7-1 مقدمة عن المتجهات

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.	• 1 تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا. 2 حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.	• يعتمد إحراز هدف في كرة القدم على عدة عوامل. بينما سرعة الكرة بعد ركلها هامة بالتأكيد، لكن اتجاه الكرة هام كذلك. يمكننا وصف هذين العاملين باستخدام كمية واحدة تُسمى المتجه.

المفردات الجديدة
متجه vector
نقطة البداية nitial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
اتجاه direction
مقدار magnitude
اتجاه ربعي quadrant bearing
اتجاه حقيقي true bearing
متجهات موازية parallel vectors
متجهات متكافئة equivalent vectors
متجهات متعاكسة opposite vectors
ناتج resultant
طريقة المثلث triangle method
طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
متجه صفري zero vector
مركبات components
مركبات متعامدة rectangular components

1 المتجهات يمكن وصف العديد من الكميات الفيزيائية، مثل السرعة، بشكل كامل بواسطة عدد حقيقي واحد يُسمى كمية عددية. ويشير هذا العدد إلى مقدار أو حجم الكمية. **المتجهات** هي كمية لها مقدار واتجاه. سرعة الكرة متجه يصف سرعة الكرة واتجاهها.

مثال 1 تحديد كميات المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية.

a. يسير قارب بسرعة 15 ميلاً في الساعة.

لهذه الكمية مقدار، ولكن لم يتم ذكر الاتجاه. السرعة كمية عددية.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب

لهذه الكمية مقدار هو 25 خطوة، واتجاهها نحو الغرب. هذه المسافة الموجهة هي متجه.

c. وزن شخص على ميزان الحمّام

الوزن متجه يتم حسابه باستخدام كتلة الشخص والسحب لأسفل بفعل الجاذبية. (التسارع بفعل الجاذبية متجه.)

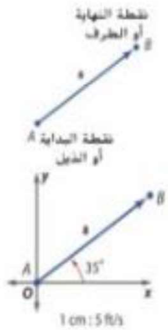
تمرين موجّه

1A. تسير سيارة بسرعة 60 ميلًا في الساعة بزاوية °15 جنوب شرق **متجه**

1B. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 12.5 ميلًا في الساعة **متجه**

1C. يسحب طفل زلّاجة بقوة تبلغ 40 نيوتن **كمية عددية**

يمكن تمثيل متجه هندسيًا بواسطة قطعة مستقيمة موجهة أو رسم تخطيطي سهمي، يوضح المقدار والاتجاه. فكر في القطعة المستقيمة الموجهة الموضحة حيث **نقطة البداية** A (تسمى أيضًا الذيل) و**نقطة النهاية** B (تسمى أيضًا الرأس أو الطرف). يتم التعبير عن المتجه بواسطة $\vec{a}$ أو $\overrightarrow{AB}$، أو **a**.



إذا كانت نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل، فالمتجه في **الوضع القياسي**. **اتجاه** المتجه هو الزاوية الموجهة بين المتجه والمستقيم الأفقي الذي يمكن استخدامه لتمثيل محور x الموجب. اتجاه **a** هو °35.

طول القطعة المستقيمة يمثل ويتناسب مع **مقدار** المتجه. إذا كان مقياس الرسم التخطيطي السهمي لـ **a** هو $1\ cm = 5\ ft/s$، إذًا مقدار **a**، المعبر عنه بواسطة $|a|$، هو 5×2.6 أو 13 قدمًا في الثانية.

McGraw-Hill Education ©

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-1 استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.

الدرس 7-1 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها هندسيًا. وحل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

بعد الدرس 7-1 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًا. وكتابة المتجهات على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة وزاوية اتجاهاتها.

2 التدريس

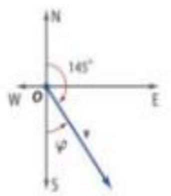
الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا تم ركل كرة في ملعب مفتوح، فما الشيئان اللذان تحتاج إلى معرفتهما لكي تحدد موقع الكرة بأسرع ما يمكن؟ سرعة الكرة بعد ركلها والاتجاه الذي رُكلت فيه

يمكن كذلك ذكر اتجاه المتجه في صورة اتجاه.
الاتجاه الربعي φ، أو phi، هو قياس اتجاه بين الزاويتين 0° و 90° شرق أو غرب المستقيم شمال-جنوب. الاتجاه الربعي للمتجه v الموضح هو 35° شرق اتجاه الجنوب أو جنوب شرق، ويكتب بالصورة S35°E.



الاتجاه الحقيقي هو قياس اتجاه يتم فيه قياس الزاوية حسب اتجاه عقارب الساعة من الشمال. ويتم ذكر الاتجاهات الحقيقية دائمًا في صورة ثلاثة أرقام. إذًا، اتجاه قياسه 25° باتجاه عقارب الساعة من الشمال تتم كتابته كاتجاه حقيقي بالصورة 025°.

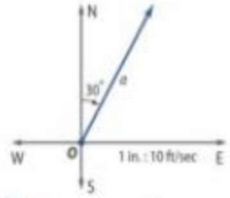
نصيحة دراسية
الاتجاه الحقيقي عند ذكر قياس درجة بدون أي مركبات اتجاه، يفترض أنه اتجاه حقيقي. اتجاه v الحقيقي هو 145°.

مثال 2 تمثيل المتجهات هندسيًا

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي.

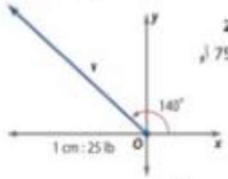
a. a = 20 قدمًا في الثانية باتجاه 030°

باستخدام مقياس 1 in: 10 ft/sec.
ارسم وميّز سهمًا بطول 10 ÷ 20 أو بوصتين بزاوية 30° في اتجاه عقارب الساعة من الشمال.



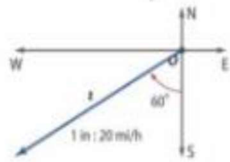
b. v = 75 رطلاً من القوة بزاوية 140° مع المركّبة الأفقية

باستخدام مقياس 1 cm: 25 lb. ارسم وميّز سهمًا بطول 25 ÷ 75 أو 3 سنتيمترات في الوضع القياسي بزاوية 140° مع المحور x.



c. z = 30 ميلاً في الساعة باتجاه S60°W

باستخدام مقياس 1 in: 20 mi/h. ارسم وميّز سهمًا بطول 20 ÷ 30 أو 1.5 بوصة بزاوية 60° جنوب غرب.



تمرين موجّه

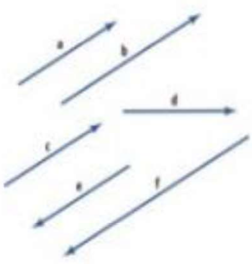
2A. t = 20 قدمًا في الثانية باتجاه 065° **2A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

2B. u = 15 ميلاً في الساعة باتجاه S25°E

2C. m = 60 رطلاً من القوة بزاوية 80° مع المركّبة الأفقية

في العمليات باستخدام المتجهات، يجب أن تكون على دراية بأنواع المتجهات التالية.

- **المتجهات المتوازية** يكون لها الاتجاه ذاته أو اتجاه معاكس، ولكن ليس بالضرورة المقدار ذاته. في الشكل، a ∥ b ∥ c ∥ e ∥ f.
- **المتجهات المتكافئة** لها نفس المقدار والاتجاه. في الشكل، a = c لأن لهما نفس المقدار والاتجاه. لاحظ أن a ≠ b حيث |a| ≠ |b|، و a ≠ d، حيث a و d ليس لهما الاتجاه ذاته.
- **المتجهات المتعاكسة** لها المقدار ذاته ولكن في اتجاهين معاكسين. المتجه المقابل للمتجه a يكتب بالصورة −a. في الشكل، e = −a.



انتبه!
المقدار مقدار المتجه يمكن أن يمثل المسافة أو السرعة أو القوة. عندما يمثل متجه السرعة، لا يشير طول المتجه إلى المسافة المقطوعة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- ارسم مستطيلاً: تخيل أنك تقف في الزاوية اليسرى السفلية عندما ركلت كرة. ارسم سهمًا من الزاوية إلى نقطة التوقف.

- كيف يمكنك تمثيل ركل الكرة بقوة أكبر؟ الإجابة النموذجية: ارسم سهمًا أطول.

1 المتجهات

يبين المثال 1 طريقة تحديد الكميات المتجهة. **ويبين المثال 2** طريقة تمثيل المتجه هندسيًا. **أما المثال 3** فيبين طريقة إيجاد متجهات المحصلة. **ويبين المثال 4** طريقة إجراء العمليات على المتجهات.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر ما إذا كانت كل كمية موضحة كمية متجهة أم قياسية.

a. ضرب كرة هوكي في اتجاه شمال غرب بسرعة 60 ميلاً في الساعة متجهة

b. ضرب كرة تنس بسرعة 110 أميال في الساعة قياسية

c. عدّاء يركض 100 متر شمالاً متجهة

2 استخدم المسطرة والمنقلة لعمل رسم تخطيطي لكل كمية موضحة، بحيث يشتمل كل رسم على مقياس.
a–c. انظر الهامش السفلي.

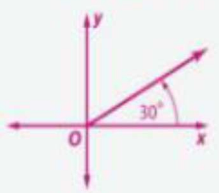
a. v = 10 نيوتن بزاوية 30° من المركب الأفقي

b. z = 25 مترا في الثانية في اتجاه S70°W

c. t = 10 أميال في الساعة في اتجاه 025°

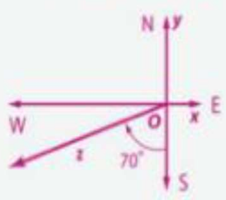
إجابات إضافية (مثال آخر)

2a. الإجابة النموذجية:



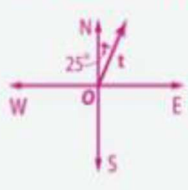
1 cm : 5 N

2b. الإجابة النموذجية:



1 cm = 10 m/s

2c. الإجابة النموذجية:



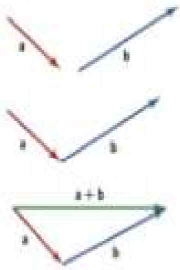
1 cm = 10 mi/h

عند إضافة متجهين أو أكثر، يكون مجموعها متجهًا واحدًا تسمى **الناتج**
المتجه الناتج له تأثير يماثل تطبيق كل متجه على حدة. هندسيًا، يمكن إيجاد الناتج باستخدام إما **طريقة المثلث** أو **طريقة متوازي الأضلاع**

المفهوم الأساسي إيجاد النواتج

طريقة المثلث (الطرف إلى الذيل)

لإيجاد ناتج **a** و **b**، اتبع هذه الخطوات.

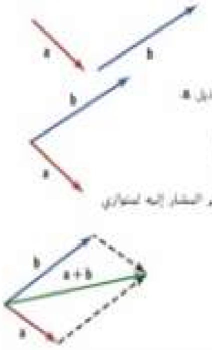


الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** طرف **a**.

الخطوة 2 الناتج هو المتجه من ذيل **a** إلى طرف **b**.

طريقة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

لإيجاد ناتج **a** و **b**، اتبع هذه الخطوات.



الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** ذيل **a**.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على **a** و **b** كضلعين من أضلاعه.

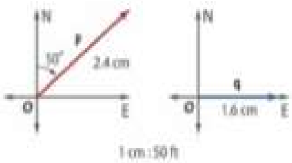
الخطوة 3 الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.

مثال 3 من الحياة اليومية **إيجاد ناتج متجهين**

تحديد الاتجاه في إحدى منافسات تحديد الاتجاه، سارت عائشة باتجاه N50°E لمسافة 120 قدمًا ثم سارت لمسافة 80 قدمًا باتجاه الشرق. كم تبعد عائشة عن وضع البدء وفي أي اتجاه ربعي هي؟

افترض أن **p** = السير لمسافة 120 قدمًا باتجاه N50°E و **q** = السير لمسافة 80 قدمًا باتجاه الشرق.
قم بعمل رسم تخطيطي لتمثيل **p** و **q** باستخدام مقياس 1 cm: 50 ft.

استخدم مسطرة لرسم سهم بطول 50 ÷ 120 أو 2.4 سنتيمترات باتجاه 50° شمال شرق لتمثيل **p** وسهم بطول 50 ÷ 80 أو 1.6 سنتيمترات باتجاه الشرق لتمثيل **q**.

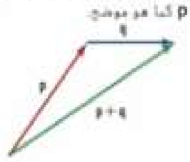


نصيحة دراسية

النواتج يجب تكرار طريقة متوازي الأضلاع لإيجاد ناتج أكثر من متجهين. لكن طريقة المثلث أسهل استخدامًا عند إيجاد ناتج ثلاثة متجهات أو أكثر. واصل وضع نقطة بداية المتجه التالي عند نقطة نهاية المتجه السابق.

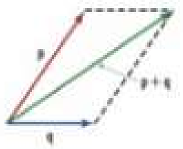
الطريقة 1 طريقة المثلث

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله طرف **p**. ثم ارسم المتجه الناتج **p + q** كما هو موضح.

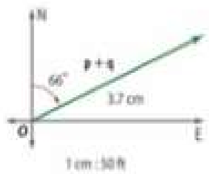


الطريقة 2 طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله ذيل **p**. ثم أكمل متوازي الأضلاع وارسم القطر، الناتج **p + q** كما هو موضح.



تحصل من الطريقتين على المتجه الناتج ذاته **p + q**. قم بقياس طول **p + q** ثم قياس زاوية هذا المتجه مع مستقيم شمال-جنوب كما هو موضح. طول المتجه 3.7 سنتيمترات تقريبًا يمثل 50 × 3.7 أو 185 قدمًا. إذًا، تبعد عائشة 185 قدمًا تقريبًا باتجاه 66° شمال شرق أو N66°E من موضع البدء.



مثال إضافي

3 **نزهة على الأقدام** قطع علي أثناء تنزهه سيرًا في الغابات مسافة 2 كيلو متر في اتجاه N30°W المخيم، ثم سار 2 كيلو متر نحو الشرق مباشرة. فكم يبعد علي عن مخيمه وفي أي اتجاه ربعي يكون؟
2 km, N30°E

إرشاد للمعلمين الجدد

رسومات تخطيطية من المهم أن يبدأ الطلاب في الأمثلة برسم تخطيطي دقيق. شجّع الطلاب على استخدام ورق رسم بياني وعلى التحقق من صحة أجوبتهم باستخدام رسوماتهم التخطيطية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

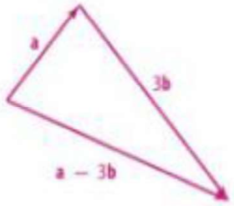
عمل مشترك كلّف الطلاب بالعمل في مجموعات ثنائية على إنشاء صفحة مشتركة عن الطرق التي يمكن استخدامها لإيجاد محصلة متجهين. واطلب منهم استعراض عمل كل منهما الآخر خلا ل إنشاء الصفحة ومراجعته.

التركيز على محتوى الرياضيات

جمع المتجهات وطرحها لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع يمكن أن تستخدم أيضًا لطرح المتجهات. فعند جمع المتجهات يكون المجموع هو القُطر الطويل لمتوازي الأضلاع ذي الصلة. وعند طرح المتجهات، يكون الفارق هو القطر القصير لمتوازي الأضلاع ذي الصلة.

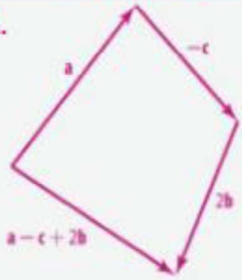
مثال إضافي

4 صمم رسمًا تخطيطيًا لمتجه للمسألة $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

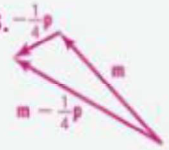


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4A.



4B. $-\frac{1}{4}\mathbf{p}$



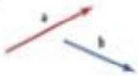
تمرين موجّه

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب سنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

3A.

2.9 cm; 61°

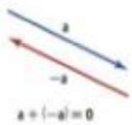
3B.



3.3 cm; 25°

3C. **لعبة الكرة والدبابيس** تم دفع الكرة بواسطة الناقر بزاوية °310 وسرعة 7 بوصات في الثانية. ثم ارتدت الكرة عن المنصة وانطلقت بزاوية °055 وسرعة 4 بوصات في الثانية. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها.
7.1 in./s; 343°

عند إضافة متجهين متقابلين، يكون الناتج هو **متجه صفري** أو متجه صفر، ويُعبر عنه بواسطة $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$. ويكون مقداره 0 وبدون اتجاه محدد. طرح المتجهات مشابه لطرح الأعداد الصحيحة. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع مقابل $\mathbf{q}$ مع $\mathbf{p}$ بمعنى، $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



يمكن كذلك ضرب متجه في كمية عددية.

المفهوم الأساسي ضرب المتجهات في كمية عددية

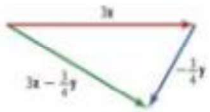
إذا تم ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في الكمية العددية الحقيقية k، فيكون للكمية العددية $k\mathbf{v}$ المقدار $|k||\mathbf{v}|$، ويتم تحديد اتجاهها حسب علامة k.

- إذا كان $k > 0$، فإن $k\mathbf{v}$ لها نفس اتجاه $\mathbf{v}$.
- إذا كان $k < 0$، فإن $k\mathbf{v}$ في اتجاه معاكس لـ $\mathbf{v}$.

مثال 4 العمليات على المتجهات

قم بتصميم رسم تخطيطي لـ $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$.

أعد كتابة التعبير في صورة جمع متجهين: $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y} = 3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ لتمثيل $3\mathbf{x}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله ثلاثة أضعاف طول $\mathbf{x}$ في نفس اتجاه $\mathbf{x}$ (الشكل 7.1.1). لتمثيل $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ في الاتجاه المعاكس لـ $\mathbf{y}$ (الشكل 7.1.2).
ثم استخدم طريقة المثلث لرسم المتجه الناتج (الشكل 7.1.3).



الشكل 7.1.3

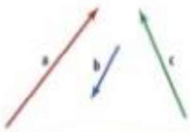
الشكل 7.1.2

الشكل 7.1.1

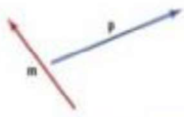
تمرين موجّه

قم بتصميم رسم تخطيطي لمتجه لكل تعبير. 4A-B. انظر الهامش.

4A. $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$

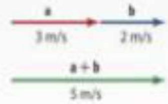


4B. $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



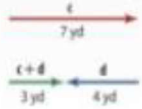
نصيحة دراسية

المتجهات الموازية في الاتجاه ذاته لجمع متجهين موازيين في الاتجاه ذاته، اجمع مقداريهما. يكون للناتج نفس اتجاه المتجهات الأصلية.



نصيحة دراسية

المتجهات الموازية في اتجاهين متقابلين لجمع متجهين موازيين في اتجاهين متقابلين، أوجد القيمة المطلقة للفرق بين المقدارين. يكون للناتج نفس اتجاه المتجه الأكبر مقدارًا.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

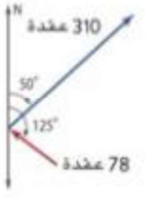
2 استخدامات المتجهات يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

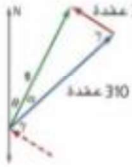
مثال 5 من الحياة اليومية استخدام المتجهات لحل مسائل الملاحة

الملاحة الجوية تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه °050. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي °125، فحدّد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

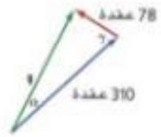
الخطوة 1 قم بتصميم رسم تخطيطي لتمثيل سرعتي الاتجاه والرياح (الشكل 7.1.4). قم بإزاحة متجه الرياح كما هو موضح في الشكل 7.1.5. واستخدام طريقة المثلث للحصول على المتجه الناتج الذي يمثل سرعة الطائرة بالنسبة للأرض g في المثلث المتشكل بواسطة هذه المتجهات (الشكل 7.1.6). $\gamma = 125° - 50°$ أو $75°$.



الشكل 7.1.4



الشكل 7.1.5



الشكل 7.1.6

الخطوة 2 استخدم قانون الـ cosine لإيجاد |g|، سرعة الطائرة بالنسبة للأرض.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	قانون الـ cosine
$\|g\|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°$	$c = \|g\|, a = 78, b = 310, \gamma = 75°$
$\|g\| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°}$	أوجد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.
≈ 299.4	بسّط.

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 اتجاه الناتج g تمثله الزاوية #، كما هو موضح بالشكل 7.1.5. لإيجاد #، احسب أولاً α باستخدام قانون الـ sin.

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$	قانون الـ sin
$\frac{\sin\alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4}$	$c = \|g\|$ أو $299.4, a = 78, \gamma = 75°$
$\sin\alpha = \frac{78\sin 75°}{299.4}$	أوجد $\sin\alpha$.
$\alpha = \sin^{-1}\frac{78\sin 75°}{299.4}$	طبق دالة معكوس الـ $\sin^{-1}$.
$\approx 14.6°$	بسّط.

قياس # هو $\alpha - 50°$، أي $50° - 14.6°$ أو $35.4°$.

إذًا، سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا بزاوية °035 تقريبًا.

تمرين موجّه

5. **السباحة** يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 أقدام في الثانية عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل قدمين في الثانية. أوجد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

يسبح علي بسرعة ناتج مقدارها 4.03 ft/s باتجاه S60.25°E.

نصيحة دراسية

الزوايا الداخلية البديلة إزاحة ذيل متجه الرياح إلى طرف المتجه الممثل لاتجاه الطائرة ينتج عنها متجهين موازيين يقطعهما قاطع حيث إن الزوايا الداخلية البديلة لمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع تكون متطابقة. فالزوايا الناشئة عن هذه المتجهين في كلا المكانين في الشكل 7.1.5 لهما نفس القياس.

انتبه!

اتجاه الرياح في المثال 5، لاحظ أن الرياح تهب من اتجاه °125 وأن المتجه مرسوم بحيث يتجه طرفه نحو مستقيم الشمال–الجنوب. لو كانت الرياح تهب من اتجاه °125، كان المتجه سيبتعد عن هذا الخط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 استخدامات المتجهات

يبين المثال 5 طريقة استخدام المتجهات لحل مسائل الإبحار. ويبين **المثال 6** طريقة تحليل قوة إلى مركباتها المتعامدة.

مثال إضافي

5 الطيران تحلق طائرة بسرعة جوية 475 ميلاً في الساعة باتجاه °070. فإذا هبّت رياح بسرعة 80 ميلاً في الساعة من الاتجاه الحقيقي بزاوية،°120 فحدد السرعة المتجهة للطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض. السرعة المتجهة للطائرة بالنسبة إلى الأرض تساوي 428.0 ميلاً في الساعة تقريبًا والاتجاه تقريبًا 8.061°

مثال إضافي

6 العناية بالحدائق أثناء قيام سعيد بالحفر في حديقته، دفع الجاروف داخل الأرض بقوة 630 نيوتن وزاوية °70 مع الأرض.

a. صمم رسمًا تخطيطيًا يوضح تحليل القوة التي بذلها سعيد إلى مركباتها المتعامدة.

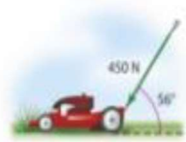
b. أوجد طول المركبات الأفقية والرأسية للقوة. المركبة الأفقية ≈215.47 N المركبة الرأسية ≈592.01 N

عندما يوجد متجهين أو أكثر مجموعها المتجه **r**، يُطلق عليها **مركبات r**. بينما يمكن أن تكون المركبات بأي اتجاه، كثيرًا ما يكون من المفيد تحليل المتجه أو التعبير عنه بمركبتين متعامدتين. تكون **المركبات المتعامدة** لمتجه أفقية أو رأسية.

في الرسم التخطيطي، يمكن النظر إلى القوة **r** المبذولة لسحب عربة باعتبارها مجموع قوة المركبة الأفقية **x** التي تحرك العربة للأمام وقوة المركبة الرأسية **y** التي تسحب العربة لأعلى.

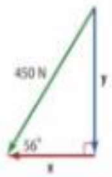
مثال 6 من الحياة اليومية تحليل قوة إلى مركبات متعامدة

العناية بالحديقة تدفع عائشة مقبض آلة جز العشب بقوة مقدارها 450 نيوتن بزاوية °56 مع الأرض.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل القوة التي تبذلها عائشة إلى مركبات متعامدة.

يمكن تحليل قوة الدفع التي تبذلها عائشة إلى دفع أفقي **x** للأمام ودفع رأسي **y** لأسفل كما هو موضح.



b. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

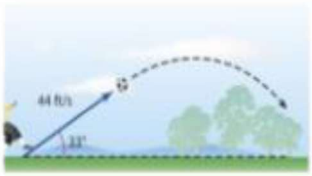
تشكل المركبتان الأفقية والرأسية للقوة مثلثًا قائم الزاوية. استخدم نسبة الـ sin و الـ cosine لإيجاد مقدار كل قوة.

$\cos 56° = \frac{\lvert x\rvert}{450}$	تعريفا المثلث قائم الزاوية الـ sin و الـ cosine	$\sin 56° = \frac{\lvert y\rvert}{450}$
$\lvert x\rvert = 450 \cos 56°$	أوجد x و y	$\lvert y\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x\rvert \approx 252$	استخدم الحاسبة.	$\lvert y\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 نيوتن تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 نيوتن تقريبًا.

تمرين موجّه

6. كرة القدم ركل اللاعب كرة القدم بحيث انطلقت من الأرض بسرعة 44 قدمًا في الثانية بزاوية °33 مع الأرض.

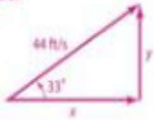


A. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

B. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

المركبة الأفقية ≈ 36.90 ft/s، المركبة الرأسية ≈ 23.96 ft/s

6A.



الربط بالحياة اليومية

يتطلب تشغيل مفتاح الإضاءة قوة مقدارها 3 نيوتن تقريبًا. القوة المبذولة على شخص بفعل الجاذبية هي 600 نيوتن تقريبًا. القوة التي يبذلها رافع الأثقال 2000 نيوتن تقريبًا.

