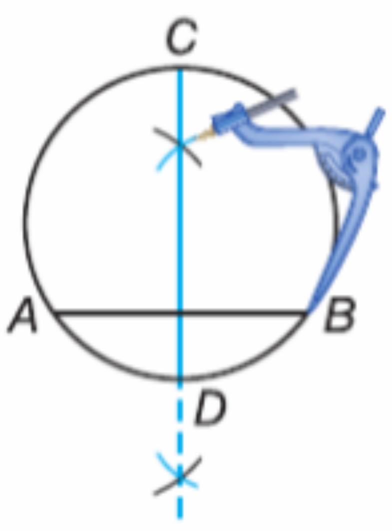
35. التحدّي الوتر المشترك $\overline{AB}$ بين $\odot P$ و $\odot Q$ عمودي على القطعة المستقيمة التي تربط بين مركزي الدائرتين. فإذا كان $AB = 10$. فما هو طول $\overline{PQ}$؟ اشرح استنتاجك.



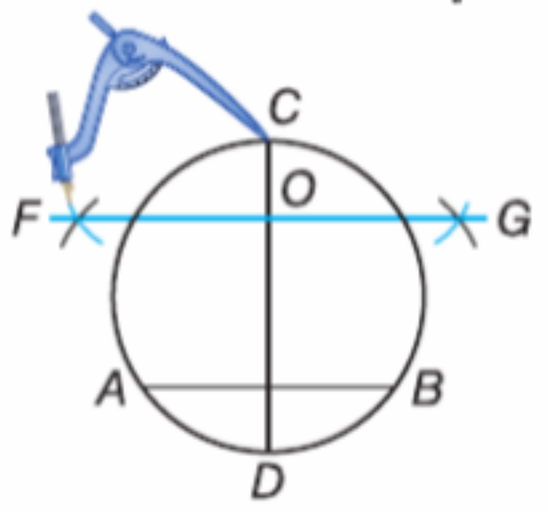
36. التبرير في الدائرة، $\overline{AB}$ هو قطر و $\overline{HG}$ هو وترٌ ينصف $\overline{AB}$ عند النقطة X. هل من الصحيح *أحيانًا* أم *دائما* أم من غير *الصحيح* على الإطلاق أن $GX = HX$؟ اشرح.

37. التحدّي استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ فيها الوتر $\overline{AB}$. عد إلى عملية الإنشاء هذه من أجل المعادلة التالية.

الخطوة 1 أنشئ $\overline{CD}$، وهو المنصف العمودي لـ $\overline{AB}$



الخطوة 2 أنشئ $\overline{FG}$، وهو المنصف العمودي لـ $\overline{CD}$. سَمِّ نقطتي التقاطع O.



a. استخدم برهانا غير مباشرٍ لتبيّن أن $\overline{CD}$ يمرّ من مركز الدائرة عبر افتراض أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

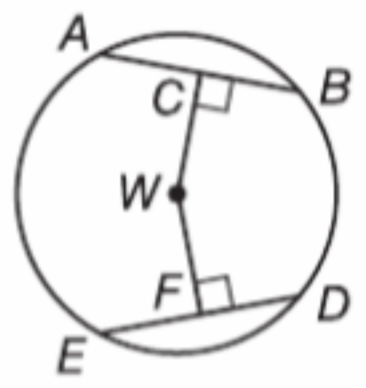
b. برهن أن النقطة O هي مركز الدائرة.

38. مسألة غير محددة الإجابة أنشئ دائرةً وارسم وترًا فيها. قِس طول الوتر و بعده عن مركز الدائرة. وأوجد طول نصف قطرها.

39. الكتابة في الرياضيات إذا ضوعف قياس قوس في دائرةٍ ثلاث مرات، فهل سيكون وتر القوس الجديد أطول بثلاثة أمثال وتر القوس الأصلي؟ اشرح استنتاجك.

تدريب على الاختبار المعياري

.40 إذا كان $WF = CW$ و $ED = 30$.
فما طول DF؟

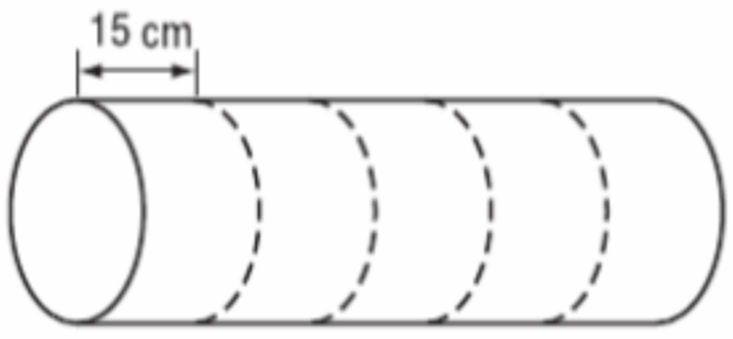


A 60
B 45
C 30
D 15

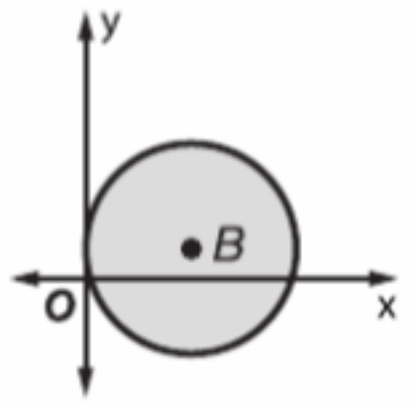
.41 سؤال جبري اكتب نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع بأبسط صورة.

F $\frac{\pi}{4}$ **H** $\frac{3\pi}{4}$
G $\frac{\pi}{2}$ **J** π

.42 إجابة قصيرة الأنبوب المبيّن مقسّمٌ إلى خمسة مقاطع.
فما طول الأنبوب بالأمتار (m)؟



.43 SAT/ACT النقطة B مركز لدائرةٍ مماسيّة مع المحور الرأسي y. وإحداثيا النقطة B هما $(3, 1)$. فما هي مساحة الدائرة؟



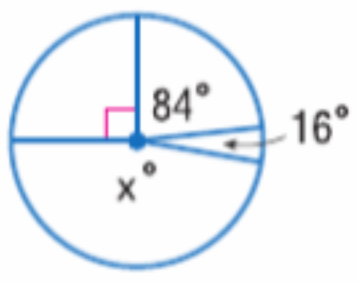
A π وحدة مربعة
B 3π وحدة مربعة
C 4π وحدة مربعة
D 6π وحدة مربعة
E 9π وحدة مربعة

مراجعة شاملة

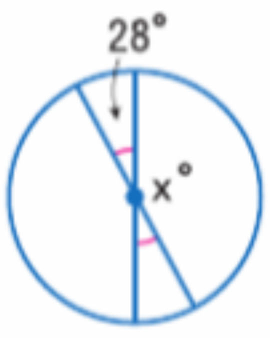
أوجد قيمة x. (الدرس 5-2)

44.

45.



46.



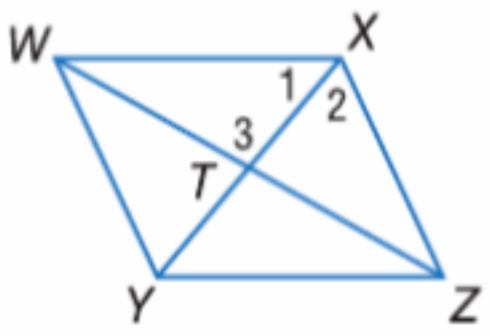
.47 حرف شكلت هلا نقشا لتطريز أزهارٍ على سطح لحاف، حيث شرعت برسم مخمس منتظم طوله 3.5 cm على كل طرف. ثم أضافت نصف دائرةٍ إلى كل ضلعٍ من أضلاع خماسي الأضلاع لتشكل شكل خمس بتلات. فكم سنتيمترًا سوف تحتاج من القصاصات الذهبية لتزيين حواف 10 أزهار؟ قرّب إلى أقرب سنتيمتر. (الدرس 5-1)

حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأعداد تمثّل قياسات أضلاع مثلث. وإذا كان ذلك، صنّف المثلث على أنه *حادّ الزاوية* أو *منفرج الزاوية* أو *قائم الزاوية*. وبرّر إجابتك.

48. 8, 15, 17 **49.** 20, 21, 31 **50.** 10, 16, 18

مراجعة المهارات

الجبر **الشكل الرباعي $WXZY$ عبارة عن معيّن أوجد كلا من القيم أو القياسات.**



.51 إذا كان $m\angle 3 = y^2 - 31$. فأوجد قيمة y.

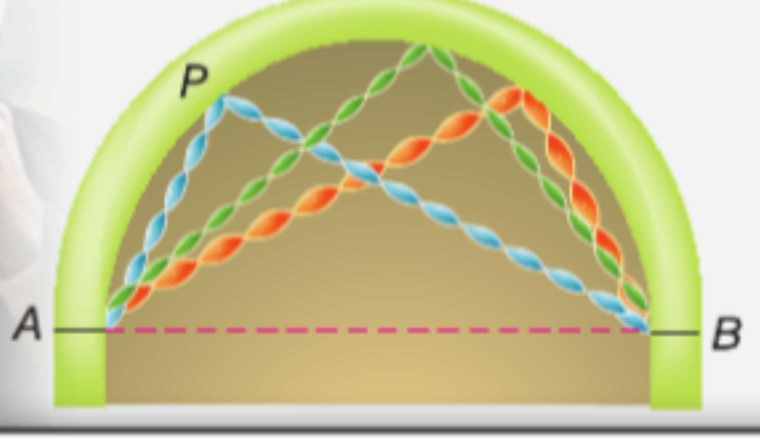
.52 إذا كان $m\angle XZY = 56$. فأوجد قيمة $m\angle YWZ$.

الدرس 5-4 الزوايا المحيطية

.. السابق
- أوجدت قياس الزوايا الداخلية لمضلعات.

.. الحالي
1. إيجاد قياس الزوايا المحيطية.
2. إيجاد قياس المضلعات المحاطة بدائرة.

.. لماذا
- يضم المدخل الخاص بركن احتفال التخرج من المدرسة قوسا بشكل نصف دائرة. تربط أشرطةٌ تزيينيةٌ إلى أحد الطرفين عند النقطة A وإلى الطرف الآخر عند النقطة B. ويمكن حينها ربط وسط كل شريط تزيين إلى نقطة مختلفة P تقع على طول القوس.

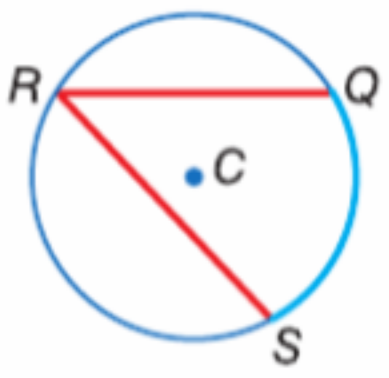


المفردات الجديدة
الزاوية المحيطية
inscribed angle
القوس المحصور
intercepted arc

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

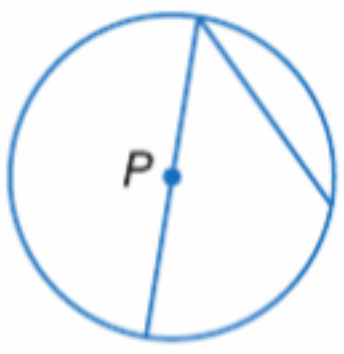
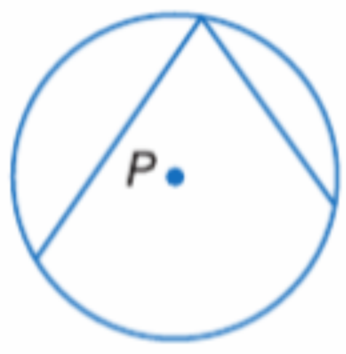
1 الزوايا المحيطية

لاحظ أن الزاوية التي يشكلها كل شريط زينة تبدو متطابقة، وذلك بغض النظر عن موقع وجود النقطة P على طول القوس. إن **للزاوية المحيطية** رأسا يقع على محيط الدائرة وضلعين يضمان قوسي الدائرة. في الدائرة $\odot C$ لدينا $\angle QRS$ زاوية محيطية.



إن **للقوس المحصور** نقطتين طرفيتين على ضلعي الزاوية المحصورة ويقع في داخل الزاوية المحيطية. في الدائرة $\odot C$. القوس الأصغر $\widehat{QS}$ محصورٌ بالزاوية $\angle QRS$.

ثمة ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة 1	الحالة 2	الحالة 3
		
المركز P على ضلع في الزاوية المحيطة.	المركز P داخل الزاوية المحيطة.	المركز P خارج الزاوية المحيطة.

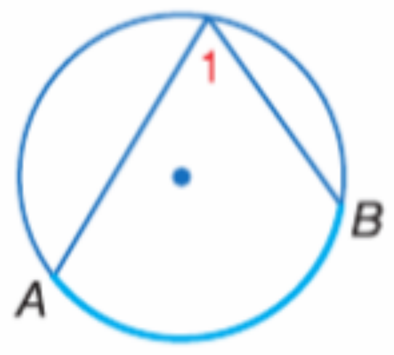
في الحالة 1، يكون ضلع الزاوية قطرًا في الدائرة.

وتنطبق النظرية التالية على كلٍ من هذه الحالات.

النظرية 5.6 نظرية الزوايا المحيطية

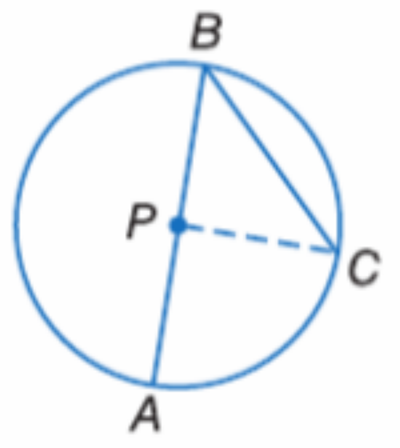
الشرح إذا كانت هناك زاوية محيطية في دائرة، فإن قياس الزاوية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.

مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ و $m\widehat{AB} = 2m\angle 1$



ستبرهن الحالتين 2 و 3 من نظرية الزاوية المحيطية في التمرينين 37 و 38.

البرهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة 1)



المعطى: $\angle B$ زاوية محيطية في الدائرة $\odot P$.

المطلوب إثباته: $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. ارسم نصف قطر مساعد $\overline{PC}$.	1. تحدد النقطتان مستقيمًا.
2. $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	2. جميع أنصاف الأقطار في الدائرة متطابقة ≅.
3. $\triangle PBC$ مثلث متساوي الساقين.	3. تعريف المثلث متساوي الساقين
4. $m\angle B = m\angle C$	4. نظرية المثلث متساوي الساقين
5. $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	5. نظرية الزاوية الخارجية
6. $m\angle APC = 2m\angle B$	6. التعويض (الخطوتان 4، 5)
7. $m\widehat{AC} = m\angle APC$	7. تعريف قياس القوس
8. $m\widehat{AC} = 2m\angle B$	8. التعويض (الخطوتان 6، 7)
9. $2m\angle B = m\widehat{AC}$	9. خاصية التماثل في المعادلة
10. $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$	10. خاصية القسمة في المعادلة

الربط بالمفردات

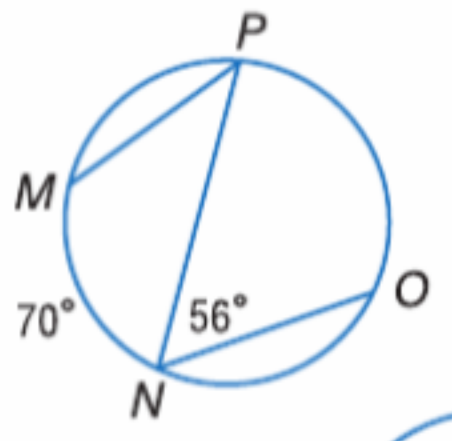
محاط

الاستخدام اليومي: مكتوب على سطح أو داخل سطح. كرسم نقش داخل خاتم

الاستخدام الرياضي: ملامسة أضلاع شكلٍ آخر (أو الجزء الداخلي منه)

مثال 1 استخدام الزوايا المحيطية لإيجاد القياس

أوجد قياس كل مما يلي.



a. $m\angle P$

$m\angle P = \frac{1}{2}m\widehat{MN}$

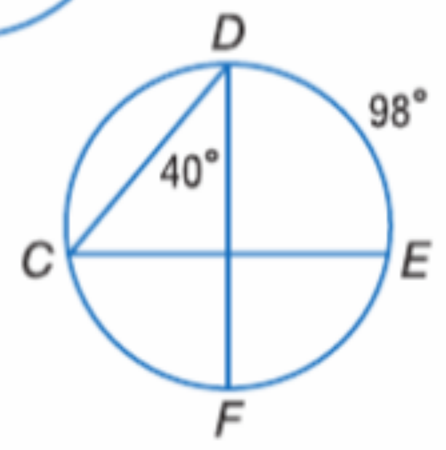
$= \frac{1}{2}(70)$ أو 35

b. $m\widehat{PO}$

$m\widehat{PO} = 2m\angle N$

$= 2(56)$ أو 112

تمرين موجه

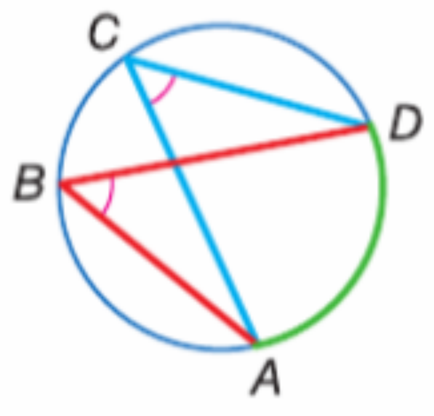


1A. $m\widehat{CF}$

1B. $m\angle C$

الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران قوسا واحدًا في الدائرة مترابطتان.

النظرية 5.7



الشرح إذا كانت زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتان متطابقتان.

مثال $\angle B$ و $\angle C$ كلتاهما تحصر القوس $\widehat{AD}$. إذًا، $\angle B \cong \angle C$.

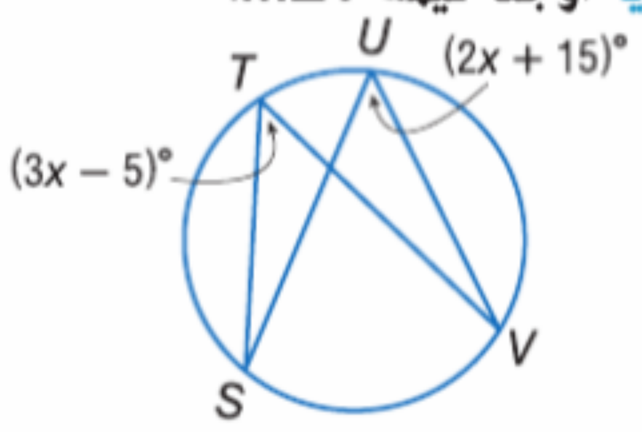
سوف تثبت النظرية 5.7 في التمرين 39.

نصيحة دراسية

المضلعات المحاطة تذكر أنه ليكون مضلّع محاطا بدائرة، فإنجميع رؤوسه يجب أن تقع على محيط الدائرة.

مثال 2 استخدام الزوايا المحيطية لإيجاد القياس

جبريًا أوجد قيمة $m\angle T$.



$\angle T$ و $\angle U$ كلتاهما تحصر القوس $\overset{\frown}{VS}$	$\angle T \cong \angle U$
بحسب تعريف الزوايا المتطابقة	$m\angle T = m\angle U$
بالتعويض	$3x - 5 = 2x + 15$
بسط	$x = 20$

إذًا، $m\angle T = 3(20) - 5$ أو 55.

تمرين موجّه

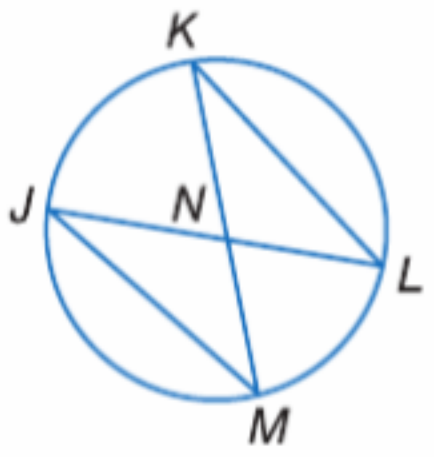
2. إذا كانت $m\angle S = 3x$ و $m\angle V = (x + 16)$ ، فأوجد قيمة $m\angle S$.

مثال 3 استخدام الزوايا المحيطية في البراهين

اكتب برهانا من عمودين.

المعطيات: $\overset{\frown}{JM} \cong \overset{\frown}{KL}$

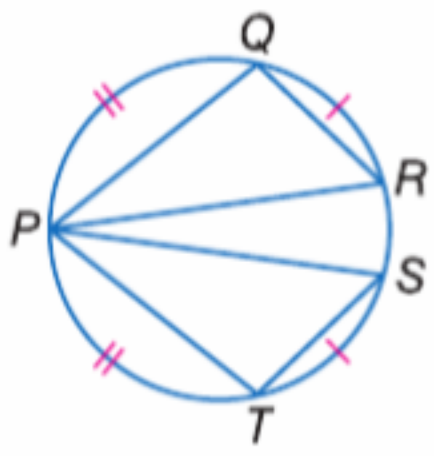
المطلوب إثباته: $\triangle JMN \cong \triangle KLN$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\overset{\frown}{JM} \cong \overset{\frown}{KL}$	1. المعطيات
2. $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	2. إذا كان قوسان أصغران متطابقين ≅، فإن وتريهما المتناظرين متطابقان ≅.
3. $\angle M$ تحصر $\overset{\frown}{JK}$، $\angle L$ تحصر $\overset{\frown}{JK}$.	3. تعريف القوس المحصور
4. $\angle M \cong \angle L$	4. الزاويتان المحيطيتان ∡ المقابلتان للقوس نفسه متطابقتان ≅.
5. $\angle JNM \cong \angle KNL$	5. الزاويتان المتقابلتان بالرأس ∡ متطابقتان ≅.
6. $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	6. زاوية–زاوية–ضلع

تمرين موجّه



3. **المعطى:** $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$، $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{PT}$

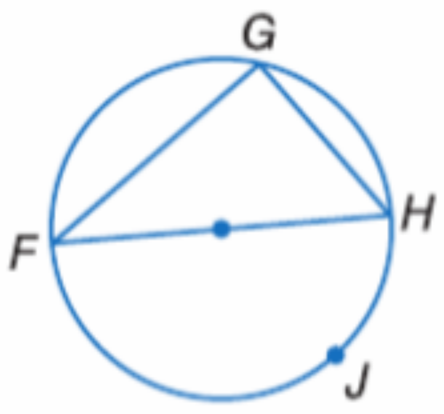
المطلوب إثباته: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

2 زوايا المضلعات المحاطة بدوائر للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرةٍ مواصفات خاصة.

النظرية 5.8

الشرح تحصر زاوية محيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرةٍ إذا وفقط إذا كانت الزاوية زاويةً قائمة.

مثال إذا كانت $\overset{\frown}{FJH}$ نصف دائرة، فإنّ $m\angle G = 90$. وإذا كانت $m\angle G = 90$، فإنّ $\overset{\frown}{FJH}$ نصف دائرة و $\overline{FH}$ قطرٌ في الدائرة.

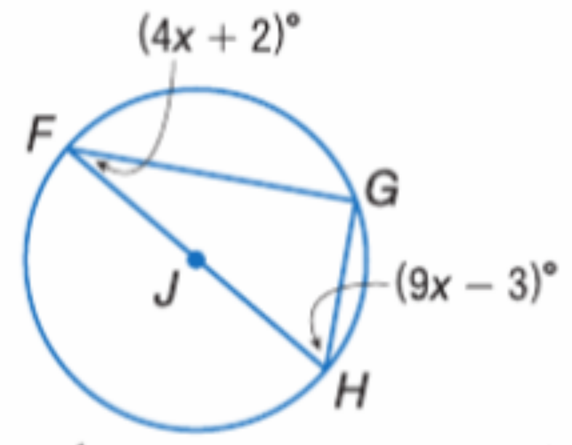


سوف تثبت النظرية 5.8 في التمرين 40.

مثال 4 إيجاد قياس الزوايا في المثلثات المحاطة بدائرة

جبريًا أوجد قيمة $m\angle F$.

$\triangle FGH$ مثلث قائم الزاوية لأن الزاوية $\angle G$ ترسم نصف دائرة.



$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180$	نظرية مجموع الزوايا
$(4x+2)+90+(9x-3)=180$	بالتعويض
$13x + 89 = 180$	بسط
$13x = 91$	بطرح 89 من كل طرف
$x = 7$	بقسمة كل طرف على 13

إذًا، $m\angle F = 4(7) + 2$ أو 30.

تمرين موجّه

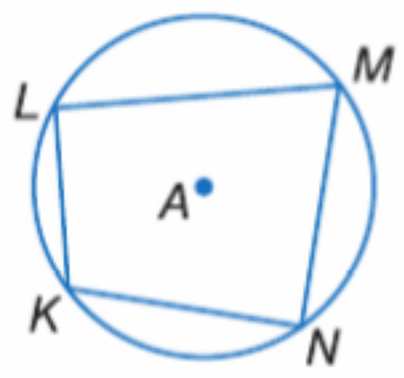
4. إذا كانت $m\angle F = 7x + 2$ و $m\angle H = 17x - 8$. فأوجد قيمة x.

وبينما يمكن إحاطة كثير من الأنواع المختلفة للمثلثات، بما فيها القائمة، بدائرة، فإنه لا يمكن إحاطة سوى أنواع محددة من الأشكال الرباعية في دائرة.

نظرية 5.9

الشرح إذا أحيط متوازي أضلاعٍ بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

مثال إذا أحيط الشكل الرباعي $KLMN$ بالدائرة $\odot A$، فإنّ $\angle L$ و $\angle N$ زاويتان متكاملتان و $\angle K$ و $\angle M$ زاويتان متكاملتان.



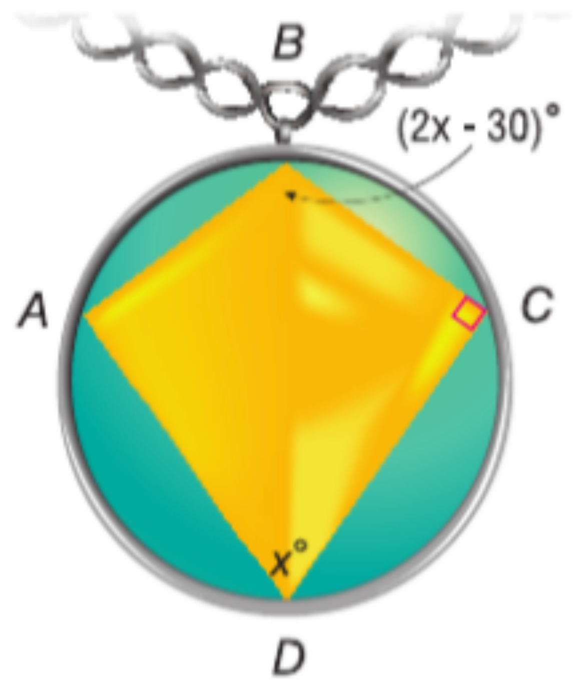
سوف تثبت النظرية 5.9 في التمرين 31.

نصيحة دراسية

البراهين يمكن التحقق من صحة النظرية 5.9 من خلال اعتبار أن الأقواس التي تحصرها الزوايا المتقابلة في شكلٍ رباعي تشكل دائرة.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد قياس الزوايا

المجوهرات **تستخدم القلادة الموضحة شكل رباعي محاطًا بدائرة. أوجد $m\angle A$ و $m\angle B$.**



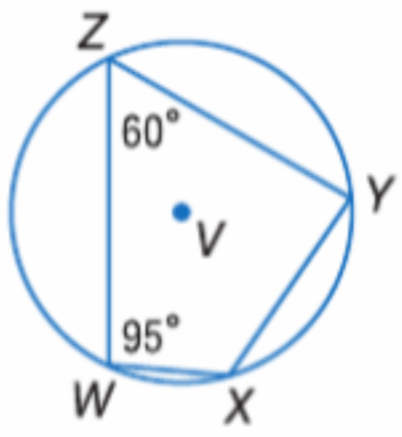
بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، فكل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

$$m\angle B + m\angle D = 180 \qquad m\angle A + m\angle C = 180$$
$$(2x - 30) + x = 180 \qquad m\angle A + 90 = 180$$
$$3x - 30 = 180 \qquad m\angle A = 90$$
$$3x = 210$$
$$x = 70$$

إذًا، $m\angle A = 90$ و $m\angle B = 2(70) - 30$ أو 110.

تمرين موجّه

5. الشكل الرباعي WXYZ محاط بالدائرة $\odot V$. أوجد $m\angle X$ و $m\angle Y$.



الربط بالحياة اليومية

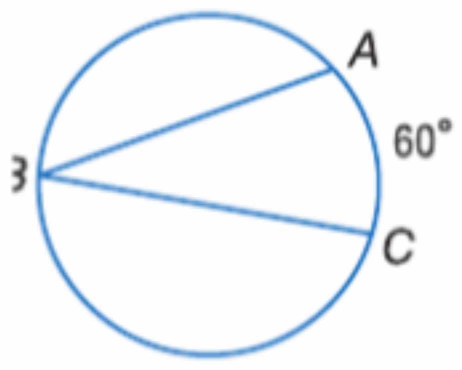
اكتسبت قلائد المجوهرات شهرتها الأولى خلال عصر الفراعنة المصريين. وقد أشاعتها من جديد الملكة فكتوريا في أوائل القرن العشرين ولويس فيوتون في عام 2001.

المصدر: موقع ماي ماذرز تشارمز

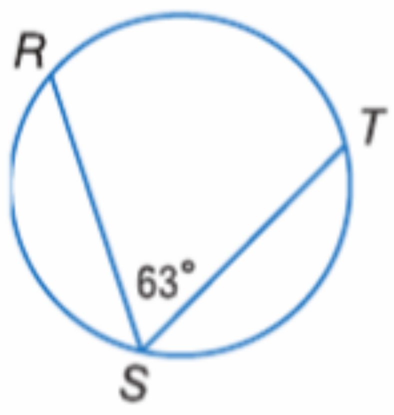
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

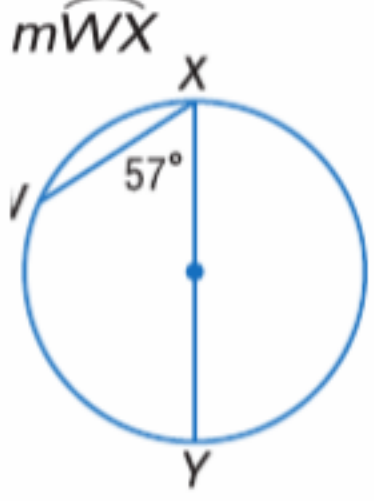
1. $m\angle B$



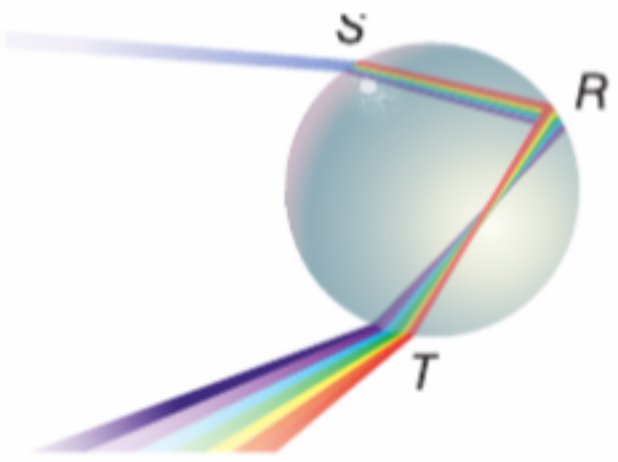
2. $m\widehat{RT}$



3. $m\widehat{WX}$

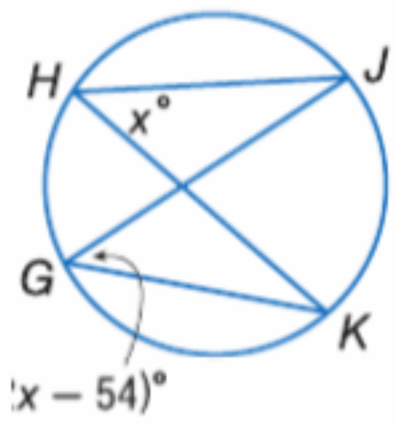


4. **العلوم** يوضح الرسم التخطيطي كيف ينحرف الضوء داخل قطرة مطرٍ لتشكيل ألوان قوس قُزح. إذا كانت $m\widehat{ST} = 144$. فما قياس الزاوية $m\angle R$؟

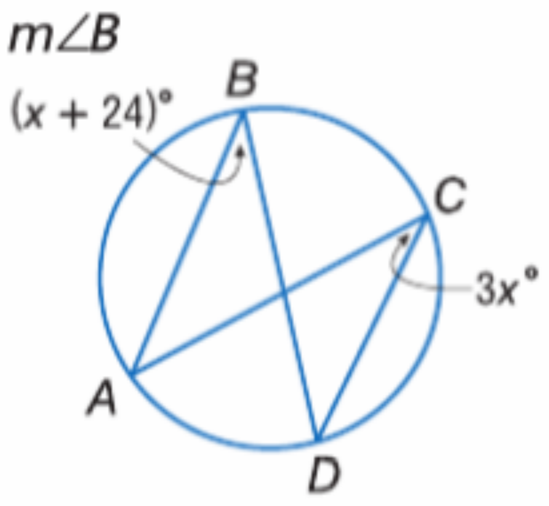


مثال 2 **جبريا** **أوجد كلا من القياسات.**

5. $m\angle H$



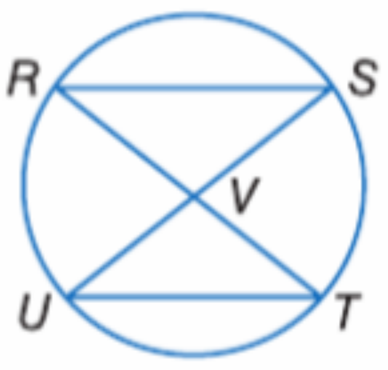
6. $m\angle B$



مثال 3 **7.** **البرهان** اكتب برهانا مكوّنًا من عمودين.

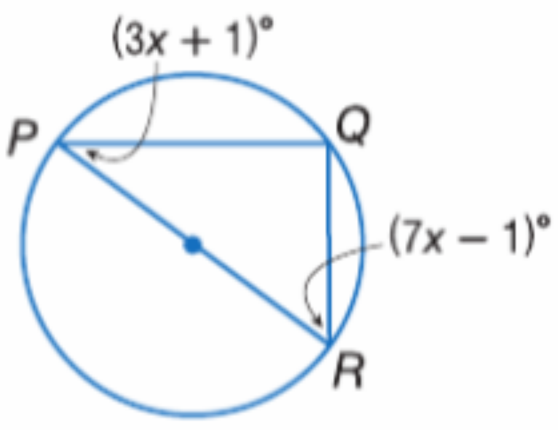
المعطيات: $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$.

المطلوب إثباته: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

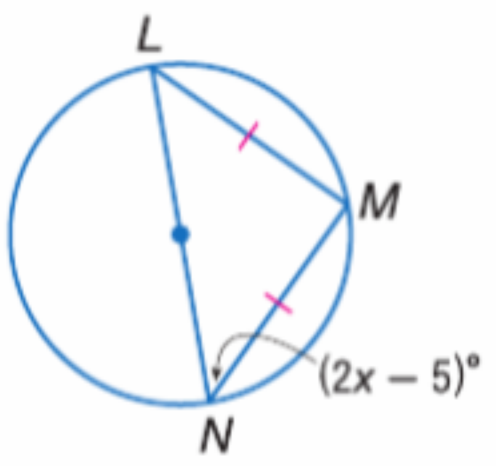


المثالان 4-5 **البنية** **أوجد كل قيمة.**

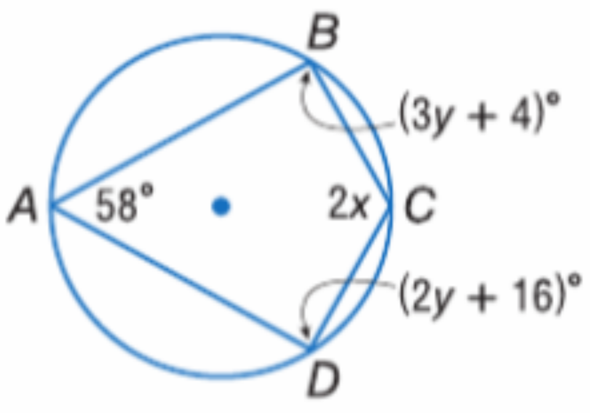
8. $m\angle R$



9. x



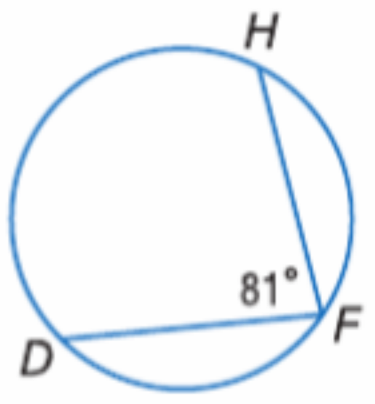
10. $m\angle C$ و $m\angle D$



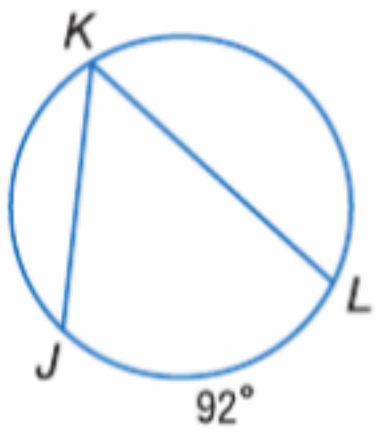
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

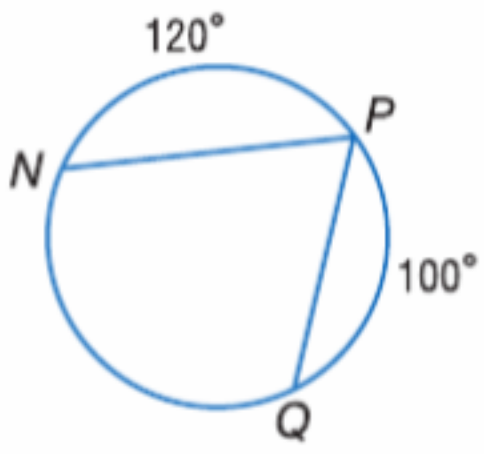
11. $m\widehat{DH}$



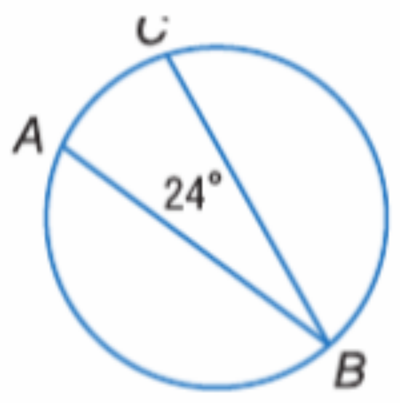
12. $m\angle K$



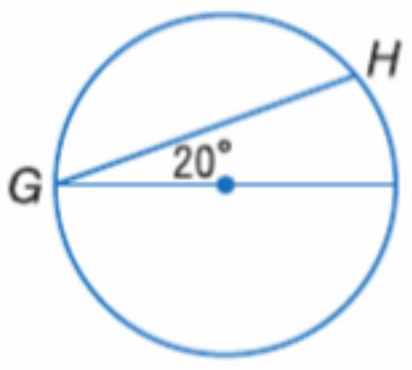
13 $m\angle P$



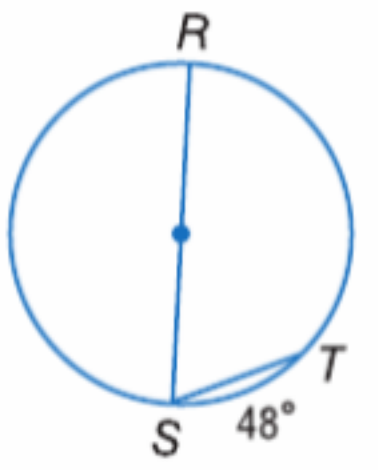
14. $m\widehat{AC}$



15. $m\widehat{GH}$



16. $m\angle S$

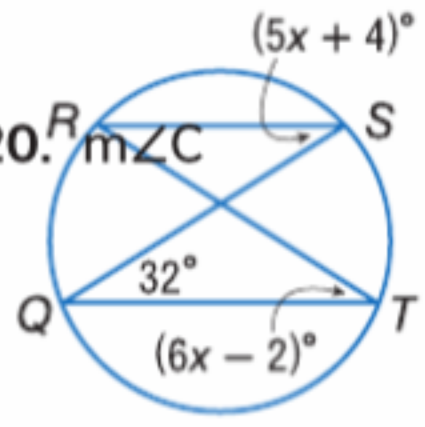


مثال 2 **جبريا** أوجد كلا من القياسات.

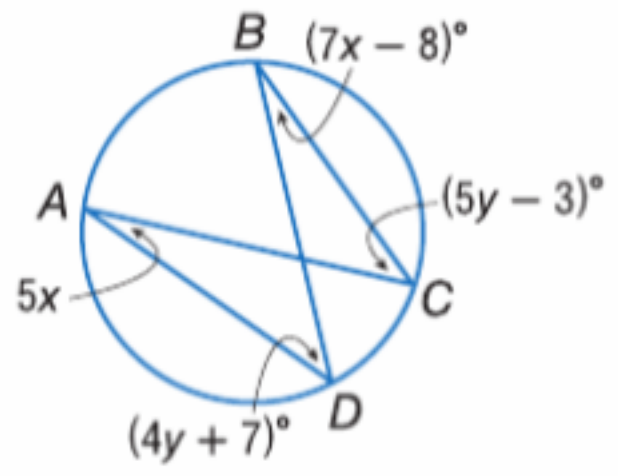
17. $m\angle R$

18. $m\angle S$

20. $m\angle C$



19. $m\angle A$

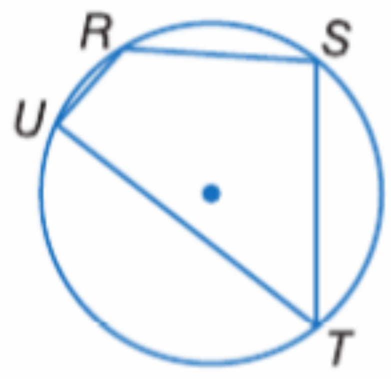


مثال 3 **البرهان** اكتب النوع المحدّد من البراهين.

21. فقرة برهان

معطى: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

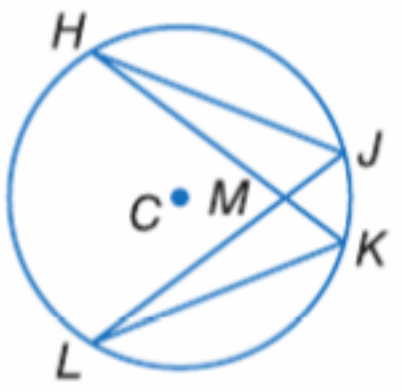
المطلوب إثباته: $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{URS}$



22. برهان مكوّن من عمودين

معطى: $\odot C$

المطلوب إثباته: $\triangle KML \cong \triangle JMH$

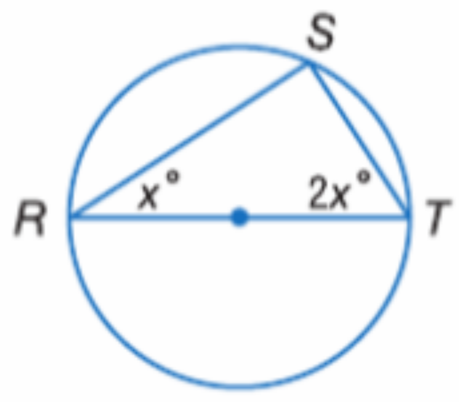


مثال 4 **جبريا** أوجد كلا من القيم.

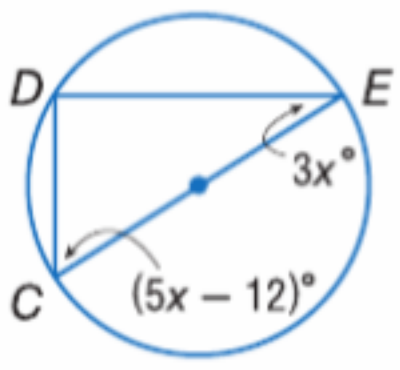
23. x

24. $m\angle T$

25. x



26. $m\angle C$

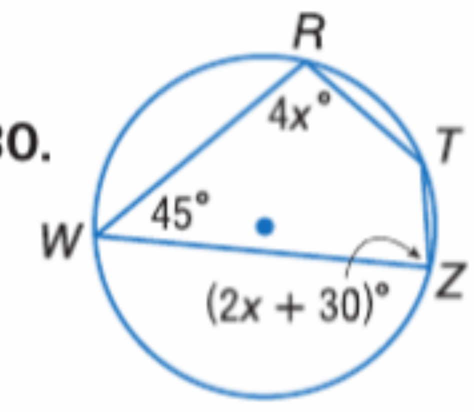


مثال 5 **البنية** أوجد كلا من القياسات.

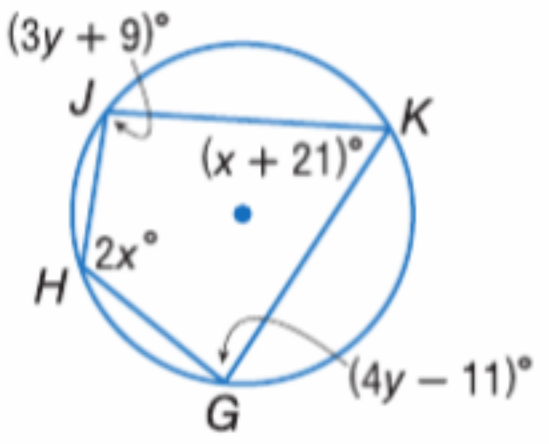
27. $m\angle T$

28. $m\angle Z$

30. $m\angle G$



29. $m\angle H$



31. **البرهان** اكتب فقرة برهان للنظرية 5.9.