المصدر: الموسوعة الفيزيائية

التدريس المتمايز OL AL

المواد: مركب شراعي صغير لعبة شراعه قابل للحركة وبركة ماء ومروحة طاولة

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية تستخدم المتجهات عادة لوصف القوى والطريقة التي يتم بها تحديد المحصلا ت في مواقف الحياة اليومية. كلف الطلا ب بتنبؤ أثر الرياح على المركب الشراعي بتكليفهم بوضع اللعبة في بركة الماء واستخدام مروحة الطاولة لعمل الرياح مع الحفاظ على سرعة الرياح وبُعد المركب عن مصدر الرياح ثابتين. ضع المركب في مسار بحيث يكون عموديًا على الرياح. وكلف الطلا ب بالتنبؤ بما سيحدث مستخدمين ترميز المتجهات. واطلب منهم عمل تخمينات مختلفة فيما يتعلق بموضع المركب وتأثير قوة الرياح عليه واختبار مدى صحتها.

التمارين

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية. (مثال 1)

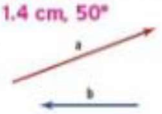
1. صندوق يتم دفعه بقوة مقدارها 125 نيوتن **كمية عددية**
2. الرياح تهب بسرعة 20 عقدة **كمية عددية**
3. غزال يركض بسرعة 15 مترًا في الثانية باتجاه الغرب **متجه**
4. كرة قاعدة تم قذفها بسرعة 85 ميلًا في الساعة **كمية عددية**
5. إطار يزن 15 رطلًا يتدلى من حبل **متجه**
6. حجر تم قذفه في مسار مستقيم لأعلى بسرعة 50 قدمًا في الثانية **متجه**

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي. (مثال 2) **7-12. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

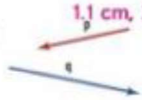
7. h = 13 بوصة في الثانية باتجاه °205
8. g = 6 كيلومترات في الساعة باتجاه N70°W
9. j = 5 أقدام في الدقيقة بزاوية °300 مع المركبة الأفقية
10. k = 28 كيلومترات بزاوية °35 مع المركبة الأفقية
11. m = 40 مترًا باتجاه S55°E
12. n = 32 ياردة في الثانية باتجاه °030

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (مثال 3)

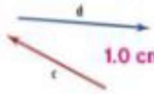
13. **1.4 cm, 50°**



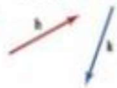
14. **1.1 cm, 310°**



15. **1.0 cm, 46°**

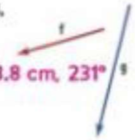


16. **1.1 cm, 320°**



17. **2.3 cm, 188°**

18. **3.8 cm, 231°**



19. **الجولف** أثناء لعب لعبة فيديو من الجولف، ضرب عمر الكرة بزاوية °35 فوق المركبة الأفقية بسرعة 40 ميلاً في الساعة مع هبوب الرياح بسرعة 5 أميال في الساعة، كما هو موضح. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها. (مثال 3)

20. **القوارب** غادر قارب مستأجر الميناء باتجاه N60°W لمسافة 12 ميلاً بحريًا. غيّر القبطان المسار إلى اتجاه N25°E لمسافة 15 ميلاً بحريًا إضافية. حدد مسافة واتجاه السفينة من الميناء إلى موقعها الحالي. (مثال 3) **19.5 ميلاً بحريًا، N11°W**

21. **السير على الأقدام** سار مازن وأيوب لمسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية °55 جنوب شرق موقع التخييم. ثم سارا مسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية °33 شمال غرب إلى مركز الحياة الطبيعية الذي يبعد مسافة 5.6 كيلومترات عن البحيرة. فأين مركز الحياة الطبيعية من موقع التخييم؟ (مثال 3) **2.6 km باتجاه الشمال**

حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه. (مثال 3)

22. 18 نيوتن للأمام مباشرة ثم 20 نيوتن للخلف مباشرة **2 N للخلف**
23. 100 متر باتجاه الشمال ثم 350 مترًا باتجاه الجنوب **250 m باتجاه الجنوب**
24. 10 أرطال من القوة باتجاه °025 ثم 15 رطلًا من القوة باتجاه °045 **قوة مقدارها 25 lb باتجاه °037**
25. 17 ميلًا شرقًا ثم 16 ميلًا جنوبًا **23.6 mi باتجاه S47°E**
26. 15 مترًا في الثانية المربعة بزاوية °60 مع المركبة الأفقية ثم 9.8 أمتار في الثانية المربعة لأسفل **$8.25\ m/s^2$ بزاوية °23 مع المركبة الأفقية**

استخدم مجموعة المتجهات لتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لكل تعبير. (مثال 4) **27-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

27. $m - 2n$
28. $n - \frac{3}{4}m$
29. $\frac{1}{2}p + 3n$
30. $4n + \frac{4}{5}p$
31. $p + 2n - m$
32. $-\frac{1}{3}m + p - 2n$
33. $3n - \frac{1}{2}p + m$
34. $m - 3n + \frac{1}{4}p$

35. **العدو** السرعة الناتجة لعداء هي 8 أميال في الساعة باتجاه الغرب مع هبوب الرياح بسرعة 3 أميال في الساعة باتجاه N28°W. فما سرعة العداء، مع التقريب لأقرب ميل في الساعة، بدون تأثير الرياح؟ (مثال 5) **7 mi/h**

36. **الطيران الشراعي** تطير طائرة شراعية بسرعة 15 ميلاً في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 5 أميال في الساعة باتجاه N60°E. فما سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض؟ (مثال 5) **تقريبًا 11.0 mi/h**

37. **التيار** تسبح سالي باتجاه الغرب بمعدل 1.5 متر في الثانية. يتدفق تيار قوي باتجاه S20°E بمعدل متر في الثانية. أوجد السرعة والاتجاه الناتجين لسالي. (مثال 5) **تقريبًا 1.49 m/s باتجاه S51°W**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-43 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

مسطرة ومنقلة سوف يحتاج الطلاب إلى مسطرة ومنقلة للعديد من التمارين الواردة في هذا الدرس.

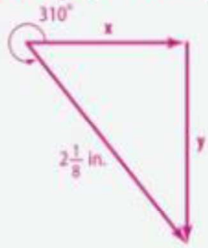
الدقة بالنسبة للتمارين 47-45 و 34-13 سيكون لمستوى الدقة التي يتمكن الطلا ب من الوصول إليه عند رسم المتجهات أثر على إجاباتهم. تم تقديم الإجابات النموذجية.

انتبه!

خطأ شائع قد لا يستخدم الطلاب الزاوية الصحيحة عند تقديم الاتجاه الحقيقي. راجع معهم أن الاتجاهات هي زوايا في اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الشمال، وليست في عكس اتجاه عقارب بدءًا من المحور *x* (الموضع القياسي).

إجابات إضافية

38. حوالي 1.37 in؛ حوالي 1.63 in.



39. حوالي 1.13 cm؛ حوالي 0.98 cm

40. حوالي 3.13 cm/h؛ حوالي 0.67 cm/h

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-43, 63-65, 67-83	1-43 فردي, 80-83	2-42 زوجي, 63-65, 67-79
OL ضمن المستوى	1-43 فردي, 44, 45, 47-51, 53-55, 57-61, 63-65, 67-83 فردي	1-43, 80-83	44-65, 67-79
BL أعلى من المستوى	44-83		

قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل كل متجه إلى مركبات متعامدة. ثم أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية للمتجه. المثال 16

.41–38 انظر الهامش.

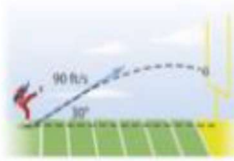
38. $2\frac{1}{8}$ بوصات بزاوية °310 مع المركبة الأفقية

39. 1.5 سنتيمتر باتجاه N49°E

40. 3.2 سنتيمترات في الساعة باتجاه S78°W

41. $\frac{3}{4}$ بوصات في الدقيقة باتجاه °255

42. **كرة القدم** في محاولة تهديف، تم ركل الكرة بالسرعة الموضحة بالرسم التخطيطي أدناه.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة. **انظر الهامش.**

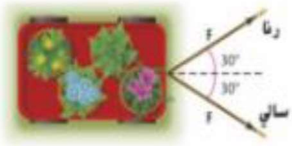
b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية. المثال 16
$45\sqrt{3}$ ft/s أو تقريبًا 77.9 ft/s؛ 45 ft/s

43. **التنظيف** تم دفع مكنسة بقوة مقدارها 190 نيوتن وزاوية مقدارها °33 مع الأرض. المثال 16

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة. **انظر الهامش.**

b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية.
تقريبًا 159.3 N، تقريبًا 103.5 N

44. **العناية بالحدائق** تسحب رنا وسالي عربة مليئة بالنباتات. تسحب كل منهما العربة بقوة متساوية وزاوية °30 مع محور العربة. القوة الناتجة هي 120 نيوتن.



a. ما مقدار القوة التي تبذلها كل منهما؟ **تقريبًا 69 N**

b. إذا بذلت كل منهما قوة مقدارها 75 نيوتن. فما مقدار القوة الناتجة؟ **تقريبًا 130 N**

c. ما تأثير اقتراب رنا وسالي من بعضهما على القوة الناتجة؟ **ستكون أكبر.**

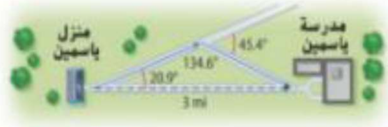
تم ذكر المقدار والاتجاهات الحقيقية للقوى الثلاث المؤثرة على جسم. أوجد مقدار القوة الناتجة عن هذه القوى واتجاهها.

45. 50 lb بزاوية °30، و 80 lb بزاوية °125، و 100 lb بزاوية °220 **84 lb بزاوية °162**

46. 8 نيوتن بزاوية °300، و 12 نيوتن بزاوية °45، و 6 نيوتن بزاوية °120 **11.6 N بزاوية °35**

47. 18 lb بزاوية °190، و 3 lb بزاوية °20، و 7 lb بزاوية °320 **11.7 lb بزاوية °215**

48. **القيادة** تبعد مدرسة ياسمين عن منزلها بمقدار ثلاثة أميال في مسار مستقيم. تقود السيارة في شارعين مختلفين في طريقها إلى المدرسة. تتحرك بزاوية °20.9 مع المسار في الشارع الأول ثم تلتف بزاوية °45.4 في الشارع الثاني.



a. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الأول؟ **تقريبًا 1.75 mi**

b. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الثاني؟ **تقريبًا 1.5 mi**

c. إذا استغرق منها الوصول إلى المدرسة 10 دقائق وكان متوسط سرعتها في الشارع الأول 25 ميلاً في الساعة. فما متوسط سرعتها في الشارع الثاني؟ **تقريبًا 15.5 mi/h**

49. **التزلج** يسحب حماد أخته على زلاجة. اتجاه هذه القوة الناتجة هو °31 والمركبة الأفقية لهذه القوة هي 86 نيوتن.

a. ما المركبة الرأسية للقوة؟ **تقريبًا 52 N**

b. ما مقدار القوة الناتجة؟ **تقريبًا 100 N**

50. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف ضرب متجه في كمية عددية.

a. **التمثيل البياني** على مستوى إحداثي، ارسم المتجه **a** بحيث يقع الذيل عند نقطة الأصل. اختر قيمة للكمية العددية k. ثم ارسم المتجه الناتج في حالة ضرب المتجه الأصلي في k على المستوى الإحداثي ذاته. كرر العملية لأربع متجهات إضافية **b** و **c** و **d** و **e**. استخدم نفس قيمة k كل مرة. **انظر الهامش.**

b. **التمثيل الجدولي** انسخ وأكمل الجدول أدناه لكل متجه ترسمه في الجزء **a**. **تُقدم نماذج لبعض الإجابات.**

متجه	نقطة نهاية متجه	نقطة نهاية المتجه × k
a	(2, 4)	(4. 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(-1, 2)	(-2, 4)
d	(-2 ,-2)	(-4 ,-4)
e	(3, -1)	(6, -2)

c. **التمثيل التحليلي** إذا كانت نقطة نهاية المتجه **a** تقع عند النقطة (a, b)، فما موقع نقطة نهاية المتجه **ka**؟ **(ka, kb)**

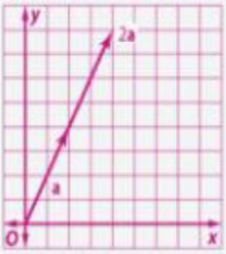
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

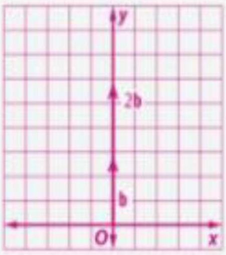
انتبه!

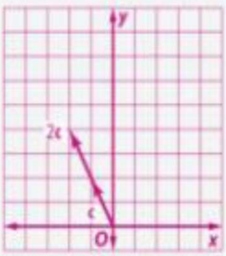
خطأ شائع في التمرينين، 43 و 42 قد لا يستخدم الطلاب نسب جيب الزاوية وتمام الزاوية بشكل صحيح. راجع معهم تعريف كل نسبة كما تنطبق على المثلث القائم.

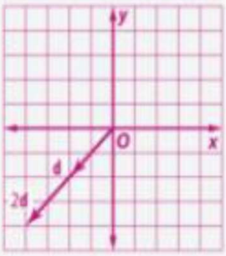
إجابات إضافية

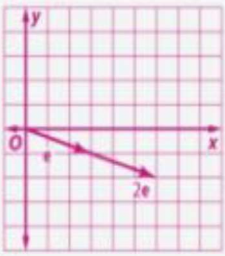
50a. الإجابات النموذجية: $k = 2$



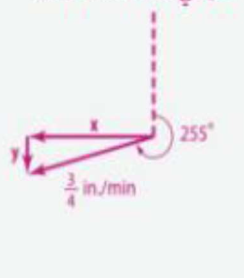




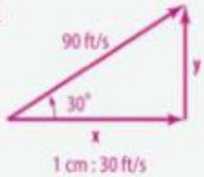




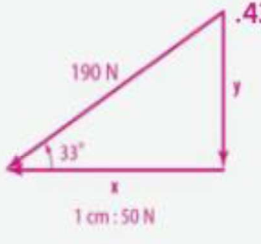
41. حوالي 0.72 in./min؛ حوالي 0.19 in./min



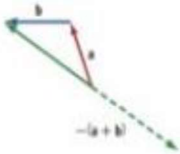
42a



43a



المتجه *الموازن* عكس المتجه الناتج.
فهو يوازن توفيق المتجهات بحيث يكون مجموع المتجهات والموازن هو المتجه الصفري. المتجه الموازن لـ a + b هو −(a + b).



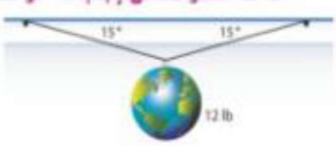
أوجد مقدار واتجاه المتجه الموازن لكل مجموعة من المتجهات.

51. a = 15 ميلاً في الساعة باتجاه °125
b = 12 ميلًا في الساعة باتجاه °045
تقريبًا 20.77 mi/h باتجاه °270

52. a = 4 أمتار باتجاه °N30W
b = 6 أمتار باتجاه °N20E
تقريبًا 9.1 m باتجاه °180

53. a = 23 قدمًا في الثانية باتجاه °205
b = 16 قدمًا في الثانية باتجاه °345
تقريبًا 14.87 ft/s باتجاه °69

54. **المقدار** تم تعليق جسم مستدير من السقف بواسطة سلكين متساويين في الطول كما هو موضح.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات في الموقف للإشارة إلى أن متجهي التوتر T_1 و T_2 متساويان في المقدار ويحافظان على الجسم في حالة ثبات أو توازن.

b. قم بإعادة تصميم الرسم التخطيطي باستخدام طريقة المثلث لإيجاد $T_1 + T_2$. **$T_1 \approx 23.2$ lb; $T_2 \approx 23.2$ lb**

c. استخدم الرسم التخطيطي من الجزء b وحقيقة أن موازن الناتج $T_1 + T_2$ والمتجه الممثل لوزن الجسم هما متجهان متكافئان لحساب مقداري T_1 و T_2.

55. **دعم الكابلات** تم ربط كابلين بالتوترين T_1 و T_2 معًا لدعم حمولة تزن 2500 رطل في حالة توازن. **a–c. انظر الهامش.**

a. اكتب تعبيرين لتمثيل المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2.

b. إذا علمت أن موازن الناتج $T_2 + T_1$ والمتجه الممثل لوزن الحمولة متجهان متكافئان، فاحسب مقداري T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

c. استخدم إجاباتك من الجزأين a و b لإيجاد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

أوجد مقدار واتجاه كل متجه إذا علمت مركبتيه الرأسية والأفقية ومدى قيم زاوية الاتجاه θ مع المركبة الأفقية.

56. الأفقية: 0.32 in، الرأسية: 2.28 in، $90° < \theta < 180°$
تقريبًا 2.3 in، بزاوية °98

57. الأفقية: 3.1 ft، الرأسية: 4.2 ft، $0° < \theta < 90°$
تقريبًا 5.2 ft بزاوية °54

58. الأفقية: 2.6 cm، الرأسية: 7.9 mc، $270° < \theta < 360°$
تقريبًا 10 cm بزاوية °285

59. الأفقية: 2.9 yd، الرأسية: 1.8 yd، $180° < \theta < 270°$
تقريبًا 3.4 yd بزاوية °212

ارسم أي ثلاثة متجهات a و b و c. وضح هندسيًا تحقق كل من خواص المتجهات التالية باستخدام هذه المتجهات.

60. خاصية التبديل: a + b = b + a

61. خاصية التجميع: (a + b) + c = a + (b + c)

62. خاصية التوزيع: k(a + b) = ka + kb، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **مسألة غير محددة الإجابة** فكر في متجه من 5 وحدات موجّه على امتداد المحور *x* الموجب. حلل المتجه إلى مركبتين متعامدتين لا تتضمنان مركبة أفقية أو رأسية.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

64. **الاستنتاج** هل من الممكن أحيانًا أو دائمًا أو مطلقًا إيجاد مجموع متجهين موازيين باستخدام طريقة متوازي الأضلاع؟ وضّح استنتاجك.
انظر الهامش.

65. **الاستنتاج** ما أهمية وضع مرجع مشترك لقياس اتجاه متجه، على سبيل المثال، من المحور *x* الموجب؟ **انظر الهامش.**

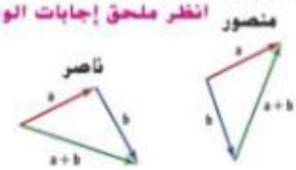
66. **التحدي** ناتج a + b يساوي ناتج a − b. إذا كان مقدار a هو 4x، فما مقدار b؟ **0**

67. **الاستنتاج** فكر في العبارة |a| + |b| ≥ |a + b|.

a. عبّر عن هذه العبارة باستخدام الشرح.

b. هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ علل إجابتك.
a–b. انظر الهامش.

68. **تحليل الخطأ** يعمل منصور وناصر على إيجاد ناتج المتجهين a و b. هل أي منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.



69. **الاستنتاج** هل من الممكن أن يساوي مجموع متجهين أحدهما؟ اشرح.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

70. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طريقتي متوازي الأضلاع والمثلث لإيجاد ناتج متجهين أو أكثر.

انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية

55a. الإجابات النموذجية:
$T_{1x} = T_1 \cos 65°$;
$T_{1y} = T_1 \sin 65°$; $T_{2x} = T_2 \cos 35°$;
$T_{2y} = T_2 \sin 35°$

55b. $T_1 \approx 2079.5$ lb; $T_2 \approx 1072.8$ lb

55c. $T_{1x} \approx 878.8$ lb; $T_{1y} \approx 1884.7$ lb;
$T_{2x} \approx 878.8$ lb; $T_{2y} \approx 615.3$ lb

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 68، ذكّر الطلاب بإمعان النظر في الرسم التخطيطي. وبمجرد اختيار قاعدة لإيجاد محصلة متجهين (قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع)، فمن المهم وضع نقطتي البداية ونقطتي النهاية في المكان الصحيح.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات كلّف الطلاب بشرح طريقة جمع وطرح متجهين مع تضمين رسم تخطيطي.

إجابات إضافية

64. أبدًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان المتجهان متوازيين فإن لهما الاتجاه نفسه. وإذا وضعت متجهين بحيث تتطابق نقطة بدايتهما فسوف يتراكبان ولن توجد بينهما زاوية. وبالتالي، سيكون من المستحيل إكمال متوازي الأضلاع.

65. الإجابة النموذجية: لكي يصبح للا تجاه معنى ثابت، يجب قياسه باستخدام مرجعية مشتركة. وقد يؤدي غياب هذه المرجعية المشتركة إلى الغموض في ذكر اتجاه المتجه.

67a. طول **a** مجموعًا إلى طول **b** أكبر من أو يساوي طول الاتجاه الذي كوّنه **a + b**.

67b. صحيح؛ الإجابة النموذجية: يجب أن يبين المتجه الناتج عن **a + b** اتجاه كلا المتجهين. وقد ينشأ عن هذا طول قصير جدًا. **|a + b|**. إذا كان للمتجهين **a** و **b** اتجاه متعاكس. وسينتج عن حساب مجموع الطولين **|a| + |b|** أكبر قيمة ممكنة لأن الاتجاه لم يؤخذ في الحسبان. وهذه القيمة يمكن تحقيقها فقط عن طريق جمع **|a + b|** إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين ولهما الاتجاه نفسه.

مراجعة شاملة

71. **كرة الركل** افترض أن أحد لاعبي كرة الركل قام بركل الكرة بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة ابتدائية مقدارها 20 مترًا في الثانية. فعلى أي مسافة ستهبط الكرة؟ **36.7 m**

72. مثّل بيانيًا $(x')^2 + y' - 5 = 1$ إذا تم تدويره بزاوية 45° من موقعه الأصلي في المستوى xy. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

73. يقع المركز عند (4, 5)، نصف القطر 4
$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$

74. يقع المركز عند (−4 ,1)، القطر 7
$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 12.25$

73-74. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

حدد المعادلة ومثّل بيانيًا القطع المكافئ بالبعد البؤري F والرأس V.

75. $F(2, 4), V(2, 3)$ $(x-2)^2 = 4(y-3)$

76. $F(1, 5), V(-7, 5)$ $(y-5)^2 = 32(x+7)$

75-76. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

77. **الصناعات اليدوية** يبيع ماجد المنحوتات الخشبية. يبيع التماثيل الكبيرة مقابل 60 AED والساعات مقابل 40 AED والأثاث المصغّر مقابل 25 AED وقطع الشطرنج مقابل 5 AED. اصطحب معه الأغراض التالية إلى المعرض: 12 تمثالاً كبيرًا و 25 ساعة و 45 قطعة أثاث مصغّر و 50 قطعة شطرنج.

a. اكتب مصفوفة مخزون للعدد المتاح من كل عنصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل عنصر.

الإجابة النموذجية: $\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 25 \\ 5 \end{bmatrix}$، $[12 \quad 25 \quad 45 \quad 50]$

b. أوجد الدخل الإجمالي لماجد إذا باع جميع العناصر. **AED 3095**

حُل كل معادلة لجميع قيم x.

78. $4 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$
$n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

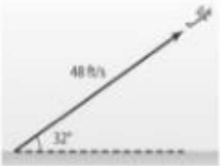
79. $\sin x - 2 \cos^2 x = -1$
$\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **SAT/ACT** إذا كانت المدينة A تبعد مسافة 12 ميلاً عن المدينة B والمدينة C تبعد مسافة 18 ميلاً عن المدينة A. فأي مما يلي لا يمكن أن تكون المسافة من المدينة B إلى المدينة C؟ **A**

A 5 أميال
B 7 أميال
C 10 أميال
D 12 ميلاً
E 18 ميلاً

81. حلقت طائرة بالتحكم عن بُعد على طول مسار مبدئي بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة 48 قدمًا في الثانية كما هو موضح. أي مما يلي يمثل مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة؟ **G**



F 25.4 ft/s, 40.7 ft/s
G 40.7 ft/s, 25.4 ft/s
H 56.6 ft/s, 90.6 ft/s
J 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

82. **مراجعة** المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 2)$ و $B(-4, -3)$ و $C(3, -3)$. بعد التمدد، أصبح للمثلث $A'B'C'$ الرؤوس $A'(-12, 6)$ و $B'(-12, -9)$ و $C'(9, -9)$. كم ضعفًا تبلغ مساحة $\triangle A'B'C'$ بالنسبة لمساحة $\triangle ABC$؟ **D**

A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{3}$
C 3
D 9

83. **مراجعة** ترسم حليمة خريطة للحي الذي تعيش به. تم تمثيل منزلها بواسطة شبه منحرف $ABCD$ رؤوسه $A(2, 2)$ و $B(6, 2)$ و $C(6, 6)$ و $D(2, 6)$. تريد استخدام النظام الإحداثي ذاته لرسم خريطة أخرى بنصف حجم الخريطة الأصلية. فما الرؤوس الجديدة المحتملة لمنزل حليمة؟ **H**

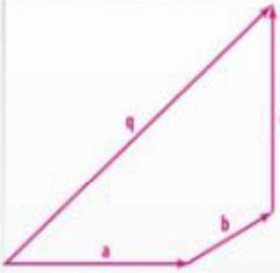
F $A'(0, 0), B'(2, 1), C'(3, 3), D'(0, 3)$
G $A'(0, 0), B'(3, 1), C'(2, 3), D'(0, 2)$
H $A'(1, 1), B'(3, 1), C'(3, 3), D'(1, 3)$
J $A'(1, 2), B'(3, 0), C'(2, 2), D'(2, 3)$

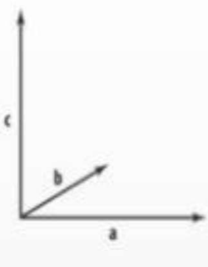
409

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو هيل للتعليم McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز BL

التوسع كلّف الطلاب بحل المسألة التالية. افترض أن لديك ثلاثة متجهات **a** و **b** و **c** تؤثر على نقطة. ضع إستراتيجية لإيجاد محصلتهم المتجه **q**.





1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-2 إجراء العمليات باستخدام الرسومات ذات المقاييس النسبية.