الإشارات تحاط إشارة التوقف التي لها شكل ثماني أضلاعٍ منتظمٍ في دائرة. أوجد كلا من القياسات.

32. $m\widehat{NQ}$

33. $m\angle RLQ$

34. $m\angle LRQ$

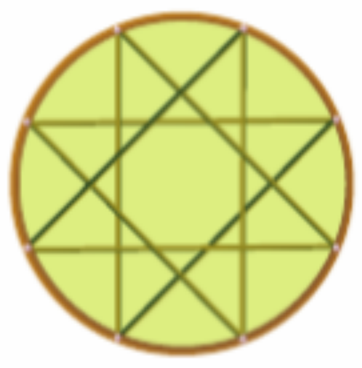
35. $m\angle LSR$

.36 الأعمال الفنية يوضح الشكل أربعة نقوش فنيةٍ مختلفةٍ لنجوم مصنوعة من الخيوط. فإذا كانت جميع الزوايا المحيطية لكل نجمةٍ متطابقة، أوجد قياس كل زاوية محيطية.

a.

b.

c.



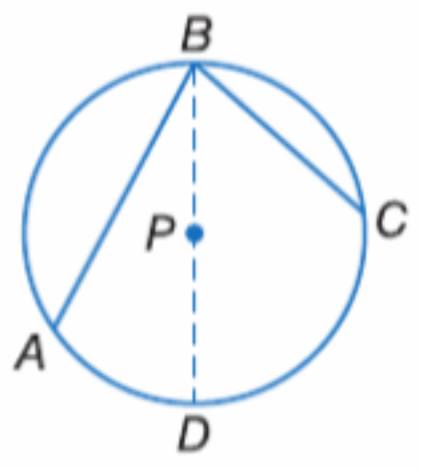
البرهان اكتب برهانا مكونا من عمودين لكل حالةٍ من حالات النظرية 5.6.

.37 الحالة 2

معطى: P تقع خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر في الدائرة.

المطلوب إثباته: $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$

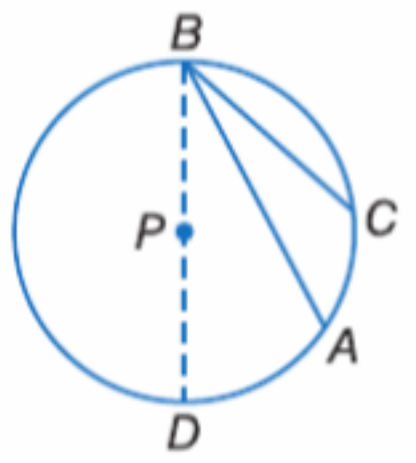


.38 الحالة 3

معطى: P تقع خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطرٌ في الدائرة.

المطلوب إثباته: $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$



البرهان اكتب البرهان المحدد لكل نظرية.

39 النظرية 5.7، برهان مكون من عمودين

.40 النظرية 5.8، فقرة البرهان

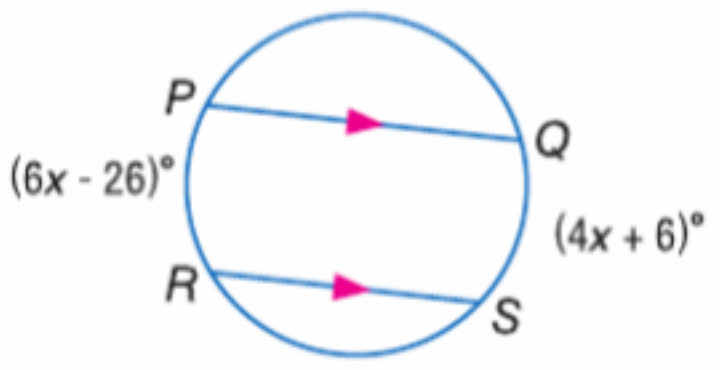
.41 التمثيلات المتعددة ستدرس في هذه المسألة العلاقة بين أقواس دائرةٍ يقطعها وتران متوازيان.

.a هندسيًا استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ تضم وترين متوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ صل النقطتين A و D عبر رسم القطعة المستقيمة $\overline{AD}$.

.b سؤال عددي استخدم منقلةً لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle D$. ثم حدّد $m\widehat{AC}$ و $m\widehat{BD}$. ما الذي ينطبق على هذين القوسين؟ اشرح.

.c سؤال لفظي ارسم دائرةً أخرى وكرّر الجزأين **a** و **b**. وخمن أقواس الدائرة التي يقطعها وتران متوازيان.

.d سؤال تحليلي استخدم تخمينك لإيجاد $m\widehat{PR}$ و $m\widehat{QS}$ في الشكل المبين على الجهة اليمنى. وتحقق باستخدام زوايا محيطية لإيجاد قياس الأقواس.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الفرضيات حدد ما إذا كان يمكن أن يحاط كل شكل رباعي مما يلي بدائرةٍ *دائمًا* أو *أحيانًا* أو *ألا يحاط على الإطلاق*. واشرح استنتاجك.

.42 المربع **.43** المستطيل **.44** متوازي الأضلاع **.45** المعيّن **.46** الشكل الرباعي المحدب

.47 التحدي أحيط مربعٌ بدائرة. فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

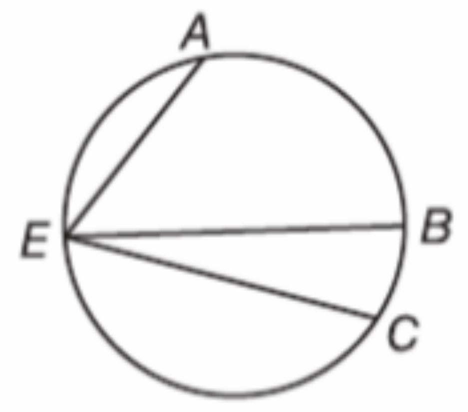
.48 الكتابة في الرياضيات يحاط مثلث قائم الزاوية قياسات زواياه 90°-45°-45° بدائرة. فإذا أعطيت نصف قطر الدائرة. فاشرح كيفية إيجاد طولي قدمي المثلث.

.49 مسألة غير محددة الإجابة أوجد شعارًا في الحياة اليومية وارسمه بحيث يحيط بمضلّع.

.50 الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين الزوايا المحيطية والزوايا المركزية في دائرة. فإذا كانت تقطع القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟

تدريب على الاختبار المعياري

.51 في الدائرة أدناه، $m\widehat{AC} = 160$ و $m\angle BEC = 38$. فما قياس الزاوية $m\angle AEB$؟

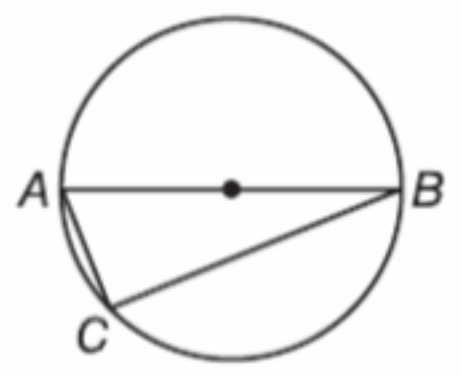


A 42 **C** 80
B 61 **D** 84

.52 **جبريًا** حوّل العلاقة التالية لأبسط صورة
$4(3x - 2)(2x + 4) + 3x^2 + 5x - 6.$

F $9x^2 + 3x - 14$ **H** $27x^2 + 37x - 38$
G $9x^2 + 13x - 14$ **J** $27x^2 + 27x - 26$

.53 **إجابة قصيرة** في الدائرة الموضحة أدناه، لديك $\overline{AB}$ قطرٌ في الدائرة، و $AC = 8$ cm، و $BC = 15$ cm
أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.

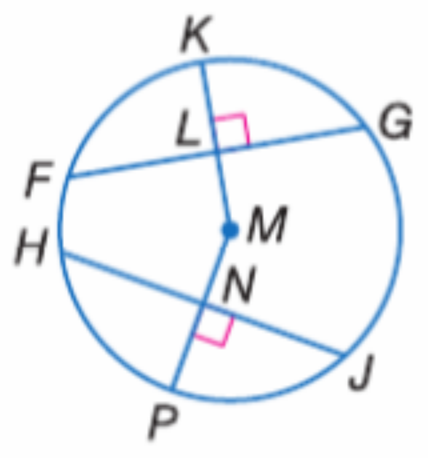


.54 **SAT/ACT** يساوي مجموع ثلاثة أعداد صحيحة -48.
فما هو أصغر الأعداد الصحيحة؟

A -15 **D** -18
B -16 **E** -19
C -17

مراجعة شاملة

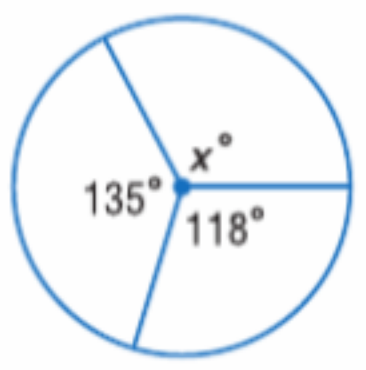
في الدائرة $\odot M$ لدينا، $FL = 24$ و $HJ = 48$ و $m\widehat{HP} = 65$. أوجد كلا من القياسات. (الدرس 3-5)



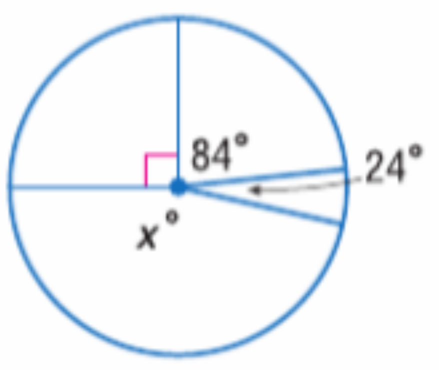
55. FG **56.** $m\widehat{PJ}$
57. NJ **58.** $m\widehat{HJ}$

أوجد قيمة x. (الدرس 2-5)

59.

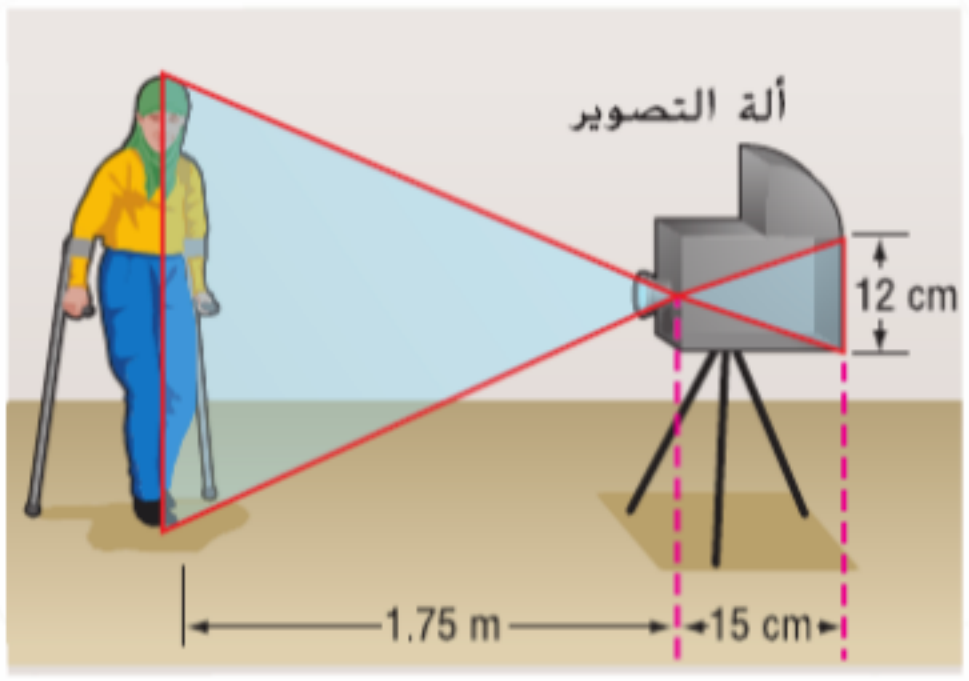


60.



61.

.62 **التصوير الضوئي** في أحد الأنواع الأولى المخترعة لآلات التصوير، كان الضوء يدخل من فتحة في مقدمة آلة التصوير. وكانت الصورة تنعكس بحيث تتوضع رأسا على عقب في مؤخرة آلة التصوير، بحيث يتشكل مثلثان متشابهان. افترض أن ارتفاع صورة شخص في مؤخرة آلة التصوير يساوي 12 cm، وأن المسافة من الفتحة إلى الشخص الذي يتم تصويره هي 1.75 m، وأن طولة آلة التصوير بحدّ ذاتها 15 cm. فما طول الشخص الذي يجري تصويره؟



مراجعة المهارات

جبريًا افترض أن B هي نقطة منتصف $\overline{AC}$. استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد القياس المجهول.

63. $AB = 4x - 5$, $BC = 11 + 2x$, $AC = ?$ **64.** $AB = 6y - 14$, $BC = 10 - 2y$, $AC = ?$

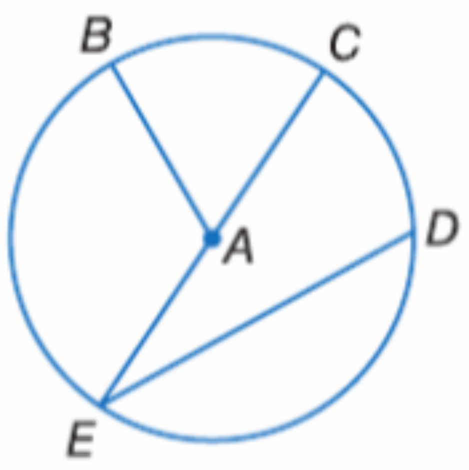
65. $BC = 6 - 4m$, $AC = 8$, $m = ?$ **66.** $AB = 10s + 2$, $AC = 40$, $s = ?$

الوحدة 5

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 5-1 إلى 5-4

من أجل التمارين 1-3، عد إلى الدائرة $\odot A$. (الدرس 5-1)



.1 سمِّ الدائرة.

.2 سَمِّ أحد أقطار الدائرة.

.3 سمِّ وترًا لا يعدّ قطرًا في الدائرة.

.4 **الدراجات** تضم دراجةٌ عجلتين قطر كل منهما 24 cm. (الدرس 5-1)

.a أوجد محيط كل عجلة.

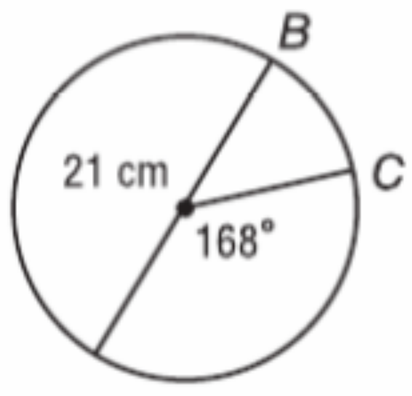
.b ما المسافة التي تقطعها العجلة الواحدة بالسنتيمترات بعد 100 دورة؟

أوجد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة. (الدرس 5-1)

.5 $C = 23$ cm

.6 $C = 78$ m

.7 **الاختيار من متعدد أوجد طول $\widehat{BC}$** . (الدرس 5-2)



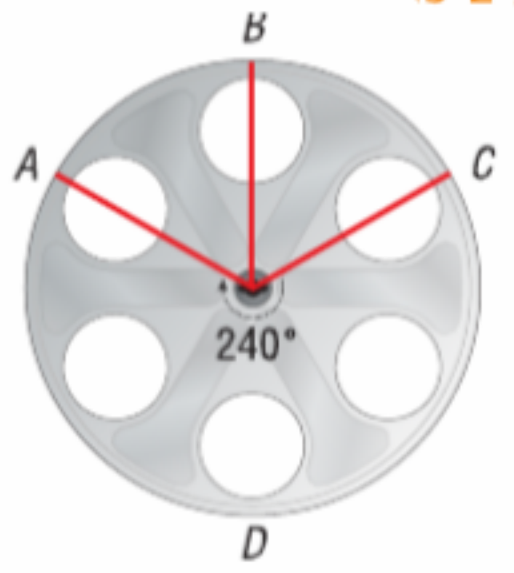
A 18°

B 2.20 cm

C 168°

D 30.79 cm

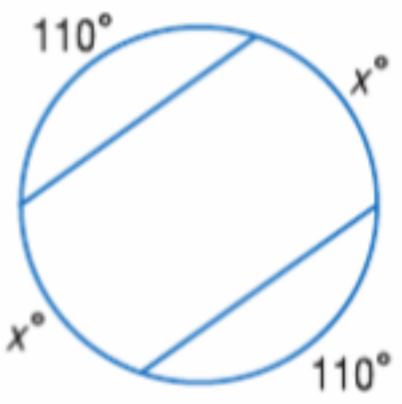
.8 **الأفلام** لبكرة الأفلام الموضحة أدناه القطر 14.5 cm. (الدرس 5-2)



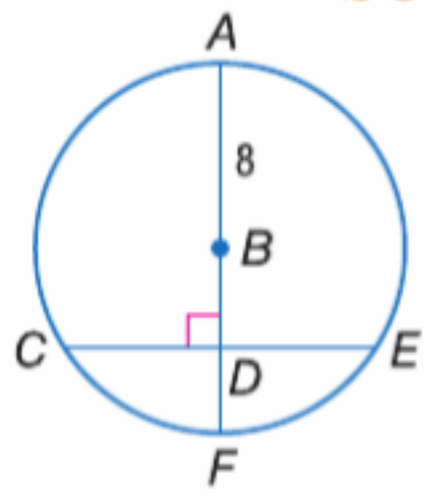
.a أوجد $m\widehat{ADC}$.

.b أوجد طول $\widehat{ADC}$.

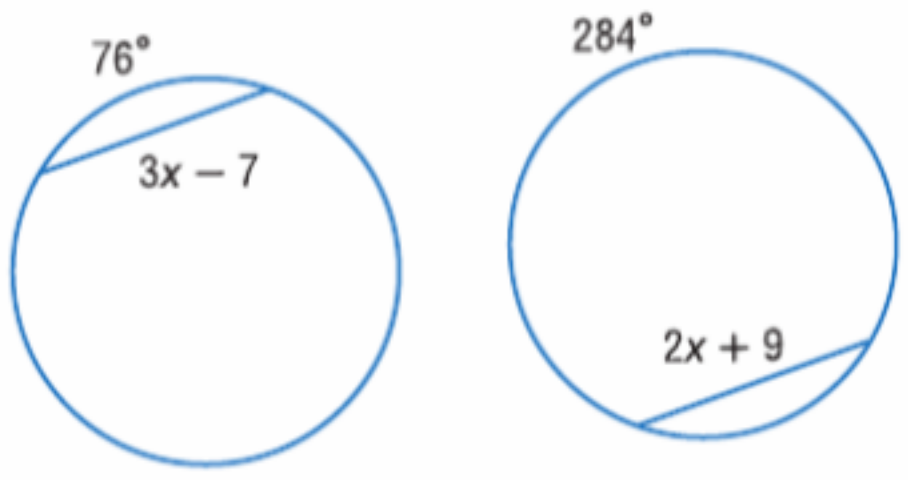
.9 أوجد قيمة x. (الدرس 5-3)



.10 في الدائرة $\odot B$، $CE = 13.5$. أوجد BD وقرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة. (الدرس 5-3)

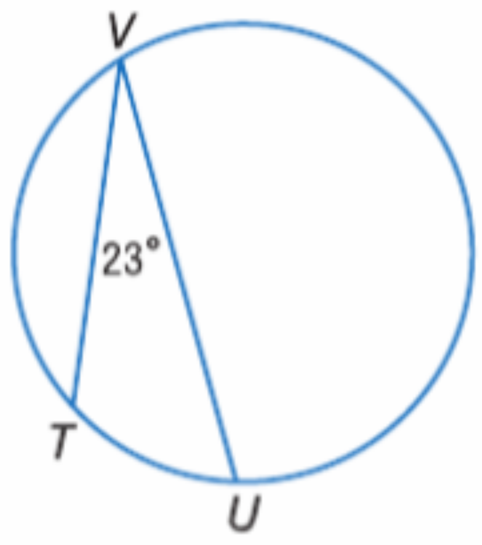


.11 الدائرتان الموضحتان متطابقتان. أوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 5-3)

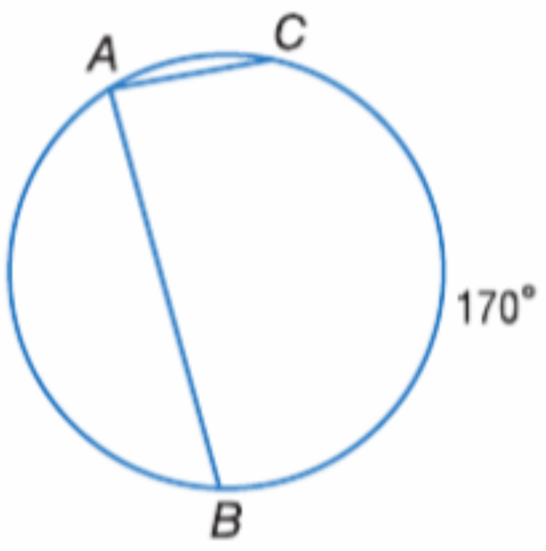


أوجد كلاً من القياسات. (الدرس 5-4)

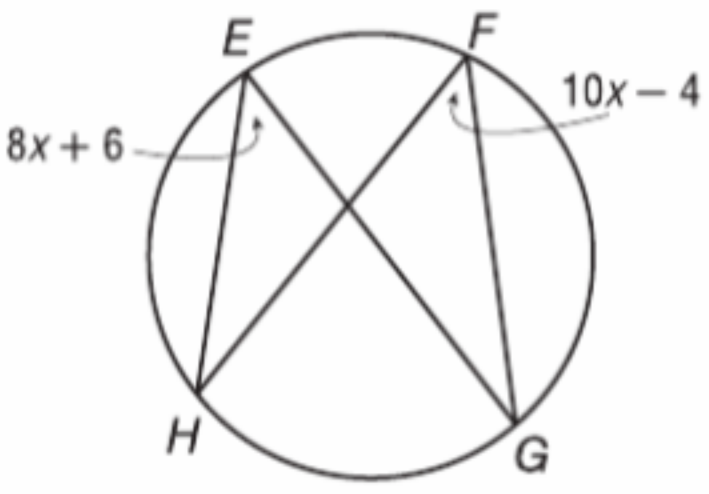
12. $m\widehat{TU}$



13. $m\angle A$



.14 **الاختيار من متعدد** أوجد قيمة x. (الدرس 5-4)



F 1.8

G 5

H 46

J 90

.15 إذا أحيط مربعٌ طول ضلعه 14 cm بدائرة، فما هو قطر الدائرة؟ (الدرس 5-4)

الدرس

5-5 المماسات

..السابق

- لقد استخدمت نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في مثلثات قائمة.

..الحالي

1 استخدام خواص المماسات.

2 حلّ مسائل تتضمن مضلعات محيطة بدوائر.

..لماذا؟

- كانت الدراجات الأولى تعمل عبر دفع القدمين على الأرض. بينما تستخدم الدراجات الحديثة دواستين وسلسلةً وترسين. تلتف السلسلة حول الترسين الدائريين. ويقاس طول السلسلة بين هذين الترسين بقياس المسافة بين نقطتي تماس السلسلة معهما.

المفردات الجديدة

مماس tangent

نقطة التماس point of tangency

مماس مشترك common tangent

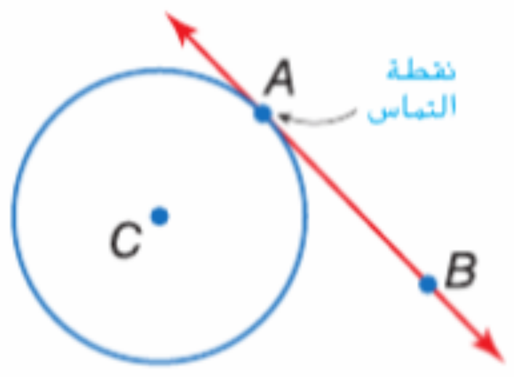
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

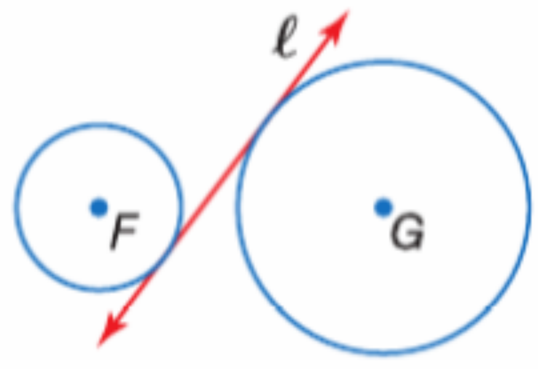
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

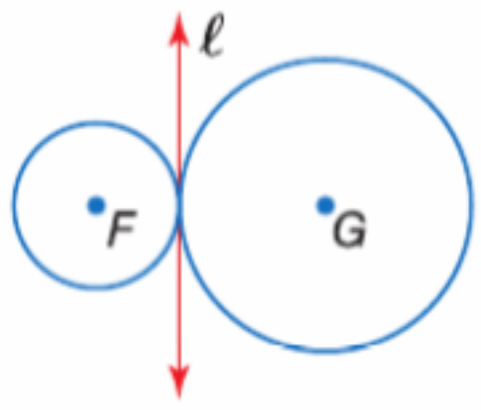
1 المماس

المماس هو مستقيمٌ يقع في مستوى الدائرة نفسه ويقطع محيطها في نقطة واحدة فقط تدعى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة $\odot C$ عند النقطة A. $\overline{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ يدعيان مماسين أيضاً.



المماس المشترك هو مستقيمٌ أو شعاعٌ أو قطعةٌ مستقيمةٌ تمس دائرتين في المستوى نفسه. وفي كلٍّ من الشكلين أدناه، المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F و G.

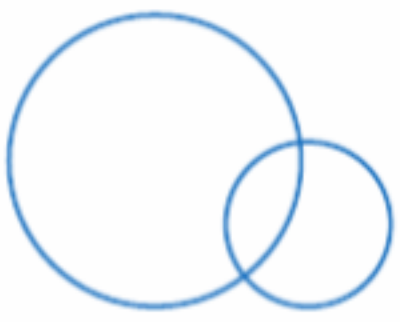




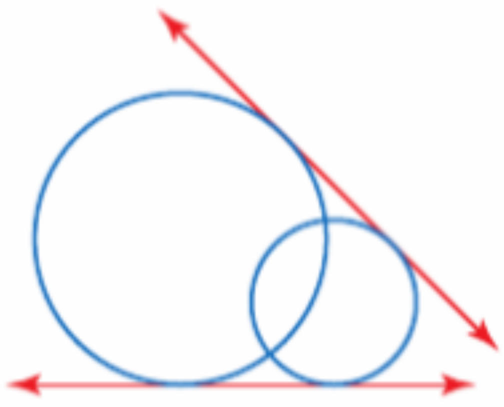
مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

انسخ كل شكل من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماسات مشتركة، فقل *لا مماسات مشتركة* .

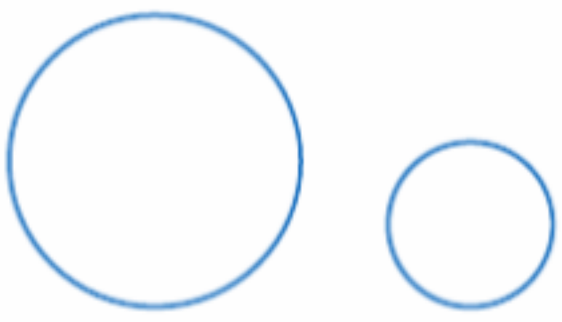
.a



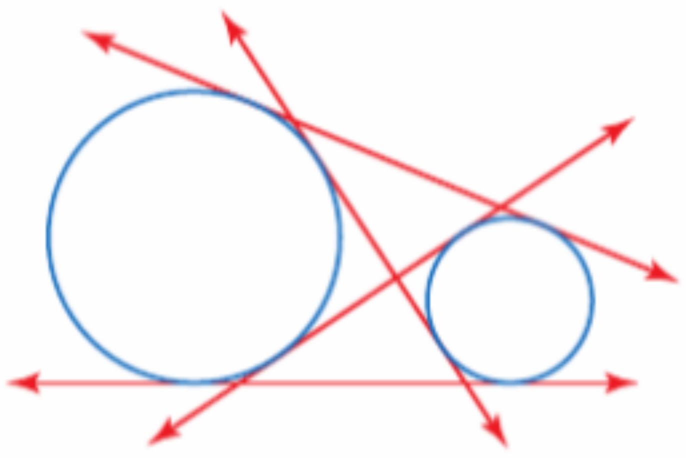
لهاتين الدائرتين مماسان مشتركان.



.b

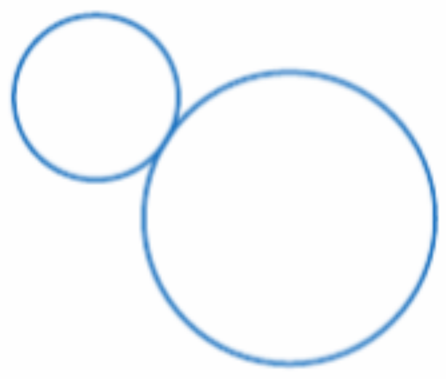


لهاتين الدائرتين 4 مماسات مشتركة.



تمرين موجّه

.1A



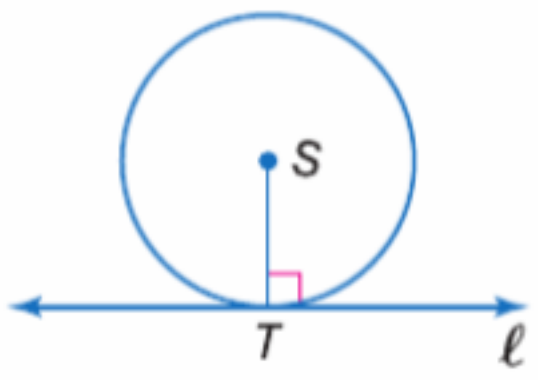
.1B

إن المسافة الأقصر من مماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المرسوم إلى نقطة التماس.

نظرية 5.10

الشرح في مستوى ما، يكون مستقيمٌ مماسا على دائرةٍ إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

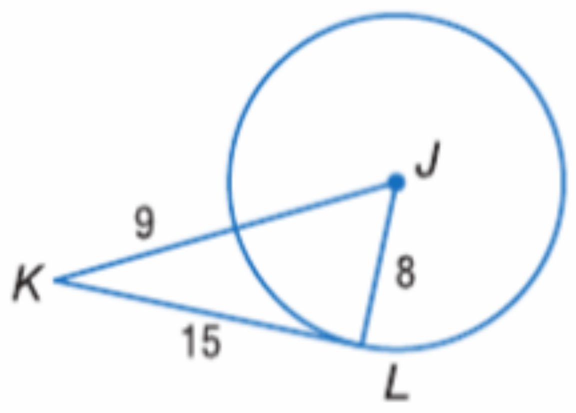
مثال يكون المستقيم ℓ مماسا للدائرة $\odot S$ إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.



سوف تثبت كلا جزئي النظرية 5.10 في التمرينين 32 و 33.

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في الدائرة $\odot J$. حدّد إذا كان $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot J$. برّر إجابتك.



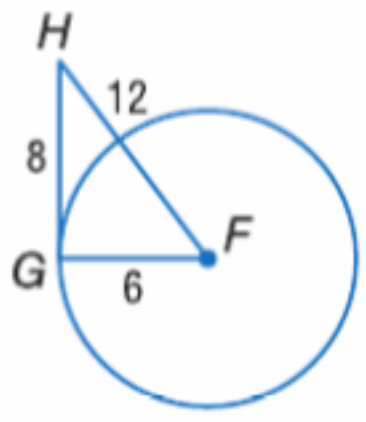
اختبر لتعلم ما إذا كان المثلث $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8 + 9)^2$ نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بسط

$\triangle JKL$ مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي JLK. إذًا $\overline{KL}$ عموديّ على نصف القطر $\overline{JL}$ عند النقطة L. ولذلك، بموجب النظرية 5.10، $\overline{KL}$ مماس على الدائرة $\odot J$.

تمرين موجّه

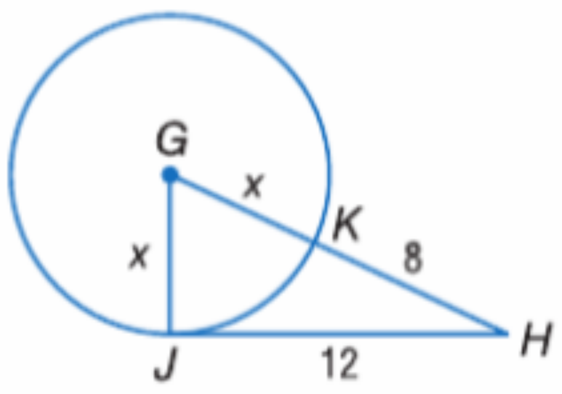


2. حدّد إذا كان $\overline{GH}$ مماسا للدائرة $\odot F$. وبرّر إجابتك.

يمكنك استخدام النظرية 5.10 أيضا لتحديد القيم الناقصة.

مثال 3 استخدام المماس لإيجاد قياسات مجهولة

$\overline{JH}$ مماس على الدائرة $\odot G$ عند النقطة J. أوجد قيمة x.



بموجب النظرية 5.10، فإن $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$. إذًا، فالمثلث $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.

$GJ^2 + JH^2 = GH^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 12^2 = (x + 8)^2$ $GJ = x$ و $JH = 12$ و $GH = x + 8$

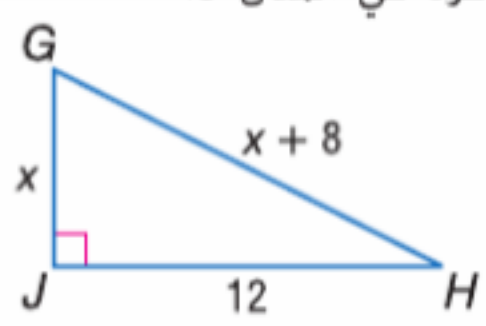
$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$ بالضرب

$80 = 16x$ بالتبسيط

$5 = x$ بقسمة كل طرف على 16.

نصيحة في حل المسائل

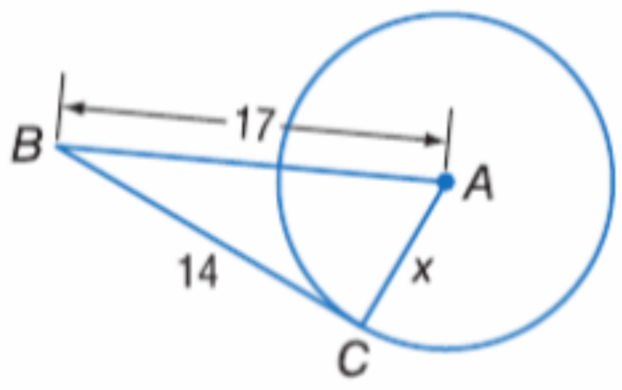
الاستنتاج المنطقي يمكنك استخدام إستراتيجية حل *المسائل الأبسط* عبر رسم المثلثات القائمة وتسميتها بدون الدوائر. ويوضح الشكل أدناه رسما للمثلث الوارد ذكره في المثال 3.



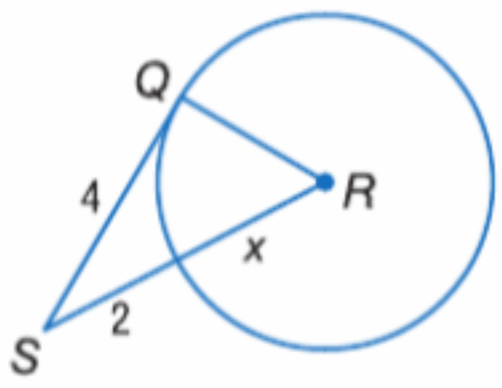
تمرين موجّه

أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

3A.



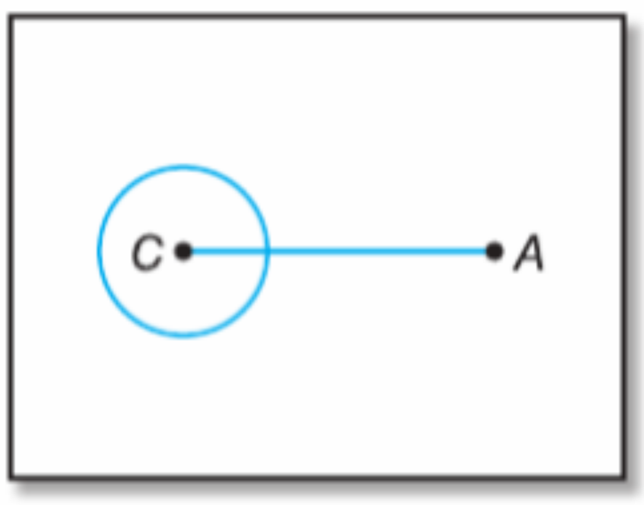
3B.



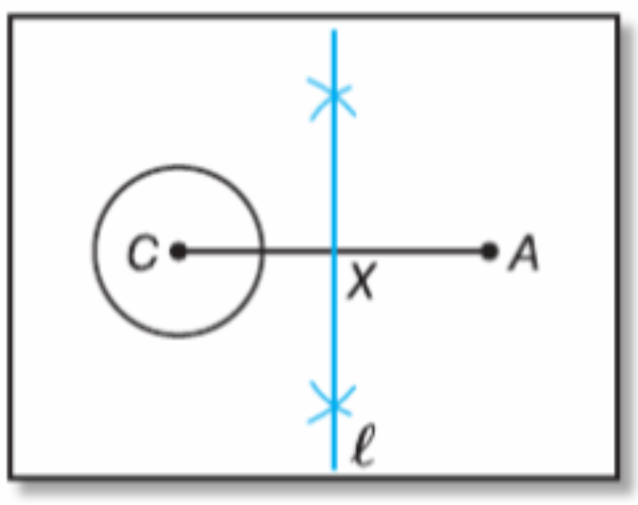
يمكنك استخدام النظريتين 5.8 و 5.10 لإنشاء مستقيمٍ مماس على دائرة.

الإنشاء المستقيم المماس على دائرة في نقطة خارجية

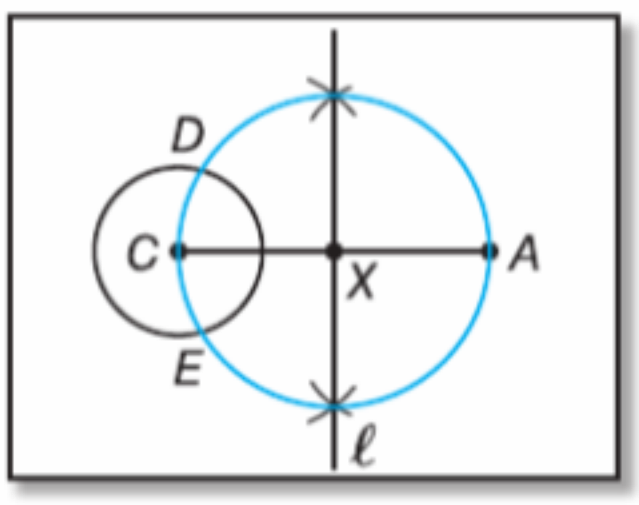
الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرة C ونقطة A خارج الدائرة C. ثم ارسم $\overline{CA}$.



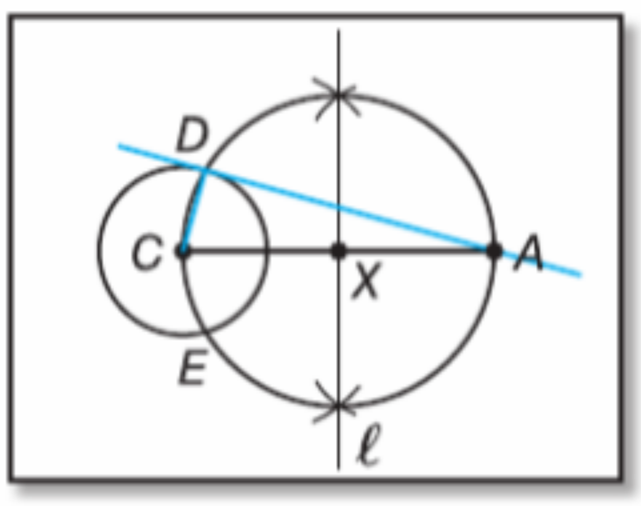
الخطوة 2 أنشئ المستقيم ℓ. وهو المنصف العمودي لـ $\overline{CA}$. سمِّ نقطة التقاطع X.



الخطوة 3 أنشئ دائرةً X نصف قطرها $\overline{XC}$. سَمِّ نقطتي تقاطع الدائرتين D و E.



الخطوة 4 ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overline{DC}$. المثلث $\triangle ADC$ محاط بنصف دائرة. إذًا، الزاوية $\angle ADC$ زاوية قائمة و $\overleftrightarrow{AD}$ مماس على الدائرة $\odot C$.



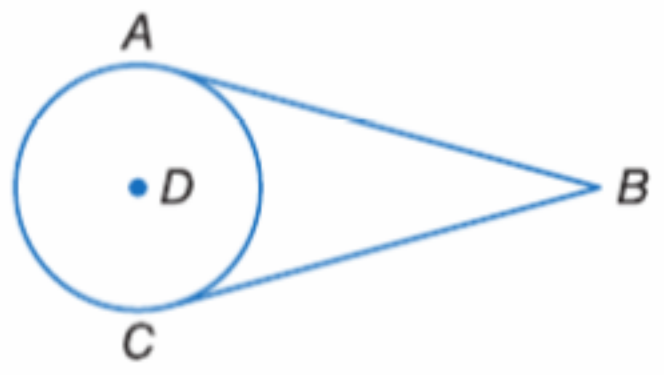
سوف تبرر هذا الإنشاء في التمرين 36 وستنشئ مستقيمًا مماسا على دائرةٍ في نقطةٍ على محيطها في التمرين 34.

يمكن أن يكون هناك أكثر من مستقيمٍ مماس على الدائرة نفسها.

نظرية 5.11

الشرح إذا كانت قطعتان مستقيمتان مرسومتان من نقطةٍ واحدةٍ خارج الدائرة مماسيتين على تلك الدائرة، فهما متطابقتان.

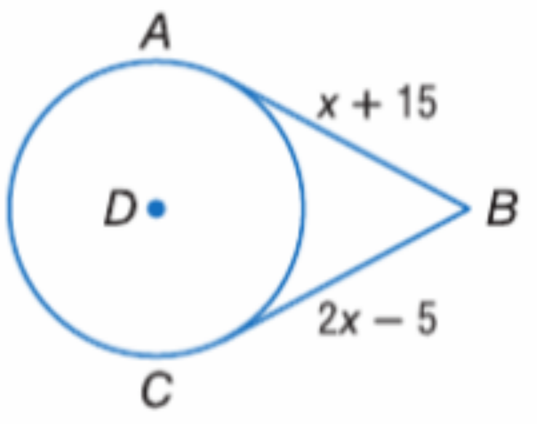
مثال إذا كانت القطعتان المستقيمتان $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسيتين على الدائرة $\odot D$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



سوف تثبت النظرية 5.11 في التمرين 28 .

مثال 4 استخدام المماسات المتطابقة لإيجاد القياس

الجبر $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسيتان على $\odot D$. أوجد قيمة x.



$AB = CB$ المماسان المرسومان من نقطة خارجية واحدة متطابقتان.

$x + 15 = 2x - 5$ بالتعويض

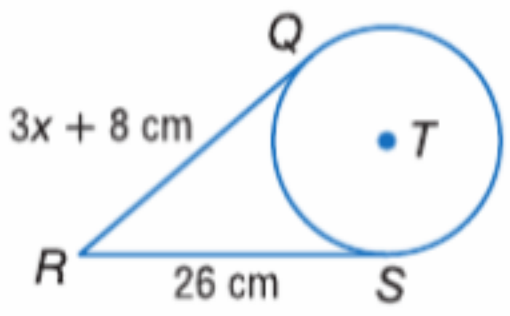
$15 = x - 5$ بطرح x من كل طرف

$20 = x$ بجمع 5 إلى كل طرف

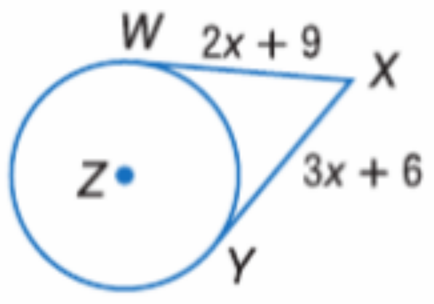
تمرين موجّه

الجبر أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

4A.



4B.



2 المضلعات المحيطة لدوائر

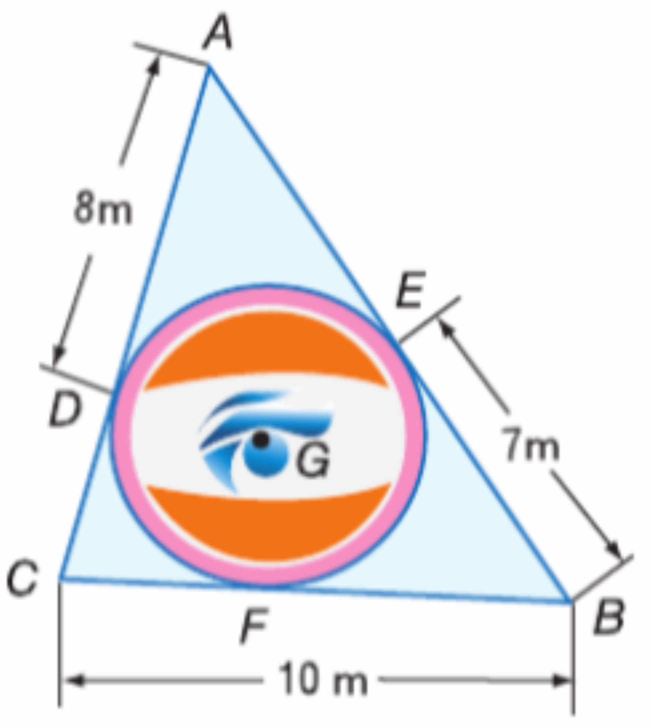
المضلعات المحيطة لدوائر يكون المضلع محيطا لدائرةٍ إذا كان كل ضلعٍ من أضلاع المضلّع مماسا للدائرة.