الدرس 7-2 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها في المستوى الإحداثي. كتابة المتجه على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة.

بعد الدرس 7-2 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام حاصل الضرب النقطي لإيجاد الزاوية المحصورة بينهما.

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

السابق
- قمت بإجراء العمليات على المتجهات باستخدام الرسومات ذات المقاييس.

الحالي
1. تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي.
2. كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة.

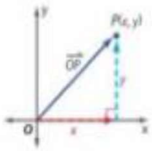
لماذا؟
- يمكن أن تؤثر الرياح على اتجاه الطائرة وسرعتها بالنسبة إلى الأرض. يستطيع الطيارون استخدام الرسومات ذات المقاييس لتحديد الاتجاه المطلوب للطائرة لتعويض الانحراف الناتج عن الرياح، ويتم إجراء هذه الحسابات في الغالب باستخدام المتجهات في المستوى الإحداثي.

المفردات الجديدة
- صورة مركبة component form
- متجه وحدة unit vector
- توفيق خطي linear combination

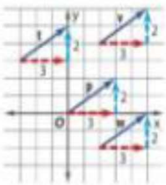
1 المتجهات في المستوى الإحداثي

في الدرس 7-1، قمت بإيجاد مقدار واتجاه ناتج قوتين أو أكثر هندسيًا باستخدام الرسومات ذات المقاييس. نظرًا لأن الرسومات يمكن أن تكون غير دقيقة، هناك حاجة إلى أسلوب جبري باستخدام نظام إحداثي متعامد للمواقف التي تتطلب المزيد من الدقة أو في أنظمة المتجهات المعقدة.

يمكن وصف متجه $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في نظام إحداثي متعامد (كما في الشكل 7.2.1) بشكل فريد بواسطة إحداثيات نقطة انتهائه $P(x, y)$. نقوم بالإشارة إلى $\overrightarrow{OP}$ على مستوى إحداثي بواسطة $\langle x, y\rangle$. لاحظ أن x و y مركبتين متعامدتين لـ $\overrightarrow{OP}$. لهذا السبب، $\langle x, y\rangle$ تُسمى **صورة مركبة** للمتجه.



الشكل 7.2.1

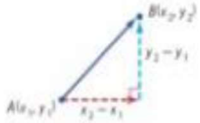


الشكل 7.2.2

نظرًا لأن المتجهات التي لها نفس المقدار والاتجاه متكافئة، فيمكن تمثيل العديد من المتجهات بواسطة الإحداثيات ذاتها. على سبيل المثال، المتجهات **p** و **t** و **v** و **w** في الشكل 7.2.2 متكافئة لأنه يمكن الإشارة إلى كل منها بواسطة $\langle 3, 2\rangle$. لإيجاد صورة مركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، يمكنك استخدام إحداثيات نقطتي البداية والنهاية.

المفهوم الأساسي الصورة المركبة للمتجه

الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ معطاة بواسطة
$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.



مثال 1 التعبير عن متجه بصورة مركبة

أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة المركبة

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ اطرح.

تمرين موجه

أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

1A. $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8\rangle$

1B. $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11\rangle$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلِّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تؤثر الرياح المقابلة على السرعة الأرضية للطائرة؟ يمكن أن تقلل الرياح المقابلة من السرعة الأرضية للطائرة.
- كيف تؤثر الرياح الخلفية على السرعة الأرضية للطائرة؟ يمكن أن تزيد الرياح الخلفية من السرعة الأرضية للطائرة.

- ما نوع الرياح التي قد تؤثر على اتجاه طائرة؟ أي رياح ذات اتجاه غير الرياح المقابلة أو الرياح الخلفية
- هل من الممكن أن تسبب الرياح الجانبية التي تهب بمقدار $90°$ على الاتجاه الذي تحلق به الطائرة في خروج الطائرة عن مسارها بمقدار $90°$؟ اشرح. لا، فالطائرة تتحرك إلى الأمام في الوقت نفسه الذي يتم فيه دفع اتجاهها خارج المسار بفعل الرياح، ولذلك ستكون زاوية انحراف الطائرة عن مسارها أقل من $90°$.

1 المتجهات في المستوى الإحداثي

يوضح المثال 1 طريقة التعبير عن متجه في الصورة المركبة عند توفر الزوج المرتب لنقطة البداية ونقطة النهاية. **ويوضح المثال 2** طريقة إيجاد طول المتجه باستخدام قانون المسافة. أما **المثال 3** فيوضح طريقة إجراء العمليات على المتجهات، بما فيها إيجاد مجموع متجهين جبريين والفارق بينهما وحاصل الضرب القياسي لهما.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ونقطة بدايته $A(1, -3)$ ونقطة نهايته هي $B(1, 3)$. $\langle 0, 6\rangle$

2 أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$ ونقطة نهايته هي $B(1, 3)$. 6

3 أوجد كلاً مما يلي عندما تكون $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$ و $\mathbf{y} = \langle 2, 0\rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -1, -4\rangle$.

a. $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10\rangle$

b. $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8\rangle$

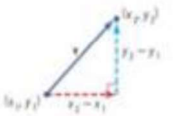
يتم إيجاد مقدار متجه في المستوى الإحداثي باستخدام صيغة المسافة.

المفهوم الأساسي مقدار متجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فيتم تقديم مقدار $\mathbf{v}$ بواسطة

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إذا كان $\mathbf{v}$ صورة مركبته $\langle a, b\rangle$، فإن $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



قراءة في الرياضيات
المعيار مقدار المتجه يسمى أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

أوجد مقدار $\overline{AB}$ بنقطة البداية $A(-4, 2)$ ونقطة النهاية $B(3, -5)$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98}$ تقريبًا $= 9.9$ بسّط.

التحقق من المثال 1، تعلم أن $\overline{AB} = \langle 7, -7\rangle$. $|\overline{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2}$ أو $\sqrt{98}$ ✔

تمرين موجّه

أوجد مقدار $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

2A. $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$

2B. $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

جمع المتجهات في المستوى الإحداثي وطرحها وضربها في كمية عددية مشابه لتلك العمليات مع المصفوفات.

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهان و k كمية عددية، فإن ما يلي صحيح

جمع المتجهات $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح المتجهات $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

الضرب في كمية عددية $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كل مما يلي لـ $\mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle$، و $\mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle$.

a. $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

$\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ عوّض.

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ جمع المتجهات

b. $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

$\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$ أعد كتابة الطرح في صورة جمع

$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ عوّض.

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ الضرب في كمية عددية وجمع المتجهات

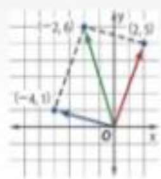
تمرين موجّه

3A. $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$ $\langle -19, 4\rangle$

3B. $-3\mathbf{w}$ $\langle 12, -3\rangle$

3C. $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $\langle 3, 22\rangle$

نصيحة دراسية
التحقق البياني كما هو موضح أدناه، تم التحقق من المثال 3a باستخدام طريقة متوازي الأضلاع.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التواصل كلّف الطلا ب بالعمل في مجموعات صغيرة لحساب مجموع متجهين والفارق بينهما بالإضافة إلى الضرب المقياسي لأحد المتجهين. ثم كلّف الطلاب باستخدام ورقة رسم بياني للتأكد بصريًا من صحة إجاباتهم.

إرشاد للمعلمين الجدد

الكمية القياسية ذكِّر الطلاب بأن الكمية القياسية عبارة عن عدد حقيقي.

التركيز على محتوى الرياضيات

الضرب القياسي يمكن النظر إلى الضرب القياسي باعتباره أيضًا تغير في أبعاد المتجه الأصلي. فإذا كانت الكمية القياسية أقل من 0، مما يعكس اتجاه المتجه، فإن المتجه لم تتغير أبعاده فحسب بل انعكس أيضًا على المستقيم العمودي على المتجه عند نقطة المنتصف. لاحظ أن القيمة المطلقة إذا كانت أقل من 1، فإن تغير الأبعاد يكون انضغاطًا.

2 متجهات الوحدة

يوضح المثال 4 طريقة إيجاد متجه وحدة له الاتجاه نفسه مثل المتجه المعطى. ويوضح **المثال 5** طريقة كتابة المتجه على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة. ويوضح **المثال 6** طريقة إيجاد الصورة المركبة لمتجه بدلالة طوله وزاوية اتجاهه. أما **المثال 7** فيوضح طريقة إيجاد زاوية اتجاه متجه باستخدام دالة معكوس ظل الزاوية. ويوضح **المثال 8** طريقة إجراء العمليات على المتجهات.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة **u** الذي له الاتجاه نفسه للمتجه $\mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$.

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو قسّم كل صف دراسي إلى مجموعات. وخصص متجهًا لكل مجموعة. كلّف المجموعات بعمل تسجيل فيديو يوضح طريقة إيجاد متجه وحدة له الاتجاه نفسه مثل المتجه المعطى لهم.

---

2 متجهات الوحدة

المتجه الذي يكون مقداره وحدة واحدة يُسمى **متجه وحدة**. من المفيد أحيانًا وصف متجه غير صفري **v** في صورة مضاعف كمية عددية لمتجه وحدة **u** له نفس اتجاه **v**. لإيجاد **u**، اقسم **v** على مقداره $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

الربط بتاريخ الرياضيات

ويليام روان هاملتون (1805-1865)

عالم رياضيات أيرلندي طور هاملتون نظرية الرباعيات ونشر محاضرات عن الرباعيات. تتضمن هذه النظرية أسس العديد من المفاهيم الأساسية لتحليل المتجهات.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه متجه معلوم

أوجد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{\lvert\mathbf{v}\rvert}\mathbf{v}$	متجه وحدة له نفس اتجاه v
$= \frac{1}{\lvert\langle -2, 3\rangle\rvert}\langle -2, 3\rangle$	عوّض.
$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$	$\lvert\langle a, b\rangle\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$	بسّط.
$= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$	الضرب في كمية عددية
$= \left\langle -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$	إنطاق المقامات.

التحقق نظرًا لأن **u** مضاعف كمية عددية لـ **v**، فإن له نفس اتجاه **v**. تحقق من أن مقدار **u** هو 1.

$\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2}$	صيغة المسافة
$= \sqrt{\frac{52}{169} + \frac{117}{169}}$	بسّط.
$= \sqrt{1} = 1$ ✔	بسّط.

تمرين موجّه

أوجد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعلوم.

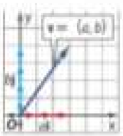
4A. $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$ $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

4B. $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

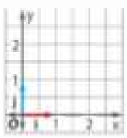
تتم الإشارة إلى متجهات الوحدة في اتجاه محور x الموجب ومحور y الموجب بواسطة $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ على التوالي (الشكل 7.2.3). المتجهان **i** و **j** يُطلق عليهما متجهي الوحدة القياسيين.

انتبه!

متجه الوحدة i لا تخلط بين متجه الوحدة **i** والعدد التخيلي *i*. تتم الإشارة إلى المتجه بالحرف الغامق غير المائل **i**. تتم الإشارة إلى العدد التخيلي بالحرف الغامق المائل ***i***.



الشكل 7.2.4



الشكل 7.2.3

يمكن استخدام هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ في صورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما هو موضح بالشكل 7.2.4.

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	صورة مركبة لـ v
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد الكتابة في صورة مجموع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	الضرب في كمية عددية
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$ و $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

McGraw-Hill Education

إرشاد للمعلمين الجدد

ترميز المتجهات تستخدم الأزواج المرتبة في وصف المتجهات شأنها شأن النقاط على المستوى الإحداثي. لاحظ أن القوسين مختلفان. فالنقطة (x, y) تشير إلى موقع وحيد على المستوى الإحداثي؛ بينما المتجه $\langle x, y \rangle$ يشير إلى متجه (من حيث الطول والاتجاه) في الوضع القياسي تكون نهايته في النقطة ذات الصلة.

أمثلة إضافية

5 افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-3, -3)$ ونقطة نهايته $E(2, 6)$. اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ على هيئة متجه توفيق خطي للمتجهين **i** و **j**. **5i + 9j**

6 أوجد الصورة المركبة للمتجه **v** الذي طوله 7 وزاوية اتجاهه 60°.

$\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

مجموع المتجهين $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ يسمى **التوفيق الخطي** للمتجهين **i** و **j**.

مثال 5 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-2, 3)$ ونقطة نهايته $E(4, 5)$. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j.

أولاً. أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$	صورة مركبة
$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$	$(x_1, y_1) = (-2, 3)$ و $(x_2, y_2) = (4, 5)$
$= \langle 6, 2 \rangle$	بسّط.

ثم أعد كتابة المتجه في صورة توفيق خطي لمتجهات وحدة قياسية.

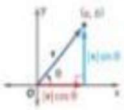
$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$	صورة مركبة
$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$	$\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تمرين موجّه

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j.

5A. $D(-6, 0), E(2, 5)$ **8i + 5j**

5B. $D(-3, -8), E(-7, 1)$ **−4i + 9j**



إحدى طرق تحديد اتجاه متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ هي ذكر زاوية الاتجاه θ التي يصنعها **v** مع محور **x** الموجب. من الشكل 7.2.5. يترتب على ذلك أن **v** يمكن كتابته في صورة مركبة أو توفيق خطي لـ **i** و **j** باستخدام مقدار وزاوية اتجاه المتجه.

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	صورة مركبة
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	تعويض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\mathbf{j}$	توفيق خطي لـ i و j

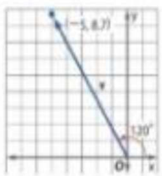
نصيحة دراسية

متجه الوحدة من العبارة $\mathbf{v} = \langle \lvert v\rvert \cos\theta, \lvert v\rvert \sin\theta \rangle$، يترتب أن متجه الوحدة في اتجاه **v** له الصورة
$\mathbf{v} = \langle 1\cos\theta, 1\sin\theta \rangle$
$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$.

مثال 6 إيجاد صورة مركبة

أوجد الصورة المركبة لمتجه v مقداره 10 وزاوية اتجاهه 120°.

$\mathbf{v} = \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	الصورة المركبة لـ v بدلالة $\lvert v\rvert$ و θ
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$	$\lvert v\rvert = 10$ و $\theta = 120°$
$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$	$\cos 120° = -\frac{1}{2}$ و $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$	بسّط.



التحقق مثّل بيانيا $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$. قياس الزاوية التي يصنعها **v** مع محور x الموجب هي تقريبا 120° كما هو موضح
• و $\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}$ أو 10. ✓

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة للمتجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين.

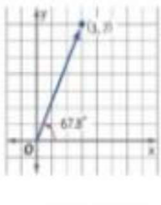
6A. $\lvert\mathbf{v}\rvert = 8, \theta = 45°$ **⟨5.7, 5.7⟩**

6B. $\lvert\mathbf{v}\rvert = 24, \theta = 210°$ **$\langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$**

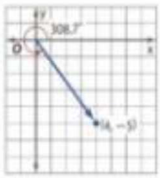
حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماجروهيل للتعليم McGraw-Hill Education

413

يترتب كذلك على معطيات الشكل 7.2.5 في الصفحة السابقة أنه يمكن إيجاد زاوية الاتجاه θ للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ من خلال حل المعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$ أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$



الشكل 7.2.6



الشكل 7.2.7

مثال 7 زوايا اتجاه المتجهات

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3$ و $b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ أوجد θ.

$\theta \approx 66.8°$ استخدم حاسبة.

إذًا، زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي تقريبًا 67.8° كما موضح بالشكل 7.2.6

b. $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4$ و $b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ أوجد θ.

$\theta \approx -51.3°$ استخدم حاسبة.

نظرًا لأن $\mathbf{r}$ تقع في الربع الرابع كما هو موضح بالشكل 7.2.7، فإن $\theta = 360 + (-51.3)$ أو 308.7°

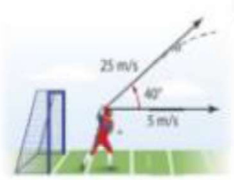
تمرين موجّه

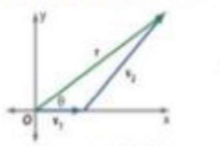
7A. $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **161.6°**

7B. $\langle -3, -8 \rangle$ **249.4°**

مثال 8 من الحياة اليومية تطبيق العمليات على المتجهات

كرة القدم يركض حارس المرمى للأمام بسرعة 5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة بسرعة 25 مترًا في الثانية وزاوية 40° مع المركبة الأفقية. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟





ملاحظة: الشكل غير مرسوم للقياس

نظرًا لأن الحارس يتحرك للأمام مباشرة، فصورة مركبة سرعته $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0 \rangle$. استخدم مقدار واتجاه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ لكتابة هذا المتجه في صورة مركبة.

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta \rangle$ الصورة المركبة لـ $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40° \rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25$ و $\theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$ بسّط.

اجمع المتجهين الجبريين الممثلين لـ $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ لإيجاد السرعة الناتجة، المتجه $\mathbf{r}$.

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ متجه ناتج

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$ تعويض

$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$ جمع متجهات

مقدار هذا الناتج هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2}$ أو تقريبًا 29.1. بعد ذلك، أوجد زاوية اتجاه الناتج θ.

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ حيث $\langle a, b \rangle = \langle 24.2, 16.1 \rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2}$ تقريبًا $= 33.6°$ أوجد θ.

إذًا، السرعة الناتج للكرة هي تقريبًا 29.1 مترًا في الثانية بزاوية 33.6° تقريبًا مع المركبة الأفقية.

تمرين موجّه

8. **كرة القدم** ماذا ستكون السرعة الناتجة للكرة إذا ألقى حارس المرمى الرمية ذاتها وهو يركض للخلف بسرعة 5 أمتار في الثانية؟ **21.5 m/s بزاوية 48.6° مع المركبة الأفقية**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أمثلة إضافية

7 أوجد قياس زاوية الاتجاه لكل متجه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = \langle 2, 9 \rangle$ **77.5°**

b. $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **344.1°**

8 **كرة القدم** لاعب كرة قدم يركض إلى الأمام بمعدل 7 أمتار في الثانية، يقوم بركل الكرة بسرعة متجهة معدلها 30 مترًا في الثانية بزاوية قياسها 10° مع المركّب الأفقي؟ **36.9 m/s; 8.1°**

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتجهات.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يمكن استخدام المتجهات في عمل نماذج لمواقف الحياة اليومية وتحليلها؟ **الإجابة النموذجية: يمكن استخدام المتجهات لتمثيل الكميات التي لها مقدار واتجاه، مثل الوزن والقوة والسرعة المتجهة. ويمكن استخدام العمليات على المتجهات بعد ذلك لحل المسائل التي تتضمن هذه الكميات.**

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون بالطريقةالحسية الحركية كلّف الطلاب بتعليق جسم بحبلين بين مقعدين دراسيين. كلّف كل طالب بتصميم رسم تخطيطي لعمل نموذج لهذه الحالة مع كتابة كل قوة، ثم توضيح الطريقة التي وجد بها الطالب القوة المبذولة على الحبلين.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-53 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إجابات إضافية

1. $\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$
2. $\langle -8, 16\rangle; 8\sqrt{5} \approx 17.9$
3. $\langle -7, -3\rangle; \sqrt{58} \approx 7.6$
4. $\langle -7, -8\rangle; \sqrt{113} \approx 10.6$
5. $\langle 13, 2\rangle; \sqrt{173} \approx 13.2$
6. $\langle 3, 4\rangle; 5$
7. $\langle -6.5, 4.5\rangle; \sqrt{62.5} \approx 7.9$
8. $\langle 13.7, -8\rangle; \sqrt{251.69} \approx 15.9$
9. $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle; \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$
10. $\left\langle -\frac{8}{5}, \frac{37}{5}\right\rangle; \sqrt{\frac{1433}{25}} \approx 7.6$
20. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$
21. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$
22. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$
23. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
24. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{85}}{85}, \frac{9\sqrt{85}}{85}\right\rangle$
25. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$
26. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$
27. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\rangle$
28. $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
29. $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
30. $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$
31. $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$
32. $9\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j}$
33. $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$
34. $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$
35. 0

تمارين

أوجد الصورة المركبة والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. (المثالان 1 و 2)

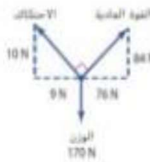
1-10. انظر الهامش.

1. $A(-3, 1), B(4, 5)$
2. $A(2, -7), B(-6, 9)$
3. $A(10, -2), B(3, -5)$
4. $A(-2, 7), B(-9, -1)$
5. $A(-5, -4), B(8, -2)$
6. $A(-2, 6), B(1, 10)$
7. $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$
8. $A(-4.3, 1.8), B(9.4, -6.2)$
9. $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$
10. $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right), B(-1, 7)$

أوجد كل مما يلي حيث $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$ و $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$ و $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$. (المثال 3)

11. $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ $\langle -21, 13\rangle$
12. $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ $\langle -4, 4\rangle$
13. $3\mathbf{g} - 5\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -55, -13\rangle$
14. $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ $\langle 31, -11\rangle$
15. $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ $\langle 26, 6\rangle$
16. $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ $\langle -53, -23\rangle$
17. $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -42, -18\rangle$
18. $6\mathbf{h} + 5\mathbf{f} - 10\mathbf{g}$ $\langle 34, 62\rangle$

19. **الفيزياء** في الفيزياء، يتم استخدام الرسوم التخطيطية للقوى لعرض تأثيرات القوى المختلفة المؤثرة على جسم. يمكن للرسم التخطيطي التالي للقوى تمثيل القوى المؤثرة على طفل ينزلق لأسفل على زحلوقة. (المثال 3)



$\mathbf{f} = \langle -9, 10\rangle, \mathbf{n} = \langle 76, 84\rangle, \mathbf{w} = \langle 0, -170\rangle$

a. باستخدام النقطة الزرقاء الممثلة للطفل كنقطة أصل، عبر عن كل قوة كمتجه في صورة مركبة. $\langle 67, -76\rangle$

b. أوجد صورة مركبة المتجه الناتج الممثل للقوة المتسببة في حركة الطفل لأسفل على الزحلوقة.

20-27. انظر الهامش.

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. (المثال 4)

20. $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$
21. $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$
22. $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$
23. $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$
24. $\mathbf{v} = \langle -2, 9\rangle$
25. $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$
26. $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$
27. $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$

28-35. انظر الهامش.

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتجهين i و j. (المثال 5)

28. $D(4, -1), E(5, -7)$
29. $D(9, -6), E(-7, 2)$
30. $D(3, 11), E(-2, -8)$
31. $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$
32. $D(-3, -5.7), E(6, -8.1)$
33. $D(-4, -6), E(9, 5)$
34. $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$
35. $D(-3, 1.5), E(-3, 1.5)$

36. **طريق المدرسة** من أجل أن تذهب عائشة إلى المدرسة، تغادر منزلها وتقود السيارة شمالاً في شارع النصر لمسافة 2.4 ميل. ثم تنعطف يسارًا إلى شارع الحرية وتقطع مسافة 3.1 أميال ثم تنعطف يمينًا إلى شارع الأمل وتقطع مسافة 5.8 أميال. عبّر عن طريق عائشة في صورة توفيق خطي لمتجهي الوحدة i و j. (المثال 5)
$-3.1\mathbf{i} + 8.2\mathbf{j}$

37. **التجديف** تجدف نجاة عبر النهر بسرعة 5 أميال في الساعة بشكل متعامد على الشاطئ. يبلغ تيار النهر 3 أميال في الساعة باتجاه التيار. (المثال 5)

a. ما سرعة حركتها؟ **تقريبًا 5.8 mph**

b. بأي زاوية مع الشاطئ تتحرك؟ **تقريبًا 59°**

أوجد صورة مركّبة المتّجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين. (المثال 6)

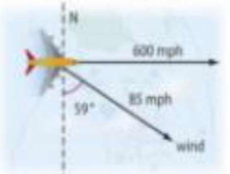
38. $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$ $\langle 6, 6\sqrt{3}\rangle$
39. $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$ $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\rangle$
40. $|\mathbf{v}| = 6, \theta = 240°$ $\langle -3, -3\sqrt{3}\rangle$
41. $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$ $\langle 8\sqrt{3}, -8\rangle$
42. $|\mathbf{v}| = 28, \theta = 273°$ $\langle 1.47, -27.96\rangle$
43. $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$ $\langle -8.6, 12.29\rangle$

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. (المثال 7)

44. $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ $63.4°$
45. $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ $111.8°$
46. $8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ $346.0°$
47. $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ $216.9°$
48. $\langle -5, 9\rangle$ $119.1°$
49. $\langle 7, 7\rangle$ $45°$
50. $\langle -6, -4\rangle$ $213.7°$
51. $\langle 3, -8\rangle$ $290.6°$

52. **التزلج** تسحب هيام زلاجة بقوة 275 نيوتن من خلال إمساك حبلها بزاوية 58°. سوف يساعدها أخاها من خلال دفع الزلاجة بقوة 320 نيوتن. حدد مقدار واتجاه القوة الإجمالية الناتجة المؤثرة على الزلاجة. (المثال 8) **تقريبًا 520.8 N، تقريبًا 153.4°**

53. **الملاحة** تطير طائرة باتّجاه الشرق بسرعة 600 ميل في الساعة، وتهب الرياح بسرعة 85 ميلاً في الساعة بزاوية S59°E. (المثال 8)



a. حدّد سرعة طيران الطائرة. **تقريبًا 674.3 mph**

b. حدّد زاوية طيران الطائرة. **تقريبًا S86°E**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-53, 65-67, 68, 70-93	1-53 فردي, 90-93	2-52 زوجي, 65, 67, 68, 70-89
OL ضمن المستوى	1-53 فردي, 54, 55, 57-61, 63-65, 67, 68, 70-93	1-53, 90-93	54-65, 67, 68, 70-89
BL أعلى من المستوى	54-93		

54. **الاتجاه** يحتاج طيار إلى تعيين مسار يؤدي إلى سرعة 500 ميل في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 100 ميل في الساعة من زاوية 192°، فأوجد الاتجاه والسرعة التي يجب على الطيار اتخاذهما لتحقيق هذا الناتج.
تقريبًا 598.2 mph بزاوية موجهة 182°

حدد ما إذا كان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ بنقاط البداية والنهاية المذكورة متكافئين. وإذا كانا كذلك، فأثبت أن $\overline{AB} = \overline{CD}$. وإن لم يكونا كذلك، فاشرح السبب.