المضلعات المحيطة لدائرة	المضلعات غير المحيطة لدائرة
	

انتبه!
تحديد المضلعات المحيطة بدوائر إن كون دائرةٍ مماسيةً على ضلعٍ أو أكثر في مضلعٍ لا يعني كون المضلع محيطًا بالدائرة، وذلك كما هو موضّح في المجموعة الثانية من الأشكال.

يمكنك استخدام النظرية 5.11 لإيجاد القياس المجهول في المضلعات المحيطة لدوائر.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد القياس في مضلعات محيطة بدائرة



تصميم الرسوميات يعطي مصمم رسومياتٍ توجيهات لتشكيل نسخة مكبرةٍ عن الشعار المستطيل الموضح. فإذًا كان المثلث $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة $\odot G$، أوجد محيط المثلث $\triangle ABC$.

الخطوة 1 أوجد القياس المجهول.

بما أن المثلث $\triangle ABC$ محيط بالدائرة $\odot G$، فإن $\overline{AE}$ و $\overline{AD}$ مماسان للدائرة $\odot G$، شأنهما شأن $\overline{BE}$ و $\overline{BF}$ و $\overline{CF}$ و $\overline{CD}$. ولذلك، $\overline{AE} \cong \overline{AD}$، $\overline{BF} \cong \overline{BE}$، و $\overline{CF} \cong \overline{CD}$.

إذًا، $AE = AD = 8$ m، $EB = FB = 7$ m.

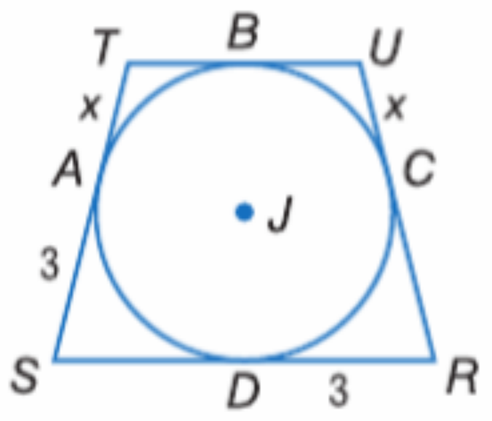
بموجب جمع القطع المستقيمة، فإن $CF + FB = CB$. إذًا، $CF = CB - FB = 10 - 7$ أو 3 m. إذًا، $CD = CF = 3$ m.

الخطوة 2 أوجد محيط المثلث $\triangle ABC$.

المحيط $= AE + EB + BC + CD + DA$
$= 8 + 7 + 10 + 3 + 8$ أو 36

إذًا، محيط المثلث $\triangle ABC$ يساوي 36 m.

تمرين موجّه



5. يرسم الشكل الرباعي $RSTU$ حول الدائرة $\odot J$. فإذا كان المحيط يساوي 18 وحدة، أوجد قيمة x.

التحقق من فهمك

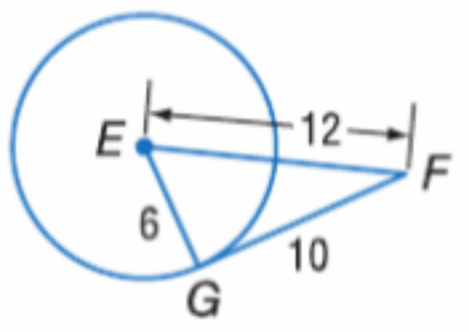
مثال 1

1. انسخ الشكل الموضح، وارسم المماسات المشتركة. فإن لم تكن هناك مماسات مشتركة، فقل لا مماسات مشتركة.

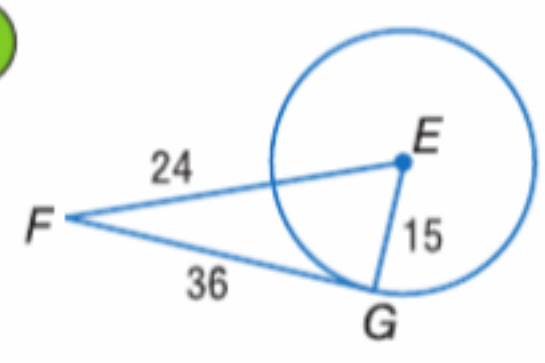
مثال 2

حدّد ما إذا كان $\overline{FG}$ مماسا للدائرة $\odot E$. برّر إجابتك.

2.

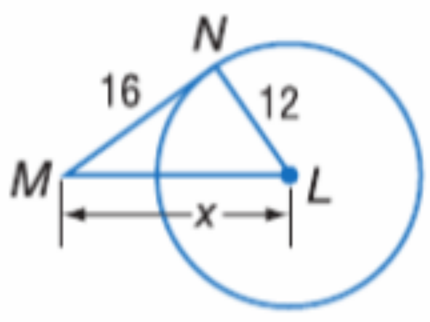


3

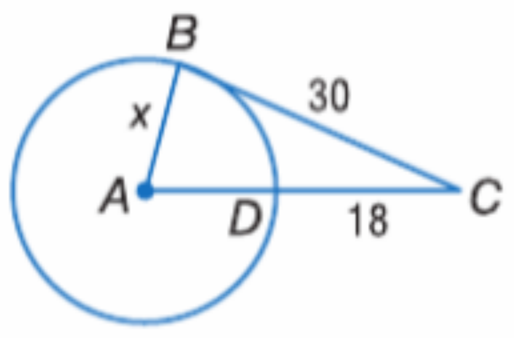


المثالان 3 و 4 **أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.**

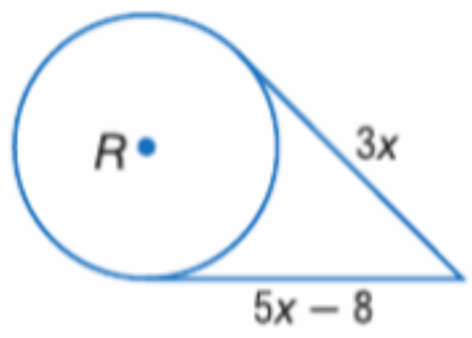
4.



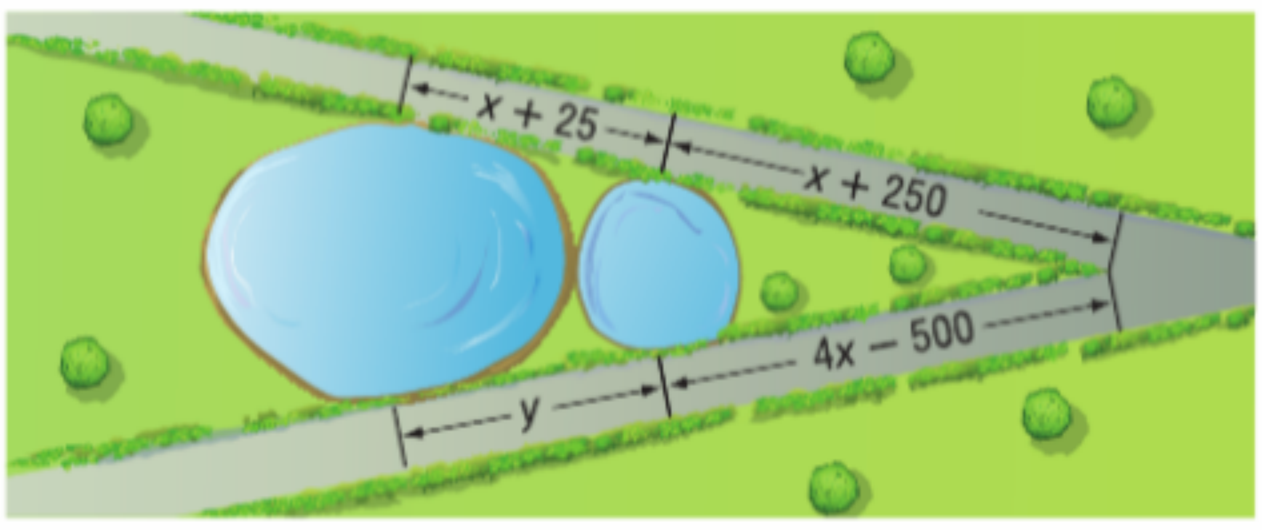
5.



6.



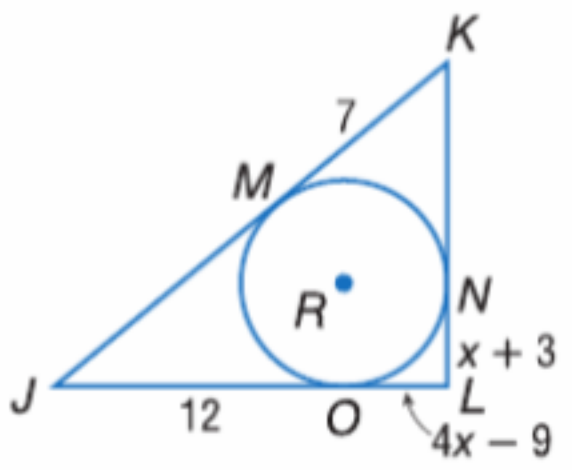
.7 **مهندس المناظر الطبيعية** يرصف مهندس مناظرٍ طبيعيةٍ ممشيين مماسيين على البركتين شبه الدائريتين الموضحتين. الأطوال معطاةٌ بالأمتار. أوجد قيمتيٍ x و y.



مثال 5 **.8** **الاستنتاج المنطقي** المثلث JKL محيط للدائرة $\odot R$.

.a أوجد قيمة x.

.b أوجد محيط المثلث $\triangle JKL$.



التمرين وحل المسائل

مثال 1 **انسخ كل شكل من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماسات مشتركة، فقل *لا مماسات مشتركة*.**

9.

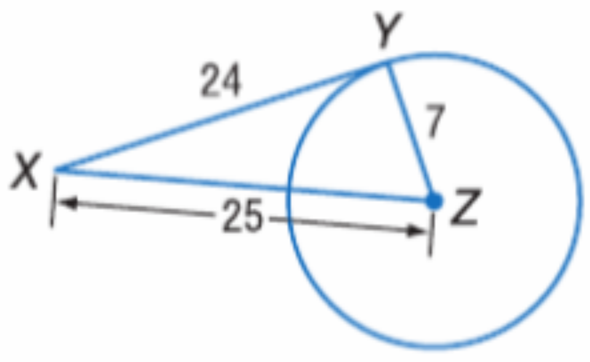
10.

11.

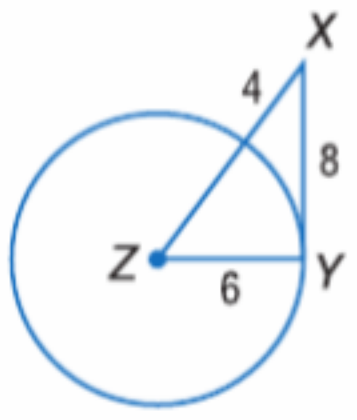
12.

مثال 2 **حدد ما إذا كان كل $\overline{XY}$ مماسيًا على الدائرة المعطاة. وبرر إجابتك.**

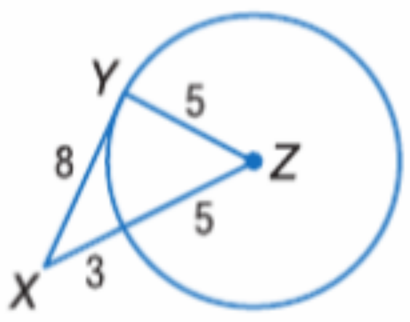
13.



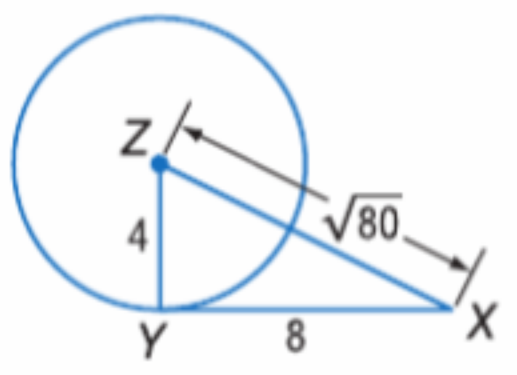
14.



15

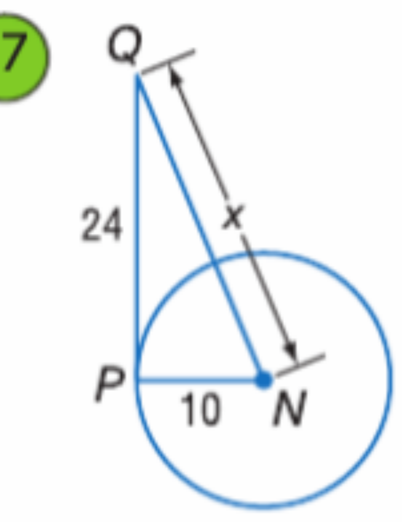


16.

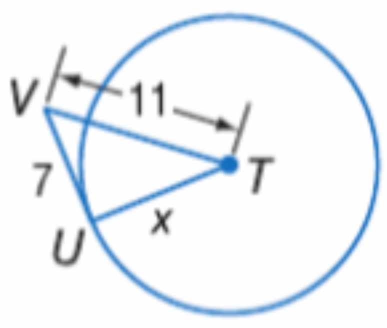


المثالان 3 و 4 **أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسيّة مماسية. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة.**

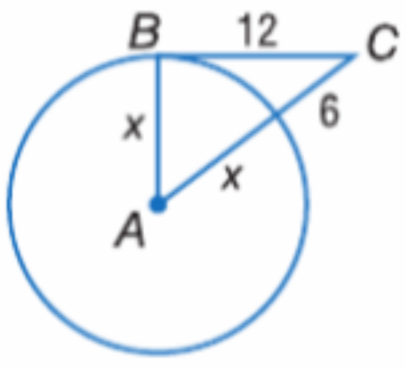
17.



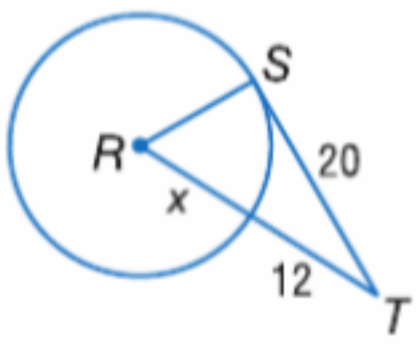
18.



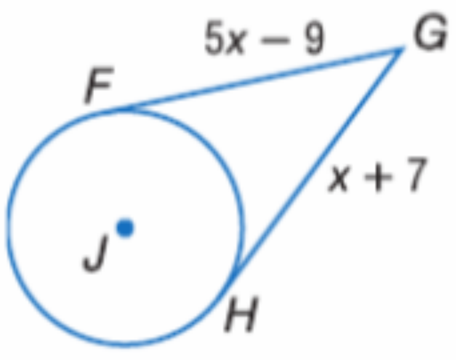
19.



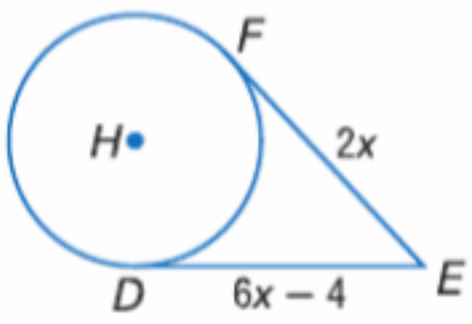
20.



21.



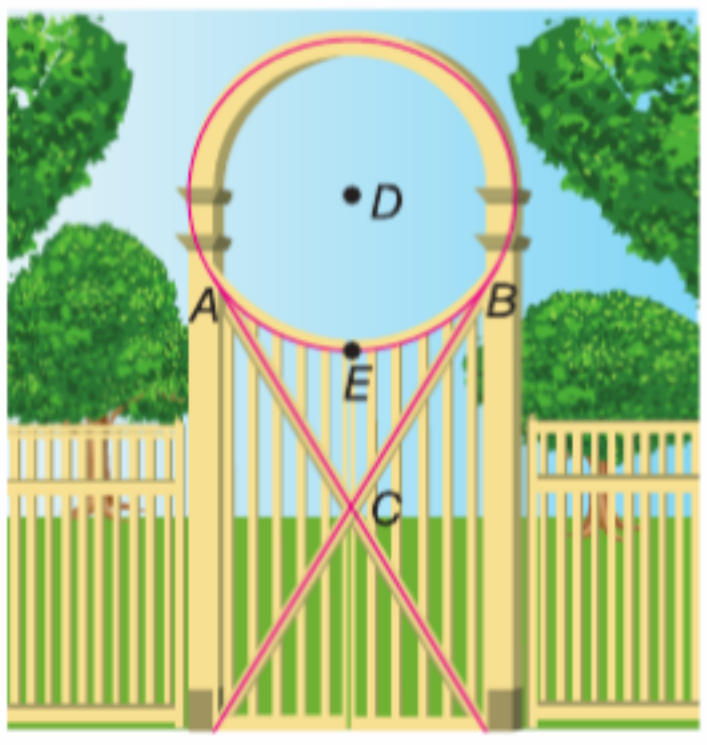
22.



23. **العرائش** في العريشة الدائرية الموضحة، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ مماسيتان للدائرة $\odot D$. يساوي طول نصف قطر الدائرة 26 cm و $EC = 20$ cm. أوجد كلاً من القياسات مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة.

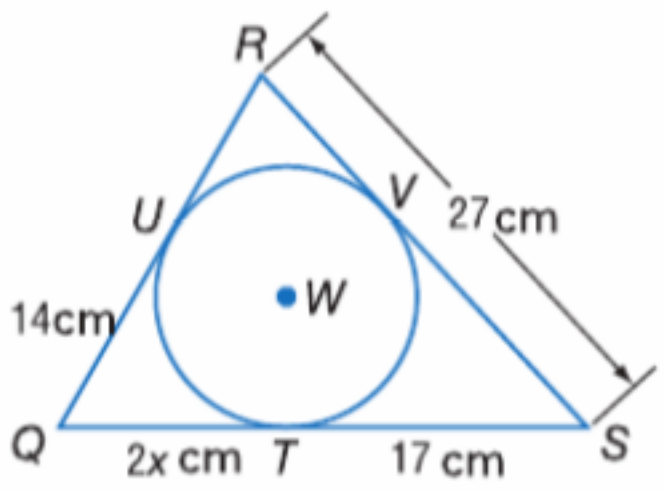
a. AC

b. BC

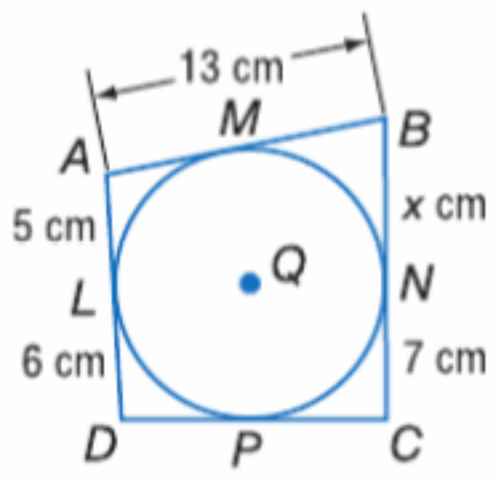


مثال 5 **الاستنتاج المنطقي** **أوجد قيمة x. ثم أوجد المحيط.**

24.

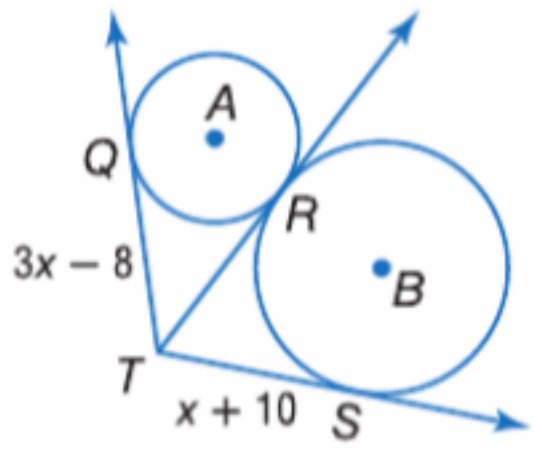


25.

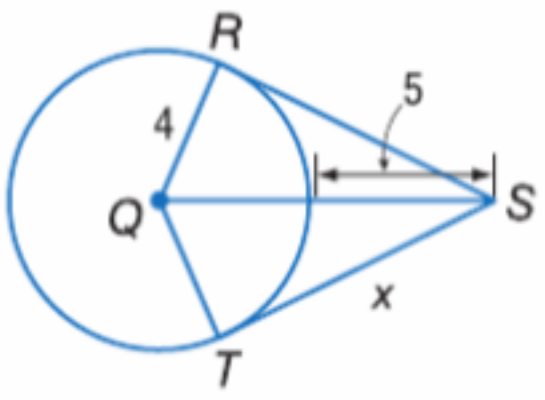


أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مئة. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

26.



27.

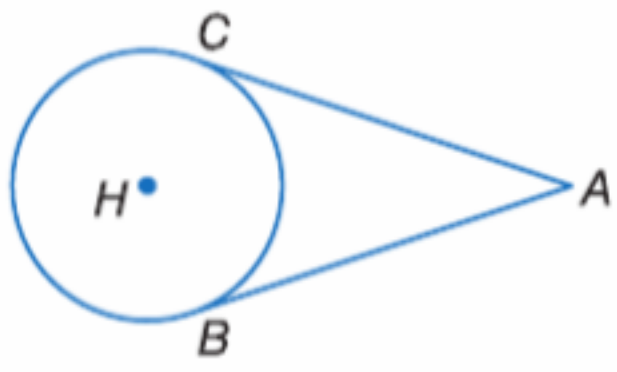


اكتب النوع المحدّد من البراهين.

28. البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 5.11

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس للدائرة $\odot H$ عند C.
$\overline{AB}$ مماس للدائرة $\odot H$ عند B.

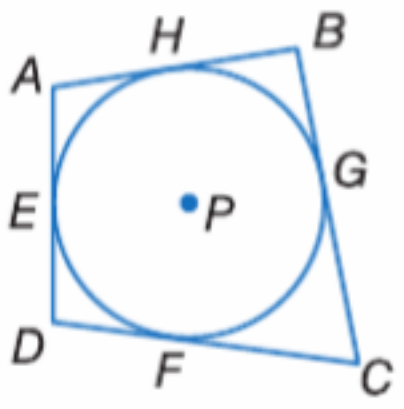
المطلوب إثباته: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$



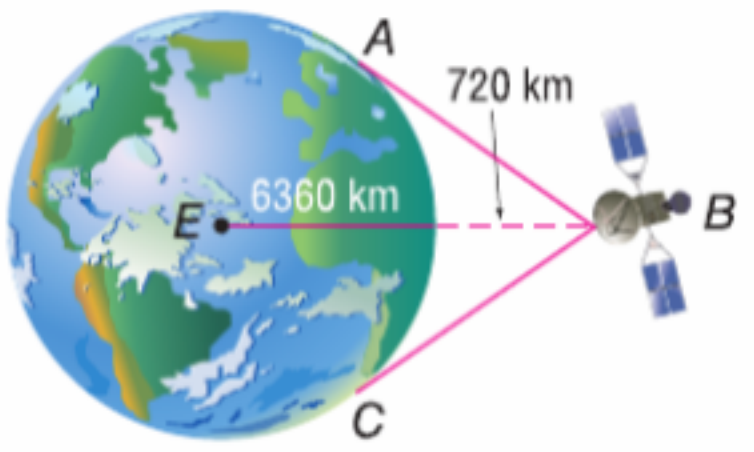
29. البرهان المكوّن من عمودين

المعطى: شكل رباعي $ABCD$ محيط للدائرة $\odot P$.

المطلوب إثباته: $AB + CD = AD + BC$

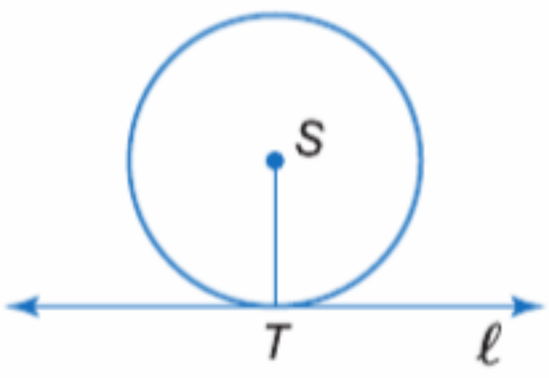


30. **الأقمار الصناعية** يرتفع قمر صناعي مسافة 720 km فوق سطح الأرض، التي يساوي نصف قطرها 6360 km. وتقع المنطقة المرئية من القمر الصناعي على سطح الأرض بين خطي المماس $\overline{BA}$ و $\overline{BC}$. ما طول $\overline{BA}$؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.



31. **الحطام الفضائي** يشير مصطلح *الحطام المداري* إلى المواد التي تخلّفها الرحلات الفضائية والتي لا تزال تدور حول الكرة الأرضية. في عام 2007، طرحت مركبةٌ فضائيةٌ أسطوانةً من الأمونيا وزنها 635 kg. افترض أن ارتفاع الإسطوانة 435 km. فما هي المسافة من الإسطوانة إلى أبعد نقطةٍ على سطح الأرض يمكن رؤية الإسطوانة منها؟ افترض أن نصف قطر الأرض يساوي 6360 km. قرّب إلى أقرب كيلومترٍ واشتمل على رسمٍ تخطيطي لهذه الحالة ضمن حلّك.

32. **البرهان** اكتب برهانا غير مباشرٍ لتبيّن أنه إذا كان مستقيمٌ مماسا لدائرة، إذًا فهو عموديٌ على نصف قطر الدائرة. (الجزء 1 من النظرية 5.10)

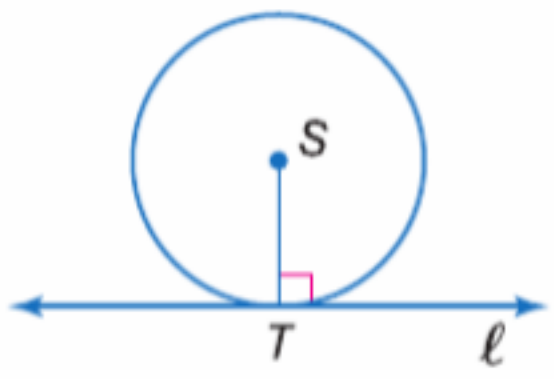


المعطيات: ℓ مماس للدائرة $\odot S$ عند T؛ $\overline{ST}$ هو نصف قطر الدائرة $\odot S$.

المطلوب برهانه: $\overline{ST} \perp \ell$

(تلميح: افترض أن ℓ ليس عموديًا $\perp$ على $\overline{ST}$)

33. **البرهان** اكتب برهانا غير مباشرٍ تبيّن فيه أنه إذا كان مستقيمٌ عموديًا على نصف قطر دائرةٍ عند نقطته الطرفية، إذًا فالمستقيم مماس للدائرة. (الجزء 2 من النظرية 5.10)



المعطيات: $\overline{ST} \perp \ell$؛ $\overline{ST}$ نصف قطر للدائرة $\odot S$.

المطلوب برهانه: ℓ مماس للدائرة $\odot S$.

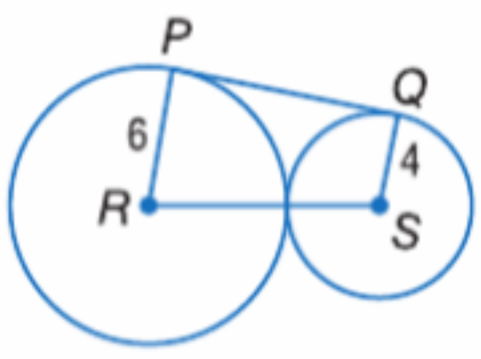
(تلميح: افترض أن ℓ ليسمماسا على الدائرة $\odot S$.)

34. **الأدوات** أنشئ خط مماس على دائرةٍ في نقطةٍ على محيطها.

استخدم فرجارًا لرسم الدائرة $\odot A$. اختر نقطةً P على محيط الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$ ثم أنشئ قطعةً مستقيمةً مارةً بالنقطة P وعموديةً على $\overleftrightarrow{AP}$. سمّ خط المماس t. واشرح كل خطوةٍ وبرّرها.

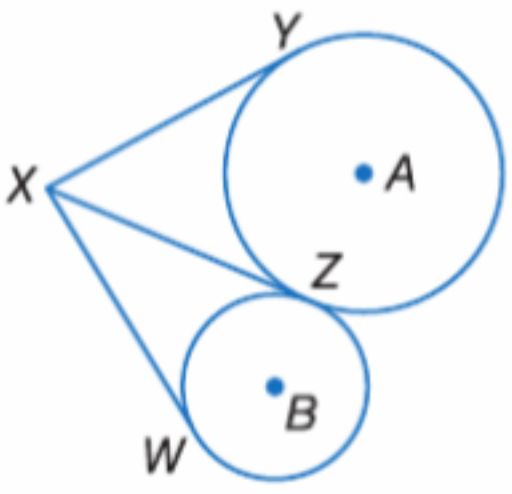
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **التحدي** $\overline{PQ}$ مماس للدائرة R و S. أوجد الطول PQ. واشرح أستنتاجك.



36. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثًا محيطا ومثلثًا محاطا.

37. **التبرير** في الشكل، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ مماسان للدائرة $\odot A$. $\overline{XZ}$ و $\overline{XW}$ مماسان للدائرة $\odot B$. اشرح كيف يمكن أن تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ و $\overline{XW}$ جميعها متطابقة إذا كان للدوائر أنصاف أقطار مختلفة.



38. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن رسم مماس من نقطةٍ تقع في أي مكان خارج الدائرة أو على محيطها أو بداخلها؟ اشرح.

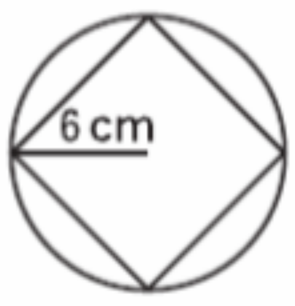
تدريب على الاختبار المعياري

39. نصف قطر الدائرة $\odot P$ يساوي 10 cm. و $\overline{ED}$ مماس على الدائرة عند النقطة D. F تقع على الدائرة $\odot P$ والقطعة المستقيمة $\overline{EP}$ في الوقت نفسه. فإذا كان طول $ED = 24$ cm، فما طول $\overline{EF}$؟

A 10 *cm* **C** 21.8 *cm*

B 16 *cm* **D** 26 *cm*

40. الإجابة القصيرة يحاط مربعٌ في دائرة نصف قطرها 6 cm. أوجد طول كل ضلعٍ في المربع.

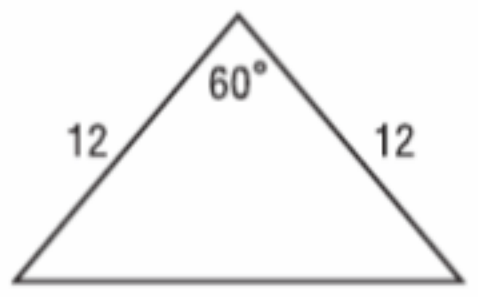


41. جبريا أيّ مما يلي يوضح التحليل الكامل للعلاقة $25x^2 - 5x$ إلى عواملها الأولية؟

F $5x(x)$ **H** $x(x - 5)$

G $5x(5x - 1)$ **J** $x(5x - 1)$

42. SAT/ACT ما هو محيط المثلث المعروض أدناه؟



A 12 وحدة **D** 36 وحدة

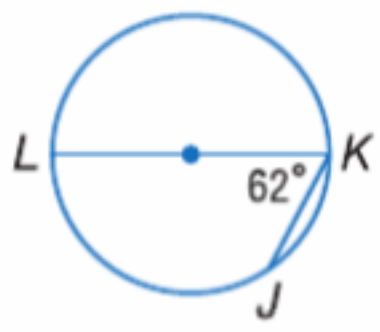
B 24 وحدة **E** 104 وحدات

C 34.4 وحدة

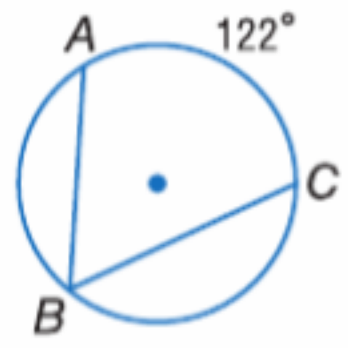
مراجعة شاملة

إيجاد كل قياس. (الدرس 4-5)

43. $m\widehat{JK}$

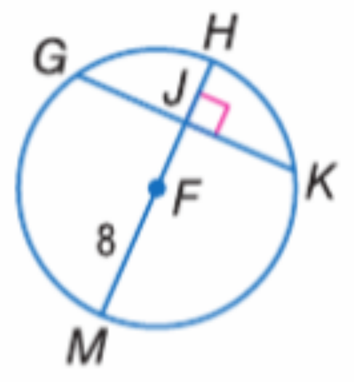


44. $m\angle B$



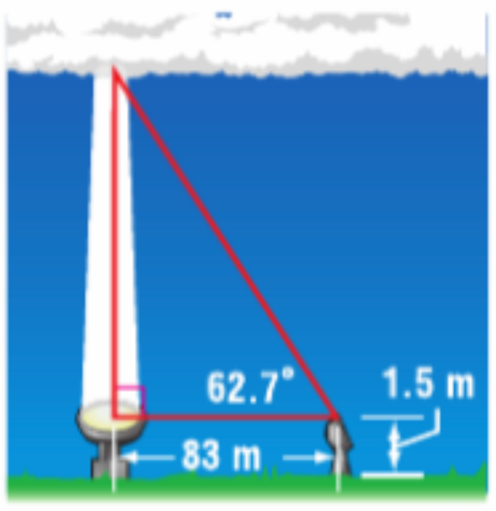
45. $m\widehat{VX}$

في الدائرة $\odot F$، $GK = 14$ و $m\widehat{GHK} = 142$. أوجد كلا من القياسات. وقرّب إلى أقرب مئة. (الدرس 3-5)



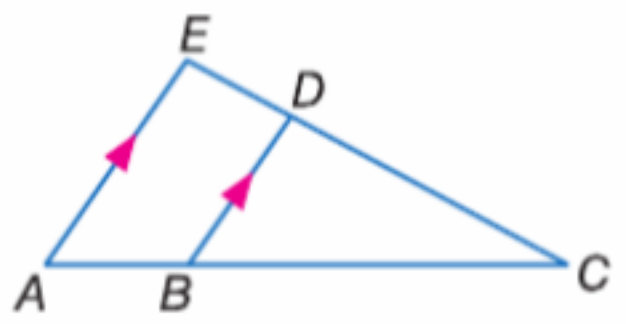
46. $m\widehat{GH}$ **47.** JK **48.** $m\widehat{KM}$

49. الأرصاد الجوية يدعى ارتفاع قاعدة كتلةٍ من السحب بالسقف. وجه خبيرٌ للأرصاد الجوية في إحدى الليالي ضوءا كشافا باتجاه رأسي على السحب كي يرصد السقف. وباستخدام جهازٍ لقياس الزوايا، وهو جهاز ضوئي مزود بتلسكوب دوار، يبعد مسافة 83 m عن الضوء الكشاف ويرتفع 1.5 m فوق سطح الأرض. توصل إلى أن زاوية الارتفاع تساوي 62.7°. فكم كان ارتفاع السقف؟

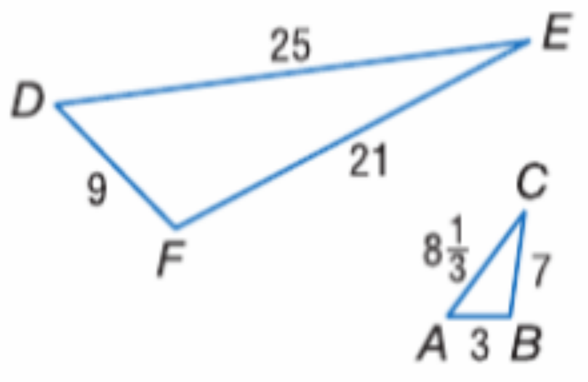


حدد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه.واشرح استنتاجك.

50.



51.



مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

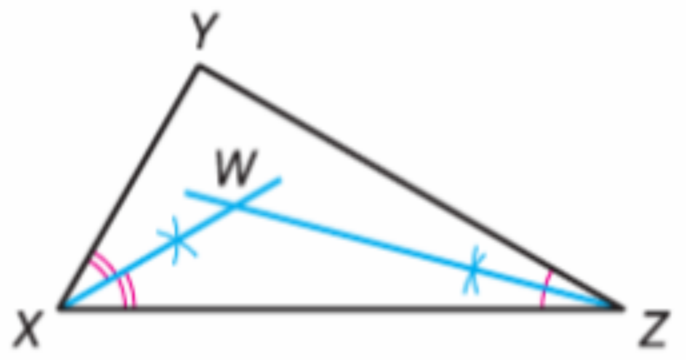
52. $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **53.** $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **54.** $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$

التوسع 5-5 مختبر الهندسة الدوائر المحيطة والمحاطة

في هذا المختبر، ستقوم بإجراء إنشاءات تتضمن دائرةً محيطيةً أو محاطة.

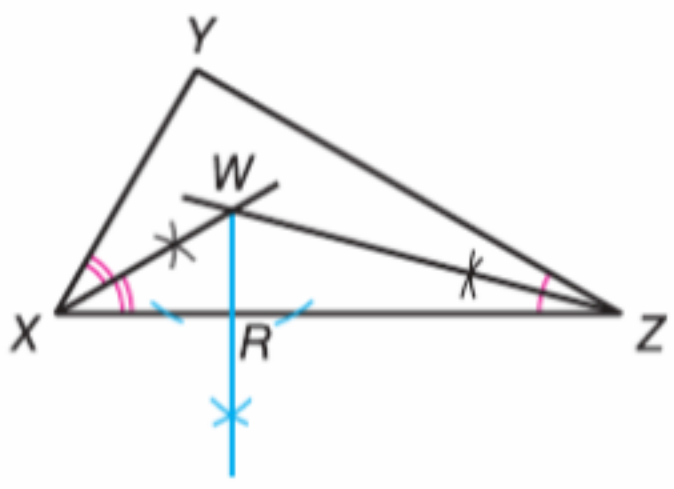
النشاط 1 إنشاء دائرةً محاطة بمثلث

الخطوة 1



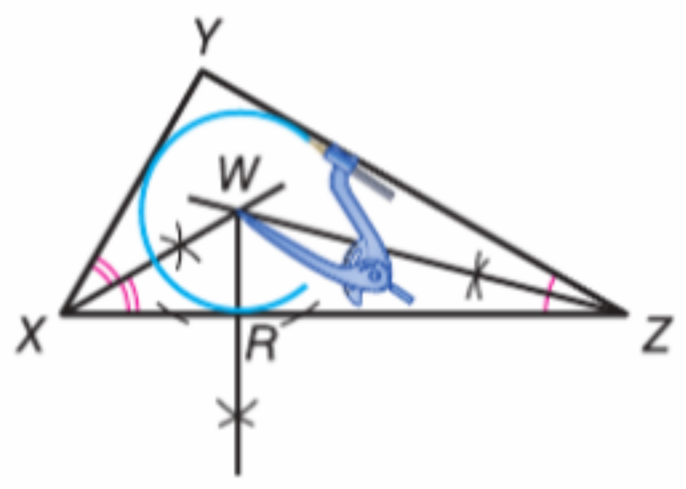
ارسم مثلثًا XYZ وأنشئ منصفي زاويتين في المثلث لتحديد نقطة تلاقي المنصفات W.

الخطوة 2



أنشئ قطعةً مستقيمةً عموديةً على أحد الأضلاع تمرّ من خلال نقطة تلاقي المنصفات. وسمِّ نقطة التقاطع R.

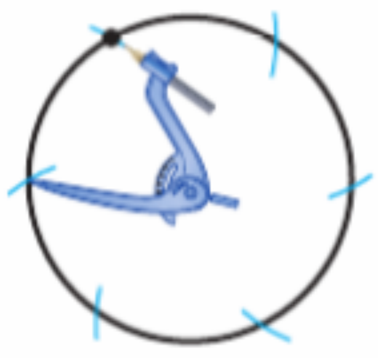
الخطوة 3



افتح الفرجار بمقدار طول $\overline{WR}$. ضع رأس الفرجار على النقطة W وارسم دائرةً يساوي نصف قطرها ذلك الطول.

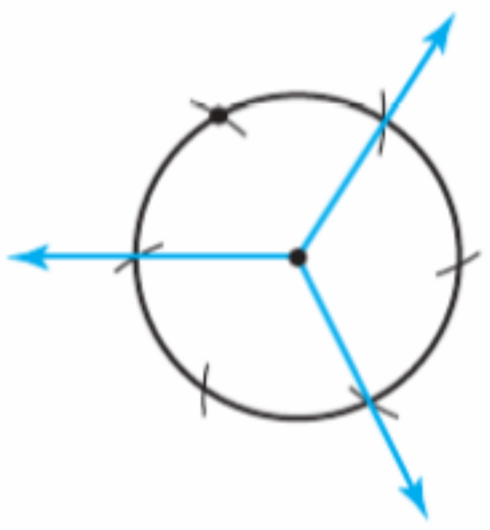
النشاط 2 إنشاء مثلث يحيط بدائرة

الخطوة 1



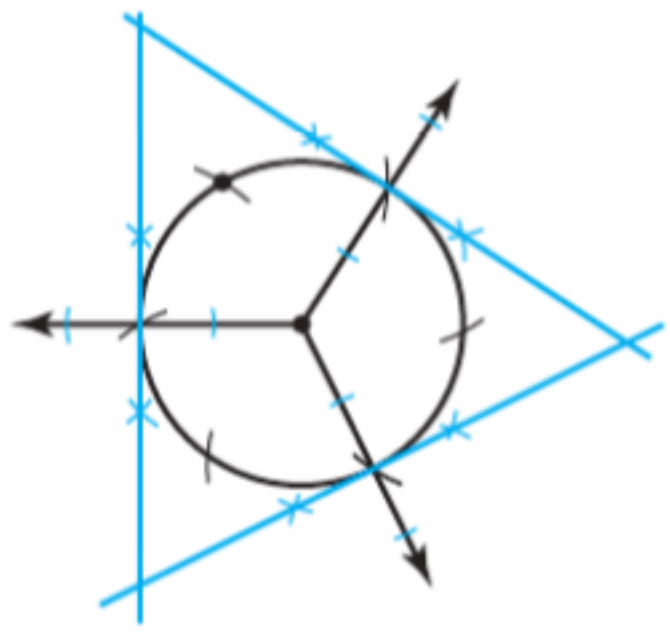
أنشئ دائرةً وارسم نقطة على محيطها. استخدم فتحة الفرجار التي استخدمتها لإنشاء الدائرة لإنشاء قوس على محيط الدائرة من تلك النقطة. استمر كما هو موضح.

الخطوة 2



ارسم أشعةً من المركز وتمر بالأقواس المنشأة على المحيط بالتناوب.

الخطوة 3



أنشئ مستقيما عموديًا على كل شعاع.

التمثيل بالنماذج

.1 ارسم مثلثًا قائما وأحط دائرةً به.

.2 أحط سداسي أضلاعٍ منتظمٍ بدائرة. ثم أحط مثلثًا متساوي الأضلاع في دائرة. (تلميح:الخطوة الأولى في كل عملية إنشاء تطابق الخطوة 1 في النشاط 2.)

.3 أحط مربعا بدائرة. ثم أحط دائرةً بمربع.

.4 **التحدّي** أحط دائرةً بسداسي أضلاعٍ منتظم.

الدرس 5-6

القاطع والمماس وقياس الزوايا

.. السابق

- أوجدت قياسات قطعٍ تشكلها مماسات على دائرة.

.. الحالي

1 إيجاد قياسات الزوايا التي تشكلها مستقيمات تتقاطع على محيط دائرة أو بداخلها.

2 إيجاد قياسات الزوايا التي تشكلها مستقيمات تقاطع خارج الدائرة.

.. لماذا؟

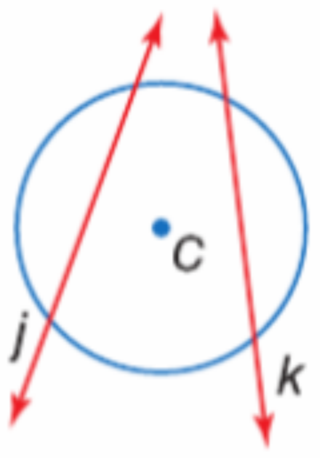
- يساوي مجال رؤية الإنسان الطبيعي حوالي 180°. ولمعظم آلات التصوير مجال رؤية أضيق بكثيرٍ يقع بين 20° و 50°. وتحدّد زاوية الرؤية هذه جزء الجسم المنحني الذي يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على فلمها.

المفردات الجديدة
القاطع secant

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 نقاط التقاطع على محيط دائرةٍ أو داخلها

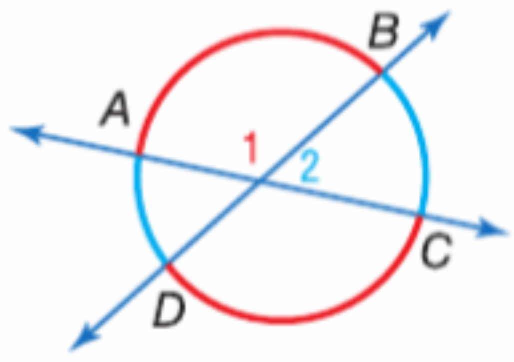
القاطع هو مستقيمٌ يقطع دائرةً في نقطتين بالتحديد. المستقيمان j و k قاطعان للدائرة $\odot C$.



عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة، فالزوايا المتشكلة تتعلق بالأقواس التي يقطعانها.

النظرية 5.12

الشرح إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتشكلة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين اللذين تحصرهما الزاوية والزاوية المقابلة لها بالرأس.



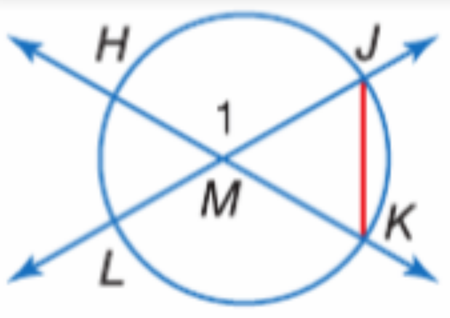
مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

البرهان

المعطيات: $\overleftrightarrow{HK}$ و $\overleftrightarrow{JL}$ يتقاطعان عند M.

المطلوب إثباته: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$

البرهان:

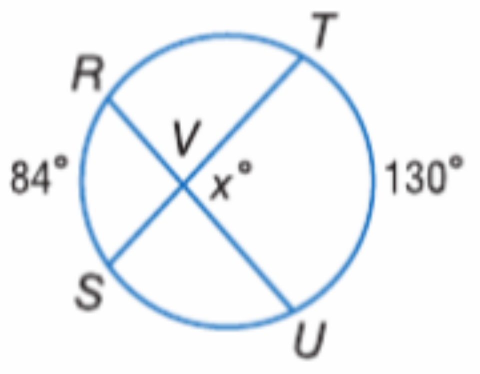


العبارات	المبرّرات
1. $\overleftrightarrow{HK}$ و $\overleftrightarrow{JL}$ يتقاطعان عند M.	1. المعطيات
2. $m\angle 1 = m\angle MJK + m\angle MKJ$	2. نظرية الزاوية الخارجية
3. $m\angle MJK = \frac{1}{2}m\angle\widehat{LK}, m\angle MKJ = \frac{1}{2}m\angle\widehat{JH}$	3. يساوي قياس الزاوية المحيطية ∠ نصف قياس القوس المحصور.
4. $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\angle\widehat{LK} + \frac{1}{2}m\angle\widehat{JH}$	4. التعويض
5. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$	5. خاصية التوزيع

مثال 1 استخدام الأوتار أو القواطع المتقاطعة

أوجد قيمة x.

a.

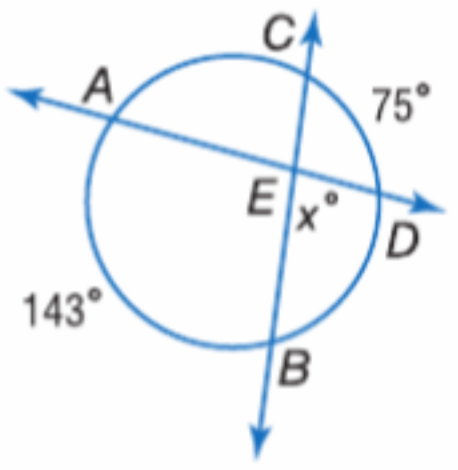


$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{TU})$ النظرية 5.12

$x = \frac{1}{2}(84 + 130)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(214)$ أو 107 بسط

b.



الخطوة 1 أوجد قياس $m\angle AEB$.

$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ النظرية 5.12

$= \frac{1}{2}(143 + 75)$ بالتعويض

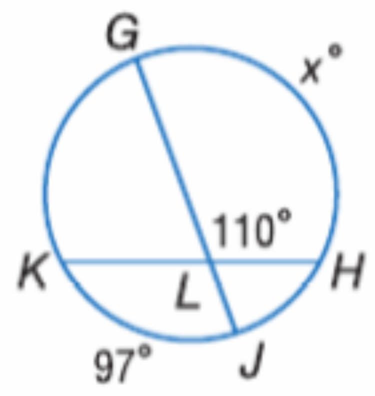
$= \frac{1}{2}(218)$ أو 109 بسط

الخطوة 2 أوجد قيمة x، قياس الزاوية $\angle DEB$.

$\angle AEB$ و $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

إذًا، $x = 180 - 109$ أو 71.

c.



$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{GH} + m\widehat{KJ})$ النظرية 5.12

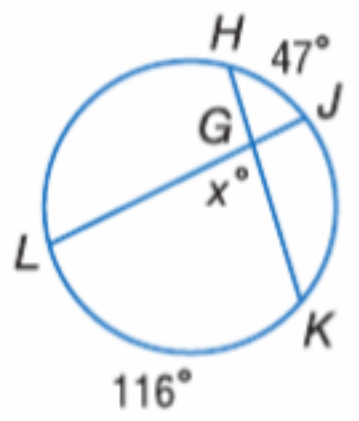
$110 = \frac{1}{2}(x + 97)$ بالتعويض

$220 = (x + 97)$ بضرب كل طرف بـ 2

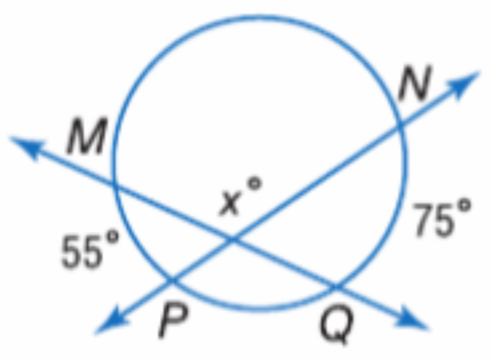
$123 = x$ بطرح 97 من كل طرف

تمرين موجّه

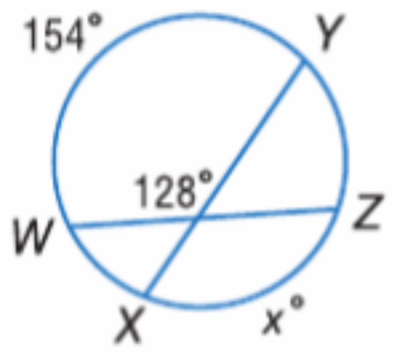
1A.



1B.



1C.



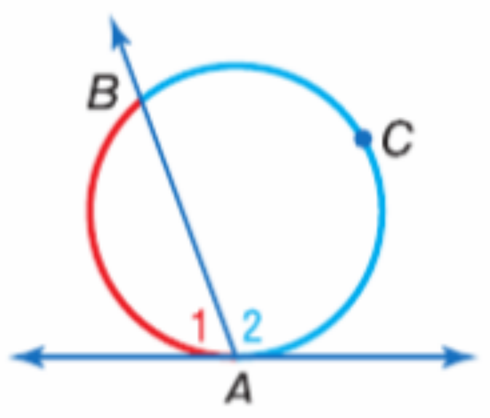
> **نصيحة دراسية**
>
> **طريقة بديلة**
>
> في المثال 1b، يمكن إيجاد قياس الزاوية $m\angle DEB$ أيضًا عبر البدء بإيجاد مجموع قياسي $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$.
>
> $m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$
>
> $= 360 - (m\widehat{AC} + m\widehat{CD})$
>
> $= 360 - (143 + 75)$
>
> $= 142$
>
> $m\angle DEB$
>
> $= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$
>
> $= \frac{1}{2}(142) = 71$

تذكر أن النظرية 5.6 تنص على أن قياس زاويةٍ محيطيةٍ يساوي نصف قياس القوس المحصور. فإذا كان أحد ضلعي هذه الزاوية مماسا للدائرة، فإن هذه العلاقة تبقى صحيحةً أيضا.

النظرية 5.13

الشرح إذا تقاطع قاطعٌ ومستقيمٌ عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متشكلة يساوي نصف قياس القوس المحصور.

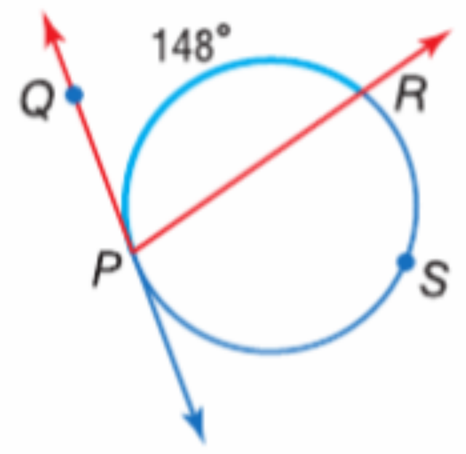
مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ACB}$



سوف تثبت النظرية 5.13 في التمرين 331.

مثال 2 استخدام القواطع والمماسات المتقاطعة

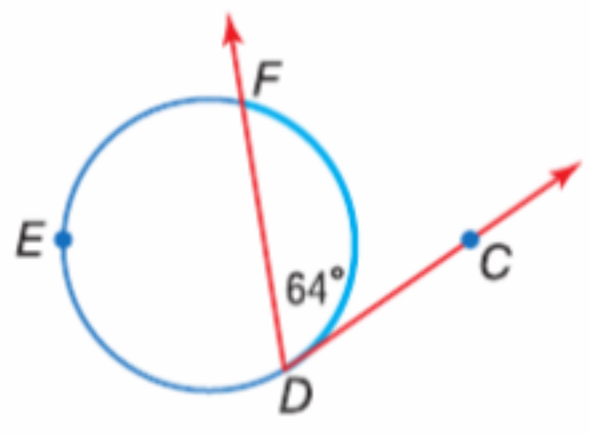
أوجد قياس كل مما يلي.



a قياس $\angle QPR$

$m\angle QPR = \frac{1}{2} m\widehat{PR}$ نظرية 5.13

$= \frac{1}{2}(148) = 74$ بالتعويض والتحويل لأبسط صورة



b. $m\widehat{DEF}$

$m\angle CDF = \frac{1}{2} m\widehat{FD}$ نظرية 5.13

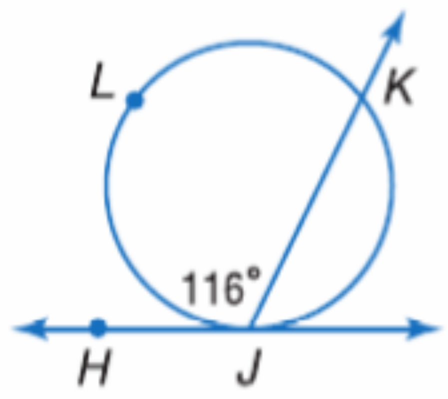
$64 = \frac{1}{2} m\widehat{FD}$ بالتعويض

$128 = m\widehat{FD}$ اضرب كل طرف بـ 2

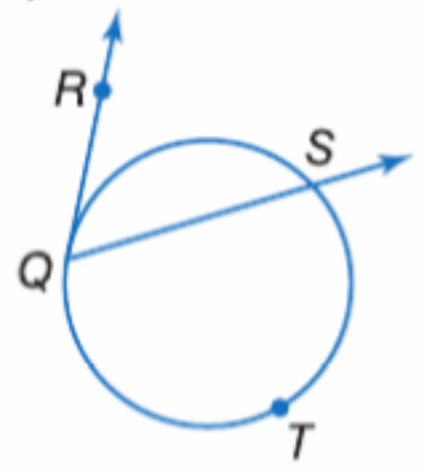
$m\widehat{DEF} = 360 - m\widehat{FD} = 360 - 128 = 232$

تمرين موجه

2A. أوجد قياس $m\widehat{JLK}$.



2B. أوجد قياس $m\angle RQS$ إذا كان $m\widehat{QTS} = 238$.



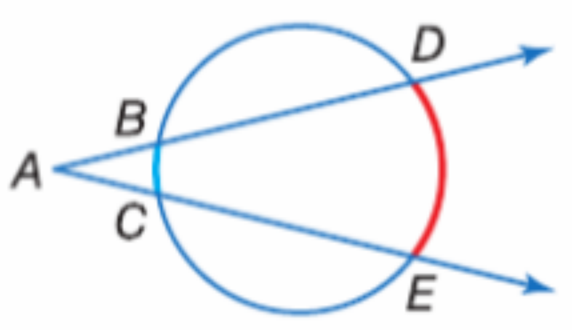
2 نقاط التقاطع خارج الدائرة

يمكن أن تلتقي القواطع والمماسات أيضا خارج الدائرة. ويساوي قياس الزاوية المتشكلة أيضا نصف قياس الأقواس التي تقطعها.

النظرية 5.14

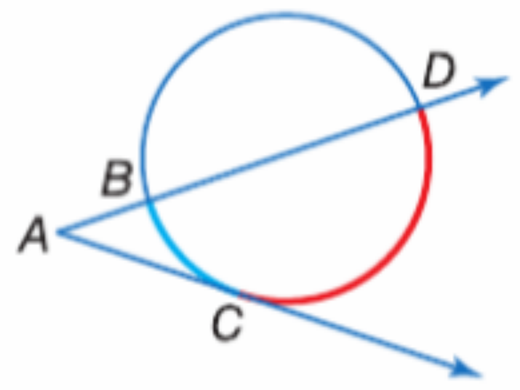
الشرح إذا تقاطع قاطعان، أو قاطعٌ ومماس، أو مماسان خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتشكلة يساوي نصف فرق قياسي القوسين المحصورين.

أمثلة



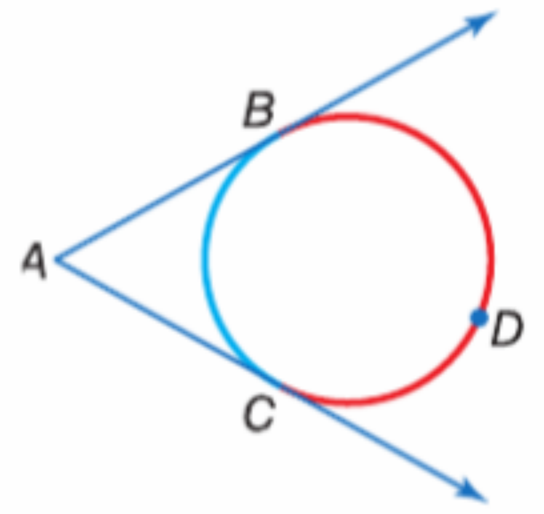
قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



قاطع-مماس

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$



مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$

سوف تثبت النظرية 5.14 في التمارين 30-32.

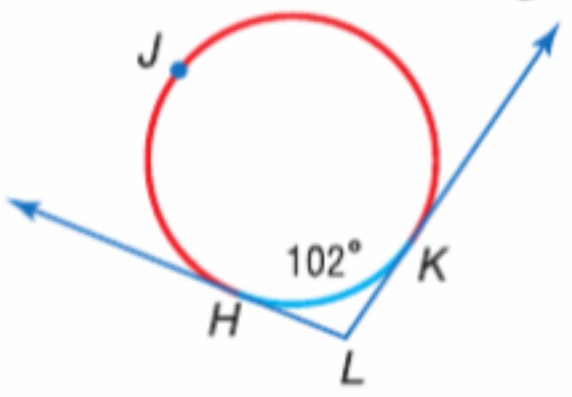
نصيحة دراسية

القيمة المطلقة يمكن التعبير عن قياس كل زاوية $\angle A$ أيضا على أنه نصف القيمة المطلقة لفرق قياسات الأقواس. وبهذه الطريقة، لا يؤثر ترتيب القياسات في نتيجة الحساب.

مثال 3 استخدام الزوايا والقواطع التي تتقاطع خارج دائرة

أوجد قياس كل مما يلي.

a. قياس $m\angle L$

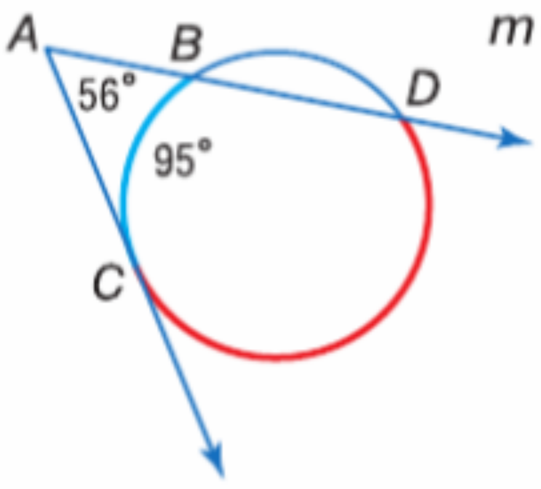


$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$ نظرية 5.14

$= \frac{1}{2}(360 - 102) - 102$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(258 - 102) = 78$ بسط

b. $m\widehat{CD}$



$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$ نظرية 5.14

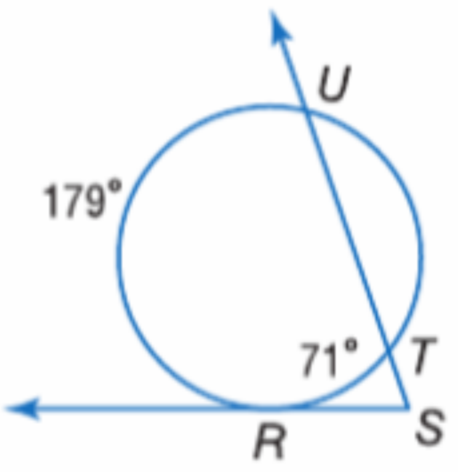
$56 = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95)$ بالتعويض

$112 = m\widehat{CD} - 95$ بضرب كل طرف بـ 2

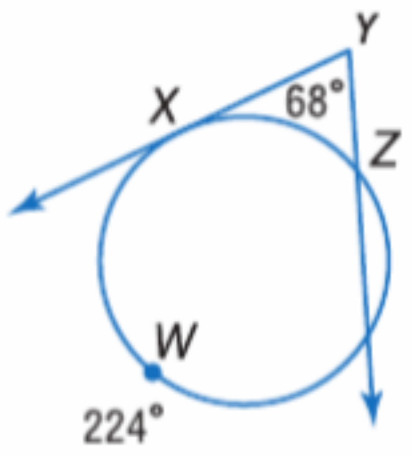
$207 = m\widehat{CD}$ بإضافة 95 إلى كل طرف

تمرين موجّه

3A. $m\angle S$



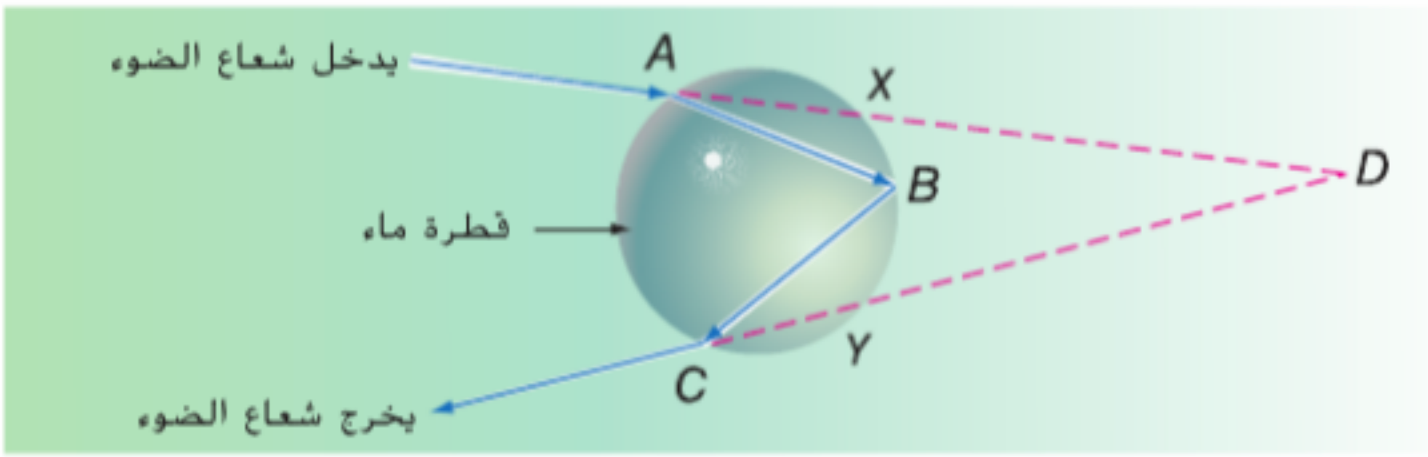
3B. $m\widehat{XZ}$



يمكنك تطبيق خواص القواطع المتقاطعة لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 4 من الحياة اليومية تطبيق خواص القواطع المتقاطعة

العلوم **يوضح الرسم التخطيطي مسار شعاع ضوئي عندما يصطدم بقطرة ماء. ينحرف الشعاع أو ينكسر عند النقاط A و B و C. إذا كان قياس الزاوية $m\widehat{AC} = 128$ و $m\widehat{XBY} = 84$، فما قياس الزاوية $m\angle D$؟**



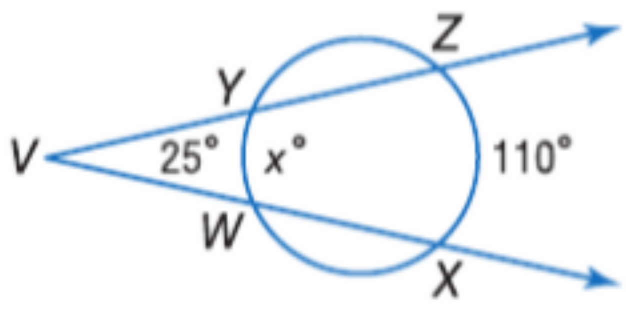
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XBY})$ النظرية 5.14

$= \frac{1}{2}(128 - 84)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(44) = 22$ بسط

تمرين موجّه

4. أوجد قيمة x.

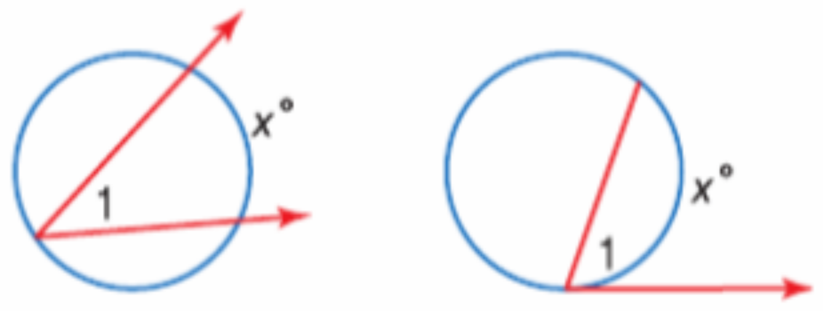
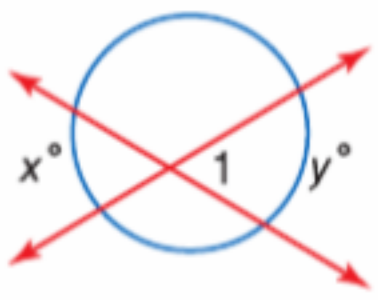
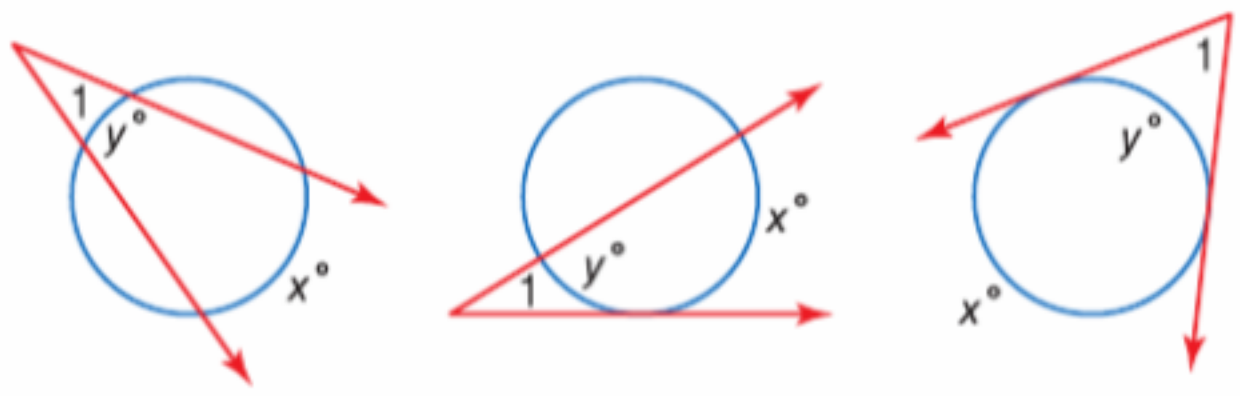


الربط بالحياة اليومية

هناك فرقٌ في مؤشر الانكسار بين الوسيطين كالهواء والزجاج. ويعطى مؤشر الانكسار N بدلالة المعادلة $N = \frac{c}{V}$. حيث c سرعة الضوء و V السرعة المتجهة للضوء في تلك المادة

المصدر: مركز الموارد المجهرية

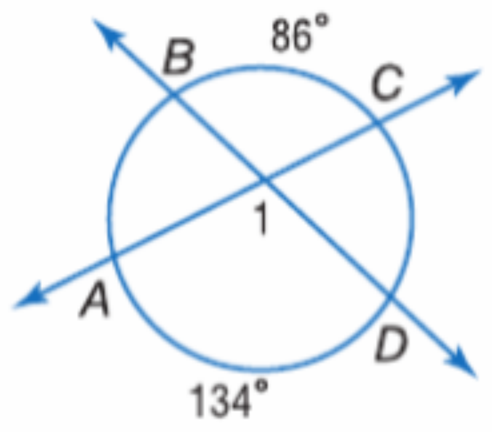
المفهوم الأساسي علاقات الزوايا والدوائر

رأس الزاوية	النموذج (النماذج)	قياس الزاوية
على محيط الدائرة		نصف قياس القوس المحصور $m\angle 1 = \frac{1}{2}x$
داخل الدائرة		نصف قياس مجموع القوسين المحصورين $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x + y)$
خارج الدائرة		نصف قياس فرق القوسين المحصورين $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x - y)$

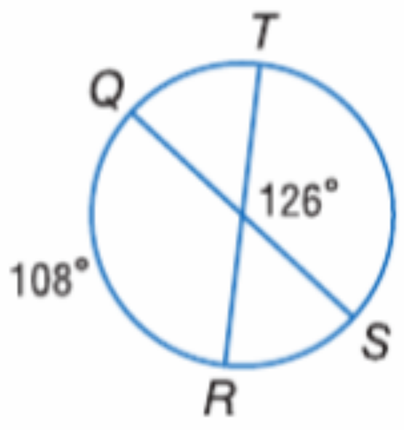
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

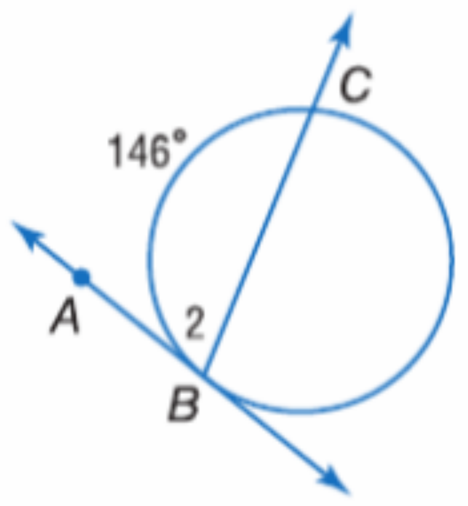
1. $m\angle 1$



2. $m\widehat{TS}$

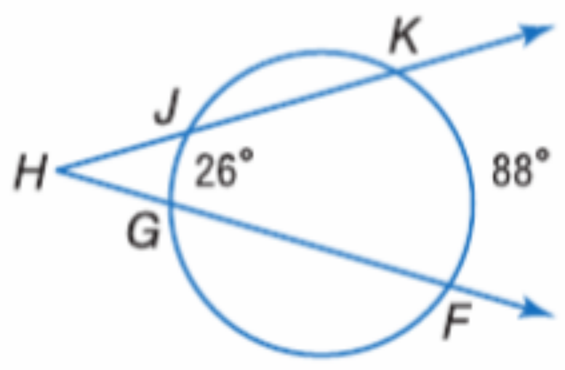


3. $m\angle 2$

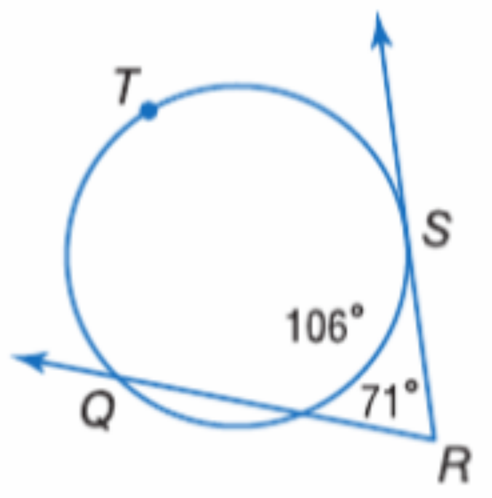


المثالان 3 و 4

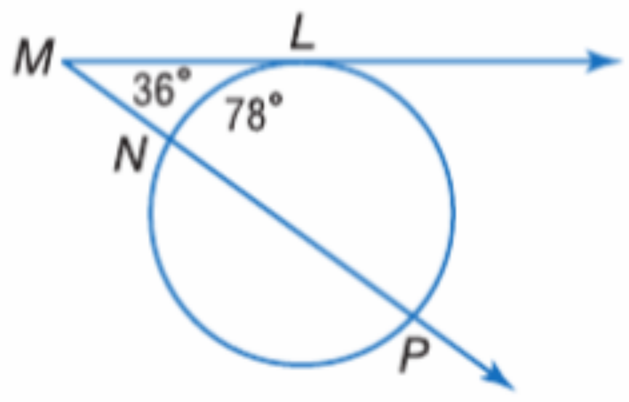
4. $m\angle H$



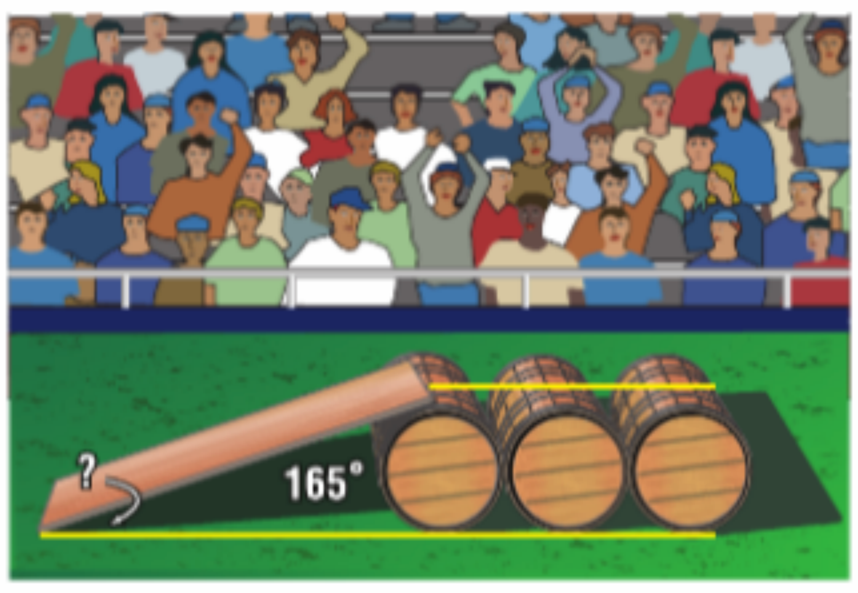
5. $m\widehat{QTS}$



6. $m\widehat{LP}$



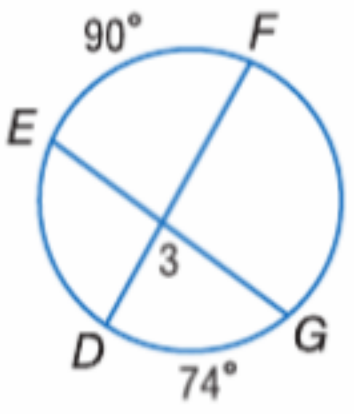
7. **الألعاب البهلوانية** يربط منحدرٌ إلى الإسطوانة الأولى لصف من الأسطوانات المرصوصة بجوار بعضها والمعدّة لعرض بهلواني في السيرك بواسطة دراجةٍ نارية. فما قياس الزاوية التي يشكلها المنحدر مع الأرض؟



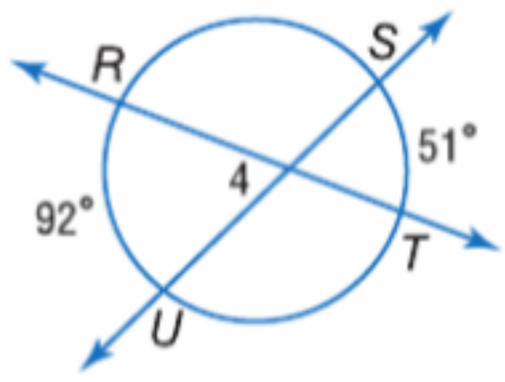
التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

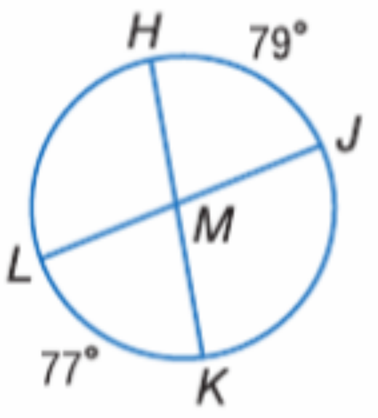
8. $m\angle 3$



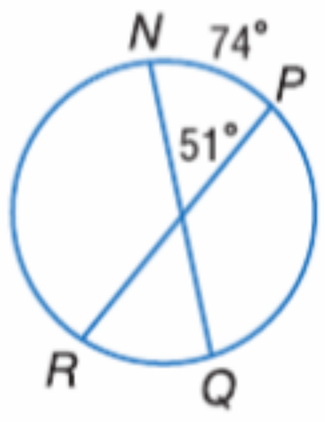
9. $m\angle 4$



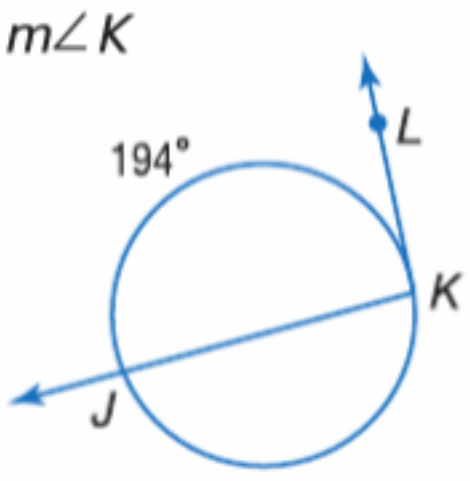
10. $m\angle JMK$



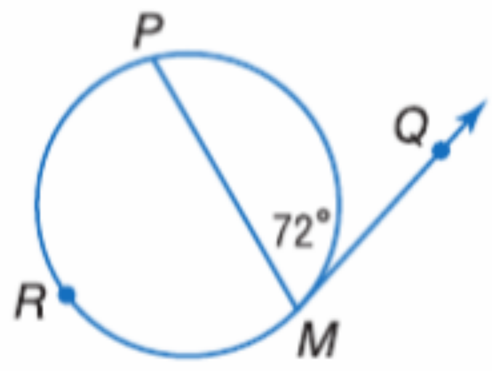
11 $m\widehat{RQ}$



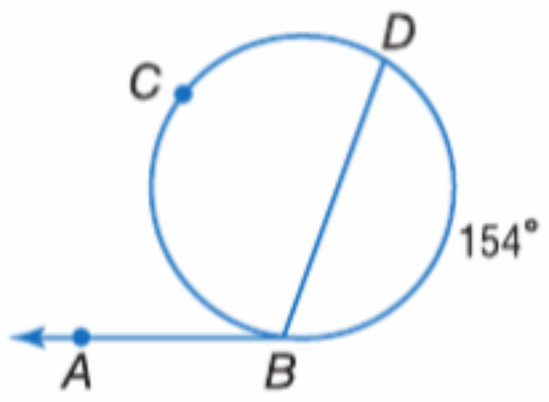
12. $m\angle K$



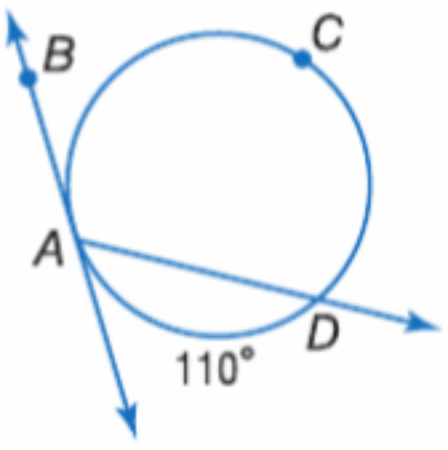
13. $m\widehat{PM}$



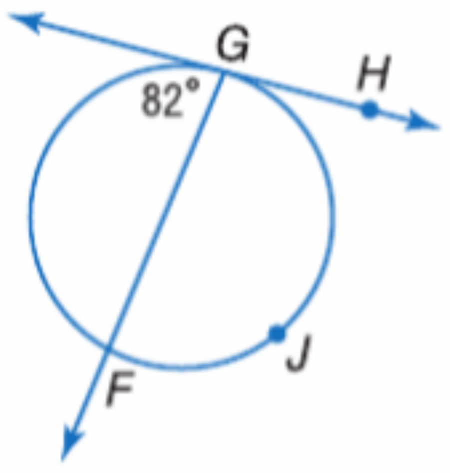
14. $m\angle ABD$



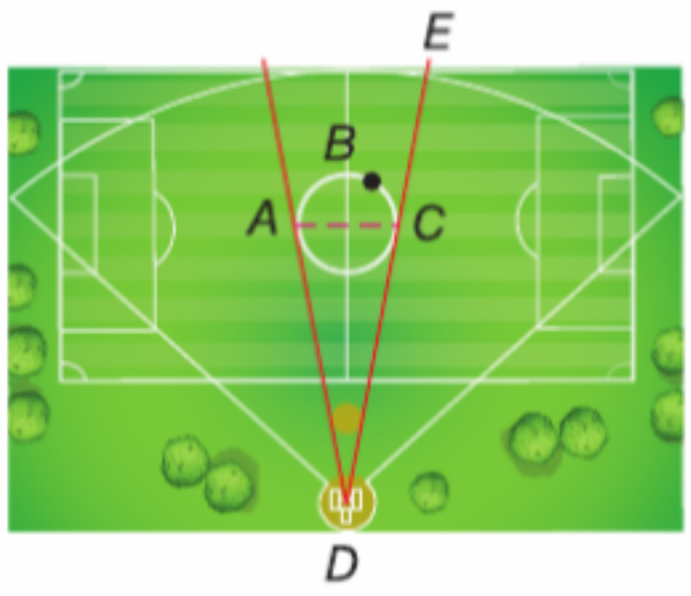
15. $m\angle DAB$



16. $m\widehat{GJF}$



17. **الرياضة** يتضمن ميدان الرياضات المتعددة الموضح ملعبًا للكرة اللينة وملعبًا لكرة القدم. فإذا كان قياس $m\widehat{ABC} = 200$ أوجد كلاً من القياسات.

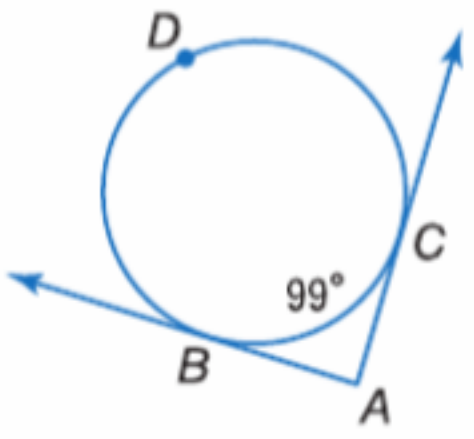


a. $m\angle ACE$

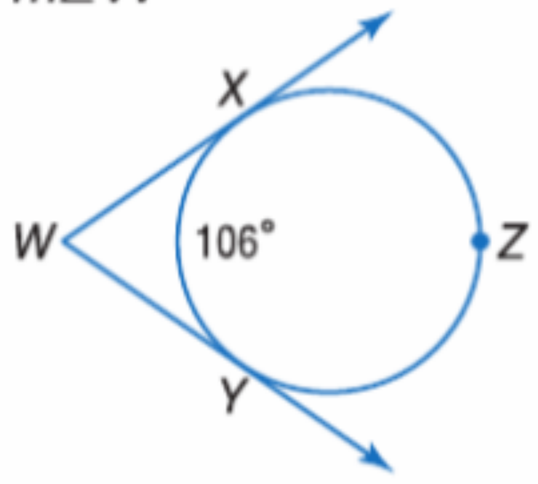
b. $m\angle ADC$

المثالان 3 و 4 **البنية** أوجد كلا من القياسات.

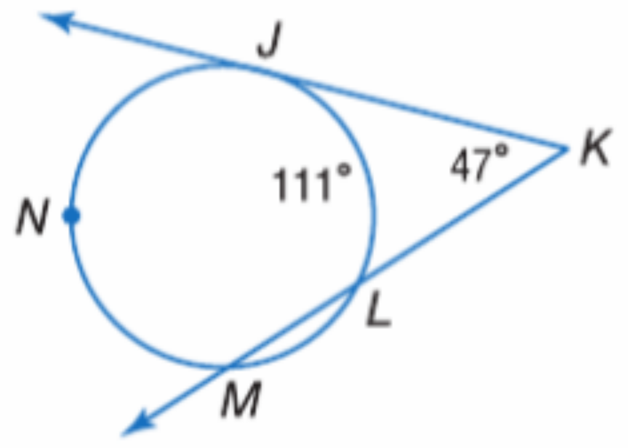
18. $m\angle A$



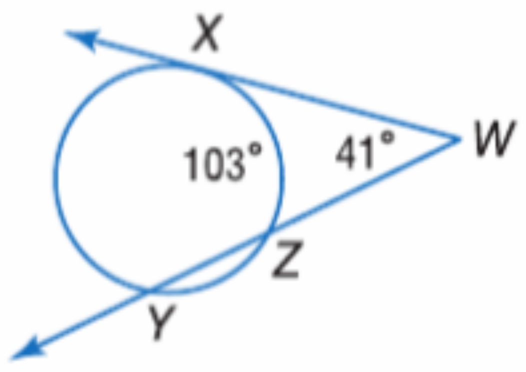
19. $m\angle W$



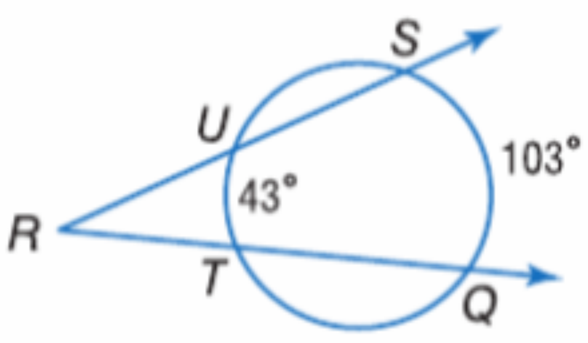
20. $m\widehat{JM}$



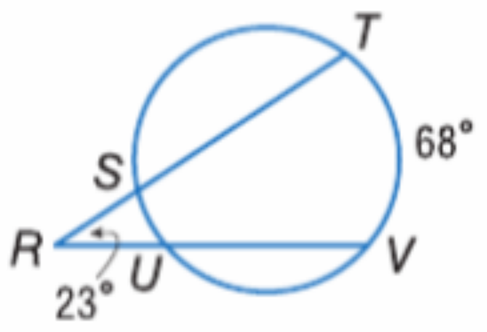
21. $m\widehat{XY}$



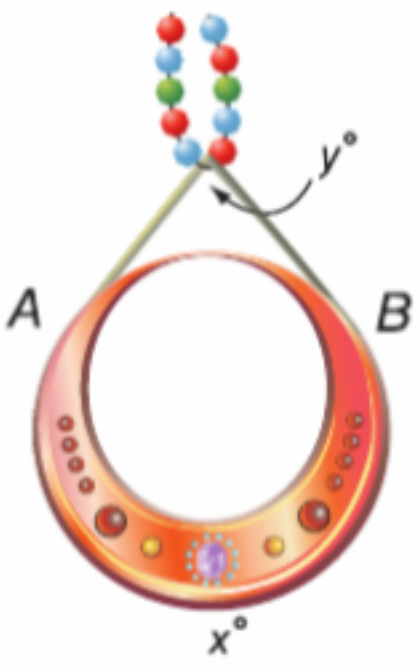
22. $m\angle R$



23. $m\widehat{SU}$



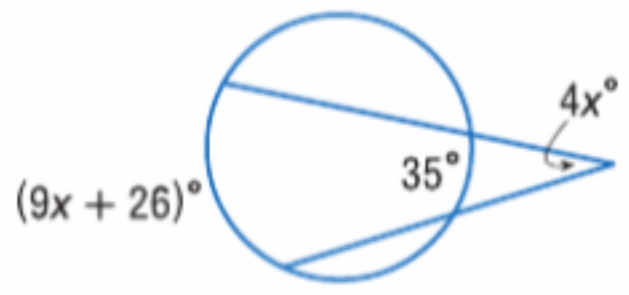
.24 **المجوهرات** في القلادة الدائرية الموضحة، A و B نقطتا تماس. فإذا كانت قيمة $x = 260$، فكم تساوي قيمة y؟



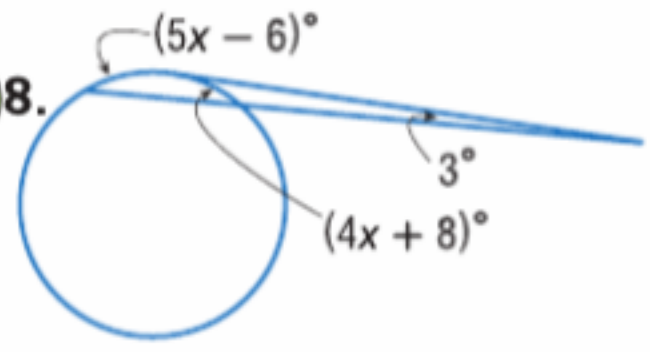
.25 **الفضاء** يدور قمر صناعي حول خط الاستواء في الكرة الأرضية. أوجد قيمة x، قياس قوس الكوكب الذي يمكن رؤيته من القمر الصناعي.