55. $A(3, 5)$, $B(6, 9)$, $C(-4, -4)$, $D(-2, 0)$ **لا**

56. $A(-4, -5)$, $B(-8, 1)$, $C(3, -3)$, $D(1, 0)$ **لا**

57. $A(1, -3)$, $B(0, -10)$, $C(11, 8)$, $D(10, 1)$ **نعم**

55–57. انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

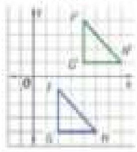
58. **القوارب** تتحرك عائلة هناء في قارب عبر نهر. افترض أنهم في منطقة من النهر عرضها 150 مترًا تتدفق باتجاه الجنوب بمعدل متر في الثانية. في المياه الراكدة، يتحرك القارب بسرعة 0.5 متر في الثانية.
a. ما سرعة القارب؟ **تقريبًا 5.1 m/s**
b. بعد أي مسافة سيجنح القارب إلى الشاطئ؟ **30 m**
c. كم يستغرق عبور النهر في مسار مباشر من ضفة لأخرى؟ **30 s**

59b. تقريبًا 46.1 mph، تقريبًا N46°E

59. **الملاحة** تطير طائرة نفاثة بسرعة 480 ميلاً في الساعة باتجاه N82°E. بسبب الرياح، تبلغ سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض 518 ميلاً في الساعة باتجاه N79°E. **a. انظر الهامش.**
a. قم بتصميم رسم تخطيطي يمثل هذه الحالة.
b. ما سرعة الرياح واتجاهها؟
c. إذا زاد الطيار سرعة الطائرة في الهواء إلى 500 ميل في الساعة، فكم ستكون السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى الأرض؟

59c. تقريبًا 538 mph، تقريبًا N79°E

60. **الإزاحات** يمكنك إزاحة شكل على طول متجه إزاحة $\langle a, b\rangle$ من خلال جمع a مع كل إحداثي x وجمع b مع كل إحداثي y. فكر في المثلثات الموضحة أدناه.
a. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ باستخدام متجه إزاحة.
(2, 5)
b. مثّل بيانيًا $\triangle FGH$ وصورته المزاحة $\triangle F''G''H''$ على طول $\langle -3, -6\rangle$.
انظر الهامش.
c. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$ باستخدام متجه إزاحة.
(−1, −1)



61. الإجابة النموذجية: (0, −2) 62. الإجابة النموذجية: (5, −1)

إذا علمت مقدار ونقطة بداية كل متجه، فحدد نقطة نهايته المحتملة.

61. $(-1, 4)$; $\sqrt{37}$ 62. $(-3, -7)$; 10

63. **الكاميرا** يتم دعم كاميرا فيديو لرصد الأحداث المثيرة في فعالية رياضية بواسطة ثلاثة أسلاك. يمكن تمثيل التوتر في كل سلك بواسطة متجه.

السلك 1: (−755.2, 932.6)؛ السلك 2: (898.8, 438.4)؛ السلك 3: (544.0, −440.5)

a. أوجد الصورة المركبة لكل متجه.
b. أوجد الصورة المركبة للمتجه الناتج المؤثر على الكاميرا. **(687.6, 930.5)**
c. أوجد مقدار القوة الناتجة واتجاهها. **تقريبًا 1157 N، تقريبًا 53.5°**

64. **القوة** يوجد صندوق ثابت على منحدر. تؤثر الجاذبية **g** والاحتكاك على الصندوق. مركبات الجاذبية موضحة في الرسم التخطيطي. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن قوة الاحتكاك حتى يكون هذا السيناريو ممكنًا؟

قوة الاحتكاك لا يمكن أن تكون أقل من مركبة الجاذبية الموازية للمنحدر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **الاستنتاج** إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين، فاكتب معادلة متجهات تربط **a** و **b**.
الإجابة النموذجية: $a = kb$، حيث k أي كمية عددية حقيقية

66. **التحدي** لسحب الأمتعة، يبذل أحمد قوة تبلغ 150 نيوتن بزاوية 58° مع المركّبة الأفقية. إذا كانت القوة الناتجة المؤثرة على الأمتعة هي 72 نيوتن بزاوية 56.7° مع المركبة الأفقية، فما مقدار ناتج $F_{\text{الاحتكاك}} + F_{\text{الوزن}}$؟
تقريبًا 78 N

67. **الاستنتاج** إذا علمت نقطة بداية متجه ومقداره، فصف المحل الهندسي للنقاط التي تمثل المواقع المحتملة لنقطة النهاية.
انظر الهامش.

68. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

$$x = \frac{y}{\tan 4y}$$

69. **التحدي** زاوية اتجاه (x, y) هي $4y°$. أوجد x بدلالة y.

الإثبات أثبت كل خاصية متجهات. افترض أن $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle$، $\mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle$، و $\mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$.

70–73. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

70. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

71. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

72. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k كمية عددية

73. $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k كمية عددية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

55. الإجابة النموذجية: المتجهان ليس لهما الطول والاتجاه نفسه، ولذلك فهما غير متكافئين.

56. الإجابة النموذجية: المتجهان لهما الاتجاه نفسه، ولكنهما مختلفان في الطول، ولذلك فإنهما غير متكافئين.

416 | الدرس 7-2 | المتجهات في المستوى الإحداثي

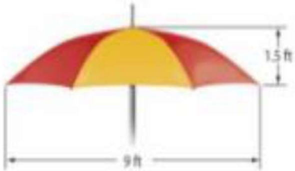
مراجعة شاملة

74. **الألعاب** يسحب فهد لعبة من خلال بذل قوة مقدارها 1.5 نيوتن على خيط مربوط باللعبة.
a. يصنع الخيط زاوية 52° مع الأرض. أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. **≈0.92 N, ≈1.18 N**
b. إذا رفع فهد الخيط بحيث يصنع زاوية 78° مع الأرض، فما مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة؟ **≈0.31 N, ≈1.47 N**

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية في صورة متعامدة.

75. $y = t^2 + 2, x = 3t - 6$ **$y = \frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} + 6$**
76. $y = t^2 - 5, x = 2t + 8$ **$y = \frac{x^2}{4} - 4x + 11$**
77. $y = 7t, x = t^2 - 1$ **$y = \pm 7\sqrt{x+1}$**

78. **المظلات** مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ. اكتب معادلة لتمثيل القوس، مع افتراض أن نقطة الأصل والرأس عند نقطة التقاء عمود وقماش المظلة. عبّر عن y بدلالة x. **$y = -\frac{2}{27}x^2$**



حلل كل تعبير إلى كسور جزئية.

79. $\frac{5z - 11}{2z^2 + z - 6}$ **$\frac{3}{z+2} - \frac{1}{2z-3}$**
80. $\frac{7x^2 + 18x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$ **$\frac{6}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1}$**
81. $\frac{9 - 9x}{x^2 - 9}$ **$\frac{-6}{x+3} + \frac{-3}{x-3}$**

أثبت صحة كل متطابقة.

82. $\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta$
83. $\sin(60° + \theta) + \sin(60° - \theta) = \sqrt{3}\cos\theta$

82-83. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 3 وln 7 .

84. $\ln 189$ **$3\ln 3 + \ln 7$**
85. $\ln 5.\overline{4}$ **$2\ln 7 - 2\ln 3$**
86. $\ln 441$ **$2\ln 3 + 2\ln 7$**
87. $\ln \frac{9}{343}$ **$2\ln 3 - 3\ln 7$**

أوجد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي.

88. $f(x) = 6x^6 - 9x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 8x + 24; c = 6$ **270,360**
89. $f(x) = 8x^5 - 12x^4 + 18x^3 - 24x^2 + 36x - 48, c = 4$ **5984**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. SAT/ACT إذا كان $PR = RS$، فما مساحة المثلث PRS؟ **B**

A $9\sqrt{2}$
B $9\sqrt{3}$
C $18\sqrt{2}$
D $18\sqrt{3}$
E $36\sqrt{3}$

91. **مراجعة** صنع فالح لعبة احتفالاً بتخرج أخته الصغيرة. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 بوصة، فما المساحة التقديرية للقطاع؟ **H**

F $4\ in^2$
G $32\ in^2$
H $127\ in^2$
J $254\ in^2$

92. المسعفون ينقل إبراهيم وإسماعيل أحد الأشخاص على نقالة. يدفع إبراهيم النقالة من الخلف بقوة 135 نيوتن بزاوية 58° مع المركبة الأفقية، بينما يسحب إسماعيل النقالة من الأمام بقوة 214 نيوتن بزاوية 43° مع المركبة الأفقية. ما مقدار القوة الأفقية المبذولة على النقالة؟ **A**

A 228 نيوتن
B 260 نيوتن
C 299 نيوتن
D 346 نيوتن

93. **مراجعة** أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$. **H**

F $C(-4, 0), r =$ 4 وحدات
G $C(-4, 0), r =$ 16 وحدة
H $C(4, 0), r =$ 4 وحدات
J $C(4, 0), r =$ 16 وحدة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 59، راقب الطلاب الذين لا يقدمون رسمًا دقيقًا للحالة. واقترح أن يبدأ الطلاب بتسمية الشمال والجنوب والشرق والغرب في رسمهم التخطيطي.

4 التقويم

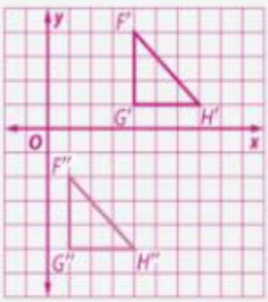
حصاد الأمس كلّف الطلاب بشرح الطريقة التي ساعدهم بها درس الأمس عن المتجهات الهندسية في درس اليوم عن المتجهات الجبرية.

إجابات إضافية

57. الإجابة النموذجية: كلا المتجهين لهما الطول والاتجاه نفسه، ولذلك فهما متكافئان.

59a. الإجابة النموذجية:

60b.



67. الإجابة النموذجية: إذا كانت نقطة البداية لمتجه (a, b) وكان طول المتجه m، فإن المحل الهندسي لنقطة النهاية (x, y) هو النقاط التي تحقق المعادلة $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = m$

التدريس المتمايز BL

الإثراء كلّف الطلاب بحل المسألة التالية.

يقوم مزارع وجاره بإزالة صخرة كبيرة من الحقل فيقومان بجر الصخرة باستخدام حبلين مربوطين بها بحيث يصنع الحبلا ن زاوية محصورة بينهما قياسها 35°. فإذا كان المزارع يقوم بالجر مستخدمًا قوة مقدارها 105 نيوتن ويقوم جاره بالجر بقوة 95 نيوتن، فما مقدار القوة المبذولة على الصخرة واتجاهها؟ **190.8 نيوتن بزاوية قياسها 6.16° بالقوة التي مقدارها 105 نيوتن**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-3 إيجاد أطوال المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.

بعد الدرس 7-3 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام حاصل الضرب النقطي لإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما. وإيجاد مسقط أحد المتجهين على الآخر.

بعد الدرس 7-3 استخدام المتجهات في الفضاء الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- انظر إلى الصورة الواردة في قسم *لماذا*. كيف يعلم الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم بذلوا شغلاً؟ إذا تحركت السيارة، فقد بذلوا شغلاً.

7-3 نواتج الضرب النقطي ومساقط المتجهات

:: السابق

- قمت بإيجاد مقادير المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.

:: الحالي

1. إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما.
2. إيجاد مسقط متجه على آخر.

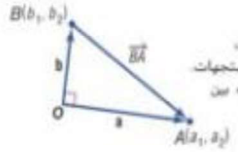
:: لماذا؟

- كلمة الشغل يمكن أن يكون لها معانٍ مختلفة في الحياة اليومية. ولكن في الفيزياء، تعريفها محدد للغاية. الشغل هو مقدار القوة المبذولة على جسم مضروبة في المسافة التي يتحرك الجسم خلالها بالتوازي مع هذه القوة. يمكن كذلك حساب الشغل، مثل ذلك المبذول لدفع سيارة لمسافة محددة، باستخدام عملية على متجه تُسمى ناتج الضرب النقطي.

المفردات الجديدة
ناتج الضرب النقطي dot product
متعامد orthogonal
مسقط المتجه vector projection
الشغل work

1 ناتج الضرب النقطي

في الدرس 7-2، درست عمليتي جمع المتجهات وضربها في كمية عددية. في هذا الدرس، سوف تستخدم عملية ثالثة على المتجهات. فكر في متجهين متعامدين في الوضع القياسي a و b. افترض أن $\overline{BA}$ هو المتجه بين نقطتي نهايتهما كما هو موضح بالشكل. من خلال نظرية فيثاغورس، نعلم أن



$$|\overline{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

باستخدام تعريف مقدار متجه، يمكننا إيجاد $|\overline{BA}|^2$.

$|\overline{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$	تعريف مقدار متجه
$|\overline{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$|\overline{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$	اكتب الصيغة الموسعة لكل مربع ذي حدين.
$|\overline{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$	جمع الحدود التربيعية.
$|\overline{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$	$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ إذًا $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ و $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ إذًا $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن التعبيرين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ و $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ متكافئان فقط في حالة $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ يُسمى **ناتج الضرب النقطي** لـ a و b، يُشار إليهما بالصورة a . b ويكتبان بالصورة a نقطة b.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي للمتجهات في مستوى

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ يعرف على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

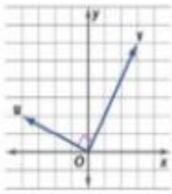
لاحظ أنه بخلاف جمع المتجهات وضربها في كمية عددية، ناتج الضرب النقطي لمتجهين ينتج كمية عددية، وليس متجهًا. كما هو موضح أعلاه، يكون المتجهان غير الصفريين متعامدين فقط إذا كان ناتج الضرب النقطي لهما يساوي 0. إذا كان ناتج الضرب النقطي لمتجهين يساوي 0، فيقال أنهما **متعامدان**.

المفهوم الأساسي المتجهات المتعامدة

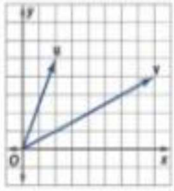
يكون المتجهان a و b متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

المصطلحان متعامد وعمودي لهما المعنى ذاته بشكل أساسي إلا إذا كان a أو b هو المتجه الصفري. المتجه الصفري متعامد على أي متجه a، حيث $(a_1, a_2) = 0a_1 + 0a_2$ ، (0, 0) أو 0. على الرغم من ذلك، حيث إن المتجه الصفري ليس له مقدار أو اتجاه، فلا يمكن أن يكون متعامدًا على a.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 7.3.1



الشكل 7.3.2

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين.

a. $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2) = 0$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن **u** و **v** متعامدان كما هو موضح بالشكل 7.3.1.

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4) = 36$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن **u** و **v** غير متعامدين كما هو موضح بالشكل 7.3.2.

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ -17؛ غير متعامدين

1B. $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ 0؛ متعامدان

نواتج الضرب النقطي لها الخواص التالية.

المفهوم الأساسي خواص ناتج الضرب النقطي

إذا كان u و v و w متجهات و k كمية عددية، فإن الخواص التالية متحققة.

خاصية التبديل	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في كمية عددية	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية ناتج الضرب النقطي للمتجهات الصفرية	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

البرهان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ ناتج الضرب النقطي

$= \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$ اكتب في صورة مربع الجذر التربيعي لـ $u_1^2 + u_2^2$

$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

ستُثبت أولاً الخواص الثلاث في التمارين 72-70.

قراءة في الرياضيات

نواتج الضرب الداخلية ونواتج ضرب كمية عددية ناتج الضرب النقطي يُسمى أيضًا ناتج الضرب الداخلي أو ناتج ضرب كمية عددية.

مثال 2 استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد المقدار

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

حيث إن $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$، إذًا $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$\lvert\langle -5, 12\rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط.

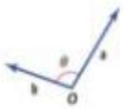
تمرين موجّه

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور.

2A. $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ 20

2B. $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ $5\sqrt{2} = 7.07$

الزاوية θ بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b** هي الزاوية المناظرة بين هذين المتجهين عند وضعهما في الوضع القياسي، كما هو موضح. يتم قياس هذه الزاوية دائمًا بحيث $0° \leq \theta \leq 180°$ أو $0 \leq \theta \leq \pi$. يمكن استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بين متجهين غير صفريين.



- لماذا يُعد الشغل بمثابة عملية نقل طاقة؟ لأنه أثناء بذل الشغل على جسم ما، تنتقل الطاقة إلى الجسم وتتسبب في حركته.
- إذا دفع أولئك الأشخاص أنفسهم السيارة بقوة أكبر وتحركت السيارة لمسافة أبعد، فهل يكونون بذلوا بذلك مزيدًا من الشغل أم شغلًا أقل؟ مزيد من الشغل
- هل ينطوي حمل كتاب بثبات على مدى الذراع أي شغل؟ اشرح. لا؛ بما أنه لا يتم تحريك الكتاب فلا يوجد شغل مبذول.

1 حاصل الضرب التقاطعي

يوضح المثال 1 طريقة إيجاد حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين وتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا. ويوضح **المثال 2** طريقة إيجاد طول المتجه. و**المثال 3** يوضح طريقة إيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حاصل الضرب النقطي لكل من **u** و **v**. ثم حدد ما إذا كان **u** و **v** متعامدين أم لا.

a. $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$ 15؛ غير متعامدين

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$ 0؛ متعامدان

2 استخدم حاصل الضرب النقطي لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$. $\sqrt{61}$ أو حوالي 7.81

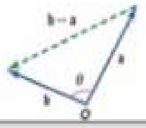
إرشاد للمعلمين الجدد

حاصل الضرب النقطي اضرب مثالاً على جمع المتجهات والضرب القياسي وحاصل الضرب النقطي لمتجهين. واسأل الطلاب كيف تختلف الإجابة على حاصل الضرب النقطي عن الإجابتين الأخريين. ينبغي على الطلاب ملاحظة أن حاصل الضرب النقطي لمتجهين يكون كمية عددية وليس متجهًا.

المفهوم الأساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b**، فإن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



نصيحة دراسية

المتجهات المتوازية والمتعامدة يكون المتجهان متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما 90°. يكون المتجهان متوازيين إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180°.

البرهان

فكر في المثلث المحدد بواسطة **a** و **b** و **b − a** في الشكل أعلاه.

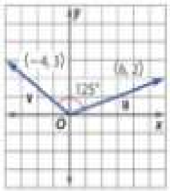
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2$	قانون جيب الـ cosine
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع لنواتج الضرب النقطي
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
$-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	اطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من كل طرف.
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$	اقسم كل طرف على $-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

مثال 3 إيجاد الزاوية بين متجهين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

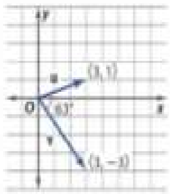
$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle\cdot\langle -4, 3\rangle}{|\langle 6, 2\rangle||\langle -4, 3\rangle|}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \frac{-24+6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$	أوجد القيمة.
$\cos\theta = \frac{-9}{5\sqrt{10}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{-9}{5\sqrt{10}} = 124.7°$ تقريبًا	أوجد θ.



يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 124.7°.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle\cdot\langle 3, -3\rangle}{|\langle 3, 1\rangle||\langle 3, -3\rangle|}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \frac{9+(-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$	أوجد القيمة.
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63°.4$ تقريبًا	أوجد θ.



يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 63.4°.

تمرين موجّه

3A. $\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$ **156.8°** **3B.** $\mathbf{u} = \langle 9, 5\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -6, 7\rangle$ **101.5°**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين **u** و **v** مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$
64.7°

b. $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$
147.5°

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر عدة طلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة استخدام معكوس جيب التمام لإيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين.

التركيز على محتوى الرياضيات

المتجه الصفري المتجه الصفري يماثل الصفر في عمليتي الضرب النقطي وجمع المتجهات. وحاصل ضرب المتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$ في أي متجه آخر هي 0 ، ويكون مجموع أي متجه مع المتجه الصفري هو المتجه المعطى. بعبارة أخرى، يكون المتجه الصفري هو العنصر المحايد في جمع المتجهات.

إرشاد للمعلمين الجدد

صورة بديلة لحاصل الضرب النقطي يؤدي قانون الزاوية المحصورة بين متجهين إلى الطريقة البديلة التالية لحساب حاصل الضرب النقطي.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

يمكن استخدام هذه الصورة لحساب حاصل الضرب النقطي بين **b** و **a** عندما يكون طول المتجهين وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلومين.

2 مسقط المتجهات

يوضح المثالان 5 و 4 طريقة إيجاد مسقط متجه على الآخر. ويوضح **المثال 6** طريقة استخدام مسقط المتجه لإيجاد القوة. أما **المثال 7** فيوضح طريقة استخدام مسقط المتجه لحساب الشغل.

مثال إضافي

4 أوجد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle -1, 5\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$; $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle + \langle -3, 2\rangle$

---

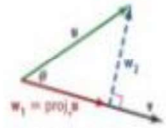
2 مسقط المتجه

مسقط المتجه في الدرس 1-7، تعلمت أنه يمكن تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين. بينما تكون هذه المركبات أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحيانًا أن تكون إحداهما موازية للأخرى.

المفهوم الأساسي مسقط u على v

افترض أن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير صفريين، وافترض أن $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركبتي المتجه $\mathbf{u}$ بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي $\mathbf{v}$ كما هو موضح. إذًا، المتجه $\mathbf{w}_1$ يُسمى **مسقط المتجه** $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$، المشار إليه بالعبارة $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$، و

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$



$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

نصيحة دراسية
المركبة المتعامدة المتجه $\mathbf{w}_2$ يُسمى مركبة $\mathbf{u}$ المتعامدة على $\mathbf{v}$.

البرهان

حيث إن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يوازي $\mathbf{v}$، فيمكن كتابته في صورة مضاعف كمية عددية لـ $\mathbf{v}$. كمضاعف كمية عددية لمتجه الوحدة $\mathbf{v}_u$ بنفس اتجاه $\mathbf{v}$، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_u$. استخدم المثلث القائم الزاوية المكون بواسطة $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ و $\mathbf{u}$ ونسبة جيب التمام لإيجاد تعبير لـ $|\mathbf{w}_1|$.

$\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{u}|}$ — نسبة الـ cosine

$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \cancel{|\mathbf{u}|}\,|\mathbf{v}|\dfrac{|\mathbf{w}_1|}{\cancel{|\mathbf{u}|}}$ — اضرب كل طرف في الكمية العددية $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}_1|$ — $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ إذ $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$|\mathbf{w}_1| = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ — أوجد $|\mathbf{w}_1|$

الآن استخدم $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_u$ لإيجاد $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ في صورة مضاعف كمية عددية لـ $\mathbf{v}$.

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_u$

$= \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ — $|\mathbf{w}_1| = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ و $\mathbf{v}_u = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

$= \left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$ — اضرب المقادير

مثال 4 إيجاد مسقط u على v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

الخطوة 1 أوجد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

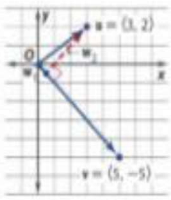
$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 3, 2\rangle\cdot\langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، فإن $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$$
$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

إذًا، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما هو موضح بالشكل 7.3.5، و $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$



الشكل 7.3.5

تمرين موجه

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89}\right\rangle$

4. أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

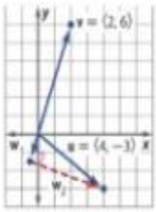
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بينما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ متجه يوازي $\mathbf{v}$. لا يكون لهذا المتجه بالضرورة نفس اتجاه $\mathbf{v}$. كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 5 المسقط في عكس اتجاه v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

لاحظ أن الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ منفرجة. إذًا مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ يقع على المتجه المعاكس لـ $\mathbf{v}$ أو $-\mathbf{v}$، كما هو موضح بالشكل 7.3.6



الشكل 7.3.6

الخطوة 1 أوجد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 2, 6\rangle}{|\langle 2, 6\rangle|^2}\langle 2, 6\rangle$$

$$= \frac{-10}{40}\langle 2, 6\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ أو $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

إذًا $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$، و $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$.

تمرين موجّه $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37}\right\rangle$

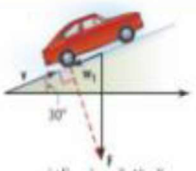
5. أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

إذا كان المتجه $\mathbf{u}$ يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه $\mathbf{v}$. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه $\mathbf{v}$) بالقوة $\mathbf{u}$ (الشكل 7.3.7)، القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه $\mathbf{v}$، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

الشكل 7.3.7

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة تزن 3000 رطل على تل مائل بزاوية °30 كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟



ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

وزن السيارة هو القوة المبذولة بفعل الجاذبية. $\mathbf{F} = \langle 0, -3000\rangle$. لإيجاد القوة $-\mathbf{w}_1$ اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل، أسقط $\mathbf{F}$ على متجه الوحدة $\mathbf{v}$ في اتجاه جانب التل.

الخطوة 1 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{v}$ في اتجاه التل.

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle \quad \text{الصورة المركبة لـ v بدلالة } |\mathbf{v}| \text{ و } \theta$$

$$= \langle 1\cos 30°, 1\sin 30°\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \quad |\mathbf{v}| = 1 \text{ و } \theta = 30$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_1$، مسقط $\mathbf{F}$ على متجه الوحدة $\mathbf{v}$، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F}$.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \quad \text{مسقط F على v}$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} \quad \text{حيث v هو متجه وحدة، } |\mathbf{v}| = 1 \text{ بشط.}$$

$$= \left(\langle 0, -3000\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right)\mathbf{v} \quad \mathbf{F} = \langle 0, -3000\rangle \text{ و } \mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= -1500\mathbf{v} \quad \text{أوجد ناتج الضرب النقطي}$$

القوة اللازمة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-1500\,\mathbf{v})$ أو $1500\mathbf{v}$. حيث $\mathbf{v}$ هو متجه وحدة، يعني هذا أن هذه القوة مقدارها 1500 رطل وفي اتجاه جانب التل.

تمرين موجّه تقريبًا 108.3 lb

6. **التزلج** تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية °60. ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن نسرين والزلاجة 125 رطلًا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أمثلة إضافية

5 أوجد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle -3, 5\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, -\frac{5}{17}\right\rangle;$

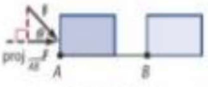
$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, -\frac{5}{17}\right\rangle + \left\langle \frac{65}{17}, \frac{39}{17}\right\rangle$

6 الصخور تستقر صخرة وزنها 10,000 رطل على جبل بميل °60. إذا تجاهلنا قوة الاحتكاك، فما مقدار القوة اللازمة للحول دون تدحرج الصخرة من الجبل؟ حوالي 8660.3 lb

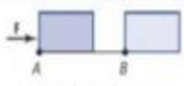
التدريس المتمايز AL

المتعلمون بالطريقة السمعية قسّم الطلاب في مجموعات صغيرة واطلب منهم شرح طريقة حل تمارين من الحياة اليومية، كما المثال 6، باستخدام إستراتيجية التفكير بصوت عالٍ. بعبارة أخرى، كلّف الطلاب بشرح عمليات التفكير التي يستخدموها أثناء الحل، بما في ذلك طريقة استخدام كل معلومة واردة بالمسألة لرسم الحل.

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول بواسطة قوة. فكر في قوة ثابتة **F** تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح بالشكل 7.3.8. إذا كان **F** يوازي $\overline{AB}$، فإن **الشغل** W المبذول بواسطة **F** هو مقدار القوة في المسافة من A إلى B أو $W = |\mathbf{F}||\overline{AB}|$.



الشكل 7.3.9



الشكل 7.3.8

لحساب الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة **F** في أي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B، كما هو موضح بالشكل 7.3.9 يمكنك استخدام مسقط المتجه **F** على $\overline{AB}$.

$W = |\mathrm{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}|\,|\overline{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

$= |\mathbf{F}|(\cos\theta)\,|\overline{AB}|$ $|\mathrm{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\cos\theta$ إذًا $\cos\theta = \dfrac{|\mathrm{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}|}{|\mathbf{F}|}$

$= \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$ $|\mathbf{F}|\,|\overline{AB}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$ إذًا $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{F}\cdot\overline{AB}}{|\mathbf{F}|\,|\overline{AB}|}$

إذًا، يمكن حساب هذا الشغل من خلال إيجاد ناتج الضرب النقطي للقوة الثابتة **F** والمسافة الموجهة $\overline{AB}$.

مثال 7 من الحياة اليومية حساب الشغل

المساعدة على جانب الطريق يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة 120 نيوتن بزاوية ثابتة °45 كما هو موضح. أوجد مقدار الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة مسافة 10 أمتار.

الخطوة 1 استخدم صيغة المسقط للشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overline{AB}$ هو $|\mathbf{F}|\cos\theta = 120\cos 45°$. مقدار المسافة الموجهة $\overline{AB}$ هو 10.

$W = |\mathrm{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}||\overline{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

$= (120\cos 45°)(10) = 848.5$ تقريبًا — التعويض

الخطوة 2 استخدم صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل.

الصورة المركبة لمتجه القوة **F** بدلالة المقدار وزاوية الاتجاه المعلومتين هي $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة المركبة للمسافة الموجهة لحركة السيارة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$W = \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$ صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل

$= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle\cdot\langle 10, 0\rangle$ التعويض

$= [120\cos(-45°)](10) = 848.5$ تقريبًا — ناتج الضرب النقطي

إذًا، يبذل الشخص شغلاً مقداره 848.5 جول تقريبًا لدفع السيارة.

تمرين موجّه

7. **التنظيف** يدفع فارس مكنسة كهربائية بقوة 85 رطلاً. مقبض المكنسة يصنع زاوية °60 مع الأرضية. ما مقدار الشغل، بالقدم-رطل، الذي يبذله عند دفع المكنسة لمسافة 6 أقدام؟ **255 قدم-رطل**

نصيحة دراسية

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم-رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

مثال إضافي

7 **جز الحشائش** يدفع شخص ما جزازة أسطوانية بقوة ثابتة مقدارها 40 نيوتن بزاوية ثابتة قياسها °45. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الجزازة 12 مترًا. **حوالي 339.4 جول**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

423

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 36-1 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة للتمارين 23-16 قد يرتكب الطلاب أخطاء بسيطة عند حساب قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين. اقترح على كل طالب أن يقارن إجابته برسم المتجهات على مستوى إحداثي لتحديد ما إذا كانت الزاوية التي تكونت حادة أم منفرجة.

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 66، اقترح على الطلا ب الرجوع إلى خصائص حاصل الضرب النقطي في مربع المفهوم الأساسي بصفحة 501. وشجع الطلاب على التحقق من القيم الحقيقية للمتجهات **W** و **V** و **U**. وإذا توصل الطلا ب إلى مجموعة واحدة من قيم المتجهات التي تثبت عدم جدوى خاصية التجميع، فإن خاصية التجميع لا تصلح إذا لحاصل الضرب النقطي.

إجابات إضافية

47. الإجابة النموذجية: بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

48. الإجابة النموذجية: باستخدام قانون الزاوية المحصورة بين متجهين، تكون $\theta = 167.5°$.

49. الإجابة النموذجية: باستخدام قانون الزاوية المحصورة بين متجهين، فإن $\cos \theta = -1$. قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $180°$، لأن كلا المتجهين في اتجاه معاكس.

50. الإجابة النموذجية: بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

65. الإجابة النموذجية: قد تنشأ جميع المتجهات الثلاثة من النقطة نفسها ولا تشكل مثلثًا على الإطلاق. في هذه الحالة، قد تكون الزاوية المحصورة بين **f** و **d** حادة أو قائمة أو منفرجة.

تمارين

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$ **8؛ غير متعامدين**
2. $\mathbf{u} = \langle -10, -16 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 5 \rangle$ **0؛ متعامدان**
3. $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$ **0؛ متعامدان**
4. $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$ **8؛ غير متعامدين**
5. $\mathbf{u} = \langle 1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 8 \rangle$ **30-، غير متعامدين**
6. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}; \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ **0؛ متعامدان**
7. $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$ **8؛ غير متعامدين**
8. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}; \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **4؛ غير متعامدين**
9. **المستلزمات الرياضية** يوضح المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد كرات السلة للرجال والنساء على التوالي في مخزون متجر مستلزمات رياضية. يوضح المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ أسعار نوعي الكرات بالدرهم على التوالي. (مثال 1)
   a. أوجد ناتج الضرب النقطي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. **15,620**
   b. فسر الناتج في سياق المسألة. **الإيرادات الإجمالية التي يمكن تحصيلها من بيع جميع كرات السلة هي AED 15,620.**

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور. (مثال 2)

10. $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$ $\sqrt{130} \approx 11.4$
11. $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$ $\sqrt{97} \approx 9.8$
12. $\mathbf{n} = \langle 6, 12 \rangle$ $6\sqrt{5} \approx 13.4$
13. $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$ $5\sqrt{13} \approx 18.0$
14. $\mathbf{p} = \langle -7, -2 \rangle$ $\sqrt{53} \approx 7.3$
15. $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$ $\sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$ **14.0°**
17. $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$ **100.0°**
18. $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$ **164.7°**
19. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **82.9°**
20. $\mathbf{u} = \langle -9, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$ **45.0°**
21. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **48.4°**
22. $\mathbf{u} = \langle 6, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -10, 8 \rangle$ **141.3°**
23. $\mathbf{u} = -10\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ **159.1°**

24. **التخييم** انطلق عمر وعلي من موقع التخييم للبحث عن حطب. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه عمر بواسطة $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه علي بواسطة $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$. أوجد الزاوية بين زوج المتجهات. (مثال 3) **تقريبًا 161.6°**

25–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (المثالان 4 ، 5)

25. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
26. $\mathbf{u} = \langle 5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4 \rangle$
27. $\mathbf{u} = \langle 8, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 1 \rangle$
28. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8 \rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -5, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 4 \rangle$
31. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
32. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

33. **العربة** يسحب عيسى أخته في عربة لأعلى منحدر صغير بميل 15°. إذا كان مجموع وزني أخت عيسى والعربة 78 رطلاً، فما القوة اللازمة لمنع تدحرجها لأسفل المنحدر؟ (مثال 6) **تقريبًا 20.2 lb**

34. **الزحلوقة** تنزلق نجلاء لأسفل على زحلوقة ولكن توقفت عندما لاحظت طالبًا آخر يرقد مصابًا في أسفل الزحلوقة. ما القوة اللازمة لمنعها من الانزلاق لأسفل الزحلوقة إذا كانت زاوية الميل 53° ووزنها 62 رطلاً؟ (مثال 6) **تقريبًا 49.5 lb**

35. **الفيزياء** يدفع علي برميل إنشاءات لأعلى منحدر طوله 1.5 متر لإدخاله في صندوق شاحنة. يستخدم قوة 534 نيوتن وزاوية المنحدر 25° مع المركبة الأفقية. ما مقدار الشغل بالجول الذي يبذله علي؟ (مثال 7) **801 جول**

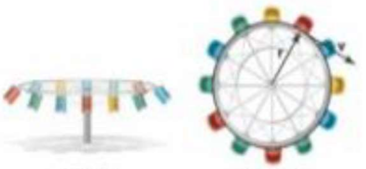
36. **التسوق** تدفع سها عربة تسوق بقوة 125 نيوتن وزاوية انخفاض 52°. ما مقدار الشغل بالجول الذي ستبذله سها لو دفعت عربة التسوق لمسافة 200 متر؟ (مثال 7) **تقريبًا 15,391.5 جول**

B

أوجد متجهًا متعامدًا لكل متجه. **37–40. تم توفير إجابات نموذجية.**

37. $\langle -2, -8 \rangle$ **$\langle -12, 3 \rangle$**
38. $\langle 3, 5 \rangle$ **$\langle 10, -6 \rangle$**
39. $\langle 7, -4 \rangle$ **$\langle 8, 14 \rangle$**
40. $\langle -1, 6 \rangle$ **$\langle 6, 1 \rangle$**

41. **الأراجيح** لأرجوحة منتزه ترفيهي دائرية، متجه الوضع **r** متعامد على متجه السرعة المماس **v** عند أي نقطة على الدائرة، كما هو موضح أدناه.



المشهد الأمامي   المشهد من الأعلى

a. إذا كان نصف قطر الأرجوحة 20 قدمًا وسرعتها ثابتة عند 40 قدمًا في الثانية، فاكتب صور مركبات متجه الوضع **r** ومتجه السرعة المماس **v** عندما تكون **r** بزاوية موجهة 35°. **$\langle 16.38, 11.47 \rangle, \langle 22.94, -32.77 \rangle$**

b. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن متجه الوضع ومتجه السرعة من الجزء a متعامدان؟ وضّح أن المتجهين متعامدان.
ناتج الضرب النقطي:
$$(20 \cos 35°)(40 \cos 55°) + (20 \sin 35°)(-40 \sin 55°) = 0$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-36, 65-67, 69-91	1-35 فردي، 88-91	2-36، زوجي، 65-67, 69-87
OL ضمن المستوى	1-45 فردي، 46 , 47-63 فردي، 64-67, 69-91	1-36, 88-91	37-67, 69-87
BL أعلى من المستوى	37-91		

إذا علمت v و v • u، فأوجد u. 45–42. تم توفير إجابات نموذجية

42. $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ $\mathbf{u} = \langle 5, -3 \rangle$

43. $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ $\mathbf{u} = \langle -1, 7 \rangle$

44. $\mathbf{v} = \langle -5, -1 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -8$ $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$

45. $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -43$ $\mathbf{u} = \langle 4, -5 \rangle$

46. **المدرسة** تسحب طالبة حقيبتها من صف الكيمياء إلى صف اللغة الإنجليزية بقوة 175 نيوتن.

a. إذا بذلت 3060 جول لسحب حقيبتها لمسافة 31 مترًا، فما زاوية القوة؟ تقريبًا °55.7

b. إذا بذلت 1315 جول بزاوية °60، فما مسافة سحب الحقيبة؟ تقريبًا 15 m

50–47. انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

حدد ما إذا كان كل زوج من المتجهات موازيًا أو متعامدًا أو ليس أيًا منهما. وضح استنتاجك.

47. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$ متعامدان

48. $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$ ليس أيًا منهما

49. $\mathbf{u} = \langle 5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle -15, -21 \rangle$ متوازيان

50. $\mathbf{u} = \langle \sec\theta, \csc\theta \rangle, \mathbf{v} = \langle \csc\theta, -\sec\theta \rangle$ متعامدان

أوجد الزاوية بين المتجهين بالراديان.

51. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$ $\frac{5\pi}{12}$

52. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{j}$ $\frac{\pi}{12}$

53. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{j}$ $\frac{\pi}{2}$

54. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j}$ $\frac{7\pi}{12}$

55. **الشغل** يرفع عدنان ابن أخيه الذي يزن 16 كيلوجرامًا لمسافة 0.9 متر. يمكن حساب قوة الوزن بالنيوتن باستخدام $F = mg$، حيث يمثل m الكتلة بالكيلوجرام هي g و 9.8 أمتار في الثانية المربعة. ما مقدار الشغل الذي بذله عدنان لرفع ابن أخيه؟ تقريبًا 141.1 جول

تم تحديد رؤوس مثلث على المستوى الإحداثي. أوجد مقاييس زوايا كل مثلث باستخدام المتجهات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

56. (2, 3), (4, 7), (8, 1) 37.9°, 60.3°, 81.9°

57. (−3, −2), (−3, −7), (3, −7) 39.8°, 50.2°, 90°

58. (−4, −3), (−8, −2), (2, 1) 17.0°, 30.7°, 132.3°

59. (1, 5), (4, −3), (−4, 0) 48.9°, 65.6°, 65.6°

إذا علمت u و|v| و θ، الزاوية بين u و v، فأوجد القيم المحتملة لـ v. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

60. $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, 45°$ $\langle 9.49, 3.17 \rangle = \langle 3.16, -9.49 \rangle$

61. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, 121°$ $\langle -5.36, 0.55 \rangle = \langle 2.03, -4.99 \rangle$

62. $\mathbf{u} = \langle -1, -6 \rangle, |\mathbf{v}| = 7, 96°$ $\langle -6.75, 1.87 \rangle = \langle 6.99, -0.42 \rangle$

63. $\mathbf{u} = \langle -2, 5 \rangle, |\mathbf{v}| = 12, 27°$ $\langle -9.03, 7.90 \rangle = \langle 1.09, 11.95 \rangle$

64. **السيارات** تقف سيارة على سطح مائل بزاوية °9. بافتراض أن القوتين الوحيدتين المؤثرتين على السيارة هما الجاذبية وقوة الضغط على المكابح ومقدارها 275 نيوتن، فكم تزن السيارة تقريبًا؟ حوالي 1757.9 kg

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح.
إذا كانت |d| و|e| و|f| تشكل ثلاثية فيثاغورس، والزاويتان بين d و e وبين e و f حادتان، إذًا يجب أن تكون الزاوية بين d و f قائمة. اشرح استنتاجك.
خطأ؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

66. **تحليل الخطأ** يدرس محمود ومحمد خواص ناتج الضرب النقطي. يستنتج محمود أن ناتج الضرب النقطي يتسم بخاصية التجميع لأنه تبديلي، بمعنى أن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. يختلف محمد معه. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.
محمد؛ الإجابة النموذجية: u X v كمية عددية، إذًا (u X v) X w غير محددة.

67. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة.
إذا كان a و b متعامدين على v في المستوى، إذًا a و b متوازيان.
اشرح استنتاجك. خطأ؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

68. **التحدي** إذا كان u و v متعامدين، فما مسقط u على v؟ 0

69. **البرهان** برهن على أنه إذا كانت الزاوية بين u و v هي °90، فإن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستخدام صيغة الزاوية بين المتجهات غير الصفرية.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

البرهان أثبت كل خاصية لناتج الضرب النقطي. افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$، $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$.

70. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

71. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

72. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

72–70. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

73. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين غير صفريين. انظر الهامش.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

67. الإجابة النموذجية: إذا كان أي من a أو b متجهًا صفريًا، فسوف يكون ذلك المتجه عموديًا على v ، ولكن من غير الممكن أن يكون موازيًا للمتجه الآخر.

73. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى المتجهين غير الصفريين، $\langle a, b \rangle$ و $\langle c, d \rangle$، فإن حاصل الضرب النقطي $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle$ هو مجموع حواصل ضرب الإحداثيات x-c والإحداثيات y أو $ac + bd$.

مراجعة شاملة

أوجد كل مما يلي لـ $\mathbf{a} = \langle 10, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle -5, 2.8\rangle, \mathbf{c} = \left\langle \frac{3}{4}, -9\right\rangle$.

74. $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2\rangle$

75. $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2\right\rangle$

76. $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2\right\rangle$

77. **الجولف** يدفع يوسف كرة جولف بسرعة 205 أقدام في الثانية بزاوية 32° مع الأرض. في نفس الحفرة، يدفع سعيد كرة جولف بسرعة 190 قدمًا في الثانية بزاوية 41° مع الأرض. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية لكل قوة.

يوسف: تقريبًا 173.8 ft/s وتقريبًا 108.6 ft/s؛ سعيد: تقريبًا 143.4 ft/s وتقريبًا 124.7 ft/s

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة. **80–78. انظر الهامش.**

78. $\frac{(x-5)^2}{48} - \frac{y^2}{5} = 1$

79. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$

80. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

81. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{\pi}{6}$

82. $\arctan\left(\tan \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

83. $\sin\left(\cos^{-1} \frac{3}{4}\right)$ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

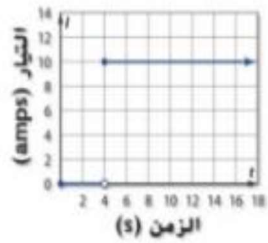
أوجد حل كل من المعادلات التالية.

84. $\log_{12}(x^3 + 2) = \log_{12} 127$ **5**

85. $\log_2 x = \log_2 6 + \log_2 (x - 5)$ **6**

86. $e^{5x-4} = 70$ $\frac{\ln 70 + 4}{5} \approx 1.65$

87. **الكهرباء** تحتوي الدائرة الكهربائية البسيطة على مصدر طاقة ومقاومة فقط. عند إيقاف تشغيل مصدر الطاقة، لا يوجد تيار في الدائرة. عند تشغيل مصدر الطاقة، يصبح التيار قيمة ثابتة على الفور تقريبًا. يمكن تمثيل هذه الحالة بتمثيل بياني كالموضح. I يمثل التيار بالأمبير، و t يمثل الزمن بالثانية.



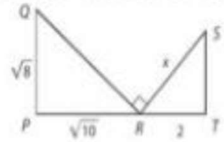
a. عند أي من قيم t تكون الدالة غير متصلة؟ **t = 4**

b. متى تم تشغيل مصدر الطاقة؟ **عند t = 4**

c. إذا غادر من قام بتشغيل مصدر الطاقة وعاد بعد ساعات، فكم سيكون قياس التيار في الدائرة؟ **10 amps**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

88. **SAT/ACT** في الشكل أدناه، $\triangle PQR \sim \triangle TRS$. ما قيمة x؟ **C**



A $\sqrt{2}$ C 3 E 6

B $\sqrt{5}$ D $3\sqrt{2}$

89. **مراجعة** فكر في $C(-9, 2)$ و $D(-4, -3)$. أي مما يلي صورة مركبة ومقدار $\overrightarrow{CD}$؟ **F**

F $\langle 5, -5\rangle, 5\sqrt{2}$ H $\langle 6, -5\rangle, 5\sqrt{2}$

G $\langle 5, -5\rangle, 6\sqrt{2}$ J $\langle 6, -6\rangle, 6\sqrt{2}$

90. يتم سحب زلاجة ثلوج من خلال بذل قوة 25 رطلاً على حبل يصنع زاوية 20° مع المركبة الأفقية، كما هو موضح بالشكل. ما المقدار التقريبي للشغل المبذول لسحب الزلاجة لمسافة 50 قدمًا؟ **C**

A 428 قدم-رطل C 1175 قدم-رطل

B 1093 قدم رطل D 1250 قدم رطل

91. **مراجعة** إذا كانت $\mathbf{t} = \langle -6, 2\rangle$ و $\mathbf{s} = \langle 4, -3\rangle$، فأي مما يلي يمثل $\mathbf{t} - 2\mathbf{s}$؟ **H**

F $\langle 14, 8\rangle$ H $\langle -14, 8\rangle$

G $\langle 14, 6\rangle$ J $\langle -14, -8\rangle$

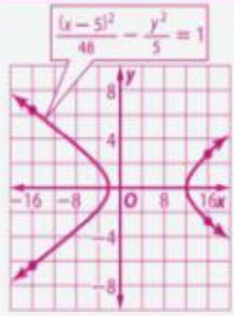
McGraw-Hill Education

4 التقويم

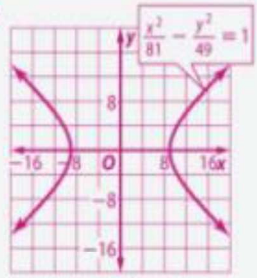
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب كلّف الطلاب بكتابة متجه وتوضيح طريقة حساب طوله باستخدام حاصل الضرب النقطي.

إجابات إضافية

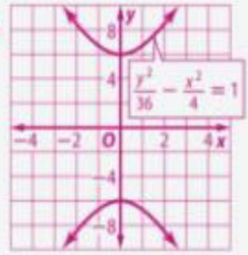
78.



79.



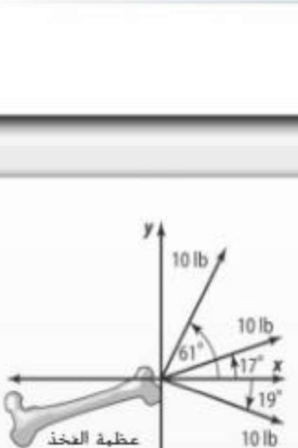
80.



التدريس المتمايز BL

التوسع عندما تنكسر عظمة الفخذ، تُستخدم في بعض الأحيان آلية الجر لتثبيت العظام. في نظام الجر، يتم تطبيق ثلاث قوى على العظام. أوجد مقدار القوة الناتجة R المبذولة على العظام واتجاهها. (*إرشاد:* حلل كل قوة إلى مركبات y و x.)

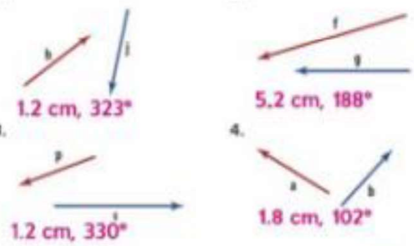
حوالي 25.3 lb بزاوية 19.4° على المركب الأفقي



7 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 1-7 إلى 3-7

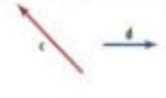
أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (الدرس 1-7)



1. 1.2 cm, 323°
2. 5.2 cm, 188°
3. 1.2 cm, 330°
4. 1.8 cm, 102°

5. **التزلّج** يسحب علي زلّاجة عبر الثلوج بقوة تبلغ 50 نيوتن بزاوية 35° مع المركّبة الأفقية. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7) **تقريبًا 41.0 N، تقريبًا 128.7N**

6. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لما يلي $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$. (الدرس 1-7)



انظر الهامش.

افترض أن $\overrightarrow{BC}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{BC}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (الدرس 2-7)

7. $B(3, -1), C(4, -7)$ **$\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$**
8. $B(10, -6), C(-8, 2)$ **$-18\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$**
9. $B(1, 12), C(-2, -9)$ **$-3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$**
10. $B(4, -10), C(4, -10)$ **0**

11. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي صورة مركبة للمتجه $\overline{AB}$ بنقطة البداية $A(-5, 3)$ ونقطة النهاية $B(2, -1)$؟ (الدرس 2-7) **B**

A $\langle 4, -1\rangle$

B $\langle 7, -4\rangle$

C $\langle 7, 4\rangle$

D $\langle -6, 4\rangle$

12. **كرة السلة** بينما يقترب الوقت من الانتهاء في إحدى المباريات، يركض فارس نحو السلة بسرعة 2.5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة من منتصف الملعب بسرعة 8 أمتار في الثانية بزاوية 36° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 2-7)

a. فارس: (2.5, 0)، الكرة: (6.5, 4.7)

b. تقريبًا 10.2 m/s بزاوية 27.6° مع المركبة الأفقية

a. اكتب صورة مركبة للمتجهات التي تمثل سرعة فارس ومسار الكرة.

b. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتجاهها؟

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتجه لكل نقطة بداية ونهاية. (الدرس 2-7)

13. $A(-4, 2), B(3, 6)$ **$\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$**
14. $Q(1, -5), R(-7, 8)$ **$\langle -8, 13\rangle; \sqrt{233} \approx 15.3$**
15. $X(-3, -5), Y(2, 5)$ **$\langle 5, 10\rangle; 5\sqrt{5} \approx 11.2$**
16. $P(9, -2), S(2, -5)$ **$\langle -7, -3\rangle; \sqrt{58} \approx 7.6$**

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (الدرس 3-7)

17. $\mathbf{u} = \langle 9, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -2\rangle$ **92.6°**
18. $\mathbf{u} = \langle 5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 10\rangle$ **90.0°**
19. $\mathbf{u} = \langle 8, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 4\rangle$ **90.0°**
20. $\mathbf{u} = \langle 2, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 8\rangle$ **114.4°**

21. **الاختيار من متعدد** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, 4\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 8, -5\rangle$، فأوجد $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$. (الدرس 3-7) **F**

F −18

G −2

H 15

J 38

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين. (الدرس 3-7)

22. $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$ **−2، غير متعامدين**
23. $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$ **16؛ غير متعامدين**
24. $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$ **−43، غير متعامدين**
25. $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$ **0، متعامدان**

26. **العربة** يستخدم سمير عربة لحمل الصحف لتوزيعها. ويسحب العربة بقوة تبلغ 25 نيوتن بزاوية 30° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 3-7)

a. ما مقدار الشغل الذي يبذله سمير بالجول عند سحب العربة لمسافة 150 مترًا؟ **تقريبًا 3247.6 J**

b. إذا كان مقبض العربة يميل بزاوية 40° مع الأرض ويسحب سمير العربة لنفس المسافة وبنفس القوة. فهل يبذل شغلًا أكثر أم أقل؟ اشرح إجابتك. **أقل، سيبذل شغلاً مقداره 2872.7 جول تقريبًا.**

أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (الدرس 3-7) **27-30. انظر الهامش.**

27. $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5\rangle$
28. $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$
29. $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 2\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1\rangle$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدروس من 1-7 إلى 3-7

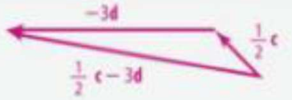
التقويم التكويني

استخدم الاختبار القصير بنصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابات إضافية

6.



27. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29}\right\rangle + \left\langle \frac{205}{29}, -\frac{82}{29}\right\rangle$

28. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right\rangle$

29. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85}\right\rangle + \left\langle \frac{156}{85}, \frac{702}{85}\right\rangle$

30. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37}\right\rangle + \left\langle \frac{23}{37}, \frac{138}{37}\right\rangle$

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

السابق	الحالي	لماذا؟
• مثلت المتجهات هندسيًا وجبريًا في الأبعاد الثنائية.	1 • تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2 التعبير الجبري للمتجهات في الفضاء وعملياتها	• يعرف اتجاه الصاروخ بعد انطلاقه بدلالة اتجاه ثنائي الأبعاد وزاوية ثلاثية الأبعاد بالنسبة للمحور الأفقي، حيث إن المسافة والسرعات والقوى الموجهة لا تتقيد بالمستوى، فلا بد أن يتوسع مفهوم المتجهات من الفضاء ثنائي الأبعاد إلى ثلاثي الأبعاد.

المفردات الجديدة

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system

محور z z-axis

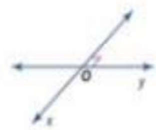
ثمن octant

مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر ordered triple

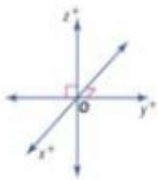
1 الإحداثيات في الأبعاد الثلاثية

يعد المستوى الديكارتي نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتكون من المحورين x و y مما يسمح لك بتحديد وتعيين النقاط في مستوى. ونحتاج إلى **نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد** لتمثيل نقطة في الفضاء.

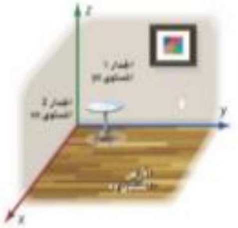
ابدأ بالمستوى xy وضعه بحيث يقدم مظهر عمق (الشكل 7.4.1). ثم أضف محورًا ثالثًا باسم **المحور z** يمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحورين x و y (الشكل 7.4.2). ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلى ثمانية أقسام تدعى **الأثمان**. وللمساعدة في تخيل الثمن الأول، انظر إلى ركن غرفة (الشكل 7.4.3). تمثل الأرض المستوى xy وتمثل الجدران المستويين xz و yz.



الشكل 7.4.1



الشكل 7.4.2



الشكل 7.4.3

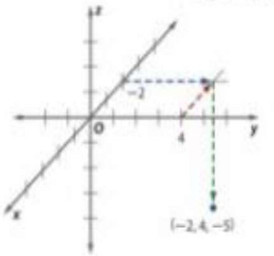
وتمثل النقطة في الفضاء **ثلاثي مرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين هذه النقطة، عليك أولاً تحديد موقع النقطة (x, y) في المستوى xy والتحرك لأعلى أو أسفل موازيًا المحور z وفقًا للمسافة المتجهة التي توضحها z.

مثال 1 تحديد موقع نقطة في الفضاء

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

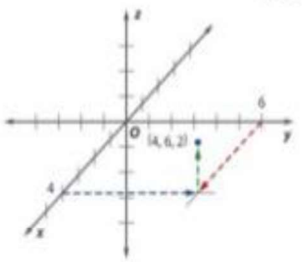
b. (-2, 4, -5)

حدد موقع $(-2, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 5 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



a. (4, 6, 2)

حدد موقع $(4, 6)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد وحدتين أعلى هذا الموقع وموازية للمحور z.



تمرين موجّه 1A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

1A. $(-3, -4, 2)$ 1B. $(3, 2, -3)$ 1C. $(5, -4, -1)$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-4 تمثيل المتجهات هندسيًا وجبريًا بأبعاد ثنائية.

الدرس 7-4 تحديد موقع النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد. التعبير عن المتجهات جبريًا وإجراء العمليات عليها في الفضاء.

بعد الدرس 7-4 إيجاد حواصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كم عدد القطوع التي توجد في المستوى الديكارتي؟ ماذا يسمى كل قطاع؟ أربعة؛ رُبع
- ما العلامات الخاصة بالأزواج المرتبة المحتملة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد؟ $(+, +)$ و $(-, +)$ و $(-, -)$ و $(+, -)$

بعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

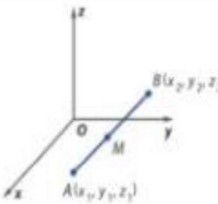
المفهوم الأساسي قوانين المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

يتم الحصول على المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و$B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ويتم الحصول على نقطة المنتصف M للنقطتين $\overline{AB}$ من خلال

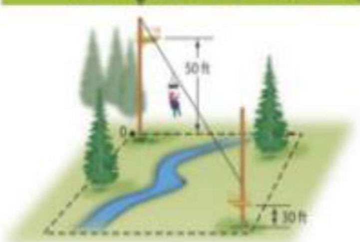
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



ستثبت هذه القوانين في التمرين 46.

مثال 2 من الحياة اليومية المسافة ونقطة المنتصف للنقاط في الفضاء

حبل انزلاق تسمح جولة بجبال سيررا مادري للنزلاء بالاستمتاع بالطبيعة من خلال النزول بحبل انزلاق من منصة إلى أخرى أعلى مشاهد الطبيعة الخلابة المحيطة. ويربط حبل انزلاق بين منصتين تمثلان بالإحداثيات (10, 12, 50) و(70, 92, 30) حيث تكون الإحداثيات بالقدم.



a. أوجد طول حبل الانزلاق اللازم لربط المنصتين.

استخدم قانون المسافة للنقاط في الفضاء.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$ $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$

≈ 101.98 بسّط

لا بد أن يكون طول حبل الانزلاق نحو 102 قدم ليربط بين المنصتين.

b. تم بناء منصة إضافية بحيث تكون في منتصف المسافة بين المنصتين الموجودتين. أوجد إحداثيات المنصة الجديدة.

استخدم قانون نقطة المنتصف للنقاط في الفضاء.

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) = (40, 52, 40)$ $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$

ستكون إحداثيات المنصة الجديدة (40, 52, 40).

تمرين موجّه **2A. نعم، حيث يبلغ البعد بين الطائرتين نحو 2045 ft، أي أقل من نصف ميل.**

2. **الطائرات** تشترط لوائح السلامة على الطائرات أن يكون بينها مسافة نصف ميل على الأقل عندما تكون محلقة في الهواء. تحلق طائرتان أعلى سماء دبي بالإحداثيات (300, 150, 30000) و(450, −250, 28000)، حيث توضح الإحداثيات بالقدم.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟ **(375, −50, 29000)**

الربط بالحياة اليومية

تسمح جولة في مونتي فيردي في كوستا ريكا للزوار برؤية الطبيعة باستخدام نظام دروب وجسور معلقة وحبال انزلاق. وتسمح حبال الانزلاق للضيوف برؤية المناظر الطبيعية المحيطة من ارتفاع يصل إلى 456 قدمًا فوق مستوى الأرض.

المصدر: *Monteverde Info*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- كم عدد القطاعات التي توجد في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد؟ ماذا يسمى كل قطاع؟ **ثمانية؛ ثُمن**
- ما العلامات الخاصة بالثلاثيات المرتبة المحتملة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد؟ **(+, +, +) و(−, −, −) و(−, −, +) و(+, −, −) و(−, +, −) و(+, +, −) و(−, +, +) و(+, −, +)**

1 الإحداثيات بأبعاد ثلاثية

يوضح المثال 1 طريقة تحديد موضع نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. ويوضح **المثال 2** طريقة إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف لقطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد موقع كل نقطة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد. **a–b. انظر الهامش.**

a. (1, 5, 3)
b. (−1, −5, 2)

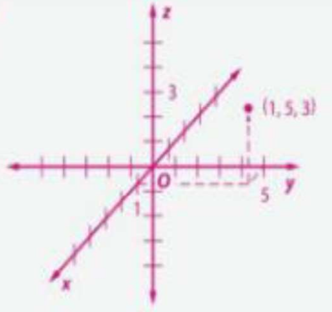
2 **الهندسة المعمارية** صمم مهندس معماري غرفة علوية ذات دعامات خشبية تمتد من أسفل يسار الجانب الأمامي وحتى أعلى يمين الجانب الخلفي. يتم تمثيل إحداثيات طرفي الدعامة كالآتي (10, 40, 30) و(20, 80, 70)، مقيسة بالقدم.

a. أوجد طول الدعامة **57.45 ft**

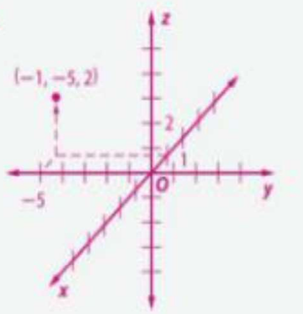
b. سيتم توصيل ضوء بنقطة المنتصف للدعامة، أوجد إحداثيات الضوء. **(50, 60, 15)**

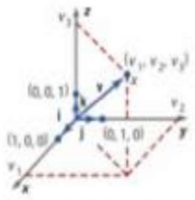
إجابات إضافية (مثال آخر)

1a.



1b.





الشكل 7.4.4

2 المتجهات في الفضاء

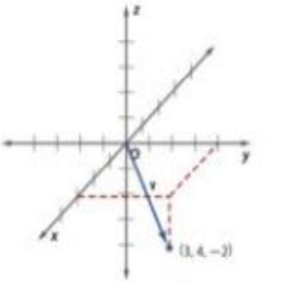
المتجهات في الفضاء في الفضاء، يعبر عن متجه **v** في الوضع القياسي بنقطة نهاية تقع عند (v_1, v_2, v_3) من خلال $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. ويكون المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$. وتكون متجهات الوحدة القياسية هي $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ كما هو موضح في الشكل 7.4.4. ويمكن التعبير عن الصورة المركبة لـ **v** كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تحديد موقع متجه في الفضاء

حدد موقع $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$ ومثله بيانيًا.

عيّن النقطة $(3, 4, -2)$.

ارسم المتجه **v** بنقطة نهاية عند $(3, 4, -2)$.



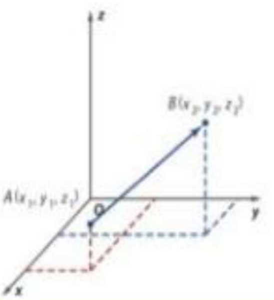
3A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

تمرين موجّه

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

3A. $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$

3B. $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



وكما هو الحال مع المتجهات ثنائية الأبعاد، لإيجاد الصورة المركبة للقطعة المستقيمة الموجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، فسيتعين عليك طرح إحداثيات نقطة بدايتها من نقطة نهايتها.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

أو إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

بذلك فإن متجه الوحدة **u** في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$ لا يزال يساوي $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة المركبة للمتجه

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1)$ و $(x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

$= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1\rangle = \langle 7, 8, -7\rangle$

باستخدام الصورة المركبة، فإن مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$ يساوي

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}$.

باستخدام هذا المقدار والصورة المركبة، أوجد متجه الوحدة **u** في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{BA}$

$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle$ و $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

$= \frac{\langle 7, 8, -7\rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18}\right\rangle$

4A. $\langle 1, 9, 3\rangle; \sqrt{91}; \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle$

4B. $\langle 4, -1, 2\rangle; \sqrt{21}; \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle$

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

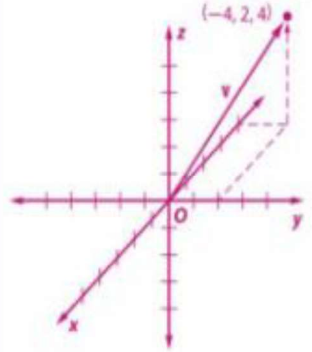
4A. $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ 4B. $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

2 المتجهات في الفضاء

يوضح المثال 3 طريقة تحديد موقع متجه في الفضاء. ويوضح **المثال 4** طريقة التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا. و**المثالان 5 و 6** يوضحان طريقة إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

أمثلة إضافية

3 حدد موقع المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4\rangle$ ومثله بيانيًا.



4 أوجد الصورة المركبة وطول $\overrightarrow{AB}$ والذي تقع نقطة بدايته عند $A(3, -2, -1)$ ونقطة نهايته عند $B(1, 5, -3)$. ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2\rangle, \sqrt{57}; \left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57}\right\rangle$

إرشاد للمعلمين الجدد

ترتيب الإحداثيات في المثال 4، ذكّر الطلاب بأن عكس ترتيب الإحداثيات يغير المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهو له الطول نفسه ولكن اتجاه معاكس.

التدريس المتمايز BL

التوسع ما الشكل ثلاثي الأبعاد الذي تقع رؤوسه عند النقاط $A(0, 4, 5)$ و $B(0, 5, -1)$ و $C(4, 5, -1)$ و $D(0, 3, 3)$ و $E(0, 4, -3)$ و $F(4, 4, -3)$؟ a منشور مثلث

كما هو حال المتجهات في المستوى، عندما تكون المتجهات في الفضاء في صورة مركبة أو معبر عنها في صورة توفيق خطي لمتجهات الوحدة، يمكنك حينها جمعها أو طرحها أو ضربها في كمية غير متجهة.

المفهوم الأساسي عمليات المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ وأي كمية غير متجه k، فإن:

جمع المتجه	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
طرح المتجه	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
ضرب كمية عددية	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

نصيحة دراسية
عمليات المتجهات تكون خصائص عمليات المتجهات في الفضاء نفس الخصائص للعمليات في المستوى.

مثال 5 عمليات المتجهات في الفضاء

أوجد قيمة كل مما يلي لكل من $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$.

a. $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle = \langle 8, -24, 18 \rangle$ ضرب كمية عددية وجمع المتجهات

b. $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ ضرب كمية عددية

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ جمع المتجهات

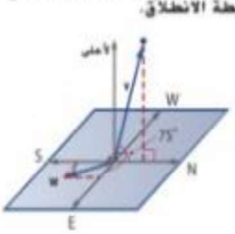
تمرين موجّه

5A. $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56 \rangle$

5B. $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45 \rangle$

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام المتجهات في الفضاء

الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية $75°$ بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 ميل في الساعة. فإذا هبّت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 أميال في الساعة، فأوجد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة لنقطة الانطلاق.



افترض أن النقطة $\mathbf{i}$ في الغرب، والنقطة $\mathbf{j}$ في الشمال والنقطة $\mathbf{k}$ لأعلى. ويوضح المتجه $\mathbf{v}$ الذي يمثل سرعة الصاروخ والمتجه $\mathbf{w}$ الذي يمثل سرعة الرياح. لاحظ اتجاه $\mathbf{w}$ نحو الجنوب الشرقي، حيث إن الرياح تهب من الشمال الغربي.

حيث إن المتجه $\mathbf{v}$ له مقدار 200 وزاوية اتجاه $75°$. يمكننا إيجاد الصورة المركبة من المتجه $\mathbf{v}$، كما هو موضح في الشكل 7.4.5

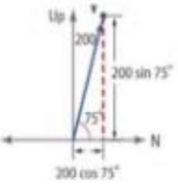
$\mathbf{v} = \langle 0, 200 \cos 75°, 200 \sin 75° \rangle$ أو حوالي $\langle 0, 51.8, 193.2 \rangle$

نظرًا لأن الشرق هو محور x الموجب، تكون زاوية اتجاه $\mathbf{w}$ تساوي $315°$. حيث إن $|\mathbf{w}| = 5$، فإن الصورة المركبة لهذا المتجه هي $\mathbf{w} = \langle 5 \cos 315°, 5 \sin 315°, 0 \rangle$ أو حوالي $\langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$، على النحو الموضح في الشكل 7.4.6

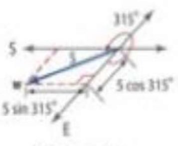
السرعة الناتجة للصاروخ عبارة عن $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle + \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$

$= \langle 3.5, 48.3, 193.2 \rangle = 3.5\mathbf{i} + 48.3\mathbf{j} + 193.2\mathbf{k}$



الشكل 7.4.5



الشكل 7.4.6

تمرين موجّه

6. **الملاحة الجوية** بعد إقلاع طائرة، اتجهت شرقًا واستمرت في الارتفاع بزاوية $18°$ بالنسبة للمحور الأفقي، وكانت سرعتها في الهواء 250 ميلاً في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 أميال في الساعة، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة لنقطة الإقلاع. افترض أن النقطة $\mathbf{i}$ في الغرب، والنقطة $\mathbf{j}$ في الشمال، والنقطة $\mathbf{k}$ لأعلى. $230.7\mathbf{i} - 7.1\mathbf{j} + 77.3\mathbf{k}$

431

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة التفاعلية اعرض شبكة من الإحداثيات x و y و z على السبورة. حدد موضع نقطة على الشبكة وكلّف الطلاب بإيجاد الثلاثي المرتب للنقطة على الرسم البياني. اسحب الرسم البياني للنقطة إلى الأعلى أو إلى الأسفل على طول المحور z، وإلى الأمام والخلف على طول المحور x ويمينًا أو يسارًا على طول المحور y. وبعد كل مرة تحرك فيها النقطة، كلّف الطلاب بإيجاد الثلاثي المرتب لها. ناقش أوجه الشبه والاختلاف بين الثلاثيات المرتبة والأزواج المرتبة.

أمثلة إضافية

5 أوجد كلاً مما يلي عندما تكون $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle$، و $\mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$.

a. $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

b. $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$ $\langle -13, 16, -9 \rangle$

6 **الصواريخ** بعد انطلاق صاروخ نموذجي، اندفع في اتجاه الجنوب بزاوية صعود قياسها $80°$ بالنسبة إلى المركب الأفقي بسرعة 100 متر في الثانية. فإذا هبت الرياح من $S52°W$ بسرعة 5 أمتار في الثانية، أوجد متجهًا يعبر عن سرعة الصاروخ الموجهة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق.
$\langle 3.94, -14.28, 98.48 \rangle$ أو $3.94\mathbf{i} - 14.28\mathbf{j} + 98.48\mathbf{k}$

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني كلّف الطلاب باستخدام أوتاد لصناعة مجموعة محاور ثلاثية الأبعاد. ثم اطلب منهم معايرة كل محور وتلوين الجزء السالب. بينما يمسك أحد الطلاب بالنموذج، كلّف الطالب الآخر بتحديد مواقع النقاط المذكور الثلاثي المرتب الخاص بها.

تمارين

مثّل كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. (مثال 1)

1-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

1. $(1, -2, -4)$
2. $(3, 2, 1)$
3. $(-5, -4, -2)$
4. $(-2, -5, 3)$
5. $(-5, 3, 1)$
6. $(2, -2, 3)$
7. $(4, -10, -2)$
8. $(-16, 12, -13)$

9-14. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين. (مثال 2)

9. $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$
10. $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$
11. $(6, 1, 10), (-9, -10, -4)$
12. $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$
13. $(-3, 2, 8), (9, 6, 0)$
14. $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

15. **العطلات** تستخدم أسرة من أبوظبي جهاز نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) للتخطيط لعطلة في إمارة العين. ووفقًا للجهاز، فإن إحداثيات منزل الأسرة هي $(37.7°, 97.2°, 433\text{ m})$ وإحداثيات إمارة العين هي $(39.4°, 104.8°, 1981\text{ m})$. حدد خطي الطول والعرض والارتفاع لنقطة المنتصف بين أبوظبي والعين. (مثال 2)

خط الطول: 38.55°، خط العرض: 101°، الارتفاع: 1207 m

16. **الطيارون الحربيون** أثناء جلسة تدريب، يُمثل موقع الطائرتين الحربيتين F-18 من خلال الإحداثيات $(675, -121, 19{,}300)$ و$(-289, 715, 16{,}100)$، حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. (مثال 2)

a. حدد المسافة بين الطائرتين. **حوالي 3445 ft**

b. لأي موقع يحتاج أحد الطائرين الطيران بالطائرة F-18 ليقلل المسافة بين الطائرتين إلى النصف؟

17-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

الإجابة النموذجية: (193, 297, 17,700)

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. (مثال 3)

17. $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$
18. $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$
19. $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$
20. $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$
21. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
23. $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
24. $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

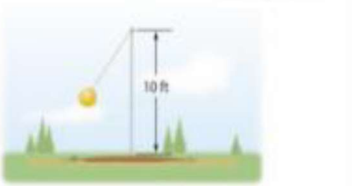
25-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين، ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overline{AB}$ (مثال 4)

25. $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$
26. $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$
27. $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$
28. $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$
29. $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$
30. $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$
31. $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$
32. $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$
33. $A(-5, 12, 17), B(6, -11, 4)$
34. $A(9, 3, 7), B(-5, -7, 2)$

35. **كرة السرعة** في مباراة كرة سرعة، تثبت الكرة في عمود طوله 10 أقدام بطول حبل، ويضرب لاعبان الكرة في اتجاهين متعاكسين في محاولة للف الطول الكامل للحبل حول العمود. ولعب يمسك أحد اللاعبين الكرة بحيث تكون إحداثياتها $(5, 3.6, 4.7)$ وتكون إحداثيات طرف الحبل المربوط بالعمود $(0, 0, 9.8)$، حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. حدد مقدار المتجه الذي يمثل طول الحبل. (مثال 4)

حوالي 8 ft



أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle$ و$\mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle$ و$\mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$. (مثال 5)

36. $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle -65, -18, 56\rangle$**
37. $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ **$\langle -65, -18, 56\rangle$**...

38. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$
39. $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$
40. $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$
41. $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

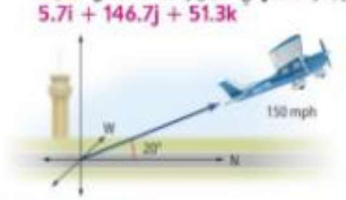
$\langle -88, 6, 99\rangle$ **$\langle 48, 12, -38\rangle$** **$\langle 38, -36, -65\rangle$** **$\langle -68, -24, 55\rangle$** **$\langle 22, 36, 3\rangle$**

أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و$\mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ و$\mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 5)

42. $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ **$-27\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$**
43. $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ **$-63\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + 56\mathbf{k}$**
44. $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ **$-22\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - \mathbf{k}$**
45. $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ **$50\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$**
46. $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ **$-18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$**
47. $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ **$-13\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$**

48. **الطائرات** تقلع طائرة متجهة ناحية الشمال بسرعة في الهواء 150 ميلاً في الساعة بزاوية 20° بالنسبة إلى المحور الأفقي. وتهب الرياح بسرعة 8 أميال في الساعة من اتجاه الجنوب الغربي. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

$5.7\mathbf{i} + 146.7\mathbf{j} + 51.3\mathbf{k}$



$3.1\mathbf{i} - 23.6\mathbf{j} + 13.4\mathbf{k}$

49. **ألعاب القوى** ترمي مايسة رمحًا في اتجاه الجنوب بسرعة 18 ميلاً في الساعة وبزاوية 48° بالنسبة إلى المحور الأفقي. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 12 ميلاً في الساعة بزاوية S15°E، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للرمح. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التركيز على محتوى الرياضيات

خصائص المتجهات في الفضاء تشبه خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء تلك الخاصة بالعمليات في المستوى، حيث يمكن تحديد التساوي والجمع (الطرح) وحاصل الضرب القياسي وطول المتجه بدلالة المركبات **i** و **j** و **k** للمتجه. فإذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ وأي عدد حقيقي n، فإن

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ فقط إذا كان $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ و $a_3 = b_3$.
- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\rangle$
- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3\rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1-50 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد لا يعلم بعض الطلاب طريقة بدء حل التمارين 56-59. ذكّرهم بأن المثلث القائم له زاوية قياسها 90° وضلعان متعامدان على بعضهما البعض، وأن المثلث متساوي الساقين به ضلعان لهما الطول نفسه، وأن متساوي الأضلاع جميع أضلاعه الثلاثة لها الطول نفسه.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-50, 66, 69-87	1-49 فردي, 84-87	2-50 زوجي, 66, 69-83
OL ضمن المستوى	1-59 فردي, 60, 61, 63, 65, 66, 69-87	1-50, 84-87	51-66, 69-83
BL أعلى من المستوى	51-87		

50. **الغواصات** تغوص غواصة منطلقة في اتجاه الغرب بسرعة 25 عقدة بحرية وبزاوية ميلان 55°. ويتحرك التيار بسرعة 4 عقدات بحرية بزاوية S20°W. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للغواصة بالنسبة لنقطة بداية الغوص. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

$-15.7i - 3.8j - 20.5k$

B

إذا كانت N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$، فأوجد P.

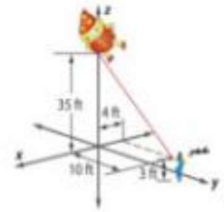
51. $M(3, 4, 5)$; $N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **$(4, -2, -1)$**

52. $M(-1, -4, -9)$; $N(-2, 1, -5)$ **$(-3, 6, -1)$**

53. $M(7, 1, 5)$; $N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **$(3, -2, 7)$**

54. $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right)$; $N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

55. **التطوع** يتطوع عمر للمساعدة في توجيه بالون في استعراض. فإذا كان البالون على ارتفاع 35 قدمًا ويمسك عمر بشريط ربطه على ارتفاع ثلاثة أقدام أعلى مستوى الأرض كما هو موضح. فكم طول شريط الربط لأقرب قدم؟ **34 ft**



حدد إن كان المثلث بالرؤوس المذكورة متساوي الساقين أم مختلف الأضلاع.