الجبر أوجد قيمة x.

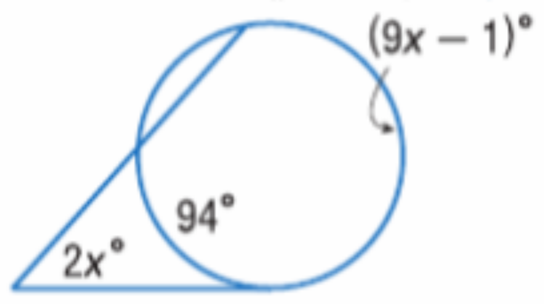
26.



27



28.



.29 **التصوير** يصوّر مصوّر دائرة صور بواسطة آلة التصوير خاصته كما هو موضح بحيث يشكل خطا الرؤية خطي تماس مع دائرة صور.

a. إذا كانت زاوية عرض آلة التصوير تساوي 35°، فما قياس قوس دائرة الصور التي تظهر في اللقطة؟

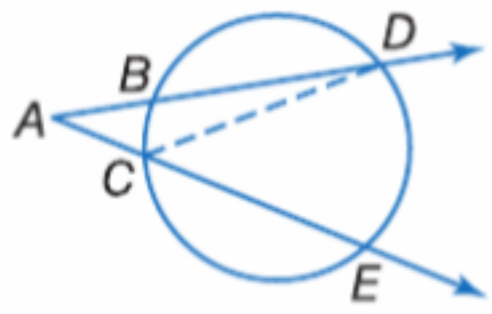
b. إذا أردت التقاط قياس للقوس يساوي 150° ضمن الصورة، فما هي قيمة زاوية العرض التي ينبغي استخدامها؟

الفرضيات من أجل كل حالة في النظرية 5.14، اكتب برهانا مكوّنا من عمودين.

.30 **الحالة 1**

المعطى: القاطعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$

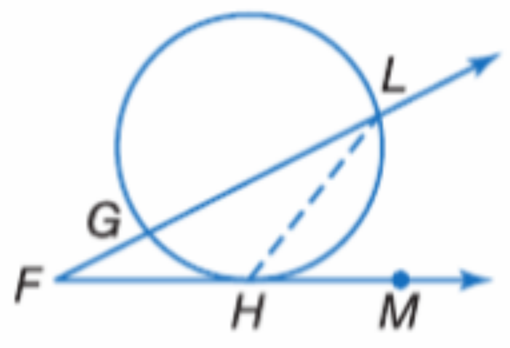
المطلوب إثباته: $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



.31 **الحالة 2**

المعطى: المماس $\overrightarrow{FM}$ والقاطع $\overrightarrow{FL}$

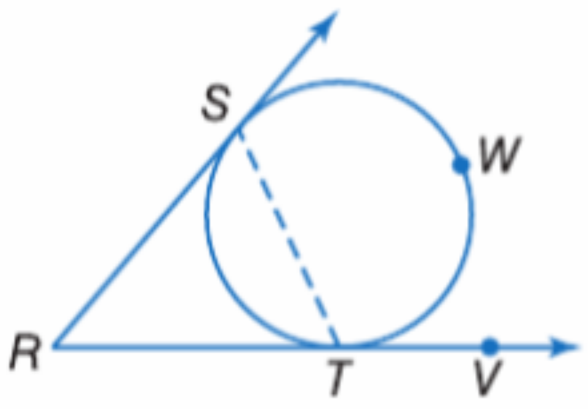
المطلوب إثباته: $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$



.32 **الحالة 3**

المعطى: المماسان $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$

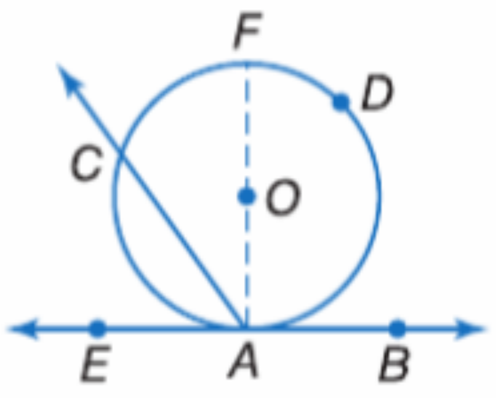
المطلوب إثباته: $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$



.33 **الإثبات** اكتب فقرة إثبات للنظرية 5.13.

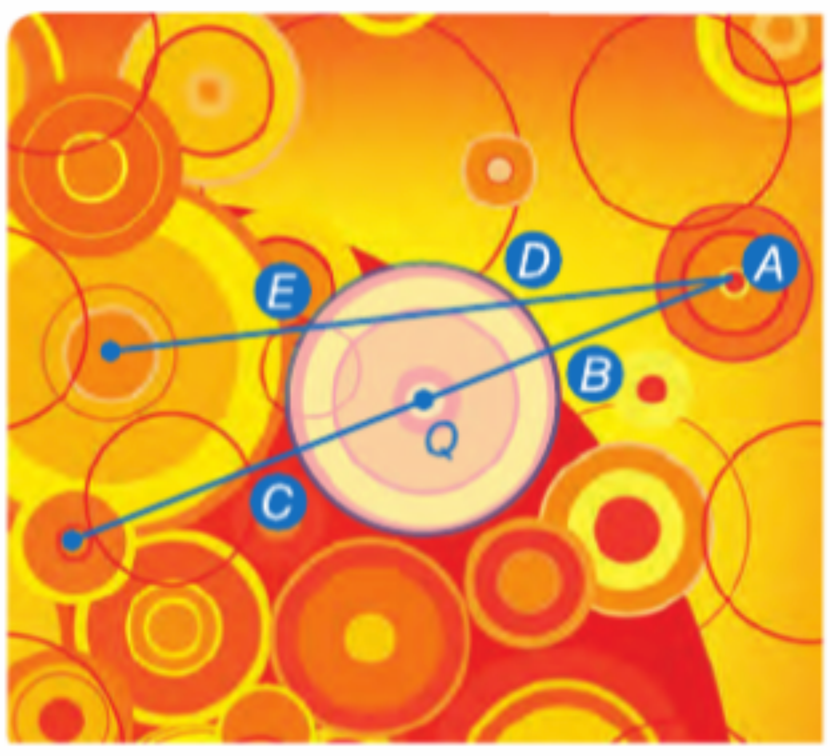
a. **المعطيات:** $\overleftrightarrow{AB}$ هو مماس للدائرة $\odot O$.
$\overleftrightarrow{AC}$ هو قاطعٌ للدائرة $\odot O$.
$\angle CAE$ زاوية حادة.

المطلوب إثباته: $m\angle CAE = \frac{1}{2}\, m\widehat{CA}$

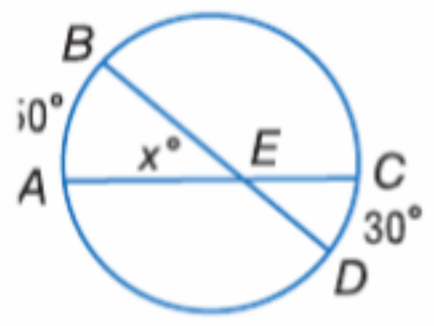


b. أثبت أنه إذا كانت الزاوية $\angle CAB$ زاوية منفرجة، فإن $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$.

34. **ورق الجدران** في التصميم المبين لورق الجدران، لديك $\overline{BC}$ قطرٌ في الدائرة $\odot Q$. فإذا كانت $m\angle A = 26$ و $m\widehat{CE} = 67$، فما قياس $m\widehat{DE}$؟



35. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين النظريتين 5.12 و 5.6.



a. هندسيًا انسخ الشكل الموضح. ثم ارسم ثلاثة أشكال متعاقبة يقترب فيها موضع النقطة D من النقطة C. على أن تظلّ النقاط A و B و C ثابتة.

b. جدوليّ قدّر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍ من الدوائر المتعاقبة، مع تسجيل قياس $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ في الجدول. ثم احسب قيمة x لكل دائرةٍ وسجلها.

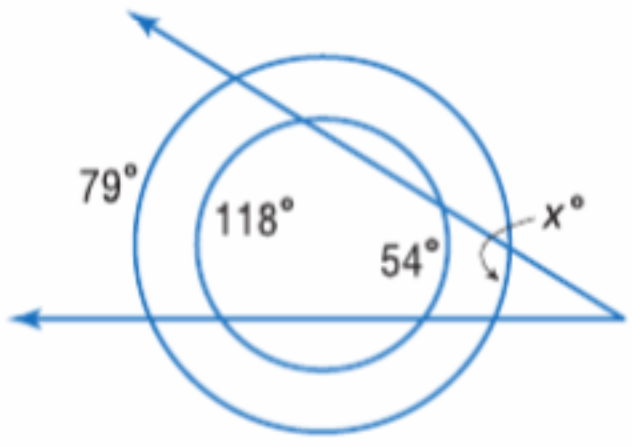
c. لفظيًا صف العلاقة بين $m\widehat{AB}$ وقيمة x مع اقتراب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع الزاوية التي تتحول إليها $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0$؟

d. تحليلي اكتب برهانًا جبريًا لتوضح العلاقة بين النظريتين 5.12 و 5.6 الموصوفتين في الجزء **c**.

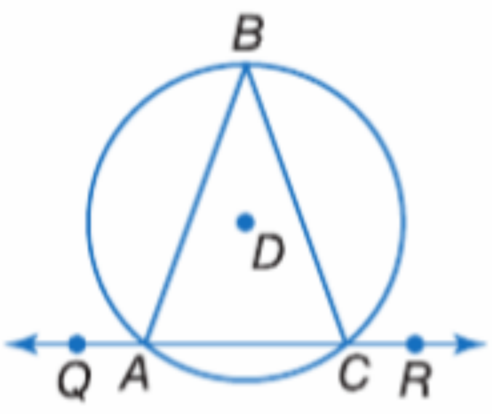
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد قياس زاويةٍ يشكلها قاطعٌ ومماس يتقاطعان خارج دائرة.

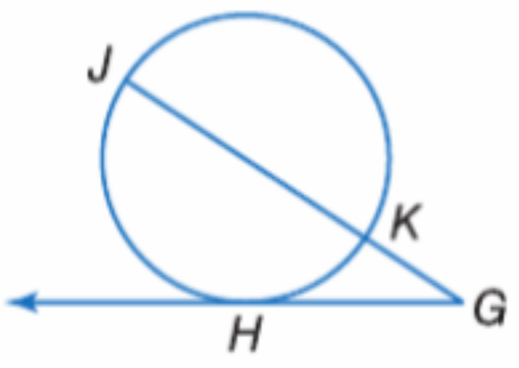
37. **التحدي** الدائرتان أدناه متّحدتا المركز. فما قيمة x ؟



38. **التبرير** يحاط المثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$ بالدائرة $\odot D$. وما الذي يمكنك استنتاجه حول $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$؟ اشرح.



39. **الفرضيات** في الشكل $\overline{JK}$ قطر و $\overrightarrow{GH}$ مماس.



a. صف مدى القيم الممكنة لــ $m\angle G$. اشرح.

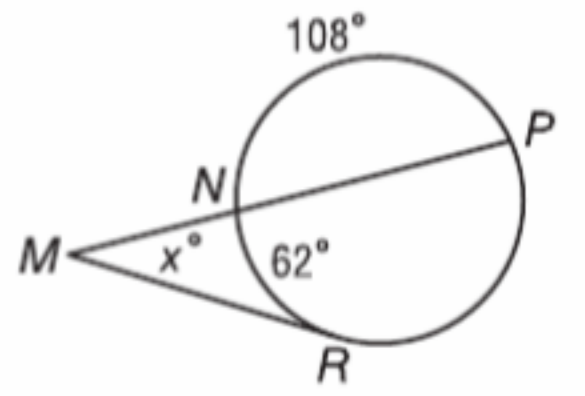
b. إذا كانت $m\angle G = 34$ ، أوجد قياس القوسين الأصغرين HJ و KH. واشرح.

40. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرةً ومماسين يتقاطعان خارج الدائرة. واستخدم منقلةً لقياس الزاوية المتشكلة. وأوجد قياس القوسين الأصغر والأكبر المتشكلين. واشرح استنتاجك.

41. **الكتابة في الرياضيات** تحاط دائرةٌ بالمثلث $\triangle PQR$. فإذا كانت $m\angle P = 50$ و $m\angle Q = 60$. صف كيفية إيجاد قياس الأقواس الأصغر الثلاثة التي تشكلها نقاط التماس.

تدريب على الاختبار المعياري

42. ما قيمة x إذا كان $m\widehat{NR} = 62$ و $m\widehat{NP} = 108$؟



A 23° **C** 64°

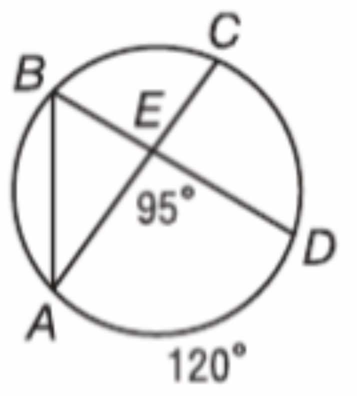
B 31° **D** 128°

43. جبريا النقطتان $A(-4, 8)$ و $B(6, 2)$ كلتاهما تقع على الدائرة C، و $\overline{AB}$ هو نصف قطر في الدائرة. فما إحداثيا C؟

F (2, 10) **H** (5, −3)

G (10, −6) **J** (1, 5)

44. الإجابة الشبكية إذا كانت $m\angle AED = 95$ و $m\widehat{AD} = 120$. فما قياس $m\angle BAC$؟



45. SAT/ACT إذا كان محيط الدائرة المبينة أدناه يساوي 16π وحدة، فما هي المساحة الكلية للمنطقة المظللة؟

A 64π وحدة^2 **D** 8π وحدة^2

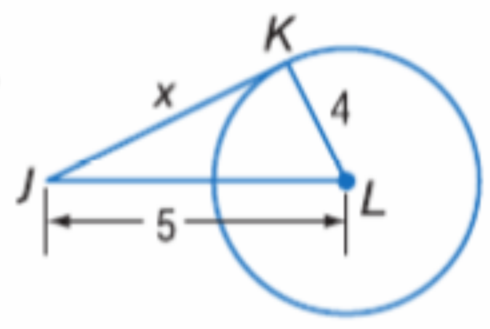
B 32π وحدة^2 **E** 2π وحدة^2

C 12π وحدة^2

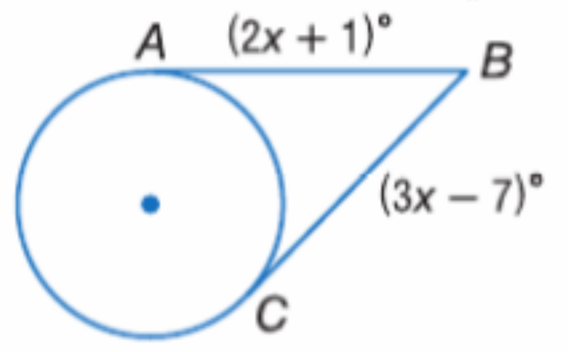
مراجعة شاملة

أوجد x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل. (الدرس 5-5)

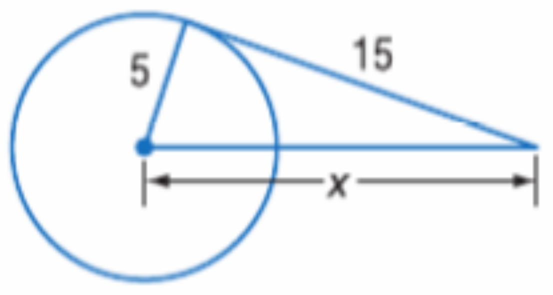
46.



47.



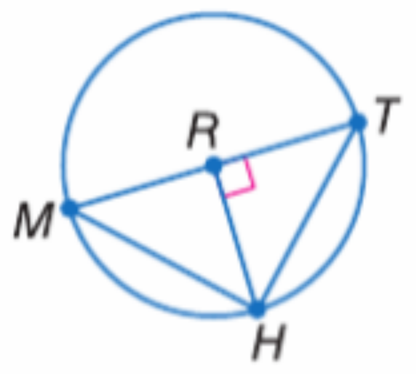
48.



49. البرهان اكتب برهانًا من عمودين. (الدرس 5-4)

المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة؛ $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب إثباته: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$



الهندسة الإحداثية أوجد قياس كل زاوية مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة عبر استخدام قانون المسافة ومعكوس النسب المثلثية.

50. $\angle C$ في المثلث BCD ذي الرؤوس $B(-1, -5)$ و $C(-6, -5)$ و $D(-1, 2)$

51. $\angle X$ في المثلث القائم XYZ ذي الرؤوس $X(2, 2)$ و $Y(2, -2)$ و $Z(7, -2)$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

52. $x^2 + 13x = -36$

53. $x^2 - 6x = -9$

54. $3x^2 + 15x = 0$

55. $28 = x^2 + 3x$

56. $x^2 + 12x + 36 = 0$

57. $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$

الدرس

5-7 القطع الخاصة في دائرة

..السابق

- أوجدت قياسي القطرين اللذين يتقاطعان داخل متوازي الأضلاع.

..الحالي

1. إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل دائرة.
2. إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج دائرة.

..لماذا؟

- تقطع كعكةٌ دائريةٌ بالاتجاه الطولي بدلاً من أن تقطع إلى مثلثات لكي تقدّم إلى عددٍ أكبر من حضور حفل عشاء. ويتبقى جزءٌ صغيرٌ فقط من الكعكة الأصلية. يمكنك باستخدام هندسة الدوائر تحديد قطر الكعكة الأصلية.

المفردات الجديدة
قطعة الوتر
chord segment
قطعة القاطع
secant segment
قطعة القاطع الخارجي
external secant segment
قطعة المماس
tangent segment

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

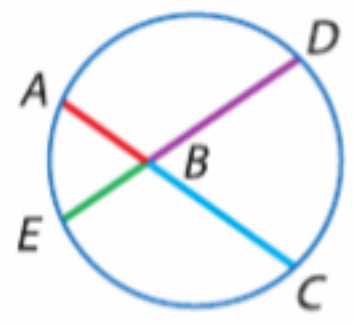
1 القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل دائرة

عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، يقسم كل وترٍ إلى قطعتين مستقيمتين، تدعيان **قطعتي الوتر**.

النظرية 5.15 القطع المستقيمة في نظرية الأوتار

الشرح إذا تقاطع وتران في دائرة، فتتساوى حينها نواتج ضرب أطوال القطع المستقيمة للأوتار.

مثال $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

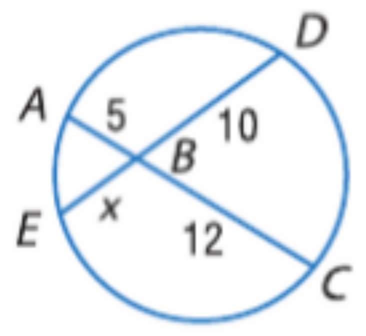


سوف تثبت النظرية 5.15 في التمرين 23.

مثال 1 استخدام تقاطع وترين

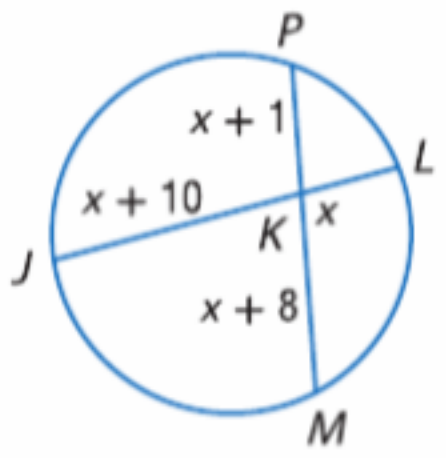
أوجد قيمة x.

a.



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 5.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب.
$6 = x$	بقسمة كل طرف على 10.

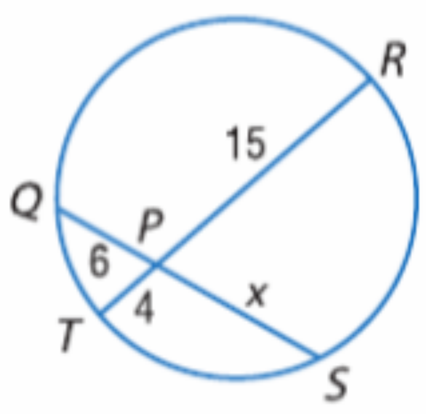
b.



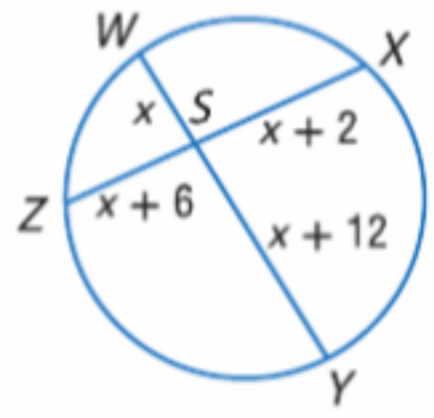
$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	النظرية 5.15
$(x+10) \cdot x = (x+1)(x+8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب.
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كل طرف.
$x = 8$	بطرح $9x$ من كل طرف.

تمرين موجّه

1A.

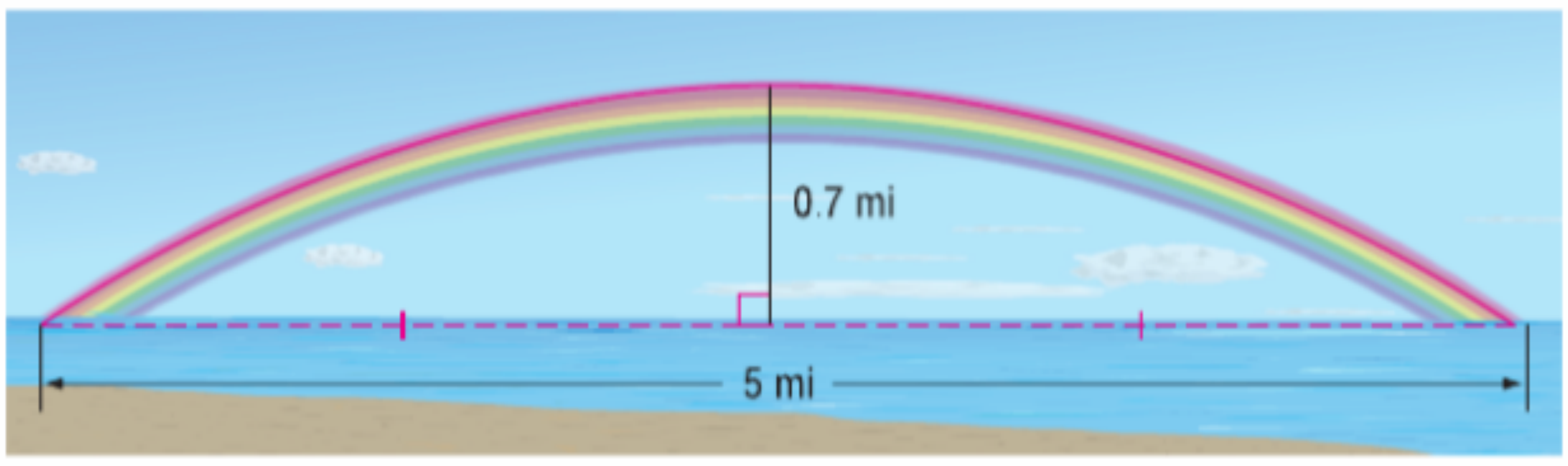


1B.



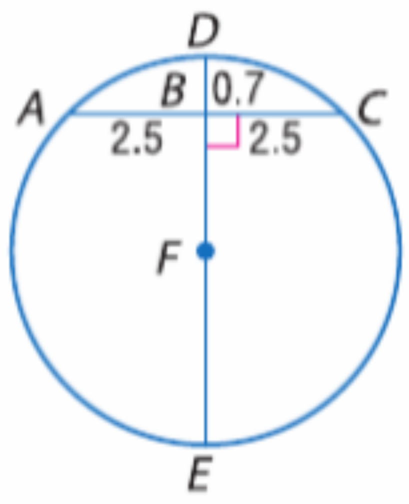
🌍 مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد قياس قطع مستقيمة في دائرة

العلوم **الشكل الصحيح لقوس قُزح هو دائرةٌ كاملة. ولكننا لا نرى سوى قوس الدائرة الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. فما هو نصف قطر الدائرة التي تضم القوس الخاص بقوس قزح الموضح؟**



الاستيعاب تعلم أن قوس قُزح هو جزء من دائرة كاملة. $\overline{AC}$ قوس في هذه الدائرة. و $\overline{DB}$ منصف عمودي لــ $\overline{AC}$.

التخطيط ارسم نموذجا. وبما أنه يقطع الوتر $\overline{AC}$ فإن $\overline{DE}$ قطر في الدائرة. استخدم نواتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

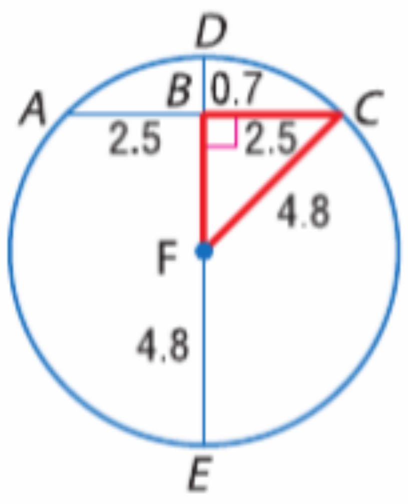


أوجد حلّ

النظرية 5.15	$AB \cdot BC = DB \cdot BE$
بالتعويض	$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$
بالضرب.	$6.25 = 0.7BE$
بقسمة كل طرف على 0.7.	$8.9 \approx BE$
فرضية جمع القطع المستقيمة	$DE = DB + BE$
بالتعويض	$= 0.7 + 8.9$
بالجمع.	$= 9.6$

بما أن طول قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف القطر يساوي $9.6 \div 2$ أو 4.8 mi.

التحقق استخدم نظرية فيثاغورس للتحقق من المثلث المتشكل في الدائرة من نصف القطر والوتر وجزءٍ من قطر الدائرة.



مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$DB + BF = DF$
بالتعويض	$0.7 + BF = 4.8$
بطرح 0.7 من كل طرف.	$BF = 4.1$
نظرية فيثاغورس	$BF^2 + BC^2 = CF^2$
بالتعويض	$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$
بسط.	$23.06 \approx 23.04$ ✓

تمرين موجّه

2. **مرصد النجوم** ترتفع أعلى نقطةٍ في مرصد النجوم، أو ما يسمى الذروة، 63.4 m. و يساوي قطر الدائرة التي تضم القوس 216.4 m. فما طول الملعب من طرف إلى الطرف الآخر؟

الربط بالحياة اليومية

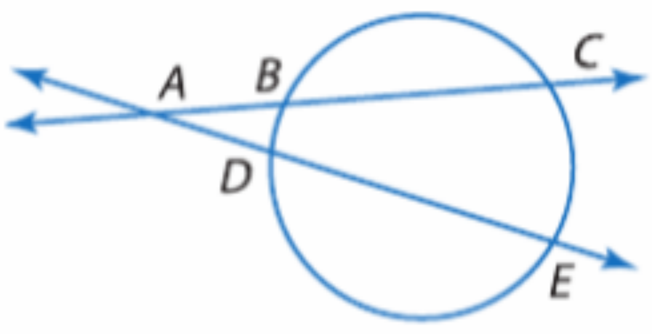
كلما هبطت الشمس إلى الأفق، ازداد الجزء الذي تستطيع رؤيته من قوس قُزح. وعند الغروب، يمكنك رؤية نصف دائرة كامل من قوس قُزح بحيث تقع قمة القوس فوق الأفق بــ 42 درجة.

المصدر: المركز الوطني لأبحاث الغلاف الجوي

نصيحة في حل المسائل

إنشاء رسم عند حل مسائل كلامية عن الدوائر، فمن المفيد إنشاء رسم وتسمية الأجزاء المعلومة في الدائرة. استخدم متغيرًا لتسمية القياس المجهول.

2 القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج دائرة



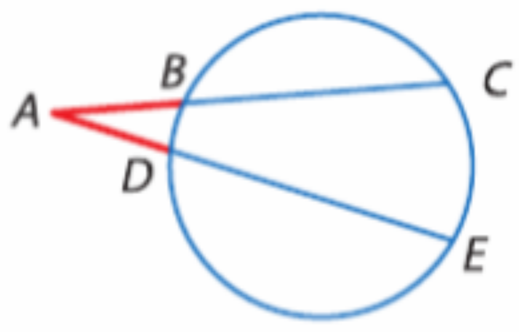
قطعة القاطع هي قطعة من مستقيم قاطع له بالتحديد نقطةٌ طرفيةٌ واحدةٌ تقع على الدائرة. في الشكل، $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AE}$ و $\overline{AD}$ قطعتان مستقيمتان من قاطع.

تدعى قطعة القاطع الواقعة في خارج الدائرة باسم **قطعة القاطع الخارجية**. في الشكل، $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ قطعتان من قاطعٍ خارجي.

توجد علاقة خاصة بين القواطع وقطع القواطع الخارجية.

النظرية 5.16 نظرية القطع المستقيمة القاطعة

الشرح إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة، فإن ناتج ضرب قطعة مستقيمة قاطعة وقطعتها المستقيمة القاطعةالخارجية يساوي ناتج ضرب قياسي القاطع الآخر بقطعته المستقيمة القاطعة الخارجية.



مثال $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

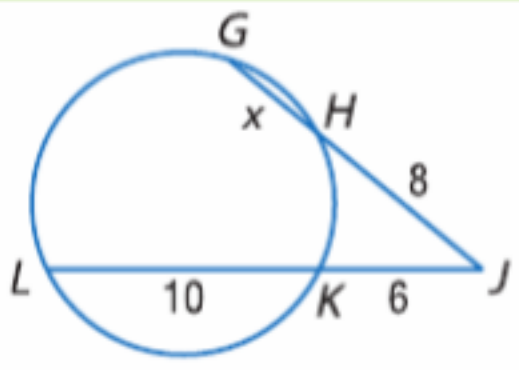
سوف تثبت النظرية 5.16 في التمرين 24.

نصيحة دراسية

بسط النظرية كل طرف في المعادلة الواردة في النظرية 5.16 هو ناتج ضرب طولي الجزء الخارجي والقطعة المستقيمة الكاملة.

مثال 3 استخدام تقاطع وترين

أوجد قيمة x.



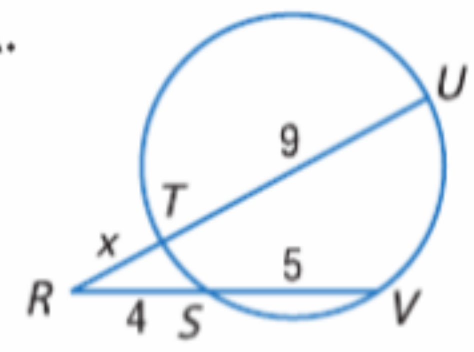
$JG \cdot JH = JL \cdot JK$	النظرية 5.16
$(x + 8)8 = (10 + 6)6$	بالتعويض
$8x + 64 = 96$	بالضرب.
$8x = 32$	بطرح 64 من كل طرف.
$x = 4$	بقسمة كل طرف على 8.

انتبه!

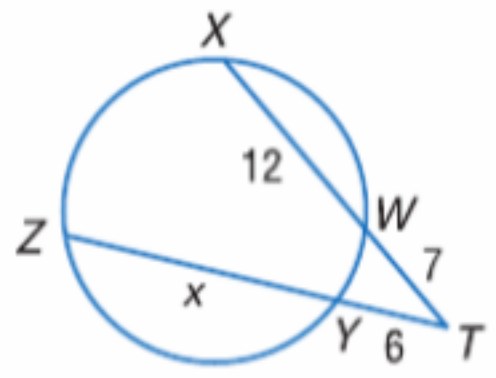
استخدم المعادلة الصحيحة تحقق من ضرب طول القطعة المستقيمة للقاطع بطول القطعة المستقيمة الخارجية للقاطع. ولا تضرب طول القطعة المستقيمة الداخلية للقاطع، أو الوتر، بطول القطعة المستقيمة الخارجية للقاطع.

تمرين موجّه

3A.



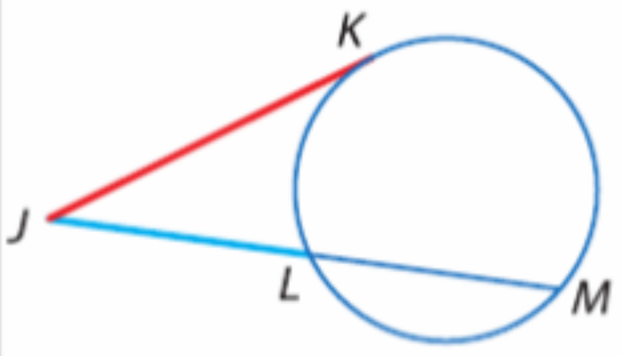
3B.



يمكن استخدام معادلة شبيهة للمعادلة الواردة في النظرية 5.16 عندما يتقاطع قاطع ومماس خارج دائرة. وفي هذه الحالة، تكون **القطعة المستقيمة المماسية**، أو القطعة المستقيمة للمماس والتي تقع نقطتها الطرفية على محيط الدائرة، قطعةً مستقيمةً وخارجيةً في آن واحد.

النظرية 5.17

الشرح إذا تقاطع مماس وقاطع خارج دائرة، فإن مربع قياس المماس يساوي ناتج ضرب قياسي القاطع بقطعته المستقيمة القاطعة الخارجية.

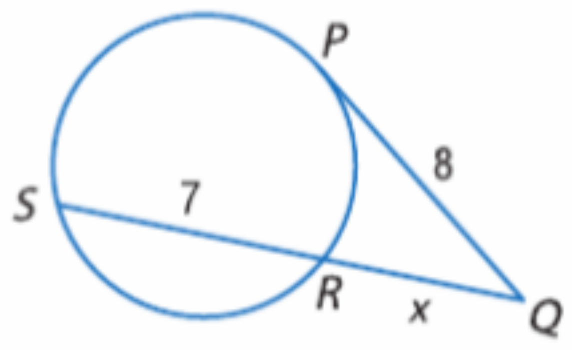


مثال $JK^2 = JL \cdot JM$

سوف تثبت النظرية 5.17 في التمرين 25.

مثال 4 استخدام تقاطع قاطع ومماس

$\overline{PQ}$ مماس للدائرة. أوجد x وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



النظرية 5.17 $PQ^2 = QR \cdot QS$

بالتعويض $8^2 = x(x + 7)$

بالضرب. $64 = x^2 + 7x$

بطرح 64 من كل طرف. $0 = x^2 + 7x - 64$

بما أن التعبير غير قابل للتحليل إلى عوامله الأولية، فاستخدم القانون العام.

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1$ و $b = 7$ و $c = -64$ $= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$

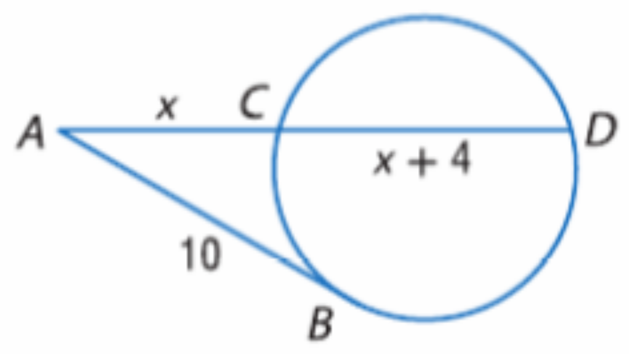
بسط. $= \frac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$

باستخدام الآلة الحاسبة. ≈ 5.2 أو -12.2

نظرًا إلى أن الأطوال لا يمكن أن تكون سالبة، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

تمرين موجه

4. $\overline{AB}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة x.
وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

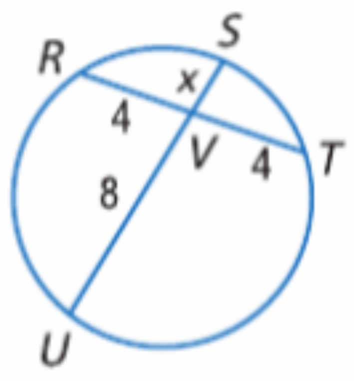


التحقق من فهمك

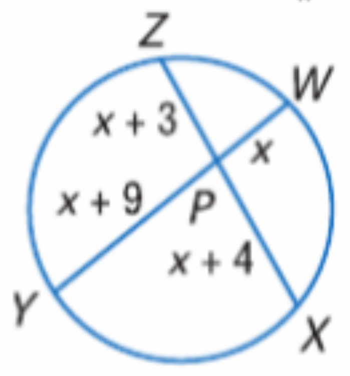
الأمثلة 1 و 3 و 4

أوجد قيمة x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

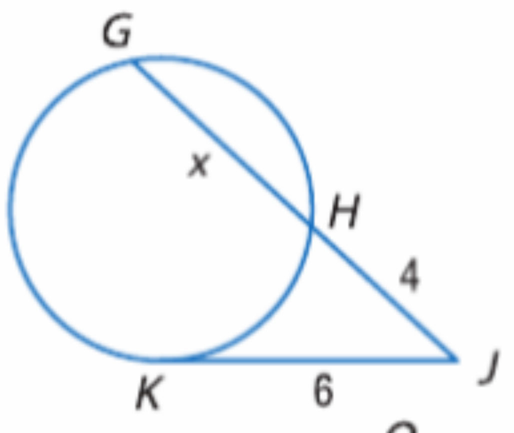
1.



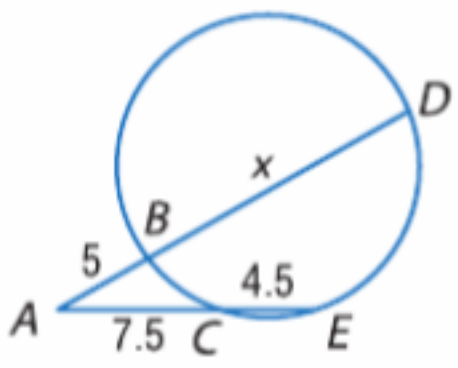
2.



3.

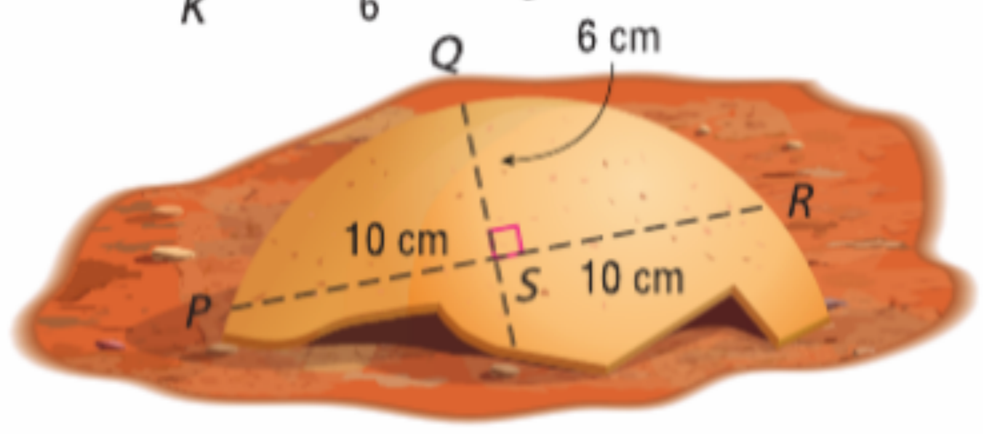


4.



مثال 2

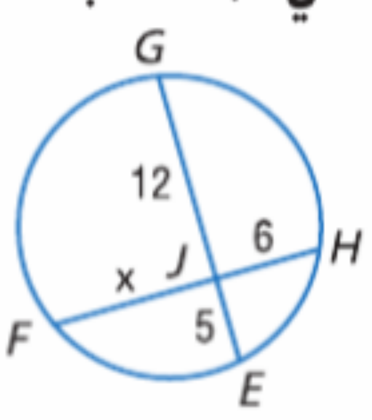
5 **العلم** يوضح الشكل قطعةً من آنيةٍ فخاريةٍ مكسورة وجدت في أحد المواقع الأثرية. تقع $\overline{QS}$ على نصف قطرالدائرة. فما هو محيط الآنية الأصلية؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.



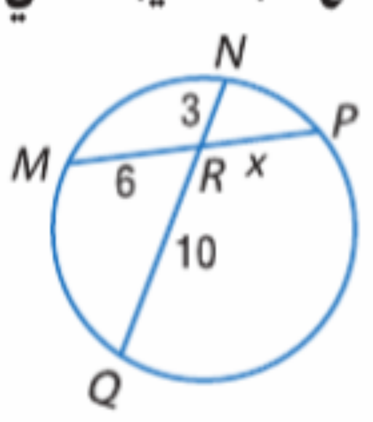
التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1 و 3 و 4 أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

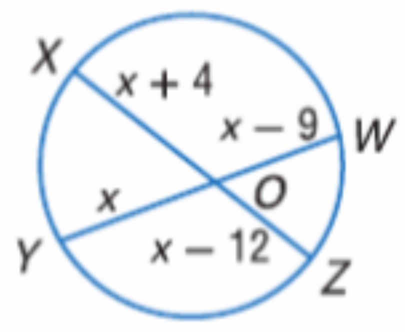
6.



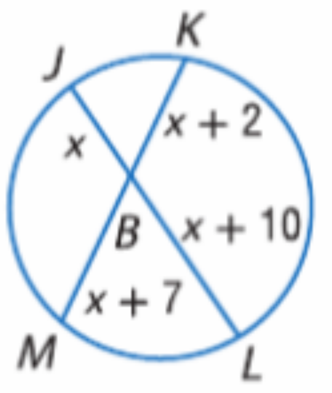
7.



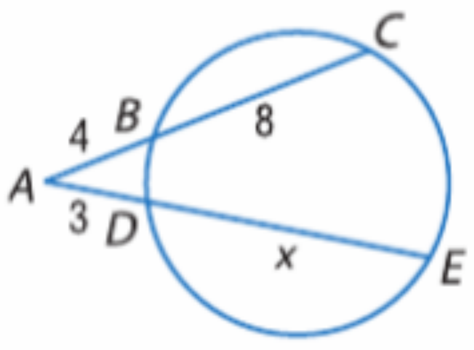
8.



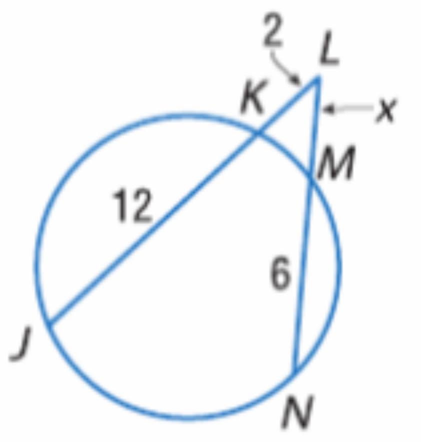
9.



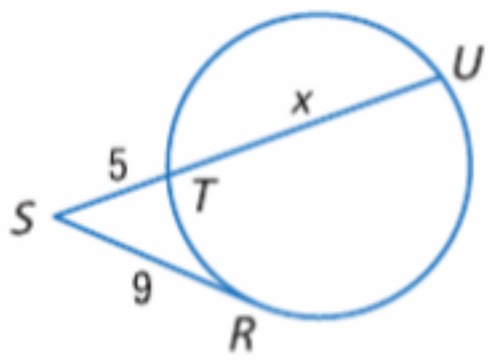
10.



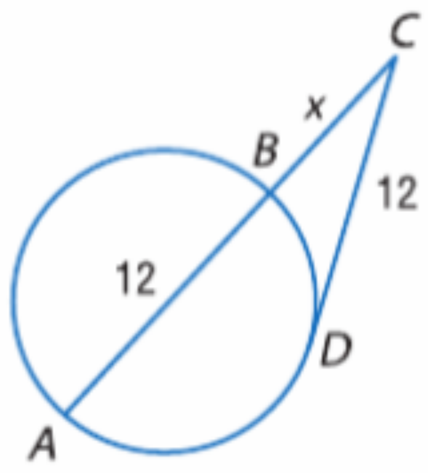
11.



12.



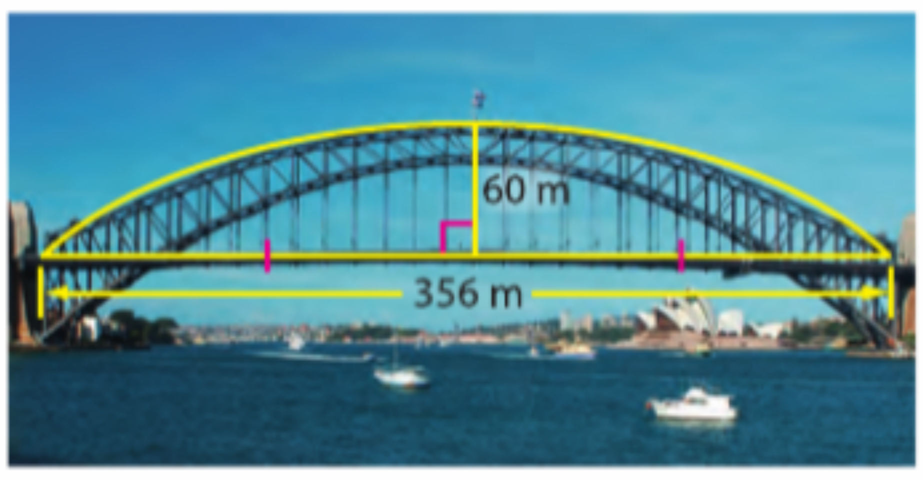
13.



مثال 2

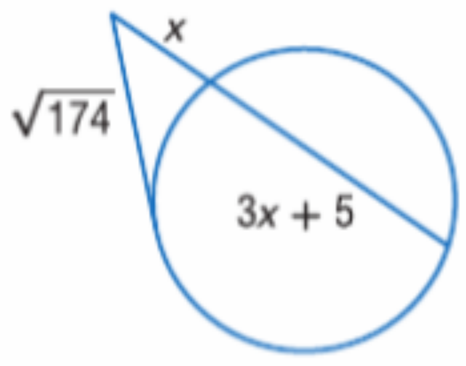
14. **الجسور** ما هو قطر الدائرة التي تحوي قوس جسر هاربور بسيدني؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

15. **الكعك** تقدّم هدى الكعك خلال حفل عشاء. فإذا كانت أبعاد الكعكة المتبقية موضحةً أدناه، فكم كان يساوي القطر الأصلي للكعكة؟

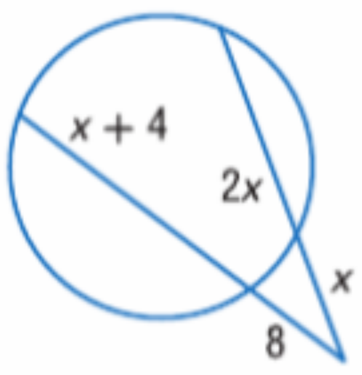


البنية أوجد كل متغيرٍ مقربًا إلى أقرب عشر. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

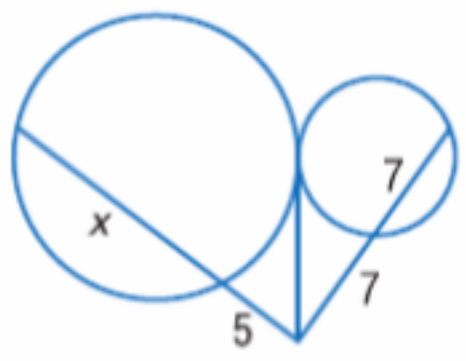
16.



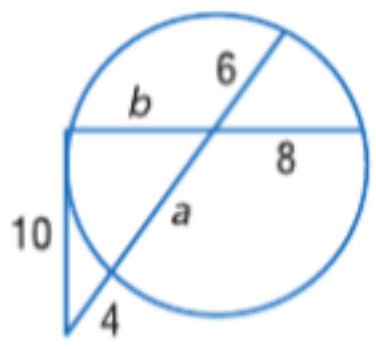
17.



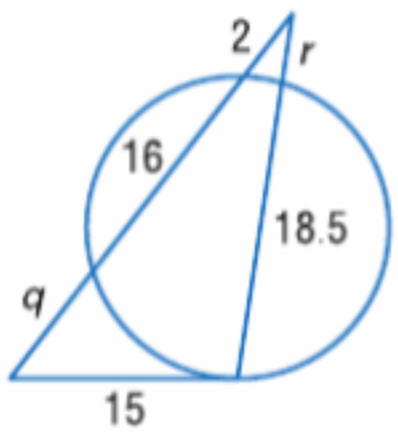
18.



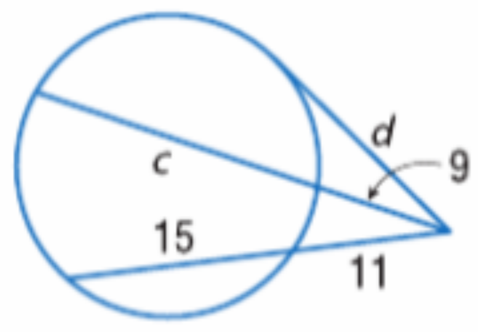
19.



20.



21.



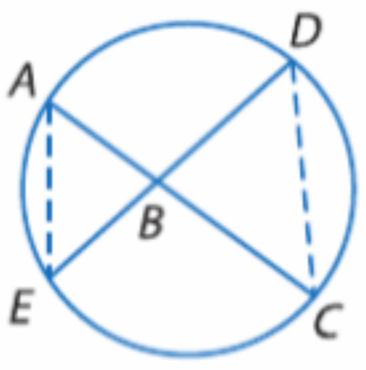
22. القياس غير المباشر تجلس ياسمين على بعد 4.88 m من شجرة سيكويا عملاقة، وتقف هيام بجوارالشجرة. تساوي المسافة التي تفصل ياسمين عن هيام 8.23 m. صمم رسما تخطيطيًا لهذه الحالة، ثم أوجدقطر الشجرة.

البرهان برهن كل نظرية.

23. البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 5.15

المعطى: $\overline{AC}$ و$\overline{DE}$ يتقاطعان عند B.

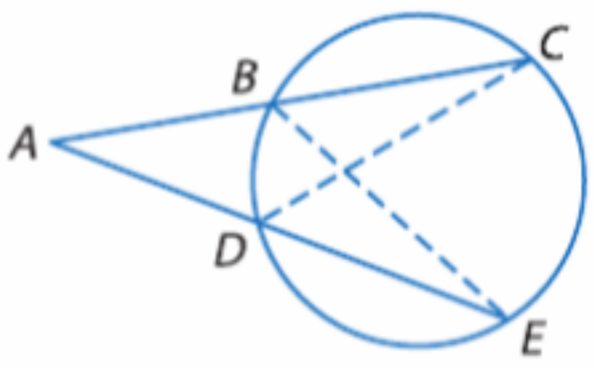
المطلوب إثباته: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



24. فقرة برهان النظرية 5.16

المعطى: القاطعان $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$

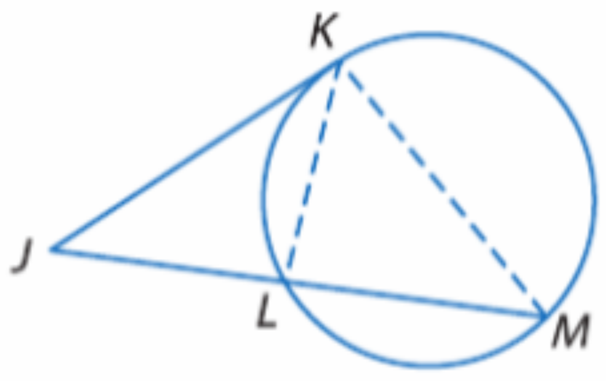
المطلوب إثباته: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



25. البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 5.17

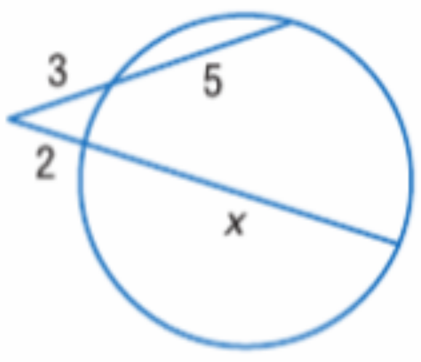
المعطى: المماس $\overline{JK}$، القاطع $\overline{JM}$

المطلوب إثباته: $JK^2 = JL \cdot JM$



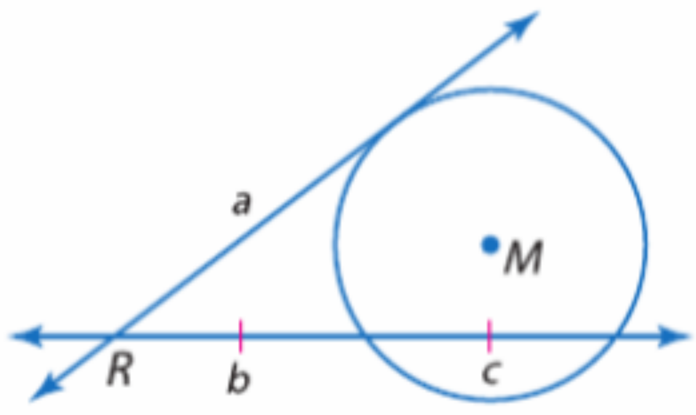
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

26. النقد توجد منى ومها قيمة x في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى. كتبت منى: $2x = 3(5)$. وكتبت مها: $2(2 + x) = 3(8)$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



27. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل طرق إيجاد قياس القطع المستقيمة عندما يتقاطع قاطعان خارج دائرةٍ وعندما يتقاطع قاطعٌ ومماس خارج دائرة.

28. التحدي في الشكل، يتقاطع خط مماس للدائرة M ومستقيمٌ قاطعٌ لها عند R. أوجد a. وبيّن الخطوات التي استخدمتها.



29. التبرير عندما يتقاطع وتران في مركز دائرة، فهل يتساوى قياس أقواس التقاطع أحيانًا أو دائما أو أنها لا تتساوى على الإطلاق؟

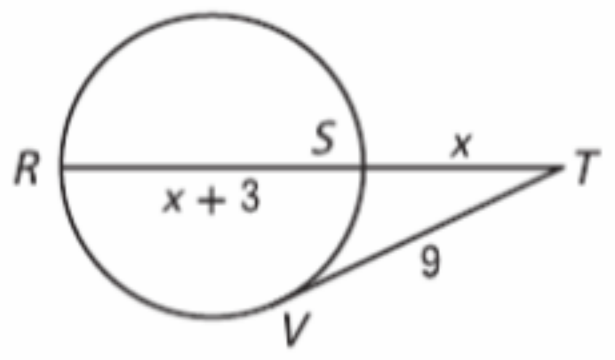
30. مسألة غير محددة الإجابة استكشف النظرية 5.17 عبر رسم دائرةٍ يتقاطع خارجها قاطعٌ ومماس وتسميتها. قِس جزئي القطعة المستقيمة المماسية وسمهما وقرّب طوليهما إلى أقرب جزءٍ من عشرة من السنتيمتر. واستخدم معادلةً لإيجاد قياس القطعة المستقيمة المماسية. وتحقق من حلّك عبر قياس طول القطعة المستقيمة.

31. الكتابة في الرياضيات صف العلاقة بين قطعٍ مستقيمةٍ في دائرةٍ عندما يتقاطع قاطعان داخل الدائرة.

تدريب على الاختبار المعياري

.32 $\overline{TV}$ مماس للدائرة. و R و S نقطتان تقاطعلى محيط الدائرة. فما هي قيمة x مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة؟

A 7.6 **C** 5.7
B 6.4 **D** 4.8



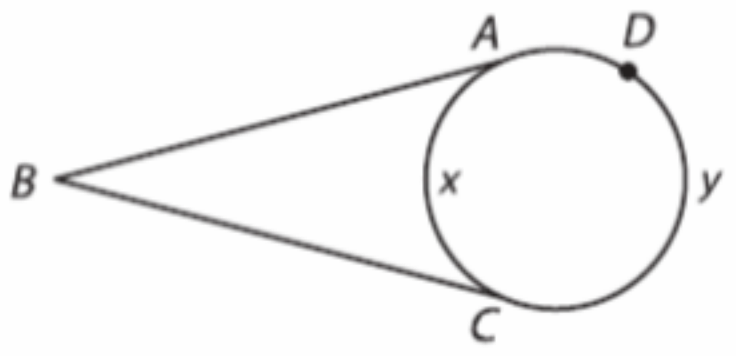
.33 **الجبر** يعرض متجرٌ متعدد الأقسام تخفيضا بنسبة 40% على جميع أنواع المجوهرات فيه. فإذا كان هناك عرض آخر يمنحك تخفيضا إضافيًا بنسبة 20% عن السعر المخفّض في الأصل. فكم ستدفع لشراء خاتمٍ سعره الأصلي AED 200؟

F AED 80 **H** AED 120
G AED 96 **J** AED 140

.34 **الإجابة الموسعة** قياسا القوس الأصغر $\widehat{AC}$ والقوس الأكبر $\widehat{ADC}$ بالدرجات هما x و y على التوالي.

.a إذا كانت $m\angle ABC = 70°$، فاكتب معادلتين تربطان x و y.

.b أوجد x و y.

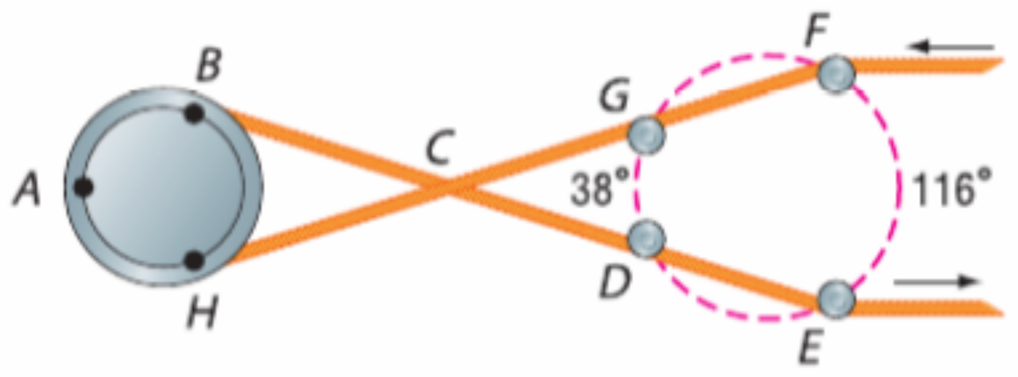


.35 **SAT/ACT** خلال أول أسبوعين من العطلة الصيفية، كانت نبيلة تكسب AED 100 في الأسبوع. وخلال الأسابيع الستة التالية، كانت تكسب AED 150 في الأسبوع. فكم كان أجرها الأسبوعي المتوسط؟

A AED 50 **D** AED 135
B AED 112.50 **E** AED 137.50
C AED 125

مراجعة شاملة

.36 **النسيج** حالما ينسج خيط من ألياف الصوف، فإنه يصبغ في أغلب الأحيان. ومن ثم يمرر عبر مسارٍ من البكرات كي يجف. نوضح في الشكل مجموعة واحدة من البكرات. لاحظ أنه يبدو أن الخيط يتقاطع مع نفسه عند C، ولكن الأمر ليس كذلك في الواقع. استخدم المعلومات من الشكل لإيجاد $m\widehat{BH}$. (الدرس 5-6)



انسخ الشكل وارسم المماسات المشتركة. فإن لم تكن هناك مماسات مشتركة، فقل: *لا مماسات مشتركة*. (الدرس 5-5)

37.

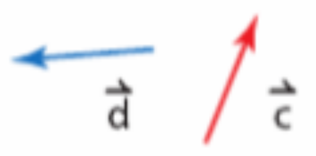
38.

39.

40.

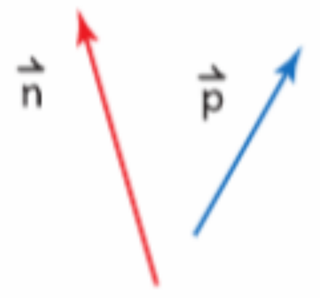
انسخ المتجهات لإيجاد كل مجموعٍ أو فرق.

41. $\vec{c} - \vec{d}$



42. $\vec{w} + \vec{x}$

43. $\vec{n} - \vec{p}$



مراجعة المهارات

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم ذي الميل ونقطة التقاطع مع المحور الرأسي y المعطيين.

.44 m: 3، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -4

.45 m: 2, (0, 8)

.46 m: $\frac{5}{8}$, (0, -6)

.47 m: $\frac{2}{9}$، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{1}{3}$

.48 m: -1, b: -3

.49 m: $-\frac{1}{12}$, b: 1

الدرس 5-8 معادلة الدائرة

السابق..

- كتبت معادلات مستقيمات باستخدام معلومات عن تمثيلاتها البيانية.

الحالي..

1. كتابة معادلة دائرة.
2. تمثيل دائرة على المستوى الإحداثي.

لماذا..

- تطلق أبراج الاتصالات إشارات لا سلكيةً تستخدم لنقل المكالمات الخلوية. ويغطي كل برجٍ مساحةً دائرية، وترتّب الأبراج بحيث تتاح الإشارة في أي موقعٍ ضمن منطقة التغطية.

المفردات الجديدة

المحل الهندسي المركب (compound locus)

ممارسات في الرياضيات

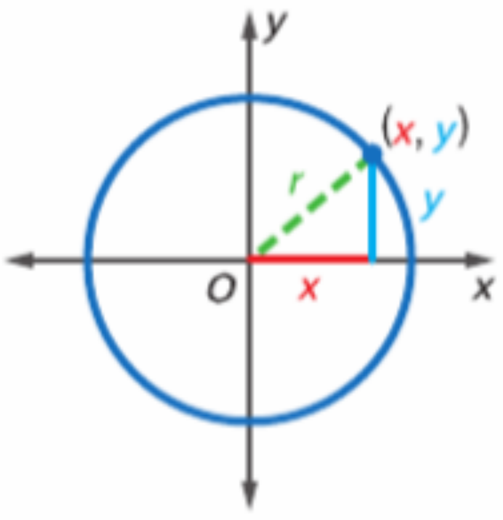
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 معادلة الدائرة

بما أن جميع النقاط على محيط دائرة متساوية البعد عن المركز، فيمكنك إيجاد معادلة دائرةٍ عبر استخدام قانون المسافة.

لتكن (x, y) تمثّل نقطةً في دائرةٍ يقع مركزها عند نقطة الأصل. باستخدام نظرية فيثاغورس، يكون $x^2 + y^2 = r^2$.



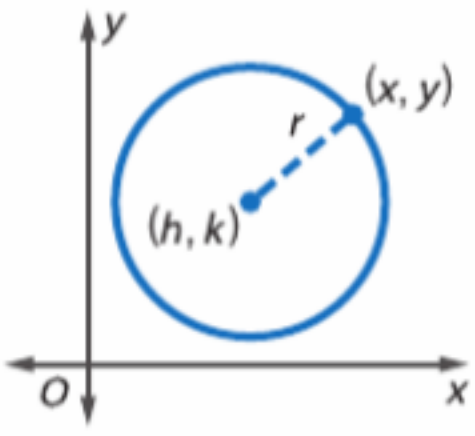
افترض الآن أن المركز لا يقع عند نقطة الأصل، بل عند النقطة (h, k). يمكنك استخدام قانون المسافة لوضع معادلةٍ للدائرة.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$	$d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$
$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$	بتربيع كل طرف.

المفهوم الأساسي معادلة دائرة بالصيغة القياسية

إن الصيغة القياسية لمعادلة دائرة يقع مركزها عند النقطة (h, k) ونصف قطرها r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تدعى الصيغة القياسية لمعادلة دائرةٍ أيضا بصيغة *المركز-نصف القطر*.



مثال 1 كتابة معادلة باستخدام المركز ونصف القطر

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

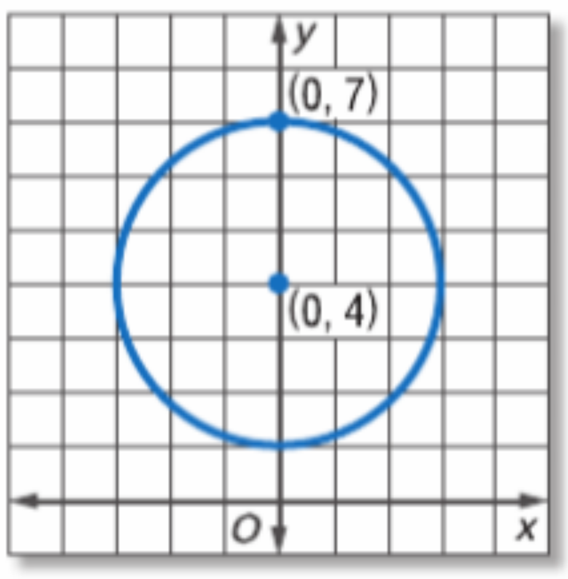
a. المركز عند النقطة $(1, -8)$، ونصف القطر يساوي 7

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$	$(h, k) = (1, -8), r = 7$
$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$	بسط.

b. الدائرة الممثلة بيانيًا على اليسار

المركز عند النقطة $(0, 4)$، ونصف القطر يساوي 3.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$	$(h, k) = (0, 4), r = 3$
$x^2 + (y - 4)^2 = 9$	بسط.



تمرين موجّه

1A. المركز عند نقطة الأصل. نصف القطر يساوي $\sqrt{10}$ **1B.** المركز عند النقطة $(4, -1)$. نصف القطر يساوي 8

مثال 2 كتابة معادلة باستخدام المركز ونقطة

اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة $(-2, 4)$، وتمرّ بالنقطة $(-6, 7)$.

الخطوة 1 أوجد المسافة بين النقطتين لتحديد نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4)$ و $(x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25}$ أو 5 بسط.

الخطوة 2 اكتب المعادلة باستخدام $h = -2$ و $k = 4$ و $r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2$ و $k = 4$ و $r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بسط.

تمرين موجّه

2. اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة $(-3, -5)$ وتمرّ بالنقطة $(0, 0)$.

2 تمثيل الدوائر بيانيًا

يمكنك استخدام معادلة دائرة لتمثيلها بيانيًا على مستوى إحداثي. وللقيام بذلك، فإنك بحاجةٍ إلى كتابة المعادلة بالصيغة القياسية أولاً.

مثال 3 تمثيل دائرة بيانيًا

معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$. اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

اكتب معادلةً بالصيغة القياسية عبر إكمال المربع.

$x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$ المعادلة الأصلية

$x^2 - 8x + y^2 + 2y = -8$ بعزل الحدود المتشابهة وتجميعها.

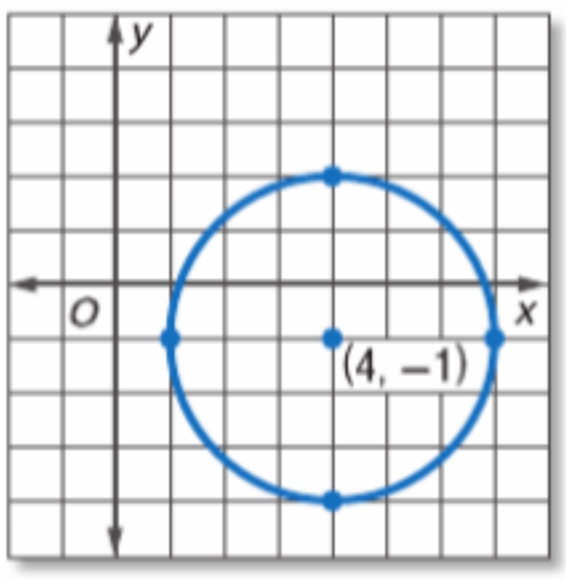
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = -8 + 16 + 1$ بإكمال المربعات.

$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ بالتحليل إلى العوامل والتبسيط.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$ اكتب $+1$ بالصيغة $-(-1)$ و 9 بالصيغة 3^2.

بما أن المعادلة مكتوبةٌ الآن بالصيغة القياسية، فيمكنك تحديد h و k و r.

$$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$$
$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



إذا، $h = 4$ و $k = -1$ و $r = 3$. يقع المركز عند النقطة $(4, -1)$. ويساوي نصف القطر 3. مثّل المركز وأربع نقاط تبعد كل منها 3 وحدات عن هذه النقطة. وارسم الدائرة التي تمرّ بهذه النقاط الأربع.

تمرين موجّه

من أجل كل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

3A. $x^2 + y^2 - 4 = 0$

3B. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 40 = 0$

نصيحة دراسية

إكمال المربع

لإكمال المربع لأي تعبيرٍ تربيعي من الصيغة $x^2 + bx$ اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 أوجد نصفًا واحدًا لـ b.

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1.

الخطوة 3 اجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

الربط بالحياة اليومية

يبلغ عن حوالي 1000 إعصار في جميع أنحاء الولايات المتحدة كل عام. ولأعتى الأعاصير سرعة رياح تساوي $400\ km/h$ أو أكثر. ويمكن أن يتعدى عرض مسار أضرار الإعصار كيلومترًا واحدًا وأن يتعدّى طوله 80 كيلومترًا.

المصدر: الإدارة الوطنية للمحيطات والغلاف الجوي

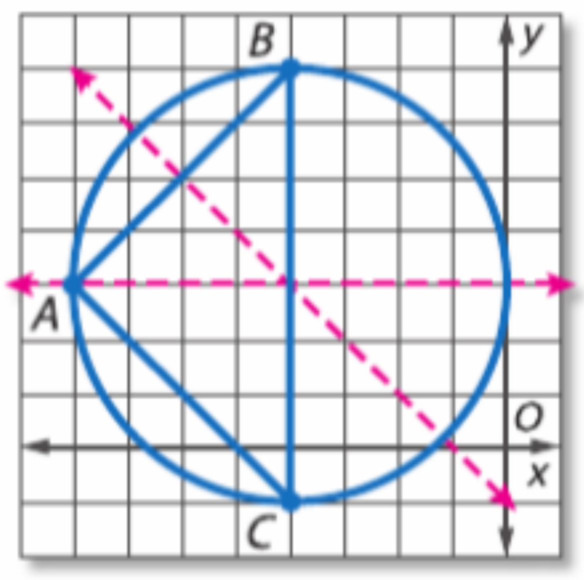
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام ثلاث نقاط لكتابة معادلة

الأعاصير توضع ثلاث صفّارات إنذار للأعاصير بصورةٍ إستراتيجيةٍ على محيط دائرةٍ تحيط ببلدةٍ بحيث يستطيع جميع القاطنين سماعُها. اكتب معادلة الدائرة التي توضع عليها الصفّارات إذا كانت إحداثيات الصفّارات هي $A(-8, 3)$ و $B(-4, 7)$ و $C(-4, -1)$.

الاستيعاب لديك ثلاث نقاط تقع على محيط دائرة.

التخطيط مثّل المثلث $\triangle ABC$ بيانيًا. وأنشئ المنصفين المتعامدين لضلعين من أجل تحديد مركز الدائرة. ثم أوجد نصف القطر.

استخدم المركز ونصف القطر لكتابة معادلة.



الحل يبدو أن المركز يقع عند النقطة $(-4, 3)$.
ونصف القطر يساوي 4. اكتب معادلة.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

التحقّق تحقق من المركز عبر إيجاد معادلتي المنصفين وحلّ نظام المعادلات. وتحقق من نصف القطر عبر إيجادالمسافة بين المركز ونقطةٍ أخرى على الدائرة. ✔

تمرين موجّه

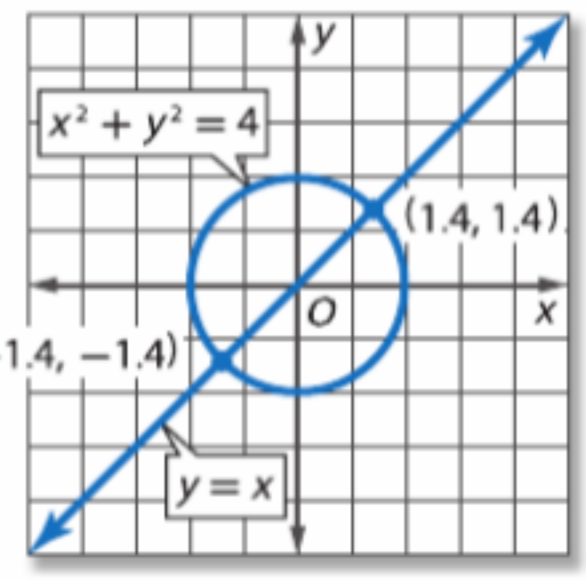
4. اكتب معادلة دائرةٍ تضم النقاط $R(1, 2)$ و $S(-3, 4)$ و $T(-5, 0)$.

يمكن أن يقطع مستقيمٌ دائرةً في نقطتين على الأكثر. ويمكنك إيجاد نقطة (نقطتي) التقاطع بين دائرة ومستقيم عبر تطبيق التقنيات المستخدمة لإيجاد نقطة التقاطع بين مستقيمين والتقنيات المستخدمة لحلّ المعادلات التربيعية.

مثال 5 نقاط التقاطع مع دوائر

أوجد نقطة (نقاط) التقاطع بين $x^2 + y^2 = 4$ و $y = x$.

مثل هاتين المعادلتين بيانيا على المستوى الإحداثي نفسه. إن نقاط التقاطع هي حلول لكلتا المعادلتين. ويمكنك تقدير أن هاتين النقطتين تقعان على التمثيل البياني عند النقطتين $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$ تقريبًا. استخدم التعويض لإيجاد إحداثيات هذه النقاط جبريًا.



$x^2 + y^2 = 4$	معادلة الدائرة
$x^2 + x^2 = 4$	بما أن $x = y$، عوّض x مكان y.
$2x^2 = 4$	بسّط.
$x^2 = 2$	بقسمة كل طرف على 2.
$x = \pm\sqrt{2}$	بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

إذًا، $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$. استخدم المعادلة $y = x$ لإيجاد قيم y المقابلة.

$y = x$	معادلة مستقيم	$y = x$
$y = -\sqrt{2}$	$x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$	$y = \sqrt{2}$

تتوضع نقاط التقاطع عند $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو عند $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$ تقريبًا. تحقق من هذه الحلول في كلتا المعادلتين الأصليتين.

تمرين موجّه

5. أوجد نقطة (نقاط) التقاطع بين $x^2 + y^2 = 8$ و $y = -x$.

نصيحة دراسية

التقنيات التربيعية بالإضافة إلى أخذ الجذور التربيعية، تتضمن تقنيات تربيعية أخرى قد تحتاج إلى تطبيقها من أجل حل المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ إكمال المربع والتحليل إلى العوامل والقانون العام، $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

التحقق من فهمك

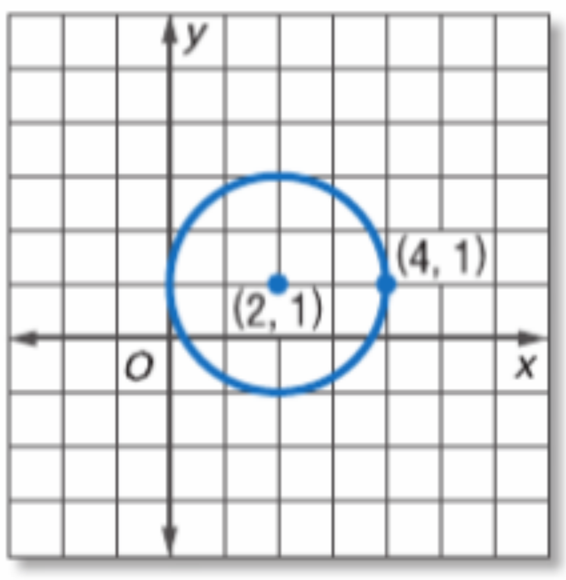
المثالان 1 و 2 **اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

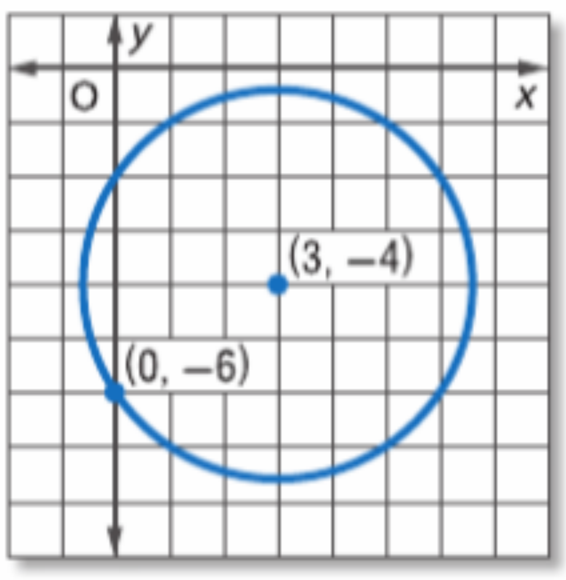
1. المركز عند $(9, 0)$، نصف القطر يساوي 5

2. المركز عند $(3, 1)$، نصف القطر يساوي 14

3. المركز عند نقطة الأصل، تمر الدائرة بالنقطة $(2, 2)$

4. المركز عند النقطة $(-5, 3)$، تمر الدائرة بالنقطة $(1, -4)$

5. 

6. 

مثال 3 **من أجل كل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

7. $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$

8. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

مثال 4

9. **المذياع** تمثّل ثلاثة أبراج مخصصةٍ للمذياع من خلال النقاط $R(4, 5)$ و $S(8, 1)$ و $T(-4, 1)$. حدّد موضع برجٍ آخر متساوي البعد عن الأبراج الثلاثة جميعها، واكتب معادلةً للدائرة.

10. **الاتصالات** يمكن تمثيل ثلاثة أبراج للهواتف الخلوية من خلال النقاط $X(6, 0)$ و $Y(8, 4)$ و $Z(3, 9)$. حدّد موضع برجٍ آخر يبعد المسافة نفسها عن الأبراج الثلاثة، واكتب معادلةً للدائرة.

مثال 5 **أوجد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أي منها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.**

11. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$
$y = x + 1$

12. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 18$
$y = -2x - 2$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **البنية** **اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

13. المركز يقع عند نقطة الأصل، نصف القطر يساوي 4

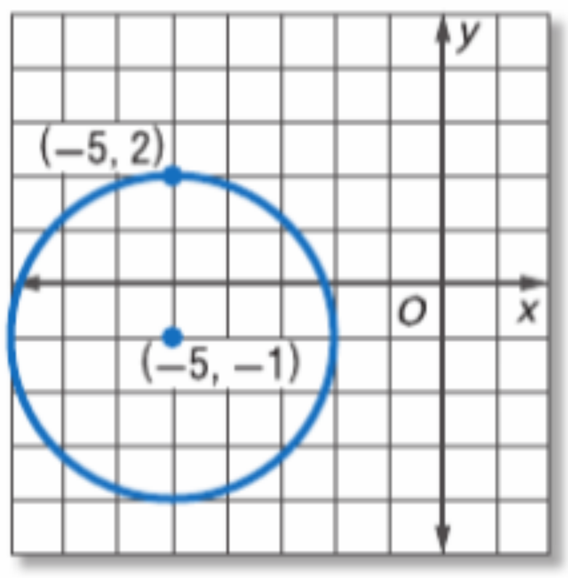
14. المركز يقع عند النقطة $(6, 1)$، نصف القطر يساوي 7

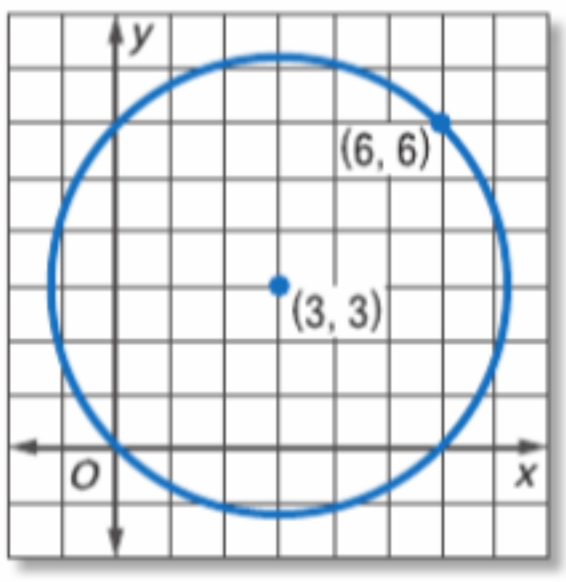
15. المركز يقع عند النقطة $(-2, 0)$، القطر يساوي 16

16. المركز يقع عند النقطة $(8, -9)$، نصف القطر يساوي $\sqrt{11}$

17. المركز يقع عند النقطة $(-3, 6)$، تمر الدائرة بالنقطة $(0, 6)$

18. المركز يقع عند النقطة $(1, -2)$، الدائرة تمر بالنقطة $(3, -4)$

19. 

20. 

21. **الطقس** تظهر شاشة رادار دوبلر حلقاتٍ متحدة المركز حول إحدى العواصف. فإذا كان مركز شاشة الرادار عند نقطة الأصل وكان بعد كل حلقة عن المركز يزيد عن سابقتها بمقدار 15 km. فما هي معادلة الحلقة الثالثة؟

22. **البستنة** يسقي مرش مساحةً دائريةً قطرها 10 m بالماء. يتوضع الرشاش على بعد 20 m شمال المنزل. فإذا كان المنزل يقع عند نقطة الأصل، فما هي معادلة دائرة المساحة التي يسقيها المرش بالماء؟

مثال 3 **من أجل كل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

23. $x^2 + y^2 = 36$

24. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$

25 $x^2 + y^2 + 8x - 4y = -4$

26. $x^2 + y^2 - 16x = 0$

مثال 4 **اكتب معادلةً للدائرة التي تضم كل مجموعة من النقاط التالية. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.**

27. A (1, 6), B (5, 6), C (5, 0)

28. F (3, -3), G (3, 1), H (7, 1)

مثال 5 **أوجد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجودها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.**

29. $x^2 + y^2 = 5$, $y = \frac{1}{2}x$

30. $x^2 + y^2 = 2$, $y = -x + 2$

31. $x^2 + (y + 2)^2 = 8$, $y = x - 2$

32. $(x + 3)^2 + y^2 = 25$, $y = -3x$

33. $x^2 + y^2 = 5$, $y = 3x$

34. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $y = -x$

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

.35 دائرة تقع النقطتان الطرفيتان لقطرها عند (0, 4) و (6, −4)

.36 دائرة فيها d = 22 ومركزها مزاح مسافة 13 وحدة إلى يسار نقطة الأصل و 6 وحدات فوقها.

.37 **تمثيل النماذج** تطلِق محركات مختلفة الأحجام نماذج صواريخٍ إلى ارتفاعات مختلفة. وكلما ازداد الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ، كبُرت الدائرة المحتملة لسقوطه. وفي الشروط العادية للرياح، يساوي نصف قطر دائرة السقوط ثلاثة أضعاف الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ.

.a اكتب معادلة دائرة سقوط صاروخٍ يقطع مسافة 300 ft في الهواء.

.b كم سيساوي نصف قطر دائرة سقوط صاروخٍ يقطع مسافة 1000 ft في الهواء؟ افترض أن مركز الدائرة يقع عند نقطة الأصل.

.38 **القفز بالمظلات** تقع الإحداثيات الخاصة بهواة القفز الثلاثة بالمظلات الذين يستعرضون تشكيلا دائريا كما هو موضحٌ في الشكل عند النقاط التقريبية G (13, −2) و H (−1, −2) و J (6, −9).

.a ما هي الإحداثيات التقريبية لهاوي القفز الموجود في المركز؟

.b إذا كانت كل وحدة تمثل مترًا واحدًا، فما هو قطر التشكيل الذي يصنعه هواة القفز؟

.39 **توصيل الطلبات** يقدّم مطعم الأصدقاء للبيتزا خدمة التوصيل المجانية ضمن مسافة 6 km من المطعم. يقع المطعم على بعد 4 km غربًا من منزل ميساء و 5 km شمالاً من منزلها.

.a اكتب معادلةً ومثّلها بيانيًا لتمثيل هذه الحالة إذا كان موقع المنزل عند نقطة الأصل في النظام الإحداثي.

.b هل ستحظى ميساء بتوصيلٍ مجاني إذا طلبت وجبة بيتزا من مطعم الأصدقاء؟ اشرح.

.40 **نقاط تقاطع الدوائر** مثل بيانيًا $x^2 + y^2 = 4$ و $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ على المستوى الإحداثي نفسه.

.a قدّر نقطة (نقاط) التقاطع بين الدائرتين.

.b حلّ المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ لإيجاد قيمة y.

.c عوّض القيمة التي توصلت إليها في الجزء b في $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ وحلّ لإيجاد x.

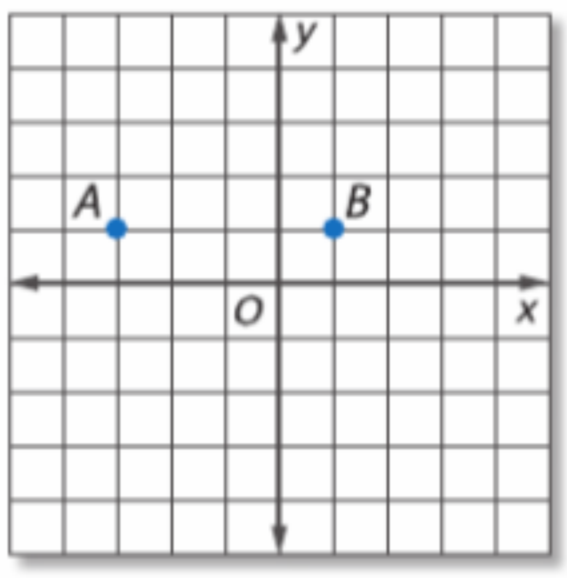
.d عوّض القيمة التي توصلت إليها في الجزء c في $x^2 + y^2 = 4$ وحلّ لإيجاد y.

.e استخدم إجابتيك عن الجزأين c و d لكتابة إحداثيات نقاط التقاطع. قارن هذه الإحداثيات مع تقديرك في الجزء a.

.f تحقق من أن النقطة (النقاط) التي توصلت إليها في الجزء d تقع على كلتي الدائرتين.

41 برهن أو انقض الفرض القائل إنّ النقطة $(1, 2\sqrt{2})$ تقع على محيط دائرةٍ يوجد مركزها عند نقطة الأصل وتضم النقطة $(0, -3)$.

.42 **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة محلاً هندسيًا مركبًا لزوجٍ من النقاط. يحقق **المحل الهندسي المركب** أكثر من مجموعةٍ متمايزةٍ واحدةٍ من الشروط.



.a **جدوليّ** اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي. حدد مواضع 5 إحداثيات في المحل الهندسي لنقاط متساوية البعد عن A و B.

.b **بيانيًا** مثّل المحلّ الهندسي نفسه للنقاط باستخدام تمثيلٍ بياني.

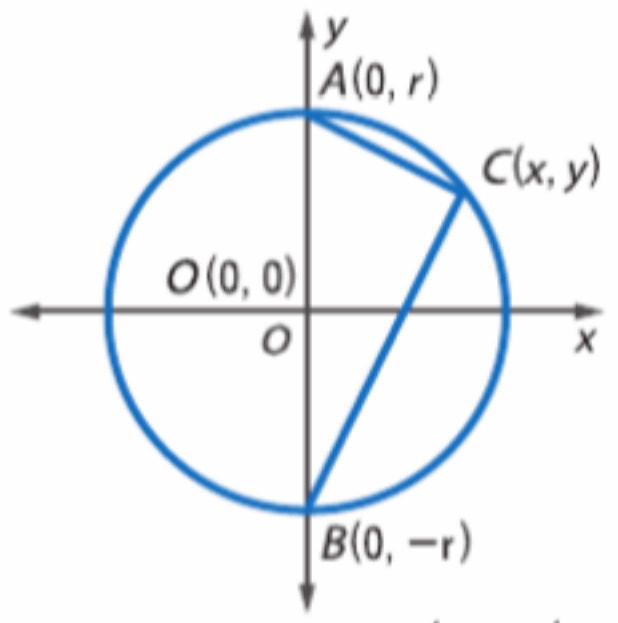
.c **لفظيًا** صف المحل الهندسي لجميع النقاط متساوية البعد عن زوجٍ من النقاط.

.d **بيانيًا** باستخدام تمثيلك البياني في الجزء b. حدّد الموضع الهندسي لجميع النقاط في المستوى والتي تبعد المسافة AB عن B ومثّله بيانيًا.

.e **لفظيًا** صف الموضع الهندسي لجميع نقاط مستوى والتي تبعد مسافةً واحدةً عن نقطةٍ واحدة. ثم صف المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد مسافةً واحدةً عن A و B والتي تبعد المسافة AB عن B في الوقت نفسه. صف التمثيل البياني للموضع الهندسي المركب.

.43 يقع مركز دائرةٍ قطرها 12 في الربع الثاني. المستقيمان $y = -4$ و $x = 1$ مماسيان مع الدائرة. اكتب معادلةً للدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



.44 **التحدي** اكتب برهانًا إحداثيًا لتثبت أنه إذا تقاطعت زاويةٌ محيطيةٌ مع قطر دائرةٍ وفق ما هو موضح، فإن الزاوية المتشكلة زاوية قائمة.

.45 **التدبير** لديك دائرة معادلتها $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$. إذا أزيح مركز الدائرة مسافة 3 وحدات إلى الجهة اليمنى و 9 وحدات إلى أعلى، فماذا ستكون معادلة الدائرة الجديدة؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

.46 **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل ثلاث نقاط لا تقع على استقامةٍ واحدةٍ بيانيًا وصل بينها لتشكل مثلثًا. ثم أنشئ دائرةً تحيط بذلك المثلث.

.47 **الكتابة في الرياضيات** افتتحت سبع محطات إذاعيةٍ جديدةٍ يتعيّن تخصيص ترددات بث لها. تقع المحطات عند النقاط $A(9, 2)$ و $B(8, 4)$ و $C(8, 1)$ و $D(6, 3)$ و $E(4, 0)$ و $F(3, 6)$ و $G(4, 5)$، حيث إن الوحدة $= 50$ km.

.a فإذا كان يمكن تخصيص التردد نفسه للمحطات التي تبعد عن بعضها مسافةً أكثر من 200 km، فما هو العدد الأدنى من الترددات الذي يمكن تخصيصه لهذه المحطات جميعا؟

.b صف طريقتين مختلفتين للشروع في حل هذه المسألة.

.c اختر طريقةً وحلَّ المسألة واشرح استنتاجك.

التحدي **أوجد إحداثيي النقطة P على $\overrightarrow{AB}$ والتي تقسم القطعة المستقيمة وفق النسبة المعطاة لـ AP إلى PB.**

.48 $A(0, 0)$، $B(3, 4)$، 2 إلى 3

.49 $A(0, 0)$، $B(-8, 6)$، 4 إلى 1

.50 **الكتابة في الرياضيات** صف كيف تتغير معادلة دائرةٍ إذا أزيحت الدائرة مسافة a وحدات إلى الجهة اليمنى و b وحدات إلى الأسفل.

تدريب على الاختبار المعياري

51. أي مما يلي يمثل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$ والمارة بالنقطة $(2, 8)$؟

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$
B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$
C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$
D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

52. جبريًا ما هي حلول $n^2-4n=21$ ؟

F 3, 7　　**H** −3, 7
G 3, −7　　**J** −3, −7

53. إجابة قصيرة حلّ: $5(x-4)=16$.