56. $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$ **متساوي الساقين**

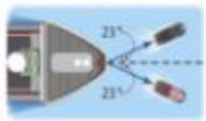
57. $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$ **مختلف الأضلاع**

58. $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$ **مختلف الأضلاع**

59. $A(-2.2, 4.3, 5.6)$, $B(0.7, 9.3, 15.6)$, $C(3.6, 14.3, 5.6)$ **متساوي الساقين**

60. **مراكب قطر السفن** يسحب مركبي قطر سفن ناقلة عملاقة معطلة. ويشكل أحد حبلي القطر زاوية 23° غرب الشمال بينما يشكل الآخر زاوية 23° شرق الشمال. ويبذل كل مركب جر قوة ثابتة مقدارها 2.5×10^6 نيوتن بزاوية انخفاض 15° أسفل النقطة التي ترتبط فيها الحبال بالناقلة العملاقة. وقد جروا الناقلة ميلين باتجاه الشمال.

C



a. اكتب متجه ثلاثي الأبعاد يصف القوة المبذولة من كل مركب قطر سفن. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

b. أوجد المتجه الذي يصف إجمالي القوة المبذولة على الناقلة العملاقة. **$\langle 0, 4.4 \times 10^6, -1.3 \times 10^6 \rangle$**

c. إذا بلغ طول كل حبل قطر 300 قدم، فكم يبعد كل من المركبين عن الآخر تقريبًا؟ **حوالي 226.5 ft**

61. **الأشكال الكروية** استخدم قانون المسافة لنقطتين لإثبات أن الصيغة القياسية لمعادلة شكل كروي مركزه (h, k, ℓ) ونصف قطره r يساوي $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

استخدم القانون من التمرين 61 لكتابة معادلة للشكل الكروي باستخدام المركز ونصف القطر المذكورين.
62-65. انظر الهامش.

62. المركز = $(-4, -2, 3)$، نصف القطر = 4

63. المركز = $(6, 0, -1)$، نصف القطر = $\frac{1}{2}$

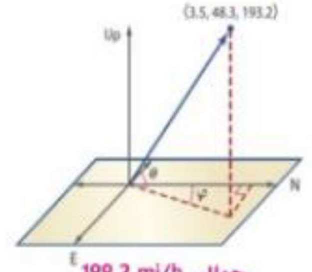
64. المركز = $(5, -3, 4)$، نصف القطر = $\sqrt{3}$

65. المركز = $(0, 7, -1)$، نصف القطر = 12

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **الاستنتاج** أثبت قانون المسافة في الفضاء. (إرشاد: استخدم نظرية فيثاغورس مرتين.)
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

67. **التحدي** راجع المثال 5

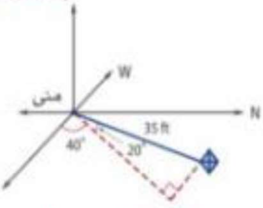


a. احسب السرعة الناتجة للصاروخ. **حوالي 199.2 mi/h**

b. أوجد الاتجاه الربعي لها للصاروخ. **N4.1°E**

c. احسب زاوية الميل θ الناتجة للصاروخ بالنسبة للمحور الأفقي.
حوالي 75.9°

68. **التحدي** تقف منى في حقل مفتوح متجهة بوجهها نحو N50°E وتمسك بطائرة ورقية من خلال حبله طوله 35 قدمًا يطير مكونًا زاوية 20° مع الحقل. أوجد مركبات المتجه من منى إلى الطائرة الورقية. (إرشاد: استخدم النسب المثلثية ومثلثين قائمي الزاوية لإيجاد **x**، **y**، **z**)
(25.20, 21.14, 11.97)



انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

69. **الكتابة في الرياضيات** اذكر موقفًا يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثنائي الأبعاد وموقفًا آخر يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

إجابات إضافية

62. $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

63. $(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4}$

64. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 3$

65. $x^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 144$

مراجعة شاملة

أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

70. $\mathbf{u} = \langle 6, 8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ $\langle 1.6, -0.8 \rangle$; $\mathbf{u} = \langle 1.6, -0.8 \rangle + \langle 4.4, 8.8 \rangle$

71. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$ $\langle -0.19, -0.04 \rangle$; $\mathbf{u} = \langle -0.19, -0.04 \rangle + \langle -0.81, 4.04 \rangle$

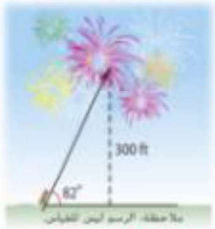
72. $\mathbf{u} = \langle 5, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$ $\langle 2.4, -1.2 \rangle$; $\mathbf{u} = \langle 2.4, -1.2 \rangle + \langle 2.6, 5.2 \rangle$

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

73. $A(6, -4)$, $B(-7, -7)$ $\langle -13, -3 \rangle$, $\sqrt{178} \approx 13.3$

74. $A(-4, -8)$, $B(1, 6)$ $\langle 5, 14 \rangle$, $\sqrt{221} \approx 14.9$

75. $A(-5, -12)$, $B(1, 6)$ $\langle 6, 18 \rangle$, $\sqrt{360} \approx 19.0$



76. **الترفيه** أطلقت الألعاب النارية لليوم الوطني لدولة الإمارات من برج خليفة بزاوية 82° بالنسبة للمحور الأفقي. وقد توقع الفني الذي أطلق قذيفة الألعاب النارية أن تنفجر على بعد حوالي 300 قدم في الهواء بعد 4.8 ثوان من إطلاقها. 140.7 ft/s

a. أوجد السرعة الابتدائية للقذيفة تم إطلاقها من مستوى الأرض.

b. سيتم وضع حواجز سلامة حول منطقة إطلاق الألعاب النارية لحماية المشاهدين. إذا تم وضع الحواجز على بعد 100 ياردة من نقطة التي تقع أسفل انفجار القذائف مباشرة، فكم ستبعد الحواجز عن النقطة التي تم إطلاق الألعاب النارية منها؟ **انظر الهامش.**

77. **الإنشاء** مدفأة حجرية صممت كقوس على شكل نصف قطع ناقص سيكون لها فتحة بارتفاع 3 أقدام في المنتصف وعرض 8 أقدام عند القاعدة. وارسم مخطط للمدفأة. يستخدم المقاول حبلاً مربوطًا بدبوسين.

a. ما الموقعين الذي يجب وضع الدبوسين بهما؟ حوالي 2.6 قدم إلى يسار وإلى يمين مركز القوس

b. ما الطول اللازم للحبل الذي سيستخدم؟ وضّح استنتاجك. **انظر الهامش.**

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ.

78. $\csc \theta + 2 \cot \theta = 0$ $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

79. $\sec^2 \theta - 9 = 0$ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + n\pi, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

80. $2 \csc \theta - 3 = 5 \sin \theta$ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \sin^{-1}\frac{2}{5} + 2n\pi, 2\pi - \sin^{-1}\frac{2}{5} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مثّل كل دالة بيانيًا. 81-83. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

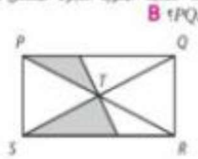
81. $y = \cos^{-1}(x - 2)$

82. $y = 3 +$ قوس جيب الزاوية x

83. $y = \sin^{-1} 3x$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. **SAT/ACT** ما النسبة المئوية للجزء المظلل من مساحة المستطيل $PQRS$؟ **B**



A 22% C 30% E 35%

B 25% D $33\frac{1}{3}$%

85. **مراجعة** تغادر سفينة الميناء مبحرة مسافة 75 ميلاً في اتجاه 35° الشمال الشرقي. عند هذه النقطة، كم تبعد السفينة في اتجاه الشمال من نقطة بدايتها؟ **F**

F 43 ميلاً H 61 ميلاً

G 55 ميلاً J 72 ميلاً

86. أثناء هبوب عاصفة، يمكن التعبير عن القوة التي تبذلها الرياح العاتية على ناطحة سحاب بالمتجه $\langle 132, 3454, -76 \rangle$، حيث تقاس قوة الرياح بالنيوتن. ما المقدار التقريبي لهذه القوة؟ **A**

A 3457 N C 3692 N

B 3568 N D 3717 N

87. **مراجعة** تحلق طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 100 متر في الثانية. وتهب الرياح من اتجاه الجنوب بسرعة 30 مترًا في الثانية. ما المقدار التقريبي لسرعة الطائرة الناتجة؟ **J**

F 4 m/s H 100 m/s

G 95.4 m/s J 104.4 m/s

4 التقويم

تنبؤ كلّف الطلاب بكتابة فقرة تذكر كيف يعتقدون بأن ما تعلموه في هذا الدرس سوف يفيدهم في موضوع الغد المتعلق بإيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين في الفضاء.

إجابات إضافية

76b. ينبغي أن تبعد الحواجز حوالي 394 قدمًا من موقع الانطلاق وفي اتجاه الانطلاق، وحوالي 206 أقدام من موقع الانطلاق وفي اتجاه بعيد عن الانطلاق.

77b. 8 ft؛ الإجابة النموذجية: مع تثبيت الخيط بدبوسين في بؤرة القوس وشدّه بقلم رصاص، سوف يظل مجموع المسافات من كل دبوس وحتى القلم الرصاص ثابتًا. وعندما يكون القلم الرصاص في أحد الجوانب السفلية من القوس، وبالتحديد على بعد 4 أقدام من المنتصف، تكون المسافة من الدبوس الأبعد إلى الجانب السفلي 2.6 + 4 أو حوالي 6.6 أقدام والمسافة من الدبوس الآخر إلى الجانب السفلي سوف تكون 2.6 − 4 أو حوالي 1.4 قدم. إذًا، الطول الإجمالي المطلوب للخيط هو 1.4 + 6.6 أو 8 أقدام.

التدريس المتمايز BL

التوسع يكون الجسم في حالة توازن إذا كان مقدار القوة الناتجة المبذولة عليه تساوي صفرًا. افترض أنه تم تمثيل ثلاث قوى مبذولة على الجسم كالآتي $\langle 3, -1, 4 \rangle$ و $\langle 5, 2, 3 \rangle$ و $\langle -6, 2, -1 \rangle$. كلّف الطلاب بإيجاد متجه رابع يضع الجسم في حالة توازن. $\langle -8, -3, 0 \rangle$

1 التركيز

الهدف استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

نصيحة للتدريس

لتحديد المصفوفة *A*، بإمكان الطلاب الضغط على 2nd [MATRIX] وتحديد EDIT، ثم اختيار [A]. بعد ذلك يمكنهم تغيير أبعاد المصفوفة بإدخال عناصر المصفوفة. كرر الأمر مع المصفوفة B.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الطلاب ذوي القدرات المختلفة إلى مجموعات ثنائية. واطلب منهم حل خطوات النشاط 3-1 والتمرين 1.

اطرح السؤال التالي:

- هل الترتيب مهم في ضرب المصفوفات؟ اشرح. نعم؛ الإجابة النموذجية: لا يتسم ضرب المصفوفات بخاصية التبديل.
- ما بعض أنواع التحويلات؟ تغيير الأبعاد، والانعكاس، والتدوير، والإزاحة

تمرين كلّف الطلا ب إتمام التمارين من 4-2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان الطلا ب يفهمون طريقة تحويل المتجهات باستخدام ضرب المصفوفات في المتجهات أم لا.

7-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويلات المتجه باستخدام المصفوفات

:: الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

في الدرس 7-4، تعلمت أنه يمكن تحويل المتجه في الفضاء بكتابته في الصورة المركبة أو عند التعبير عنه في صورة توفيق خطي. ويمكن تحويل المتجه في الفضاء كذلك عند كتابته في صورة مصفوفة 3×1 أو مصفوفة 1×3.

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]$$

وما أن يكتب في صيغة مصفوفة، يمكن تحويل المتجه باستخدام ضرب المصفوفات-المتجهات.

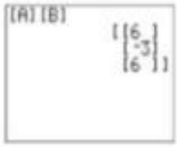
نشاط ضرب المصفوفات-المتجهات

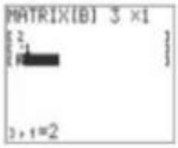
اضرب المتجه $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ثم مثل كلا المتجهين بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب B في صورة مصفوفة.

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 أدخل B و *A* في حاسبة التمثيل البياني وأوجد AB. حوّل إلى صيغة المتجه.

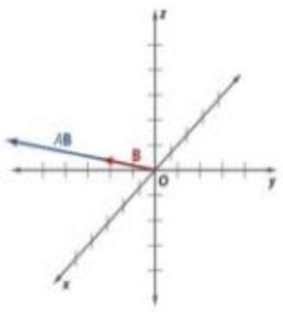




$$AB = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

الخطوة 3 مثّل B و AB بيانيًا على المستوى الإحداثي.

AB هي تمدد لـ B بعامل 3.



تمارين 4-1. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

اضرب كل متجه في مصفوفة التحويل. مثّل كلا المتجهين بيانيًا.

1. $\mathbf{h} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
$B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$
$\mathbf{i} + 0.25\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

2. $\mathbf{e} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$
$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$

3. $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$3\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

4. **الاستنتاج** اضرب $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ثم مثّل كلا المتجهين بيانيًا. وضّح نوع التحويل الذي تم.

4. $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; *B*v هو تدوير v حول المحور *y*.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

---

من العملي إلى النظري

كلّف الطلاب بوصف التحويل الذي يحدث عند ضرب المتجه **B** في مصفوفة التحويل

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

تغير في الأبعاد عن طريق أحد العوامل *k*

الدرس 5-7 نواتج الضرب النقطي والتقاطعي للمتجهات في الفضاء

·:· السابق	·:· الحالي	·:· لماذا؟
• وجدت قيمة ناتج الضرب النقطي لمتجهين في المستوى	1 • إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين المتجهات في الفضاء. 2 إيجاد قيمة ناتج الضرب التقاطعي للمتجهات في الفضاء واستخدام ناتج الضرب التقاطعي في إيجاد المساحة والحجم	• يتأثر ميل باب مزود بمفصلة للدوران بالمسافة بين موقع الدفع والمفصلة، ومقدار الدفع، واتجاه الدفع. وتقيس الكمية التي يطلق عليها العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره.

المفردات الجديدة

ناتج الضرب التقاطعي cross product

العزم torque

متوازي السطوح parallelepiped

ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات triple scalar product

1 نواتج الضرب النقطي في الفضاء

حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء يشبه حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في مستوى. وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، تكون المتجهات غير الصفرية في الفضاء متعامدة فقط إن كان ناتج ضربهم النقطي يساوي صفرًا.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ تعرف على أنها $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. يكون المتجهان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة في الفضاء

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

a. $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$

$= -35 + 51 + (-15) = 1$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن u و v ليسا متعامدين.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$

$= 12 + (-21) + 9 = 0$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن u و v متعامدان.

تمرين موجّه 4؛ غير متعامدين

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$ 0؛ متعامدان **1B.** $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$

كما هو الحال مع المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية a و b، فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

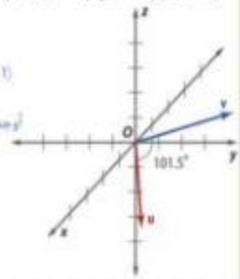
أوجد الزاوية θ المحصورة بين u و v مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$.

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1\rangle \cdot \langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$ أوجد قيمة ناتج الضرب النقطي، والمقدار.

$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}}$ حوالي $= 101.5°$ بسّط وأوجد حل θ.



يساوي قياس الزاوية بين u و v حوالي 101.5°.

تمرين موجّه 124.6°

2. أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-7 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء.

الدرس 5-7 إيجاد حواصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما.
إيجاد حواصل الضرب التقاطعي لمتجهين في الفضاء، واستخدام حواصل نواتج الضرب التقاطعي لإيجاد المساحات والحجوم.

بعد الدرس 5-7 تحليل مجالات المتجه.

2 التدريس

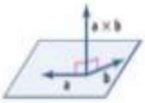
الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

استخدم بابًا للتوضيح حسب الضرورة، مع طرح الأسئلة التالية.

اطرح السؤال التالي:

- ما القوى التي قد تجعل من فتح الباب أمرًا صعبًا؟ الإجابات النموذجية: وزن الباب، الاحتكاك عند المفصلات



2 نواتج الضرب التقاطعي

نواتج الضرب التقاطعي من نواتج الضرب الأخرى الهامة المرتبطة بالمتجهات في الفضاء، هو ناتج الضرب التقاطعي. وبخلاف ناتج الضرب النقطي، فإن **ناتج الضرب التقاطعي** لمتجهين **a** و **b** في الفضاء، والمشار إليه في الصورة **a × b** ويقرأ a تقاطع b، هو متجه وليس كمية عددية. ويكون المتجه **a × b** متعامدًا على المستوى الذي يحتوي على المتجهين **a** و **b**.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب التقاطعي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ فإن ناتج الضرب التقاطعي لـ **a** و **b** هو المتجه

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

مراجعة المفردات

محدد 2 × 2 محدد المصفوفة 2 × 2

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

إذا طبقنا قانون حساب محدد مصفوفة 3 × 3 على صيغة المحدد التالية والتي تتضمن **i**، **j**، **k** ومركبات **a** و **b**، فسنتوصل إلى نفس قانون **a × b**.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ضع متجهات الوحدة i و j و k في الصف 1.

ضع مركبات a في الصف 2.

ضع مركبات b في الصف 3.

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

طبق القانون لمحدد 3 × 3.

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

احسب كل محدد 2 × 2.

مثال 3 إيجاد ناتج الضرب التقاطعي لمتجهين

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

انتبه!

ناتج الضرب التقاطعي ينطبق تعريف ناتج الضرب التقاطعي فقط على المتجهات في فضاء ثلاثي الأبعاد. ولا يعرّف ناتج الضرب التقاطعي المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

محدد مصفوفة 3 × 3

محددا المصفوفتين 2 × 2

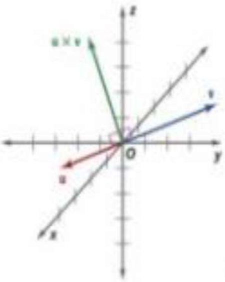
$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$

بسّط.

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$

الصورة المركبة



في التمثيل البياني **u** و **v** و **u × v**، **u × v** متعامد على **u** و **u × v** متعامد على **v**.

لإثبات أن **u × v** متعامد على كل من **u** و **v**، أوجد ناتج الضرب النقطي لـ **u × v** مع **u** و **u × v** مع **v**.

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$
$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

حيث إن كل من ناتجي الضرب النقطي مساويين للصفر، إذًا المتجهات متعامدة.

تمرين موجّه **3A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للبراهين.**

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

3A. $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$ **3B.** $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3A. $\langle 9, -21, -6\rangle$
3B. $\langle -1, -7, 3\rangle$

437

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- ما أفضل علاقة تنشأ بين اتجاه القوة والباب؟ تعامدية
- عندما تحرك يدك لمسافة أقرب إلى المفصلات، ماذا يحدث إلى القوة اللازمة لتحريك الباب؟ الإجابة النموذجية: تزداد القوة اللازمة عندما تقوم بالدفع بالقرب من المفصلات.

1 حواصل الضرب النقطي في الفضاء

يوضح المثال 1 طريقة إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء لتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا. **ويوضح المثال 2** طريقة إيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين في الفضاء.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من **u** و **v**. ثم حدد ما إذا كان **u** و**v** متعامدين أم لا.

a. $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3\rangle$,
$\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3\rangle$
0؛ متعامدان

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6\rangle$,
$\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4\rangle$
−22؛ غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ المحصورة بين **u** و **v** إذا كان $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4\rangle$ مقربًا الدرجة لأقرب جزء من عشرة. 6.168°

2 حواصل الضرب التقاطعي

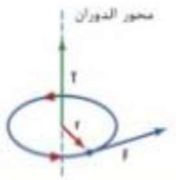
يوضح المثال 3 طريقة إيجاد حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين في الفضاء. **ويوضح المثال 4** طريقة استخدام حاصل الضرب التقاطعي لحساب العزم. **أما المثال 5** فيبين طريقة إيجاد مساحة متوازي الأضلاع في الفضاء. ويبين **المثال 6** طريقة إيجاد حجم متوازي السطوح.

مثال إضافي

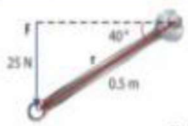
3 أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$. ثم اثبت أن **u × v** متعامد على كل من **u** و **v**. $\langle -10, -10, -25\rangle$؛

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle 6, -1, -2\rangle$
$= -60 + 10 + 50 = 0$
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle -1, -4, 2\rangle$
$= 10 + 40 - 50 = 0$

يمكنك استخدام ناتج الضرب التقاطعي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة والقوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي يساوي متجه العزم $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ويقاس بالنيوتن متر $(N \cdot m)$.



مثال 4 من الحياة اليومية العزم باستخدام ناتج الضرب التقاطعي

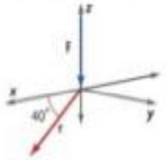


إصلاح السيارات **يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 سنتيمترًا أو 0.5 متر. أوجد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 نيوتن لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون °40 أسفل محور x الموجب كما هو موضح.**

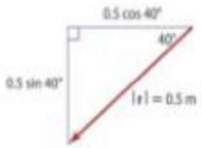
الخطوة 1 مثّل كل متجه في الموقع القياسي بيانيًا (الشكل 7.5.1).

الخطوة 2 حدد الصورة المركبة لكل متجه.

يمكن إيجاد الصورة المركبة المتجه التي تمثل المسافة المتجهة من محور الدوران إلى نهاية ذراع التوجيه مباشرة باستخدام المثلث في الشكل 7.5.2 وحساب المثلثات. يكون المتجه **r** بالتالي $(0.5 \cos 40°, 0, -0.5 \sin 40°)$ أو حوالي $(0.38, 0, -0.32)$. ويساوي المتجه الذي يمثل القوة المبذولة على نهاية ذراع التوجيه 25 نيوتن مباشرة لأسفل. إذًا $\mathbf{F} = (0, 0, -25)$.



الشكل 7.5.1



الشكل 7.5.2

الخطوة 3 استخدم ناتج الضرب التقاطعي لهذه المتجهات لإيجاد المتجه الذي يمثل العزم على صامولة العروة.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$ قانون ناتج الضرب التقاطعي للعزم

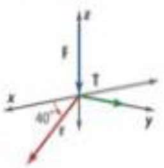
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.38 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$ ناتج الضرب التقاطعي لـ r و F

$$= \begin{vmatrix} 0 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0.38 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ محدد مصفوفة 3 × 3

$$= 0\mathbf{i} - (-9.5)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$ محددا مصفوفتين 2 × 2

$$= (0, 9.5, 0)$$ الصورة المركبة

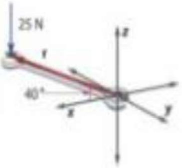
الخطوة 4 أوجد مقدار متجه العزم واتجاهه. الصورة المركبة لمتجه العزم $(0, 9.5, 0)$ تخبرنا بأن مقدار المتجه يساوي حوالي 9.5 نيوتن-متر ويوازي محور y الموجب كما هو موضح.



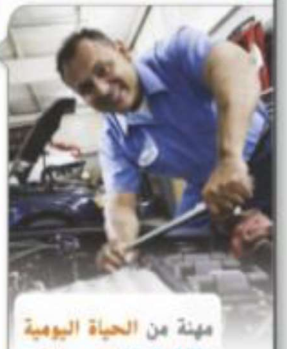
تمرين موجّه

4. **إصلاح السيارات** أوجد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرة عندما يكون ذراع التوجيه زاوية °40 أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.

$9.5\ N \cdot m$ ويوازي محور y الموجب



الشكل 7.5.3



مهنة من الحياة اليومية

ميكانيكي السيارات يقوم ميكانيكي السيارات بأعمال الإصلاح التي تتنوع بين المشاكل الميكانيكية البسيطة وحتى عمليات الإصلاح عالية المستوى المتعلقة بالتكنولوجيا. ولا بد أن يتمتع بمهارات جيدة لحل المشكلات والموهبة الميكانيكية والمعرفة بالإلكترونيات والرياضيات. ويكمل الكثير من الميكانيكيين برنامج تدريب مهني في تكنولوجيا خدمات السيارات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إرشاد للمعلمين الجدد

صيغة المحدد يشار إلى المحدد في المثال 3 بأنه في *صيغة المحدد* لأنه ليس محددًا فعليًا. وحسب التعريف، يجب أن تتكون عناصر مصفوفة المحدد المتوافقة من كميات قياسية فقط. لاحظ أن **i** و **j** و **k** متجهات، ولذلك ينبغي اعتبار صيغة المحدد هذه بأنها تغير في استخدام ترميز المحدد بهدف حساب حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء.

مثال إضافي

4 **آلات** يستخدم ميكانيكي مفتاح ربط طوله 0.4 متر لإحكام ربط صمولة. أوجد مقدار العزم واتجاهه حول الصمولة إذا كانت القوة 30 نيوتن مبذولة لأسفل على طرف المقبض عندما يكون فوق محور x الموجب بدرجة °35.
$9.9\ N \cdot m$ موازٍ لمحور y الموجب

إرشاد للمعلمين الجدد

نواتج الضرب النقطي والتقاطعي لاحظ أنه في حين يتسم ناتج الضرب النقطي بخاصية التبديل، فإن ناتج الضرب التقاطعي لا يتسم بها.

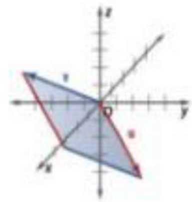
التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب قدّم للطلاب عددًا من الأمثلة على مصفوفات 2 × 2 مثل

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

اسأل الطلاب إذا ما كانت قيمة محدد كل مصفوفة موجبة أم سالبة. كلّف الطلاب بالإجابة مستخدمين A للقيمة *السالبة* و B للقيمة *الموجبة*.

يُستخدم ناتج الضرب التقاطعي لمتجهين في تطبيقات هندسية كثيرة. وأحد هذه التطبيقات أن مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعان المتجاوران $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ (الشكل 7.5.4).



الشكل 7.5.4

مثال 5 مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ محدد مصفوفة 3×3

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ محددا المصفوفتين 2×2

الخطوة 2 أوجد مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ مقدار متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.9$$ تقريبًا. بسّط.

تساوي مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 7.5.4 حوالي 16.9 وحدة مربعة.