الخطوة 1: $5x-4=16$
الخطوة 2: $5x=20$
الخطوة 3: $x=4$

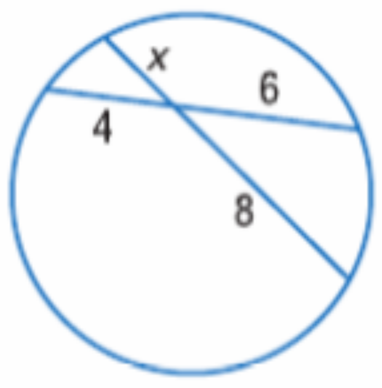
ما الخطوة الأولى الخاطئة في الحل المبيّن أعلاه؟

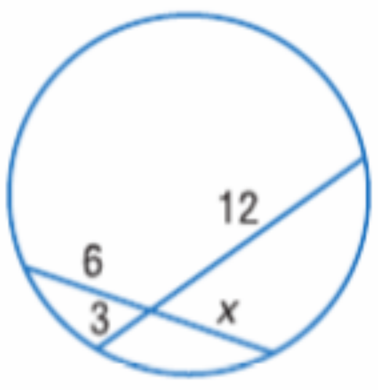
54. SAT/ACT يقع مركز الدائرة $\odot F$ عند النقطة $(-4, 0)$ ولهذه الدائرة نصف القطر 4. فما النقطة التي تقع على محيط الدائرة $\odot F$؟

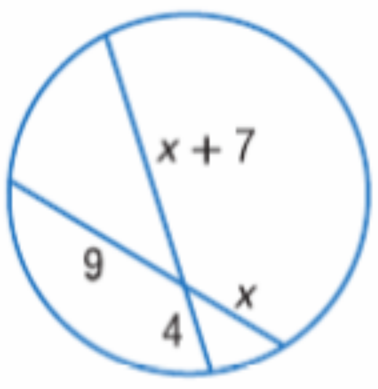
A (4, 0)　　**D** (−4, 4)
B (0, 4)　　**E** (0, 8)
C (4, 3)

مراجعة شاملة

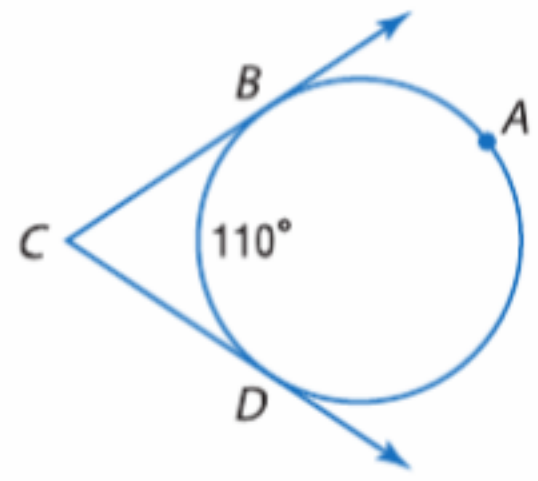
أوجد قيمة x. (الدرس 7-5)

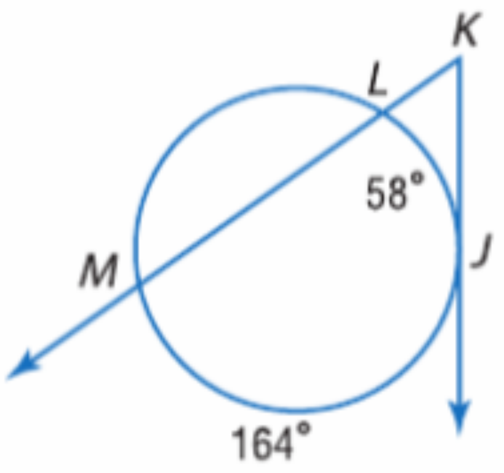
55.


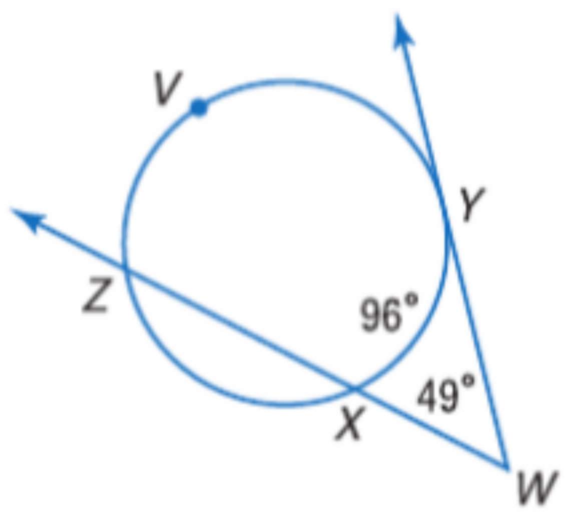
56.


57.


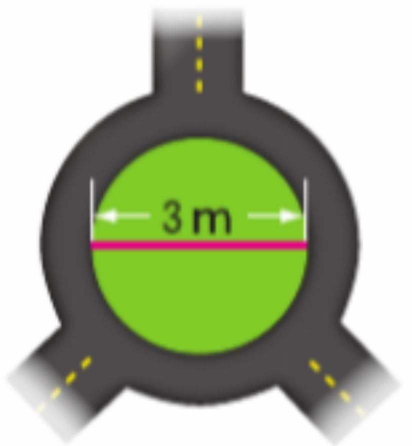
أوجد كل قياس مما يلي. (الدرس 6-5)

58. $m\angle C$


59. $m\angle K$


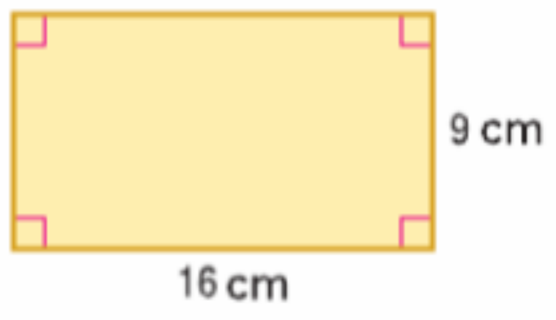
60. $m\widehat{YXZ}$


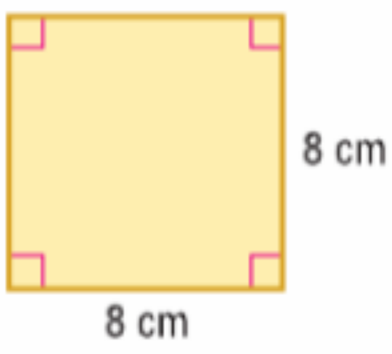
61. الطرقات يضمّ الحيّ الذي يقطنه أيوب دوارات عند نقاط التقاء شوارع محددة. فإذا أكمل أيوب بدراجته دورة واحدة على حافة الدائرة المعشبة بالضبط، فكم عدد الأمتار التي يكون قد قطعها؟ (الدرس 1-5)

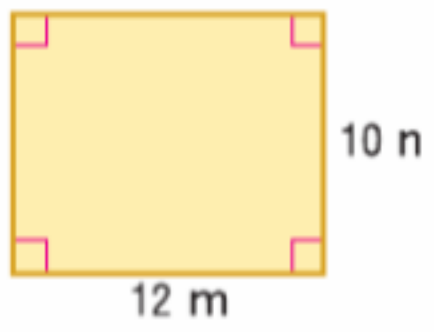


مراجعة المهارات

أوجد محيط كل شكلٍ ومساحته.

62.


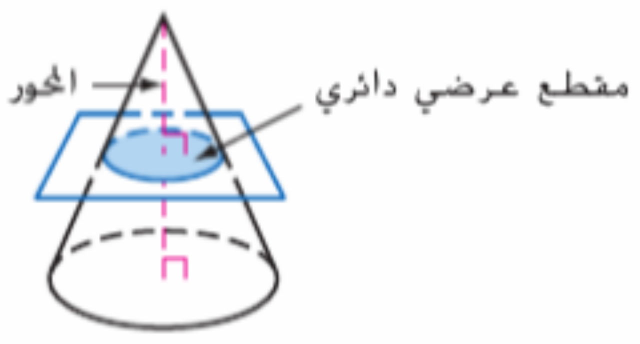
63.


64.


التوسع 5-8

مختبر الهندسة
القطوع المكافئة

الدائرة هي قطعٌ عرضيّ لمخروط دائري قائم. وتدعى هذه المقاطع العرضية **القطوع المخروطية** أو **المخروطيات**. يتشكل القطع العرضي الدائري من خلال تقاطع مخروط مع مستوى عمودي على محور المخروط. ويمكنك إيجاد مقاطع مخروطيةٍ أخرى باستخدام نماذج ملموسةٍ لمخاريط.



النشاط 1 تقاطع مخروط مع مستوى

مثّل تقاطع مخروط ومستوىً يقع عند زاويةٍ ما بالنسبة لمحور المخروط ولكنه لا يمر بقاعدته.

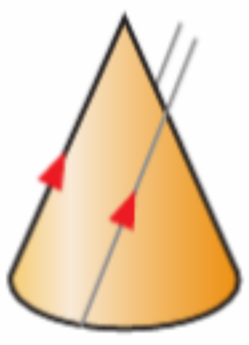
الخطوة 1 املأ كوبًا مخروطيًا ورقيًا بمركبٍ للتشكيل. ثمّ انزع الكوب.

الخطوة 2 اسحب خيطا لتنظيف الأسنان عبر المخروط بزاويةٍ ما بالنسبة لمحور المخروط بحيث لا يمرّ بقاعدته.

الخطوة 3 أبعد قطعتي المخروط بعضهما عن بعض وارسم المقطع العرضي تتبعيًا على ورقتك.

تمثيل النماذج والتحليل

1. يدعى المقطع المخروطي في النشاط 1 بالقطع الناقص. ما شكل القطع الناقص؟
2. كرر النشاط 1، بحيث تسحب خيط تنظيف للأسنان عبر النموذج باتجاهٍ موازٍ لمستقيمٍ تخيلي على جانب المخروط وعبر قاعدته. صف الشكل الناتج.



يطلق على القطع المخروطي الذي توصلت إليه في التمرين 2 اسم **القطع المكافئ** وفي الإختبارات السابقة، عرّفنا القطع المكافئ على أنه شكل التمثيل البياني لدالةٍ تربيعيةٍ مثل $y = x^2$. كما الدائرة وجميع المخاريط، يمكن تعريف القطع المكافئ أيضا على أنه المحلّ الهندسي لنقاط. ويمكنك استكشاف تعريف المحلات الهندسية للقطوع المكافئة باستخدام مطويات ورقية.

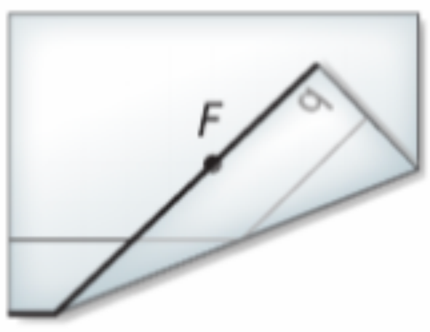
النشاط 2 شكل القطع المكافئ

استخدم المطويات الورقية للتمثيل التقريبي لقطعٍ مكافئ.

الخطوة 1 حدّد الحافّة السفلية لقطعة مستطيلةٍ من ورق الشمع وسمها d. ثمّ سمّ نقطة F في مركز الورقة.

الخطوة 2 اطو الحافة d إلى أعلى بحيث تلامس النقطة F. شكل طيةً حادّة. ثم افتح الورقة وسوّها لتصبح ممهّدة.

الخطوة 3 كرر الخطوة 2 على الأقل 20 مرةً، مع طيّ الورقة إلى نقطةٍ أخرى على الحافة d كلمرة. ثمّ ارسم المنحنى المتشكل تتبعيًا.



تمثيل النماذج والتحليل

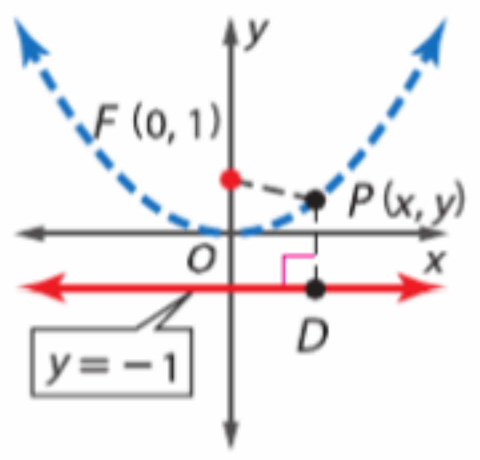
3. سمِّ نقطة P على القطع المكافئ وارسم $\overline{PF}$. ثم استخدم منقلةً لإيجاد نقطةٍ D على المستقيم d بحيث يكون $\overline{PD} \perp d$. صف العلاقة القائمة بين $\overline{PF}$ و $\overline{PD}$.

كرر النشاط 2، مع عَمَل التغيير المحدد على قطعةٍ جديدةٍ من ورق الشمع. وصف الأثر على القطع المكافئ المتشكل.

4. ضع المستقيم d على طول الحافة فوق النقطة F
5. وضع المستقيم d على طول الحافة الموجودة إلى يمين النقطة F.
6. ضع المستقيم d على طول الحافة الموجودة إلى يسار النقطة F
7. وقرّب النقطة F إلى المستقيم d.
8. أبعد النقطة F عن المستقيم d.

القطع المكافئ من الناحية الهندسية هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى متساوية البعد عن نقطةٍ ثابتةٍ تدعى **البؤرة** وعن مستقيمٍ ثابت يدعى **الدليل**. تذكر أن المسافة بين نقطةٍ ثابتةٍ ومستقيمٍ هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم والمارة بتلك النقطة. ويمكنك إيجاد معادلة قطعٍ مكافئ على المستوى الإحداثي باستخدام تعريف محلّها الهندسي وقانون المسافة.

النشاط 3 معادلة القطع المكافئ



أوجد معادلة القطع المكافئ الذي تقع بؤرته عند النقطة (0, 1) ودليله هو $y = -1$.

الخطوة 1 مثّل $F(0, 1)$ و $y = -1$ بيانيًا. وارسم منحنيًا بشكل الحرف U للقطع المكافئ الواقع بين النقطة والمستقيم وفق ما هو موضح. سمّ نقطةً $P(x, y)$ على المنحنى.

الخطوة 2 سمّ نقطةً D على $y = -1$ بحيث تكون القطعة المستقيمة $\overline{PD}$ عمودية على المستقيم $y = -1$. ولذلك يجب أن يكون إحداثيا هذه النقطة هما $D(x, -1)$.

الخطوة 3 استخدم قانون المسافة لإيجاد PD وPF.

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} \quad D(x, -1), P(x, y), F(0, 1) \quad PD = \sqrt{(x - x)^2 + [y - (-1)]^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \quad \text{بسط.} \quad = \sqrt{(y + 1)^2}$$

الخطوة 4 بما أن $PD = PF$. فضع التعبيرين متساويين فيما بينهما.

$$\sqrt{(y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \quad PD = PF$$

$$(y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2 \quad \text{بتربيع كل طرف.}$$

$$y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \quad \text{بتربيع كل ثنائية حد.}$$

$$4y = x^2 \text{ أو } y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{بطرح } y^2 - 2y + 1 \text{ من كل طرف.}$$

معادلة قطع مكافئ تقع بؤرته عند النقطة (0, 1) ودليله $y = -1$ هو $y = \frac{1}{4}x^2$.

النموذج والتحليل

أوجد معادلةً للقطع المكافئ ذي البؤرة والدليل المعطيين.

9. $(0, -2)$, $y = 2$
10. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $y = -\frac{1}{2}$
11. $(1, 0)$, $x = -1$
12. $(-3, 0)$, $x = 3$

يمكن أن يقطع مستقيمٌ قطعًا مكافئًا في نقطةٍ واحدةٍ أو نقطتين أو ألا يقطعه في أي نقطة. أوجد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أيٍّ منها، لكل قطعٍ مكافئٍ ومستقيمٍ أعطيت معادلتاهما في ما يلي.

13. $y = x^2$, $y = x + 2$
14. $y = 2x^2$, $y = 4x - 2$
15. $y = -3x^2$, $y = 6x$
16. $y = -(x + 1)^2$, $y = -x$

الدرس 5-9

مساحة الدائرة والقطاع الدائري

:: السابق

- لقد أوجدت محيط دائرة.

:: الحالي

1. إيجاد مساحة الدائرة
2. إيجاد مساحة القطاع الدائري

:: لماذا؟

- لتحديد ما إذا كانت رقاقة البيتزا متوسطة الحجم أو كبيرة الحجم أفضل قيمةً. فيمكنك مقارنة كلفة السنتيمتر المربع الواحد. قسم كلفة كل رقاقة بيتزا على مساحتها.

المفردات الجديدة

قطاع دائري
sector of a circle
قطعة دائرية
segment of a circle

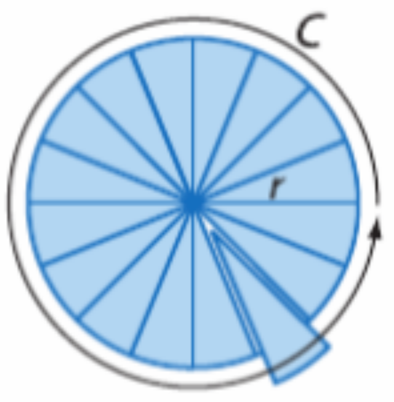
ممارسات في الرياضيات

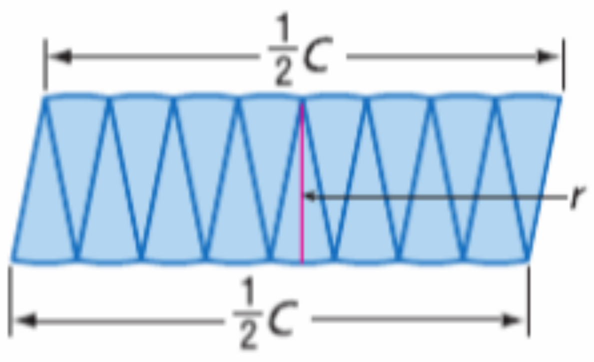
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 مساحة الدائرة

تعلمت في دروس سابقة أن قانون محيط دائرة C قطرها r يعطى بالعلاقة $C = 2\pi r$. يمكنك استخدام هذا القانون لتطوير قانون لإيجاد مساحة دائرة.

قُسمت الدائرة المبينة أدناه، والتي نصف قطرها r ومحيطها C إلى قطعٍ متطابقة، ثم أعيد ترتيبها لتشكيل شكلٍ يشبه متوازي أضلاع.





مع زيادة عدد القطع المتطابقة، يصبح الشكل معاد الترتيب أقرب إلى متوازي أضلاع. وقاعدة متوازي الأضلاع هي $\frac{1}{2}C$ وارتفاعه هو r. إذًا فمساحته هي $\frac{1}{2}C \cdot r$ بما أن $C = 2\pi r$. فإن مساحة متوازي الأضلاع هي أيضا $\frac{1}{2}(2\pi r)r$ أو πr^2.

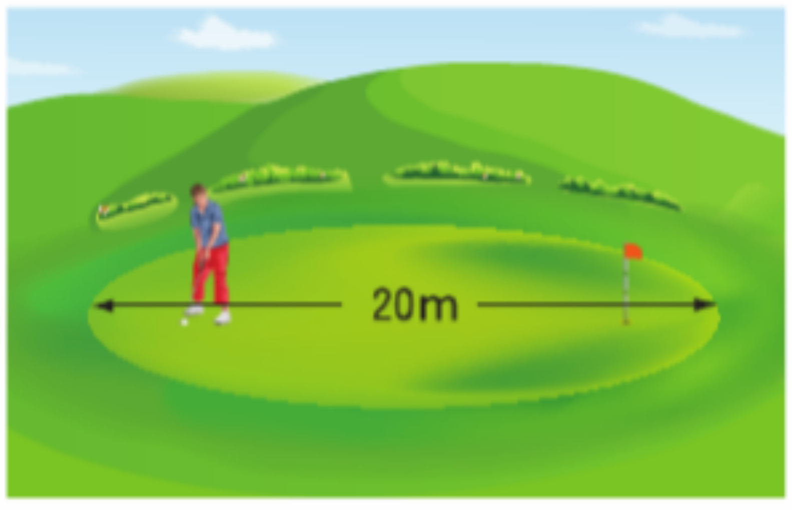
المفهوم الأساسي مساحة الدائرة

الشرح إن مساحة الدائرة A تساوي π مضروبةً بمربع نصف القطر r.

الرموز $A = \pi r^2$

مثال 1 من الحياة اليومية مساحة الدائرة

الرياضة ما هي مساحة الرقعة الخضراء الدائرية الموضحة مقربةً إلى أقرب مترٍ مربع؟



يساوي القطر 20 m. إذًا فنصف القطر يساوي 10 m.

$A = \pi r^2$	مساحة الدائرة
$= \pi(10)^2$	$r = 10$
≈ 314	باستخدام آلة حاسبة.

إذًا، تبلغ المساحة حوالي $314\ m^2$.

تمرين موجّه

1. **الرياضة** يساوي نصف قطر الهدف في لعبة الرماية 12 cm. فما مساحة الهدف مقربةً إلى أقرب سنتيمترٍ مربع؟

مثال 2 استخدام مساحة الدائرة لإيجاد قياس مجهول

الجبر أوجد نصف قطر دائرةٍ مساحتها $95\ cm^2$.

مساحة الدائرة	$A = \pi r^2$
$A = 95$	$95 = \pi r^2$
بقسمة كل طرف على π.	$\frac{95}{\pi} = r^2$
باستخدام الآلة الحاسبة. وبأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.	$5.5 \approx r$

يساوي نصف قطر الدائرة حوالي 5.5 cm.

تمرين موجّه

2. **جبريًا** مساحة دائرةٍ $196\pi\ yd^2$. أوجد القطر.

مراجعة المفردات

الزاوية المركزية هي زاويةٌ لها رأس يقع في مركز الدائرة وضلعان يضمان نصفي قطرين في الدائرة

القوس هو جزءٌ من محيط دائرةٍ محدّدٌ بنقطتين

2 مساحات القطاع الدائري

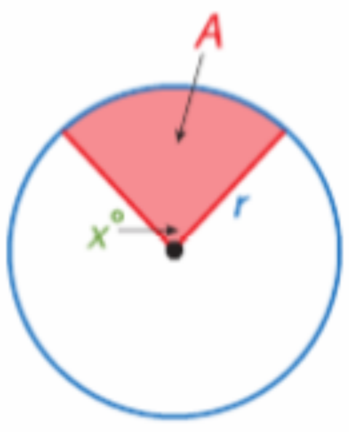
إن الشريحة المأخوذة من رقاقة بيتزا دائرية مثالٌ عن قطاع في دائرة. و **قطاع الدائرة** هو منطقةٌ من الدائرةِ تحدّها زاويةٌ مركزية وقوس محصورٌ أكبر أو أصغر. ويشبه قانون حساب مساحة القطاع قانون حساب طول القوس.

المفهوم الأساسي مساحة قطاع

تساوي نسبة **المساحة A لقطاعٍ** إلى **مساحة الدائرة بكاملها** πr^2 نسبة **قياس القوس المحصور x** بالدرجات إلى 360.

التناسب: $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{x}{360}$

المعادلة: $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$



مثال من الحياة اليومية 3 مساحة قطاع

البيتزا تقطع رقاقة بيتزا دائرية قطرها يساوي 12 in إلى 8 شرائح متطابقة. فما هي مساحة الشريحة الواحدة مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مئة؟

الخطوة 1 أوجد قياس قوس شريحة البيتزا.

بما أن رقاقة البيتزا مقسمةٌ بالتساوي إلى 8 شرائح، فسوف يساوي قياس القوس لكل شريحة $360 \div 8$ أو 45.

الخطوة 2 أوجد نصف قطر رقاقة البيتزا. واستخدم هذا القياس لإيجاد مساحة القطاع، أو الشريحة.

يساوي القطر 12 in. إذًا فنصف القطر يساوي 6 in.

مساحة القطاع	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
$x = 45$ و $r = 6$	$= \frac{45}{360} \cdot \pi(6)^2$
استخدم آلة حاسبة.	≈ 14.14

إذًا، فمساحة شريحة هذه البيتزا تساوي تقريبًا $14.14\ in^2$.

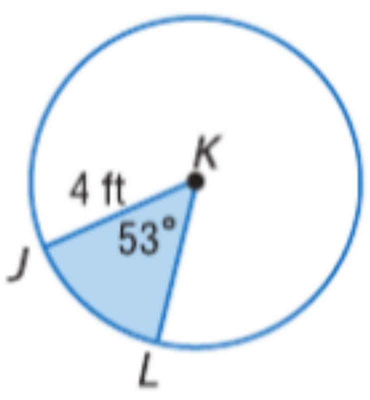
الربط بالحياة اليومية

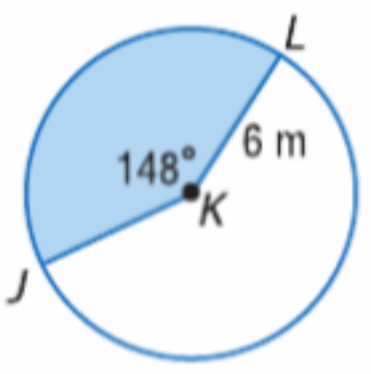
تباع حوالي 3 مليارات رقاقة بيتزا كل عام في الولايات المتحدة الأمريكية. ويكافئ ذلك حوالي 46 شريحة للشخص الواحد سنويًا.

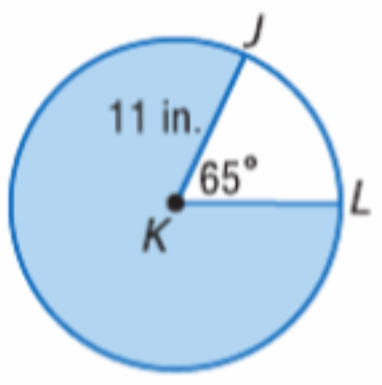
المصدر: موقع مكتبة ثينك كويست

تمرين موجّه

أوجد مساحة القطاع المظلل. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .

3A. 

3B. 

3C. 

.3D **حرف** تعدّ عجلة الألوان المبينة على الجهة اليمنى وسيلةً يستخدمها الفنانون لتنظيم أنظمة الألوان. فإذا كان قطر عجلة الألوان 10 cm وكان كلّ من المقاطع الـ 12 مطابقًا للبقية. أوجد المساحة التقريبية التي تغطيها درجات اللون الأخضر.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الإنشاء** **أوجد مساحة كل دائرة مما يلي وقرّبها إلى أقرب جزء من عشرة .**

1. 

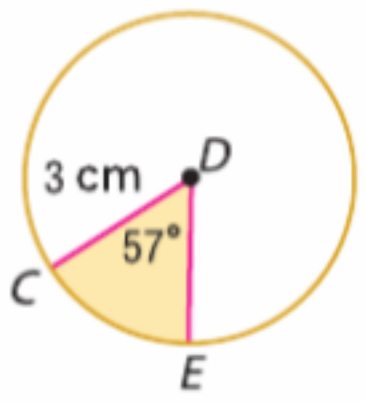
2. 

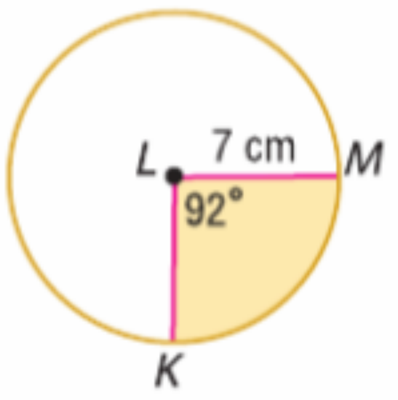
مثال 2 **أوجد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة .**

3. أوجد قطر دائرة مساحتها $74\ mm^2$.

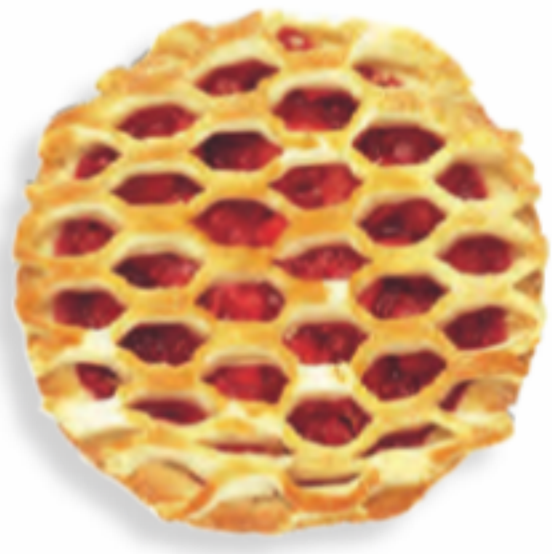
.4 تساوي مساحة دائرة $88\ cm^2$. أوجد نصف قطرها.

مثال 3 **أوجد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة .**

5. 

6. 

.7 **الخَبز** تخبز سها شطائر لحفل جمع التبرعات في مدرستها. وقد قسمت كل شطيرة قطرها 9 in إلى 6 شرائح متساوية.



.a ما هي مساحة كل شريحة في الشطيرة بالبوصات المربعة؟

.b إذا كانت كلفة كل إعداد كل شريحة هي AED 0.25 وباعت 8 شطائر بسعر AED 1.25 للشريحة الواحدة، فما مبلغ المال الذي ستجمعه؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **تمثيل النماذج** أوجد مساحة كل دائرة مما يلي وقربها إلى أقرب جزء من عشرة .

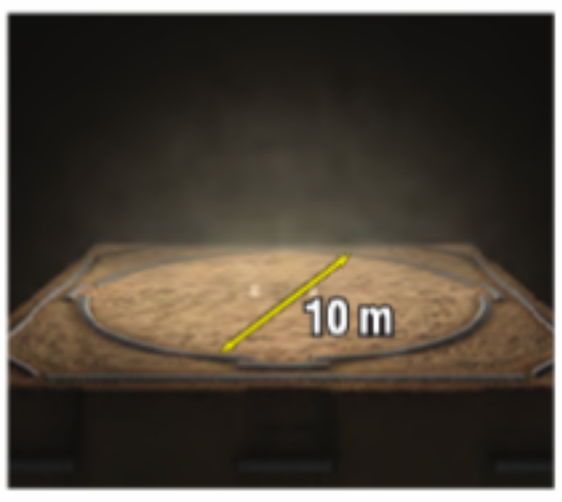
8.


9.


10.


11.


12.


13.


مثال 2 **أوجد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرةٍ إذا لزم الأمر.**

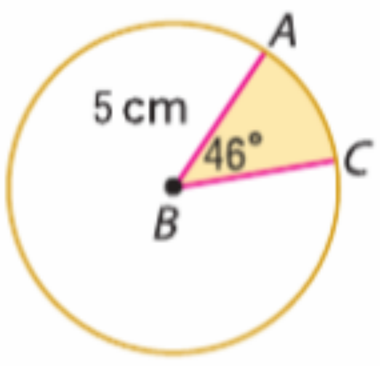
14. تساوي مساحة دائرةٍ $68\ cm^2$. أوجد قطرها .

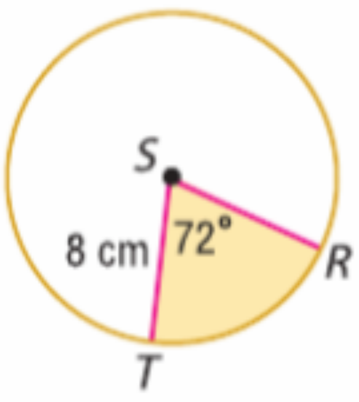
15. أوجد قطر دائرةٍ مساحتها $94\ mm^2$.

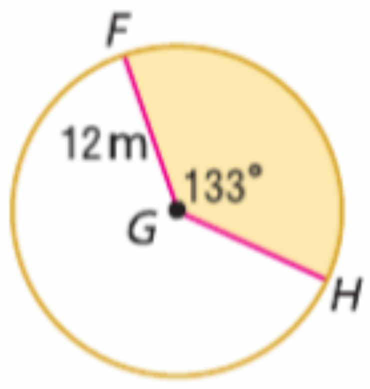
16. تساوي مساحة دائرةٍ $112\ cm^2$. أوجد نصف قطرها.

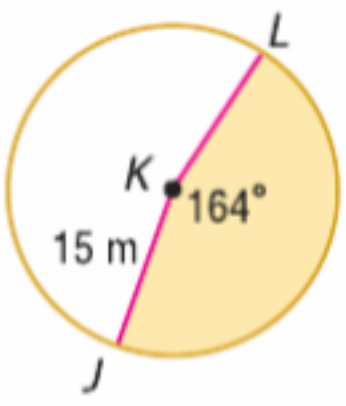
17. أوجد نصف قطر دائرةٍ مساحتها $206\ m^2$.

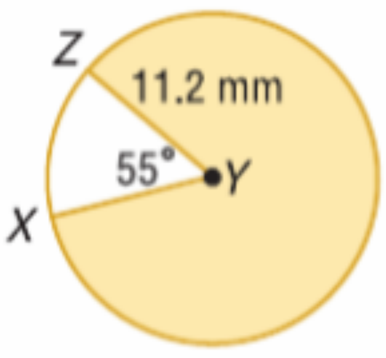
مثال 3 **أوجد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

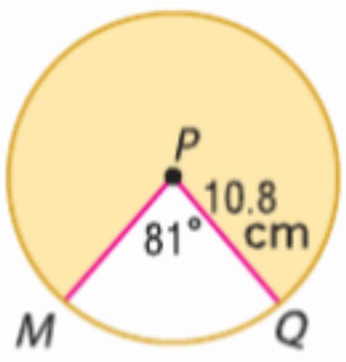
18.


19


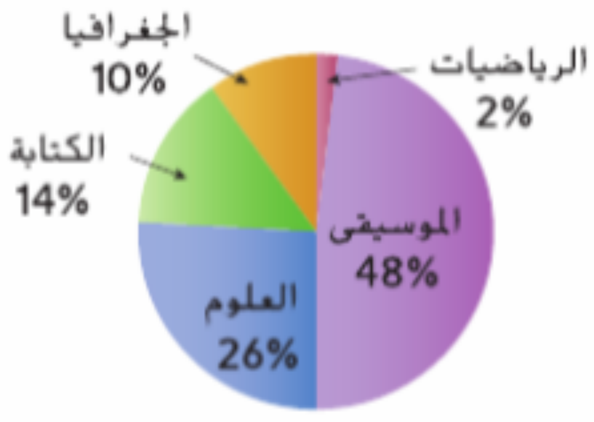
20.


21.


22.


23.


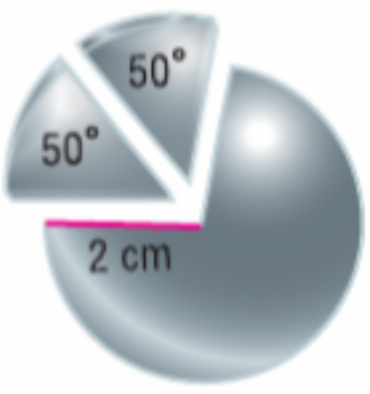
24. **الموسيقى** يوضح التمثيل البياني الدائري مدى تفضيل الطلاب للمواد الدراسية في إحدى المدارس. أوجد مساحة كل قطاع وقياس كل قوس محصورٍ بالدرجات إذا كان نصف قطر الدائرة يساوي وحدة واحدة. انظر الهامش.



25. **المجوهرات** يصنع صانعٌ للمجوهرات قِرطين عبر قص قطاعين بقياس $50°$ من قرص من الفضة.

a. أوجد مساحة كل قطاع.

b. إذا كان وزن قرص الفضة $2.3\ g$، كم مليجراما تزن شريحة الفضة المخصصة لصناعة كل قرط؟



26. **التخرج** يعرض الجدول نتائج استطلاع خضع له الطلاب لتحديد الموضوع المفضل بالنسبة إليهم لحفل التخرج.

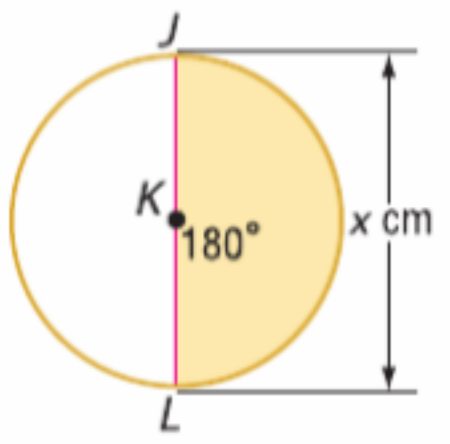
a. شكل تمثيلاً بيانيًا دائريًا قطره سنتيمتران لتمثيل هذه البيانات.

b. أوجد مساحة كل قطاع لكل موضوع في تمثيلك البياني. وقرّب إلى أقرب جزء من المئة من السنتيمتر.

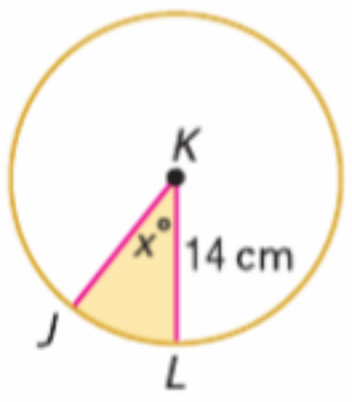
الموضوع	النسبة المئوية
أمسية تحت النجوم	11
احتفال ثلاثاء المرافع	32
الربيع في باريس	8
الليل في ساحة التايمز	47
غير محدد	2

الاستنتاج المنطقي **تعطى المساحة A لكل منطقة مظللة. أوجد قيمة x.**

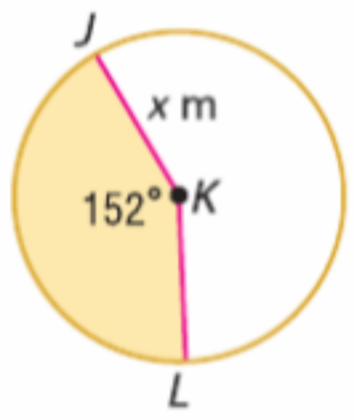
27. $A = 66\ cm^2$



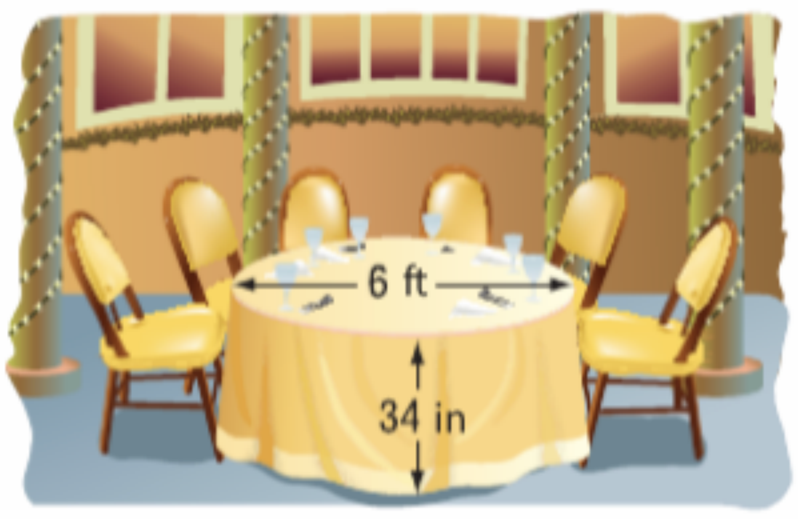
28. $A = 94\ cm^2$



29. $A = 128\ m^2$



30. **حرف** تصنع علياء أغطيةً للمائدة وفق الأبعاد المبينة من أجل إحدى الولائم. أوجد مساحة كل غطاءٍ بالأمتار المربعة إذا كان بالكاد يتعيّن على الغطاء أن يلمس الأرضية.



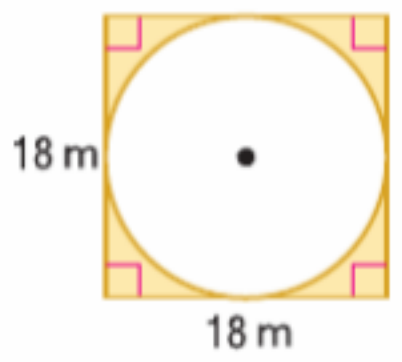
31 **الأشجار** يمكن تحديد عمر شجرةٍ حيةٍ عبر ضرب قطر الشجرة بعامل نموّها أو معدّل نموها.

a. ما هو نصف قطر شجرةٍ يساوي محيطها 1 m؟

b. إذا كان عامل نمو الشجرة 4.5. فكم عمر الشجرة؟

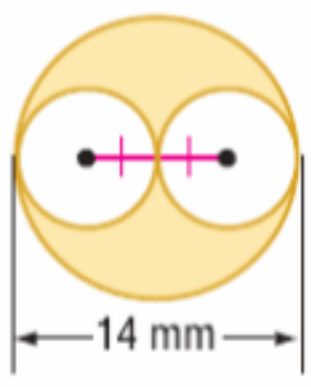
أوجد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .

32.

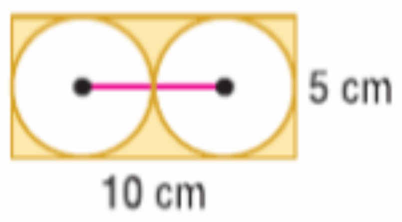


33.

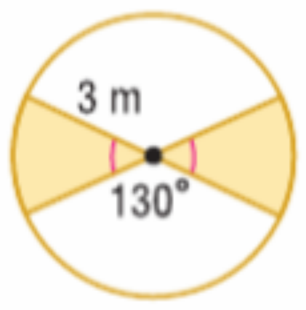
34.



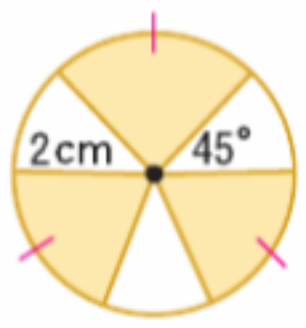
35.



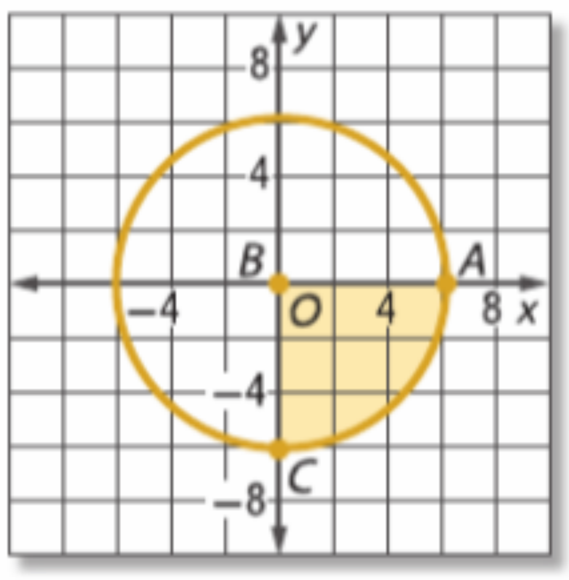
36.



37.



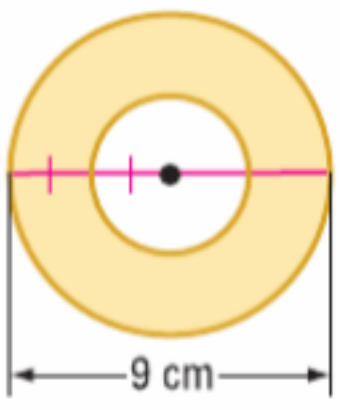
38. **الهندسة الإحداثية** ما هي مساحة القطاع ABC الموضح على التمثيل البياني؟



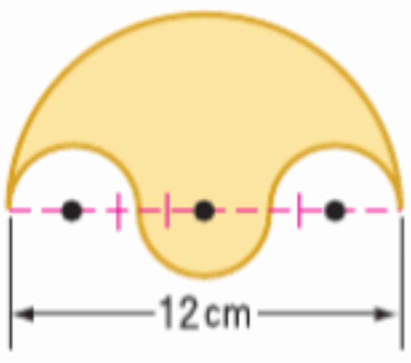
39. **جبريًا** الشكل الموضح أدناه هو قطاعٌ في دائرة. فإذا كان محيط الشكل 22 mm. أوجد مساحته بالمليمترات المربعة.

أوجد مساحة كل منطقة مظللة.

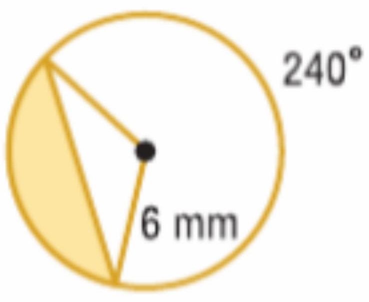
40.



41



42.



.43 **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة القطع الدائرية. و**القطعة الدائرية** هي المنطقة المحصورة بين قوس ووتر في الدائرة.

.a **جبريًا** اكتب معادلةً لإيجاد المساحة A لقطعة دائرية في دائرة نصف قطرها r وقياس زاويتها المركزية $x°$. (*تلميح:* استخدم الحساب المثلثي لإيجاد طول قاعدة المثلث وارتفاعه.)

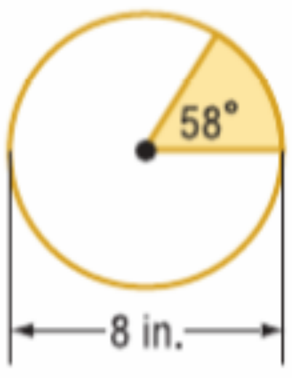
.b **جدوليّ** احسب وسجل في جدولٍ عشر قيمٍ لـ A تقابل قيم x تتراوح من 10 إلى 90 إذا كان r يساوي 12 cm. قرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

.c **بيانيًا** مثّل البيانات الواردة في جدولك بيانيًا بحيث تضع قيم x على المحور الأفقي وقيم A على المحور الرأسي.

.d **تحليليًا** استخدم تمثيلك البياني للتنبؤ بقيمة A عند x تساوي 63. ثم استخدم الصيغة التي ولدتها في الجزء a لحساب قيمة A عند x تساوي 63. ما وجه المقارنة بين القيمتين؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.44 **تحليل الأخطاء** تريد شيماء وعائشة إيجاد مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الموضحة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



شيماء

$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$

$= \frac{58}{360} \cdot \pi (8)^2$

$= 32.4 \text{ cm}^2$

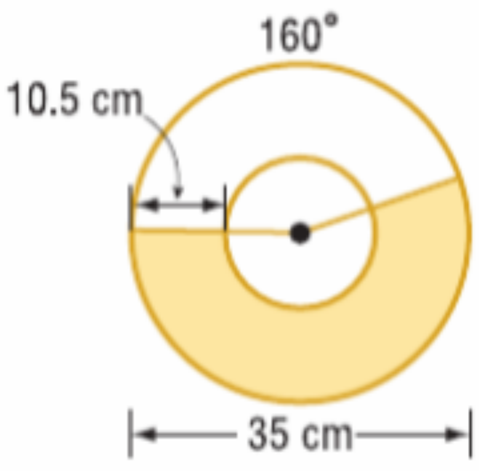
عائشة

$A = \frac{\cancel{x}}{360} \cdot \pi \cancel{r}^2$

$= \frac{58}{360} \cdot \pi (4)^2$

$= 8.1 \text{ cm}^2$

.45 **التحدّي** أوجد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .



.46 **الفرضيات** عد إلى التمرين 43. هل مساحة قطاع الدائرة أكبر من مساحة القطعة المناظرة له أحيانًا أم دائمًا أم ليست كذلك على الإطلاق؟

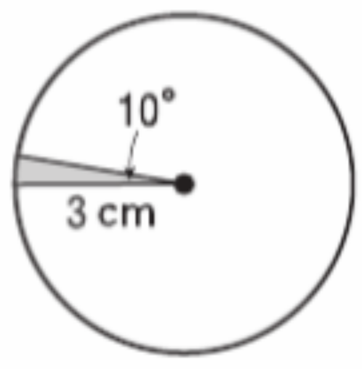
.47 **الكتابة في الرياضيات** صف طريقتين يمكنك استخدامهما لإيجاد مساحة المنطقة المظللة في الدائرة. وأي طريقةٍ أكثر كفاءةً برأيك؟ اشرح استنتاجك.

.48 **التحدّي** اشتق القانون الخاص بإيجاد مساحة قطاعٍ من دائرةٍ باستخدام قانون طول القوس.

.49 **الكتابة في الرياضيات** إذا تضاعف نصف قطر دائرة، فهل سيتضاعف قياس قطاعٍ في تلك الدائرة؟ وهل سيتضاعف إذا تضاعف قياس قوسِ ذلك القطاع؟

تدريب على الاختبار المعياري

50. ما هي مساحة القطاع؟



A $\frac{9\pi}{10}$ cm 2   **C** $\frac{\pi}{4}$ cm^2

B $\frac{3\pi}{5}$ cm 2   **D** $\frac{\pi}{6}$ cm^2

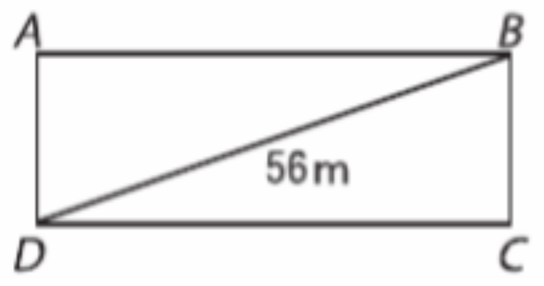
51. **إجابة قصيرة** $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ تتقاطعان عند T. أوجد قيمة x التي تجعل $m\angle MTQ = 2x + 5$ و $m\angle PTM = x + 7$.
ما هما قياسا الزوايتين $\angle MTQ$ و $\angle PTM$ بالدرجات؟

52. **الجبر** لعب عامر 4 أشواط في لعبة البولينغ، وسجل وسطيا 130 نقطة. ثم لعب شوطين آخرين وسجل 180 و 230 نقطة. فكم كان عدد نقاطه الوسطية للأشواط الـ 6؟

F 90   **H** 180

G 155   **J** 185

53. **SAT/ACT** طول كل قطر من قطري الشكل $ABCD$ يساوي 56 مترًا. فإذا كانت $m\angle BAC = 42°$.
فما هو طول $\overline{AB}$ مقربًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة من المتر؟



A 80.5   **D** 50.4

B 75.4   **E** 41.6

C 56.3

مراجعة شاملة

54. **الطيران** تطير طائرةٌ نفاثةٌ باتجاه الشمال الشرقي، وتمثّل سرعتها المتّجهة بـ mph $\langle 450, -450\rangle$. تهب الرياح من الغرب، وتمثّل سرعتها بـ mph $\langle 100, 0\rangle$.

a. أوجد متّجه المحصلة للطائرة النفاثة بالصورة المركبة.

b. أوجد مقدار المحصلة.

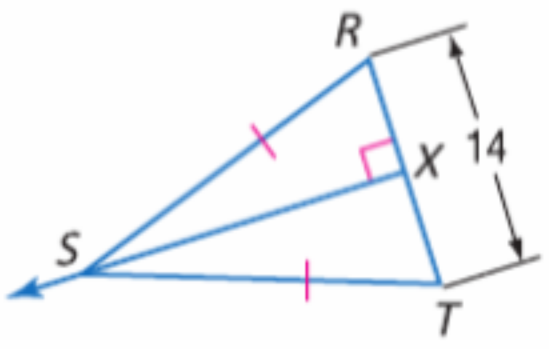
c. أوجد اتجاه المحصلة.

55. **مدن الملاهي** ينظر راكب من قمة قطارٍ للملاهي على بعد 60 yd فوق سطح الأرض إلى الأسفل ليرى دوامة الخيول والأرجوحة الدوارة. فإذا كانت زاويتا الانخفاض تساويان 11° و 8° على الترتيب، فما هي المسافة الفاصلة بين دوامة الخيول والأرجوحة الدوارة؟

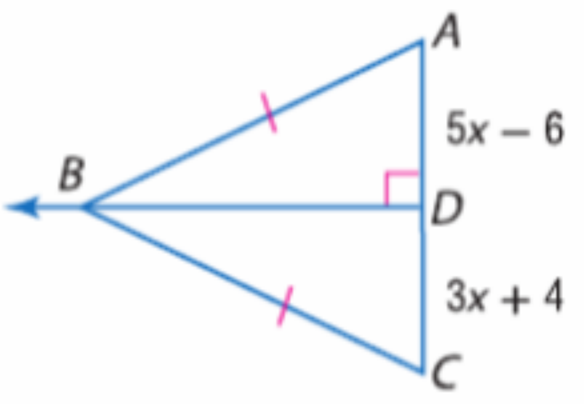
مراجعة المهارات

أوجد قياس كل مما يلي.

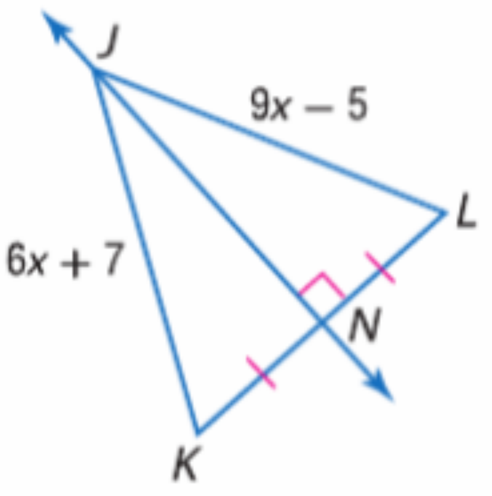
56. XT



57. AC



58. JK



الوحدة 5

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوائر والمحيط (الدرس 5-1)

- يساوي محيط دائرة πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية
(الدروس 5-2 إلى 5-4)

- مجموع قياس الزوايا الداخلية في دائرة يساوي $360°$.
- يتناسب طول قوس طول المحيط.
- تقطع الأقطار العمودية على الأوتار الأوتار والأقواس المحصورة.
- يساوي قياس الزاوية المحيطية نصف قياس القوس الذي تحصره.

القاطع والمماس وقياس الزوايا
(الدرسان 5-5 و 5-6)

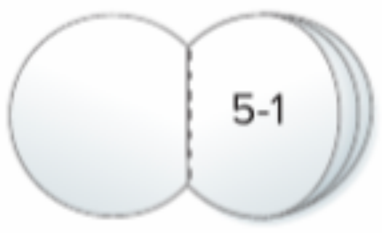
- يقطع المستقيم المماس لدائرة الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ فقط وهو عموديٌّ على نصف قطرها.
- إن مماسي الدائرة المرسومين من نقطة خارجية واحدة متطابقان.
- يساوي قياس الزاوية التي يشكلها مستقيمان قاطعان نصف الفرق الموجب لقوسيها المحصورين.
- يساوي قياس الزاوية المتشكلة من قاطعٍ وخط مماس نصف قوسها المحصور.

القطع الخاصة ومعادلة الدائرة (الدرسان 5-7 و 5-8)

- يمكن إيجاد طولي وترين متقاطعين في دائرة عبر استخدام نواتج ضرب قياس القطع.
- إن معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x - h)^2 - (y - k)^2 = r^2$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

الأقواس المتجاورة adjacent arcs	قطعة القاطع الخارجي external secant segment
القوس adjacent arcs	محاط inscribed
طول القوس arc length	الزاوية المحيطية inscribed angle
المركز center	القوس المحصور intercepted arc
الزاوية المركزية central angle	القوس الأكبر major arc
الوتر chord	القوس الأصغر minor arc
قطعة الوتر chord segment	باي (π) pi
دائرة circle	نقطة التماس point of tangency
محيط الدائرة circumference	نصف القطر radius
محيط circumscribed	القاطع secant
مماس مشترك common tangent	قطعة القاطع secant segment
المحل الهندسي المركب compound locus	نصف الدائرة semicircle
الدوائر متحدة المركز concentric circles	ظل الزاوية tangent
الأقواس المتطابقة congruent arcs	
قطر الدائرة diameter	

مراجعة المفردات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

1. أي قطعةٍ مستقيمةٍ تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة هي نصف قطر في الدائرة.
2. الوتر المار بمركز دائرةٍ هو قطرٌ فيها.
3. يقع رأس الزاوية المركزية في مركز الدائرة ويضم ضلعاها نصفي قطرٍ في الدائرة.
4. إن القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوس أكبر.
5. القوس المحصور هو قوس تقع نقطتاه الطرفيتان على ضلعي زاويةٍ محيطيةٍ ويقع بداخل الزاوية المحيطية.
6. المماس المشترك أي النقطة التي يقطع عندها مستقيمٌ يقع في المستوى نفسه مع دائرة تلك الدائرة.
7. القاطع مستقيمٌ يقطع دائرةً في نقطةٍ واحدةٍ فقط.
8. القاطع هو قطعة مستقيمة من نصف القطر تقع نقطةٌ واحدةٌ فيها فقط على محيط الدائرة.
9. تكون دائرتان متحدتي المركز فقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

الوحدة 5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

5-1 الدوائر والمحيط

لحلّ التمارين 12-10، عد إلى الدائرة $\odot D$.

10. سَمِّ الدائرة

11. سَمِّ نصف قطر

12. سَمِّ وترًا ليس قطرًا في الدائرة.

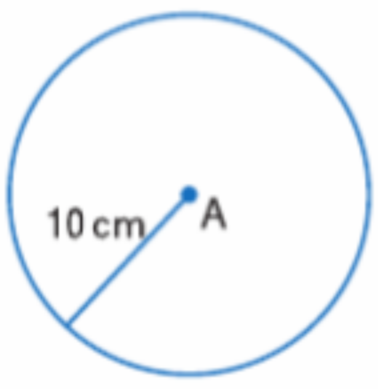
أوجد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة.

13. $C = 43$ cm **14.** $C = 26.7$ m

15. $C = 108.5$ m **16.** $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط الدائرة $\odot A$.



قانون محيط الدائرة	$C = 2\pi r$
بالتعويض	$= 2\pi(10)$
باستخدام آلة حاسبة.	≈ 62.83

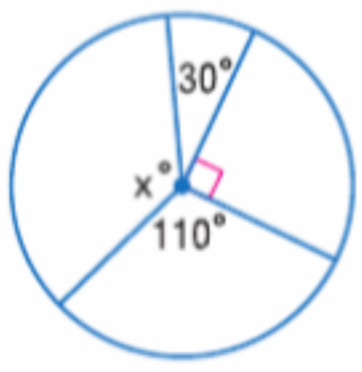
يساوي محيط الدائرة $\odot A$ حوالي 62.83 cm.

5-2 قياس الزوايا والأقواس

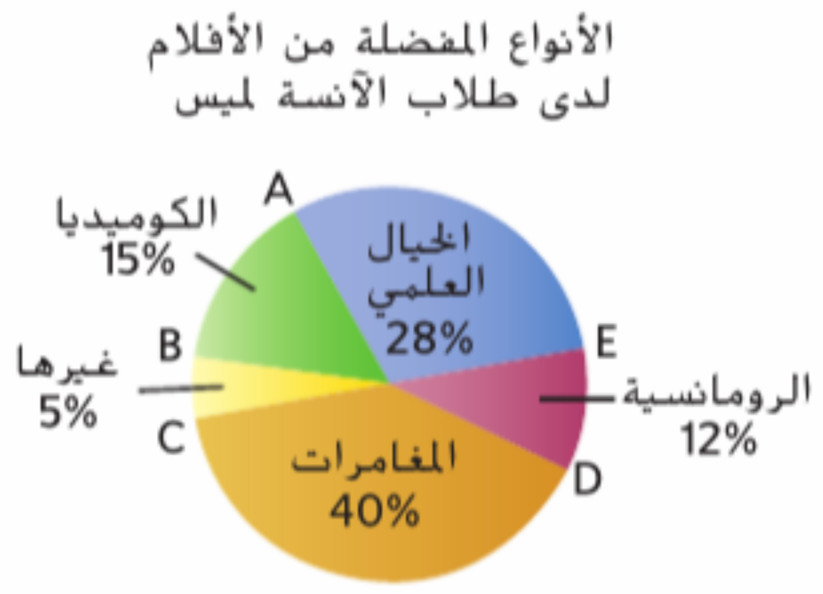
أوجد قيمة x.

17.

18.



19. **الأفلام** يمثل المخطط الدائري نتائج استطلاع أجرته لميس بشأن الأنواع المفضلة من الأفلام لدى الطلاب. أوجد كلا من القياسات.

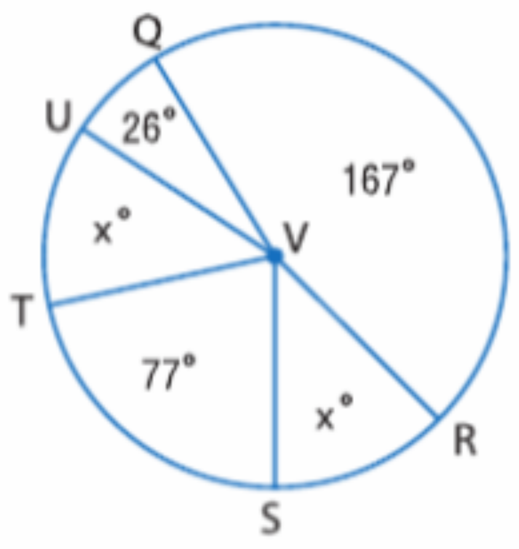


a. $m\widehat{AE}$ **b.** $m\widehat{BC}$

c. صف نوع القوس الذي تمثله فئة المغامرات.

مثال 2

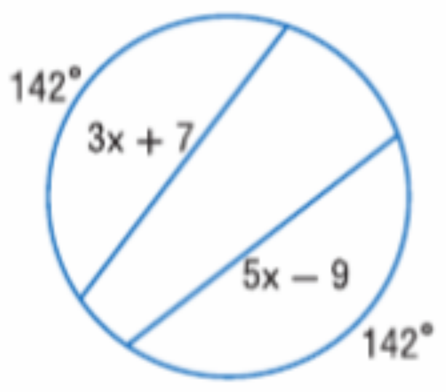
أوجد قيمة x.



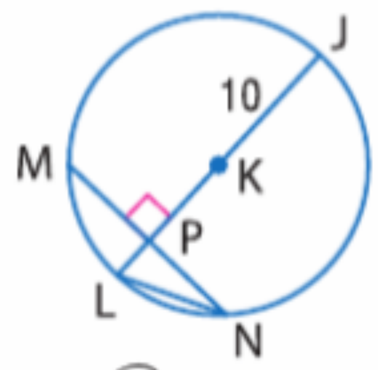
مجموع الزوايا المركزية	$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360$
بالتعويض	$167 + x + 77 + x + 26 = 360$
بسط	$270 + 2x = 360$
اطرح	$2x = 90$
اقسم	$x = 45$

5-3 الأقواس والأوتار

20. أوجد قيمة x.

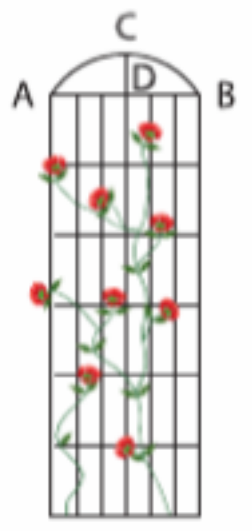


في الدائرة $\odot K$، $MN = 16$، و $m\widehat{MN} = 98$. أوجد كلا من القياسات. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.



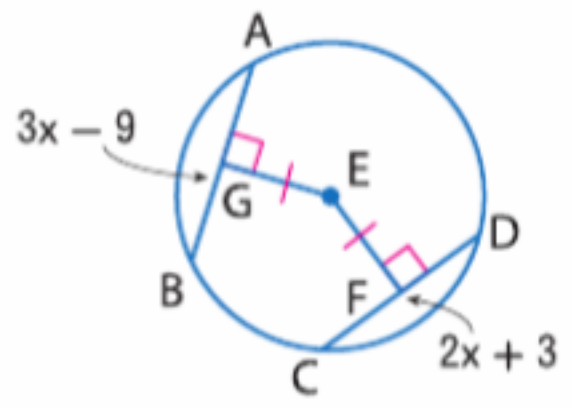
21. $m\widehat{NJ}$ **22.** LN

23. البستنة قمة التعريشة الموضحة قوس في دائرة فيها جزء $\overline{CD}$ من القطر و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. إذا كان $\widehat{ACB}$ يساوي حوالي 28% من دائرة كاملة، فما قياس $m\widehat{CB}$؟



مثال 3

جبريا في الدائرة $\odot E$، لدينا $EG = EF$. أوجد AB.



بما أن الوترين $\overline{EG}$ و $\overline{EF}$ متطابقان، فهما متساويا البعد عن E. إذًا، $AB = CD$.

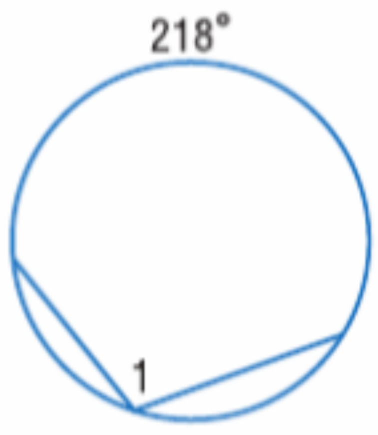
$AB = CD$	النظرية 5.5
$3x - 9 = 2x + 3$	بالتعويض
$3x = 2x + 12$	اجمع
$x = 12$	بسط

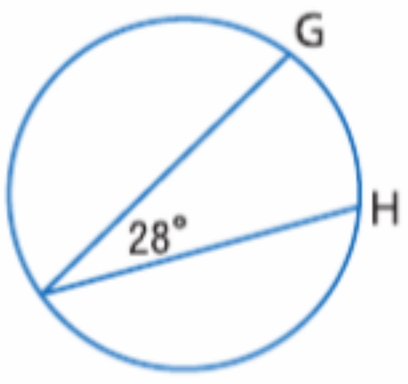
إذًا، $AB = 3(12) - 9$ أو 27.

5-4 الزوايا المحيطية

أوجد قياس كل مما يلي.

24. $m\angle 1$ **25.** $m\widehat{GH}$

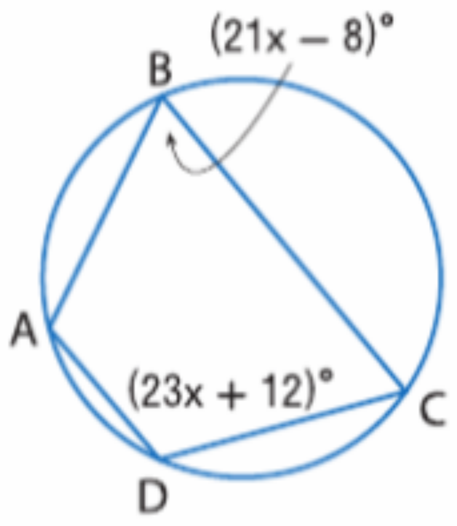




26. التسويق في الشعار المبيّن على الجهة اليسرى، $m\angle 1 = 42$. أوجد $m\angle 5$.

مثال 4

أوجد $m\angle B$ و $m\angle D$.



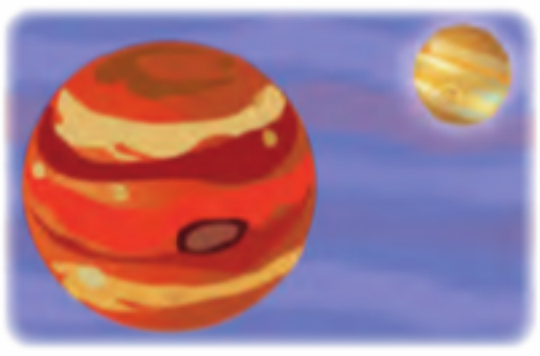
بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، فكل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

$m\angle D + m\angle B = 180$	تعريف الزوايا المتكاملة
$23x + 12 + 21x - 8 = 180$	بالتعويض
$44x + 4 = 180$	بسط.
$44x = 176$	اطرح.
$x = 4$	اقسم.

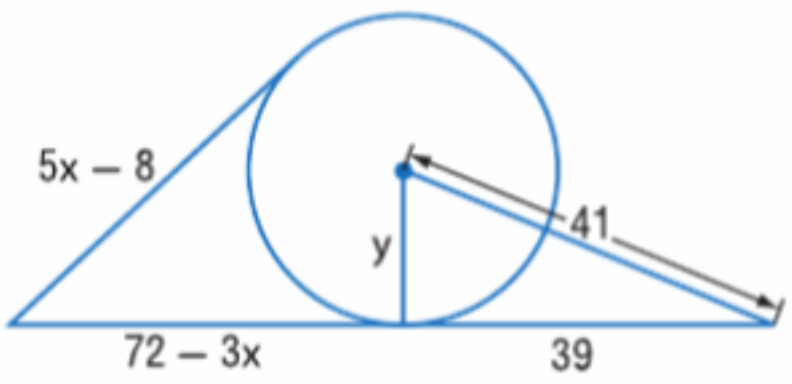
إذًا، $m\angle D = 23(4) + 12$ أو 104 و $m\angle B = 21(4) - 8$ أو 76.

5-5 المماسات

27. **الخيال العلمي** تقول قصةٌ يقرؤها حسان إنه من الممكن السفر اللحظي بين كوكب ثنائي الأبعاد وقمره عندما يتبع المسافر عبر الزمن مماسا. انسخ الشكلين أدناه وارسم جميع مسارات السفر الممكنة.

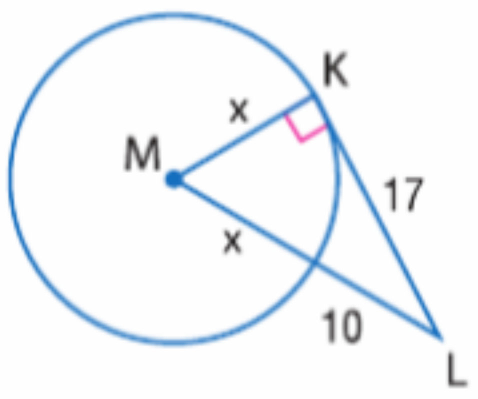


28. أوجد x و y. افترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسية هي مماسية بالفعل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



مثال 5

في الشكل، $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot M$ عند النقطة K. أوجد قيمة x.



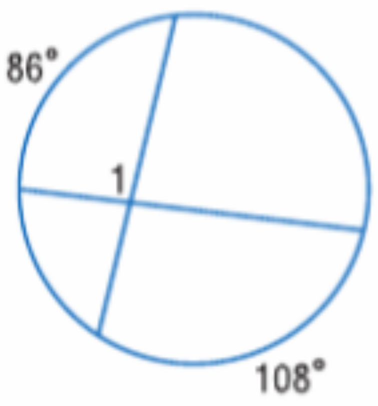
بموجب النظرية 5.10، فإن $\overline{KL} \perp \overline{MK}$. إذًا، فالمثلث $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

$KM^2 + KL^2 = ML^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$	بالتعويض
$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$	اضرب
$289 = 20x + 100$	بسط
$189 = 20x$	اطرح
$9.45 = x$	اقسم

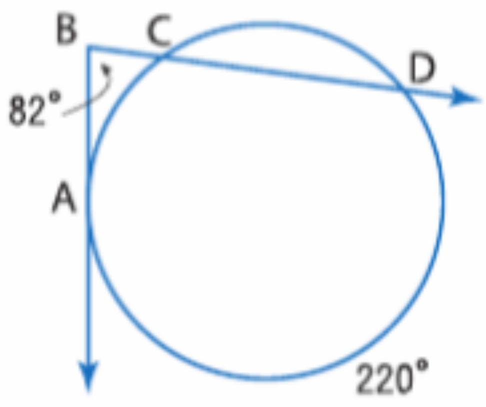
5-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

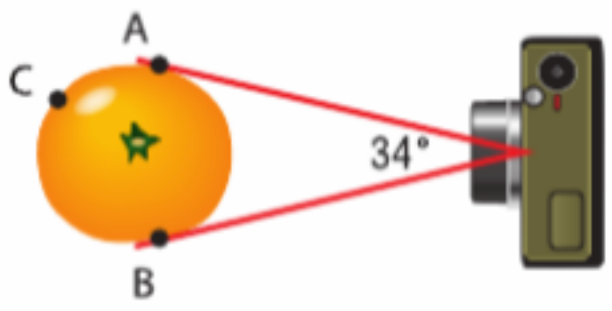
29. $m\angle 1$



30. $m\overparen{AC}$

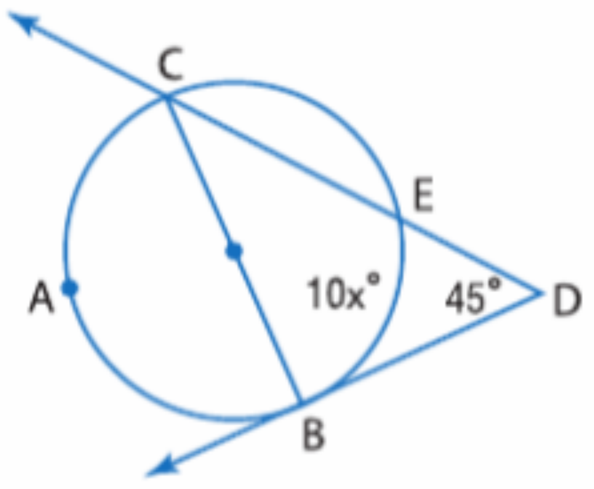


31. **التصوير** يحتاج أحمد إلى أخذ لقطة قريبة لبرتقالة من أجل درس الفنون. حيث يلتقط صورةً للبرتقالة وفق ما هو موضح أدناه، بحيث يشكل الخطان البصريان مماسين مع البرتقالة. فإذا كان قياس زاوية العرض في آلة التصوير هو °34، فما قياس $m\overparen{ACB}$؟



مثال 6

أوجد قيمة x.



$\overparen{CAB}$ نصف دائرة لأن $\overline{CB}$ قطرٌ في الدائرة.

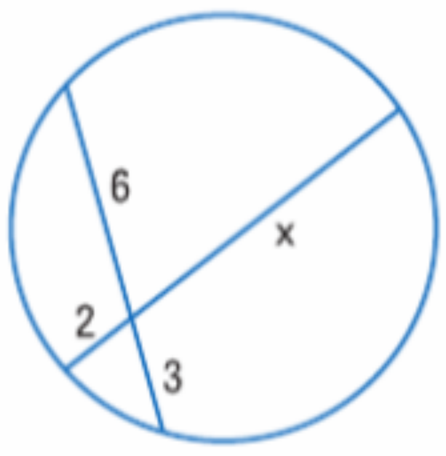
إذًا، $m\overparen{CAB} = 180$.

$m\angle D = \frac{1}{2}(m\overparen{CB} - m\overparen{EB})$	النظرية 5.14
$45 = \frac{1}{2}(180 - 10x)$	بالتعويض
$90 = 180 - 10x$	اضرب
$-90 = -10x$	اطرح
$9 = x$	اقسم

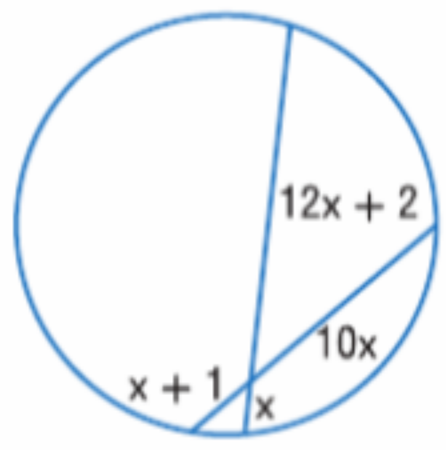
5-7 القطع الخاصة في دائرة

أوجد قيمة *x*. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

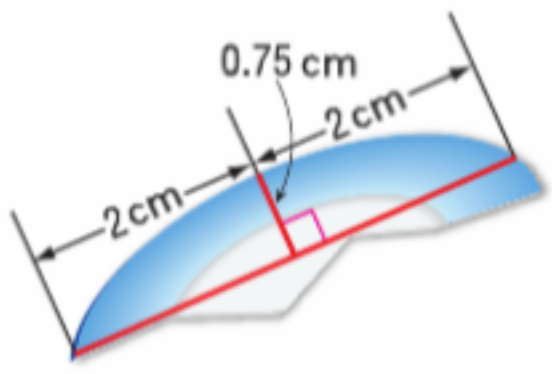
32.



33.

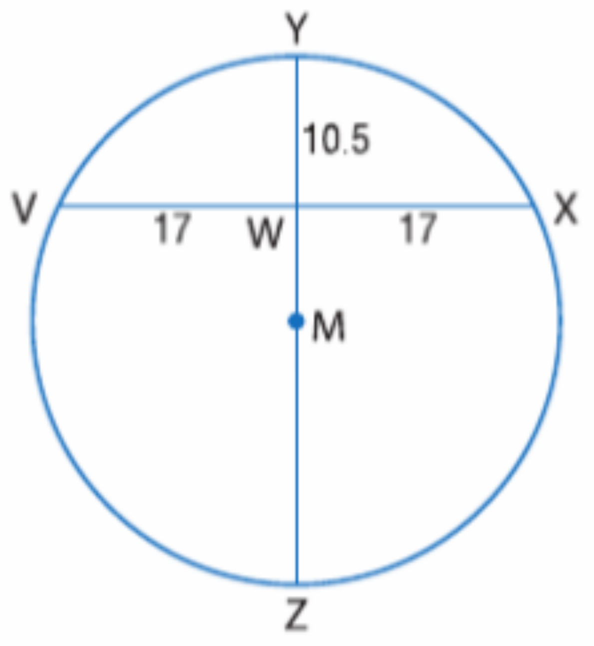


34. **علم الآثار** أثناء حفر حمد لحفرةٍ من أجل غرس شجرة، عثر على قطعةٍ من صحن مكسور. كم كان يساوي محيط الصحن الأصلي؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.



مثال 7

أوجد قطر الدائرة *M*.



$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$	النظرية 5.15
$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$	بالتعويض
$289 = 10.5 \cdot WZ$	بسط
$27.5 \approx WZ$	بقسمة كل طرف على 10.5.
$YZ = YW + WZ$	بموجب مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$YZ = 10.5 + 27.5$	بالتعويض
$YZ = 38$	بسط

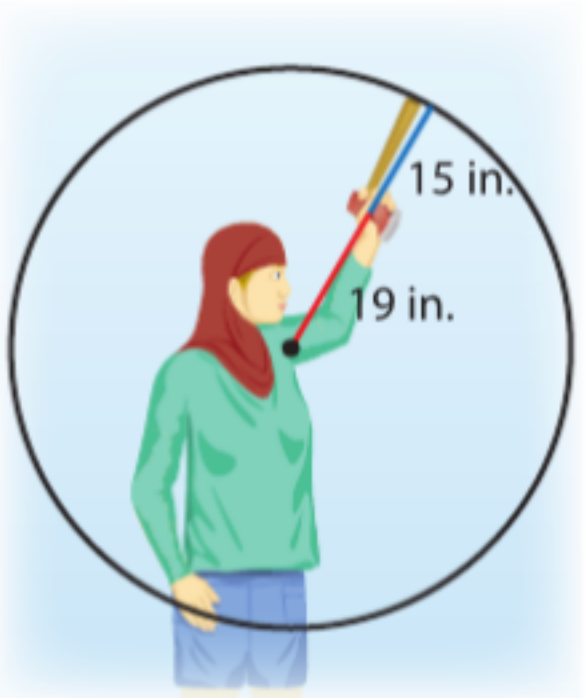
5-8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

35. يقع المركز عند النقطة $(-2, 4)$، نصف القطر يساوي 5

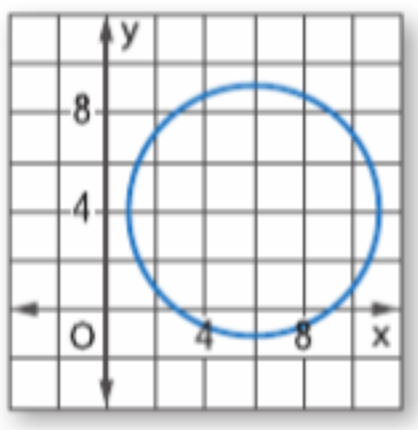
36. يقع المركز عند النقطة $(1, 2)$، قطر الدائرة يساوي 14

37. **الحطب** خلال حصة تدريبية خارجية، تتعلم بدرية فحصا للسلامة في عملية تقطيع الحطب. وتتضمن الطريقة تشكيل دائرة بمدّ ذراعها تتحقق من أنها لن تصدم أي شيء فوقها أثناء التقطيع. فإذا كان امتداد ذراعها يساوي 19 in، وكان طول الفأس 15 in، وكان كتفها يقع عند نقطة الأصل، فما هي معادلة دائرة السلامة الخاصة ببدرية؟



مثال 8

اكتب معادلة التمثيل البياني الدائري أدناه.



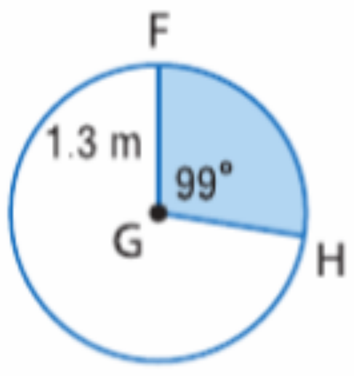
يقع المركز عند النقطة $(6, 4)$، ونصف القطر يساوي 5.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$	$(h, k) = (6, 4)$ و $r = 5$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$	بسط

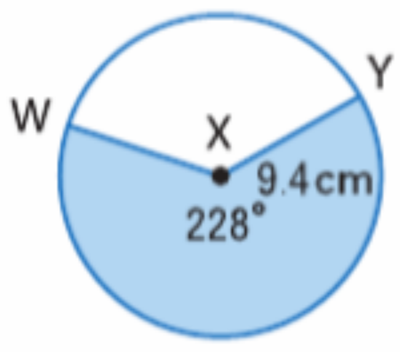
5-9 مساحة الدائرة والقطاع الدائري

أوجد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة.

38.



39.



40. **الدراجات** تغطي زينة للدراجة $\frac{1}{9}$ من الدائرة التي تشكلها العجلة. فإذا كان قطر العجلة يساوي 26 cm، فما هي مساحة الزينة؟

41. **البيتزا** طلب حسام وحامد قطعة بيتزا دائرية بقطر 16 in وقطعاها إلى 12 شريحة.

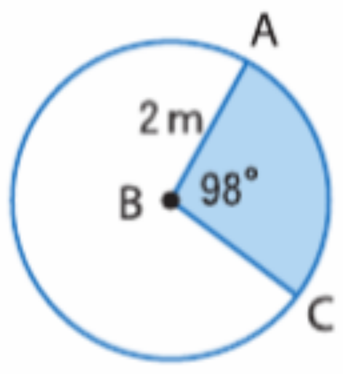
a. إذا أكل حامد 3 قطع، فما هي مساحة البيتزا التي تناولها؟

b. إذا أكل حميد قطعتين، فما مساحة البيتزا التي تناولها؟

c. ما مساحة ما تبقى من البيتزا؟

مثال 9

أوجد مساحة القطاع المظلل. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.



$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$ مساحة قطاع

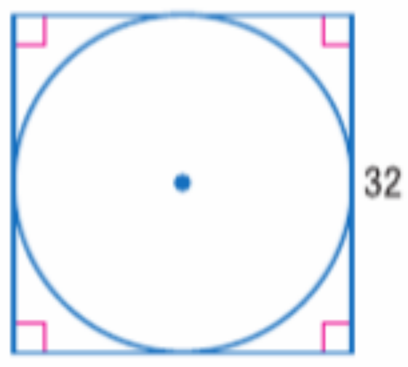
$= \frac{98}{360} \cdot \pi(2)^2$ بالتعويض

$\approx 3.4\ \text{m}^2$ بسط

تدريب على الاختبار

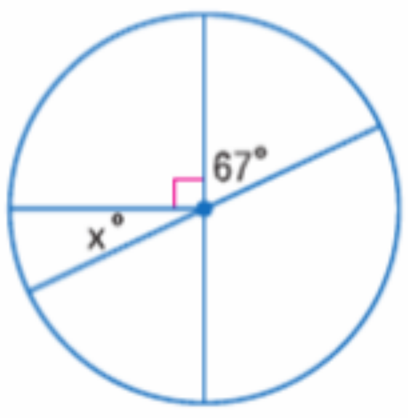
1. **بِرك السباحة** لدى عائلة أمل بركة سباحةٍ عمقها 1.3 متر في فناء منزلهم الخلفي. فإذا كان قطر البركة 7.6 m، فما هو محيط البركة مقربًا إلى أقرب متر؟

2. أوجد المحيط الدقيق للدائرة أدناه.

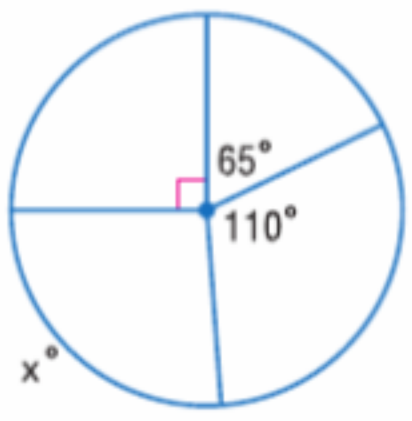


أوجد قيمة x.

3.

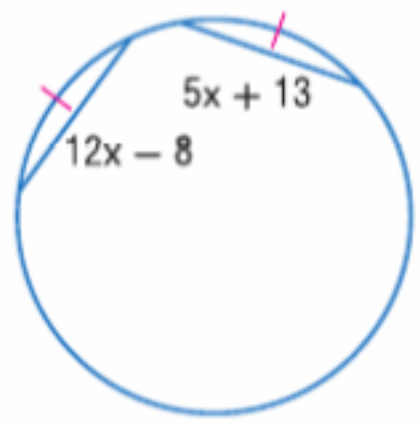


4.

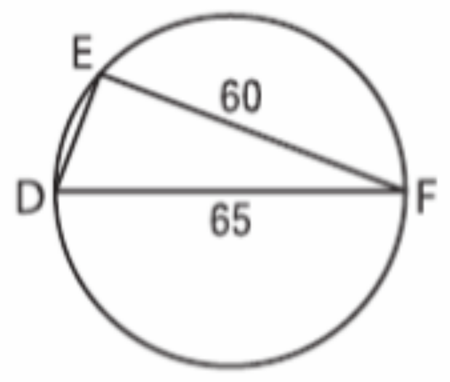


5.

6.

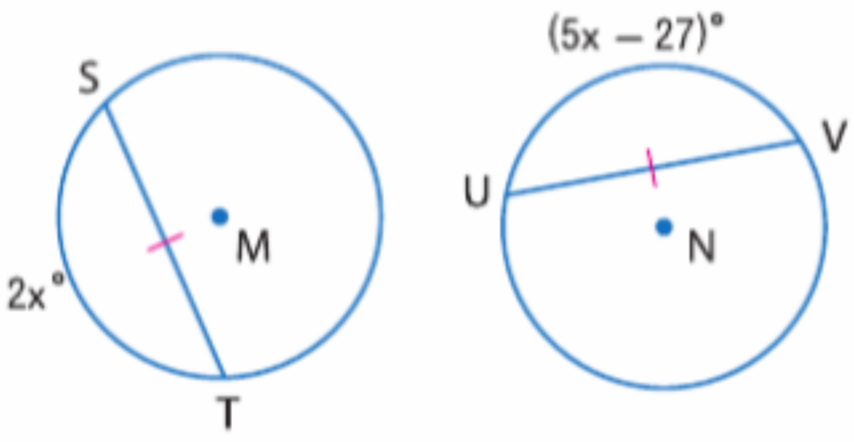


7. **الاختيار من متعدد** ما قياس ED؟



A 15
B 25
C 88.5
D المعلومات غير كافية

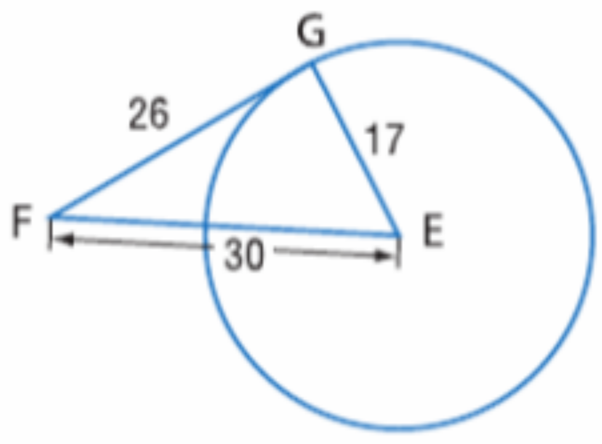
8. أوجد x إذا كانت $\odot M \cong \odot N$.



9. **الاختيار من متعدد** بكم نقطةً تشترك دائرتان متحدتا المركز؟

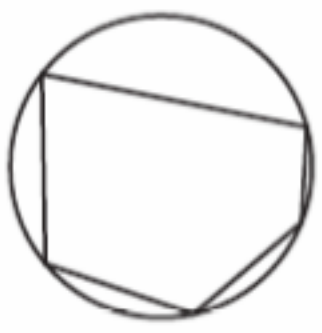
F 0
G 1
H 2
J عدد لا نهائي من النقاط

10. حدّد ما إذا كان $\overline{FG}$ مماسا للدائرة $\odot E$. برر إجابتك.

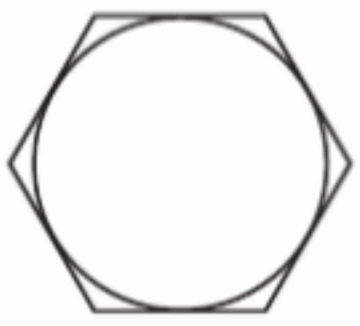


11. **الاختيار من متعدد** أي من الأشكال التالية يوضح مضلعا محيطا بدائرة؟

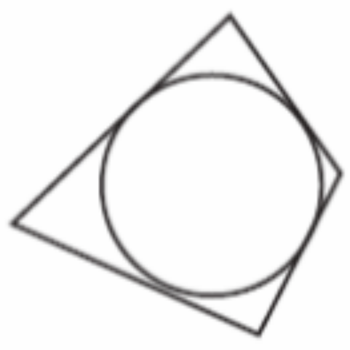
A



C

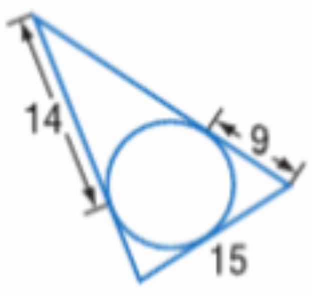


B



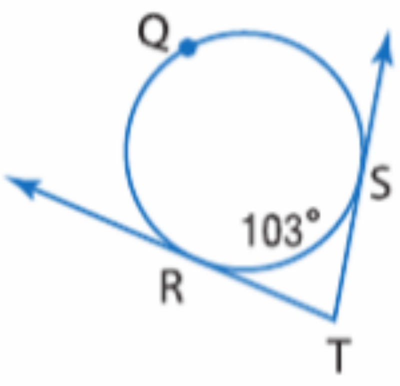
D

12. أوجد محيط المثلث على الجهة اليسرى. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

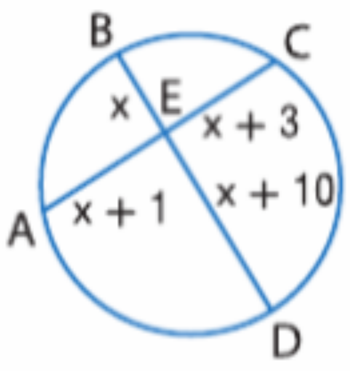


أوجد قياس كل مما يلي.

13. $m\angle T$



14. x



15. **الأزهار** تريد خولة إحاطة جذع شجرةٍ بحوض للأزهار. فإذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل وإذا ما أرادت خولة توسيع الحوض 3 m بعيدًا عن مركز الشجرة، فما المعادلة التي ستمثّل حوض الأزهار؟