تمرين موجّه $\sqrt{545} \approx 23.3$ وحدة^2

5. أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

تحدد ثلاثة متجهات تقع في مستويات مختلفة ولكن تتشارك في نفس نقطة البداية الأضلاع المتجاورة **لمتوازي سطوح**، متعدد الوجوه يوجوه جميعها متوازيات سطوح (الشكل 7.5.5).
وتمثل القيمة المطلقة **لناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات** لهذه المتجهات حجم متوازي سطوح.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$، $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$، $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$، فيتم الحصول على ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات من خلال

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

نصيحة دراسية

ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات لاحظ أنه لإيجاد ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات $\mathbf{t}$ و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ستحتاج إلى كتابة المحدد الذي يمثل $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ واستبدال الصف الأعلى بالقيم للمتجه $\mathbf{t}$.

مثال 6 حجم متوازي السطوح

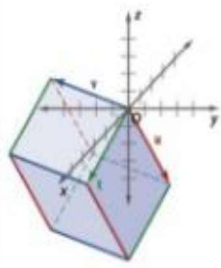
أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$، $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$، $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ محدد مصفوفة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسّط.

يساوي حجم متوازي السطوح الموضح في الشكل 7.5.5 $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ أو 34 وحدة مكعبة.



الشكل 7.5.5

تمرين موجّه

6. أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. 86 وحدة^3

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

أمثلة إضافية

5 أوجد مساحة متوازي أضلاع له الضلعان المتجاوران $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$\sqrt{1217} \approx 34.9$ وحدة^2

6 أوجد حجم متوازي السطوح بالحواف المتجاورة $\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

49 وحدة^3

التركيز على محتوى الرياضيات

متوازي السطوح متوازي السطوح هو مجسم متعدد الجوانب يوجد في فضاء ثلاثي الأبعاد وله ستة أوجه جميعها متوازيات أضلاع. ولا تقع المتجهات الثلاثة التي تشكل ثلاثًا من الحواف الاثني عشر للمجسم متعدد الجوانب في المستوى نفسه. يساوي حجم متوازي السطوح (حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع) حاصل الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات الثلاثة. هناك حالات خاصة من متوازيات السطوح وهي متوازي المستطيلات (جميع الأوجه مستطيلة الشكل)، والمكعب (جميع الأوجه مربعة الشكل)، والمنشور معيّن الأوجه (جميع الأوجه على معيّنة الشكل).

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتجهات ثنائية وثلاثية الأبعاد.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تفيد الكلمات الدالة على الموضع
  - مثل الشمال والجنوب وأعلى وأسفل
  - عند تمثيل المتجهات بالنماذج؟

الإجابة النموذجية: توضح الكلمات الدالة على الموضع اتجاه المتجه، وهو أمر ضروري عند استخدام المتجهات في وصف الكميات. بالنسبة للمتجهات ثلاثية الأبعاد، تقدم الكلمات الدالة على الموضع أيضًا إطارًا مرجعيًا يمكنك من معرفة أي الكميات ينبغي استخدامها عند إجراء العملية الحسابية.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي كلّف الطلاب بإيجاد حاصل الضرب التقاطعي لـ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ بإكمال المربعات في المعادلة أدناه. كرر ذلك مع متجهات أخرى. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} \boxed{-} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -5 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\mathbf{i} - \boxed{-22}\mathbf{j} + \boxed{5}\mathbf{k}$$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 35–1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 35-30، قد يدوّن الطلاب حجم متوازي السطوح بقيمة سالبة. ذكّر الطلاب أن الحجم قياس لا بد وأن يكون ذا قيمة موجبة، إذًا الحجم قيمة مطلقة لحاصل ضرب ثلاثة متجهات.

الإجابات النموذجية قد يوجد أكثر من إجابة واحدة ممكنة للتمارين 42-36.

إجابات إضافية

27. $\sqrt{6821} \approx 82.6$ وحدة^2

28. $3\sqrt{74} \approx 25.8$ وحدة^2

29. $\sqrt{2158} \approx 46.5$ وحدة^2

52. الإجابة النموذجية: باستخدام المتجهات في الصورة المركبة لتمثيل مسار كل طائرة، يمكن تحديد أن الزاوية المحصورة بين المتجهين قياسها $7.52°$. ولذلك فإن مساري الطائرتين غير متوازيين.

61. دائمًا؛ الإجابة النموذجية: ينتج عن حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين ثلاثي الأبعاد متجه عمودي على كلا المتجهين الأصليين.

62. الإجابة النموذجية: هناك عدد لا نهائي من المتجهات المتعامدة على زوج من المتجهات المتوازية. فإذا توازى متجهان، فإنهما متحدان في المستوى. وبحسب نظرية القاطع المتعامد، إذا تعامد متجه على واحد من متجهين متوازيين، فإنه متعامد على الآخر أيضًا. وحيث إن المتجه يمكن أن يكون له عدد لا نهائي من المتجهات المتعامدة، فإن هناك عددًا لا نهائيًا من المتجهات المتعامدة على المتجهين المتوازيين.

تمارين

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ 0؛ متعامدان
2. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ 14؛ غير متعامدين
3. $\mathbf{u} = \langle 2, -8, -7\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 9, -7\rangle$ ‎-13، غير متعامدين
4. $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ 0؛ متعامدان
5. $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ ‎-15، غير متعامدين
6. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ‎-8، غير متعامدين
7. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 0؛ متعامدان
8. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 0؛ متعامدان
9. **الكيمياء** يحتوي أحد جزيئات المياه، التي تكون فيها ذرة الأكسجين عند نقطة الأصل، على ذرة هيدروجين عند $(55.5, 55.5, -55.5)$ بينما تقع ذرة الهيدروجين الثانية عند $(-55.5, -55.5, -55.5)$. حدد زاوية الربط بين المتجهات المتكونة من روابط الأكسجين والهيدروجين. (مثال 2) حوالي $109.5°$

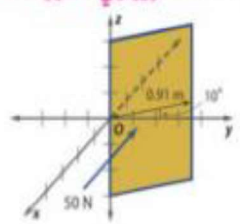
أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 2) حوالي $109.5°$

10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 4, -7\rangle$ $124.6°$
11. $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ $88.9°$
12. $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ $37.5°$
13. $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ $152.3°$
14. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ $16.6°$
15. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

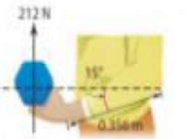
21-16. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للبراهين.

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v، ثم برهن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ متعامد على كل من u و v. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ $\langle 21, 70, 08\rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ $\langle 38, 26, 21\rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ $\langle -56, -35, -42\rangle$
19. $\mathbf{u} = \langle 5, -8, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -2, 7\rangle$ $\langle -56, -35, -42\rangle$
20. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ $\langle 7, 23, 12\rangle$
21. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ $\langle 29, 12, 13\rangle$
22. **المطاعم** يبذل أحد عمال المطعم قوة قدرها 50 نيوتن لفتح باب. أوجد مقدار العزم المبذول على مفصلة الباب واتجاهه. (مثال 4)
حوالي $45\ N \cdot m$ ويوازي محور z السالب



23. **رفع الأثقال** تبذل إحدى لاعبات رفع الأثقال تقوم بتمارين لعضلة الذراع الأمامية ذات الرأسين قوة قدرها 212 نيوتن لرفع ثقل رياضي. ويبلغ طول ساعد لاعبة رفع الأثقال 0.356 متر وقد بدأ تمرين الذراع وكوعها منحنٍ بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي في اتجاه محور x الموجب. (مثال 4)



$\langle 0, -72.08, 0\rangle$

a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على كوع لاعبة رفع الأثقال في الصورة المركبة.

b. أوجد مقدار العزم واتجاهه.

حوالي $72.08\ N \cdot m$ ويوازي محور y السالب

أوجد مساحة متوازي السطوح الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين u و v. (مثال 5) 29-27. انظر الهامش.

24. $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 6, -1\rangle$ $\sqrt{1389} \approx 37.3$ وحدة^2
25. $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$ $13\sqrt{19} \approx 56.7$ وحدة^2
26. $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$ $\sqrt{186} \approx 13.6$ وحدة^2
27. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة t و u و v. (مثال 6)

30. $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ 429 وحدة^3
31. $\mathbf{t} = \langle -6, 4, -8\rangle, \mathbf{u} = \langle -3, -1, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5, -7\rangle$ 206 وحدة^3
32. $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ 85 وحدة^3
33. $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 102 وحدة^3
34. $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ 40 وحدة^3
35. $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 69 وحدة^3

B 39-36. تم توفير إجابات نموذجية.

أوجد متجهًا متعامدًا على كل متجه.

36. $\langle 3, -8, 4\rangle$ $\langle 4, 3, 3\rangle$
37. $\langle -1, -2, 5\rangle$ $\langle 5, 5, 3\rangle$
38. $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$ $\langle 1, 9, 1\rangle$
39. $\langle 7, 0, 8\rangle$ $\langle -8, 0, 7\rangle$

إذا علمت v و u · v، فأوجد u.

40. $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ الإجابة النموذجية: $\langle -6, -2, 3\rangle$
41. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ الإجابة النموذجية: $\langle -1, 0, 4\rangle$
42. $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ الإجابة النموذجية: $\langle 3, 1, -7\rangle$

حدد ما إذا كانت النقاط تقع على مستقيم واحد.

43. $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ لا تقع على مستقيم واحد
44. $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ لا تقع على مستقيم واحد

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-35, 60-62, 64-85	فردي 1-35, 83-85	60-62, 64-82 زوجي 2-34
OL ضمن المستوى	فردي 1-51, 52, 53-57 فردي, 58-62, 64-85	1-35, 83-85	36-62, 64-82
BL أعلى من المستوى	36-85		

حدد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

45. $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$ **متوازيان**

46. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$ **غير متوازيين**

47. $\mathbf{w} = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right\rangle, \mathbf{z} = \langle -4, 2, -3\rangle$ **متوازيان**

اكتب الصورة المركبة لكل متجه.

48. يقع **u** في المستوى yz ومقداره 8، ويكوّن زاوية $60°$ أعلى محور y الموجب. $\langle 0, 4, 4\sqrt{3}\rangle$

49. يقع **v** في المستوى **xy** ومقداره 11، ويكوّن زاوية أعلى $30°$ إلى يسار محور x السالب. $\left\langle -\frac{11\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}, 0\right\rangle$

إذا علمت المتجهات الأربعة، فحدّد ما إذا كان رباعي الأضلاع $ABCD$ متوازي سطوح أم لا. وإذا كانت الإجابة نعم، فحدد ما إذا كان مستطيل الشكل أم لا. **ليس متوازي سطوح**

50. $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

51. $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

متوازي سطوح؛ حوالي 9.4 وحدة^2؛ مستطيل

52. **استعراضات الطائرات** بأحد استعراضات الطائرات، انطلقت طائرتان في نفس الوقت. وقد بدأت الطائرة الأولى من الموقع $(0, -2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, -10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. وبدأت الطائرة الثانية من الموقع $(0, 2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, 10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. فهل مسار كلتا الطائرتين متوازيان؟ اشرح.

لا؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

لكل من $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5\rangle$، أوجد كلاً مما يلي إن أمكن.

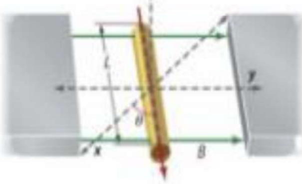
53. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **0**

54. $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ **لا يمكن**

55. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ $\langle 0, 0, 0\rangle$

56. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **لا يمكن**

57. **الكهرباء** عند وضع سلك يحمل تيارًا كهربيًا في مجال مغناطيسي، فإن القوة المبذولة على السلك بوحدات النيوتن موضحة بـ $\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$ حيث I تمثل التيار الذي يسري عبر السلك بوحدات الأمبير، و $\vec{L}$ تمثل طول المتجه على السلك الذي يشير إلى اتجاه التيار بالأمتار، و $\vec{B}$ هو القوة المبذولة على المجال المغناطيسي بوحدات التسلا. وفي الشكل أدناه، تم تدوير السلك بزاوية θ في المستوى xy.

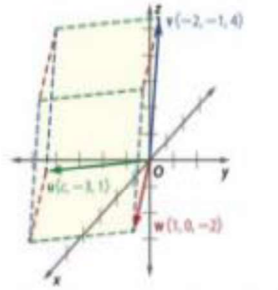


a. إذا كانت قوة المجال المغناطيسي 1.1 تسلا، فأوجد مقدار القوة المبذولة على سلك في المستوى xy يبلغ طوله بالمتر 1.5 ويحمل تيارًا بشدة 25 أمبير ويكون زاوية $60°$. **حوالي 2.1 N**

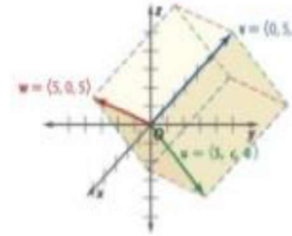
b. إذا كانت القوة المبذولة على السلك $\vec{F} = \langle 0, 0, -0.63\rangle$، فما زاوية السلك؟ **حوالي $98.8°$**

إذا علمت v و w وحجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة u و v و w، فأوجد c.

58. $\mathbf{u} = \langle c, -3, 1\rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 4\rangle$ ، $V = 7$ ووحدات مربعة **3**

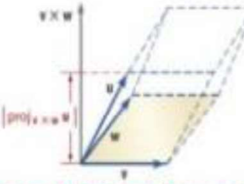


59. $\mathbf{u} = \langle 5, c, 0\rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle 5, 0, 5\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5\rangle$ ، $V = 250$ وحدة مربعة **5**



مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

60. **البرهان** تحقق من صحة قانون حجم متوازي السطوح. (إرشاد: استخدم مسقط **u** على $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.)



انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

61. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا ليست صحيحة على أم الإطلاق. اشرح.
لأي متجهين غير صفريين غير متوازيين في الفضاء، يوجد متجه عمودي على كلاهما. **انظر الهامش.**

62. **التبرير** إذا كان **u** و **v** متوازيين في الفضاء، فكم عدد المتجهات المتعامدة على كليهما؟ اشرح. **انظر الهامش.**

63. **التحدي** بافتراض أن $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5\rangle$، أوجد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ **2**

64. **التبرير** اشرح السبب الذي يجعل ناتج الضرب التقاطعي لا يعرّف المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد. **انظر الهامش.**

65. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طرق تحديد ما إذا كانت المتجهات في الفضاء متوازية أم متعامدة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

64. الإجابة النموذجية: تعريف حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين **a** و **b** هو المتجه العمودي على المستوى الذي يضم كلاً من **a** و **b**. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد، لا بد من وجود اتجاه ثالث.

مراجعة شاملة

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

66. $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ $\sqrt{514} \approx 22.7; \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$

67. $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ $\sqrt{562} \approx 23.7; \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$

68. $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$ $3\sqrt{149} \approx 36.6; \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right)$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

69. $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$ -22، غير متعامدين

70. $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$ -58، غير متعامدين

71. $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$ -33، غير متعامدين

72. **مخبز** يحتوي مخبز عبد العزيز على أرفف يمكنها استيعاب حتى 900 رغيف من الخبز الفرنسي والمافن. ونظرًا للتكاليف، يجب أن يكون عدد أرغفة الخبز الفرنسي المنتجة أقل من أو يساوي 300 زائد ضعفي عدد المافن المنتج. ويشار إلى أن الطلب على أرغفة الخبز الفرنسي يعادل على الأقل ضعفي الطلب على المافن. ويجني عبد العزيز ربحًا قيمته AED 3 لكل قطعة مافن مبيعة و AED 1.25 لكل رغيف خبز فرنسي. كم عدد المنتجات التي ينبغي عليه إنتاجها من كل نوع لتحقيق أقصى أرباح؟ **225 قطعة مافن و 675 رغيف خبز فرنسي**

73. فكك $\frac{2m+16}{m^2-16}$ إلى كسور جزئية. $\frac{3}{m-4} + \frac{-1}{m+4}$

أثبت صحة كل متطابقة. 74-76. انظر الهامش.

74. $\tan^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$

75. $\sec^2 \theta \cot^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$

76. $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$

حل كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

77. $a = 20, c = 24, B = 47°$ $A \approx 55°, C \approx 78°, b \approx 17.9$

78. $A = 25°, B = 78°, a = 13.7$ $C = 77°, b \approx 31.7, c \approx 31.6$

79. $a = 21.5, b = 16.7, c = 10.3$ $A \approx 103°, B \approx 49°, C \approx 28°$

اكتب كل مقياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

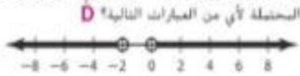
80. $-72.775°$ $-72° 46' 30''$

81. $29° 6' 6''$ $29.102°$

82. $132° 18' 31''$ $132.309°$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. **SAT/ACT** يعبّر هذا التمثيل البياني عن مجموعة كافة الحلول المحتملة لأي من العبارات التالية؟ D



A $|x-1| > 1$

B $|x-1| < 1$

C $|x+1| < 1$

D $|x+1| > 1$

84. ما ناتج الضرب التقاطعي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$؟ F

F $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

G $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

H $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

J $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

85a. الأفقي: $45\sqrt{3}$ ft/s؛ الرأسي: 45 ft/s

85. **إجابة حرة** يضرب لاعب الكرة بزاوية 30° بالنسبة لمستوى الأرض وبسرعة مبدئية قدرها 90 قدمًا في الثانية.

a. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

b. هل القيم الناتجة في الجزء **a** متجهات أو كميات عددية؟ **كميات عددية**

c. افترض أنه لم يتم إمساك الكرة وأن اللاعب قذفها مبتعدة بإرادة عن الأرض. فما المسافة التي ستقطعها بالإجمال في الهواء؟ **حوالي 226.0 ft**

d. افترض أن القاعدة الرئيسة تقع في نقطة الأصل وتقع القاعدة الثانية في اتجاه الشمال. وإذا ضربت الكرة في الاتجاه N20°W ثم سقطت عند النقطة D فأوجد الصورة المركبة لـ $\overline{CD}$.

e. حدد متجه الوحدة لـ $\overline{CD}$. $\langle -0.342, 0.940 \rangle$

f. يقف لاعب الوسط عند (0, 150) عند ضربه الكرة. فلأي اتجاه ربعي يجب أن يجري لاعب الوسط ليلاقي الكرة في النقطة التي ستسقط فيها على الأرض؟ **حوالي N51.1°W**

d. $\langle -77.3, 212.4 \rangle$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات كلّف الطلاب بذكر المصطلحات (قانون المسافة، كمية قياسية، متجه، محدد) التي ترتبط بحاصل الضرب التقاطعي. محدد، متجه

إجابات إضافية

74. $\tan^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$
$= \tan^2 \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$
$= \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

75. $\sec^2 \theta \cot^2 \theta - \cot^2 \theta$
$= \cot^2 \theta (\sec^2 \theta - 1)$
$= \cot^2 \theta \tan^2 \theta = 1$

76. $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$
$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta$
$= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right)$
$= \sin^2 \theta (\sec^2 \theta - 1)$
$= \sin^2 \theta \tan^2 \theta$

التدريس المتمايز BL

التوسع كلّف الطلاب باستخدام ما تعلموه عن إيجاد مساحة متوازي الأضلاع لإثبات أن مساحة مثلث له الضلعان $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ تساوي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو حوالي 12.63 وحدة مربعة.

الإجابة النموذجية: مساحة متوازي أضلاع الذي له الضلعان المتجاوران $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ سوف تبلغ $\sqrt{638}$ وحدة2. والمثلث الذي له ضلعان لهما القياسات نفسها لمتوازي الأضلاع سوف تبلغ مساحته نصف مساحة المتوازي أو $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو حوالي 12.63 وحدة مربعة.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 10-1، فذكِّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

7 دليل الدراسة والمراجعة

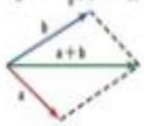
ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

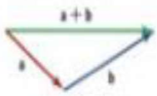
مقدمة عن المتجهات (الدرس 7-1)

- يعتبر اتجاه المتجه هو الزاوية الموجهة المحصورة بين المتجه ومستقيم أفقي. ويعتبر مقدار المتجه طوله.
- عند الجمع بين متجهين أو أكثر يكون المجموع متجه واحد يسمى الناتج. ويمكن إيجاده باستخدام طريقة المثلث أو طريقة متوازي الأضلاع.

طريقة متوازي الأضلاع



طريقة المثلث



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 7-2)

- تعتبر الصورة المركبة لمتجه يحتوي على المركبات المتعامدة x و y هي $\langle x, y\rangle$.
- يتم الحصول على الصورة المركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي. ويحتوي على نقطة البداية $A(x_1, y_1)$ ونقطة النهاية $B(x_2, y_2)$ من خلال $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يتم الحصول على مقدار متجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ من خلال $|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ هما متجهان و k هي كمية عددية. إذا $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استخدام متجهات الوحدة القياسية i و j للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ في الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

نواتج الضرب النقطي (الدرس 7-3)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
- إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية a و b، فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الدرس 7-4)

- يتم الحصول على المسافة بين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ من خلال $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

ناتجا الضرب النقطي والتقاطعي للمتجهات في الفضاء (الدرس 7-5)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ فإن ناتج الضرب التقاطعي لـ a و b هو المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات الأساسية

- صورة مركبة component form
- مركبات components
- ناتج الضرب التقاطعي cross product
- اتجاه direction
- ناتج الضرب النقطي dot product
- متجهات متكافئة equivalent vectors
- نقطة البداية initial point
- توفيق خطي linear combination
- مقدار magnitude
- أثمان octants
- متجهات متعاكسة opposite vectors
- ثلاثي مُرتب ordered triple
- متعامد orthogonal
- متوازي السطوح parallelepiped
- طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
- متجهات موازية parallel vectors
- اتجاه ربعي quadrant bearing
- مركبات متعامدة rectangular components
- ناتج resultant
- الوضع القياسي standard position
- نقطة النهاية terminal point
- نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system
- العزم torque
- طريقة المثلث triangle method
- ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات triple scalar product
- اتجاه حقيقي true bearing
- متجه وحدة unit vector
- متجه vector
- مسقط المتجه vector projection
- الشغل work
- محور z z-axis
- متجه صفري zero vector

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. فإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط بحيث تكون الجملة صحيحة.

1. نقطة النهاية للمتجه هي النقطة التي يبدأ منها المتجه. **خطأ؛ ينتهي**
2. إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$، فيتم حساب ناتج الضرب النقطي من خلال $\underline{-4(1) + 3(2)}$ **خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$**
3. يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تحتوي على $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ **صواب**
4. مقدار r إذا كانت نقطة البداية هي $A(-1, 2)$ ونقطة النهاية هي $B(2, -4)$ يساوي $\langle 3, -6\rangle$. **خطأ؛ الصورة المركبة**
5. يكون المتجهان متساويين فقط إن كانا يتساويان في الاتجاه والمقدار. **صواب**
6. عندما يكون المتجهان متعامدين يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما $\underline{180°}$ **خطأ؛ 90°**
7. يعتبر مركب u على v هو المتجه الذي يكون اتجاهه موازيًا لـ v وطوله مركب u على v **خطأ؛ مسقط**
8. لإيجاد متجه واحد على الأقل عمودي على أي متجهين آخرين في الفضاء، احسب ناتج الضرب التقاطعي للمتجهين الأصليين. **صواب**
9. عند طرح متجه، فالأمر يكافئ جمع متجه معاكس. **صواب**
10. إذا كان v متجه وحدة في نفس اتجاه u، فإن $\underline{\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}}$ **خطأ؛ $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

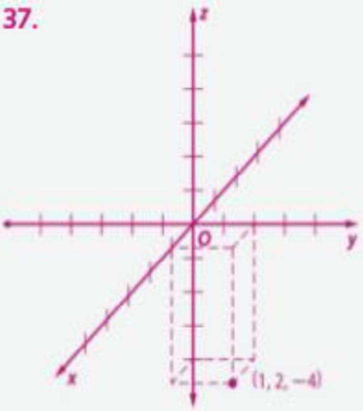
إجابات إضافية

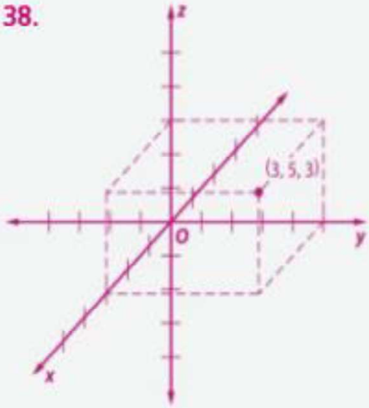
27. $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

28. $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

29. $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

30. $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

37.


38.


7 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

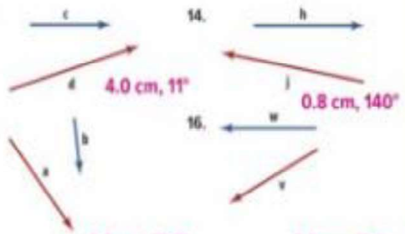
7-1 مقدمة عن المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي كمية متجهة أم كمية عددية.

11. تسير سيارة بسرعة 50 ميلًا في الساعة في اتجاه الشرق **متجه**

12. تهب نسمة هواء بسرعة 5 أمتار في الثانية **كمية عددية**

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.



13. **4.0 cm, 11°**

14. **0.8 cm, 140°**

15. **2.8 cm, 297°**

16. **3.6 cm, 196°**

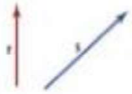
حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه.

17. 70 مترًا باتجاه الغرب ثم 150 مترًا باتجاه الشرق **80 m باتجاه الشرق**

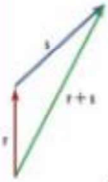
18. 8 نيوتن للأمام مباشرة ثم 12 نيوتن للخلف مباشرة **20 N للخلف**

مثال 1

أوجد ناتج المتجهين r و s باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر والاتجاه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

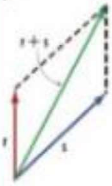


طريقة المثلث



قم بإزاحة r بحيث يلامس طرف r ذيل s. الناتج هو المتجه من ذيل r إلى طرف s.

طريقة متوازي الأضلاع



قم بإزاحة s بحيث يلامس ذيل s طرف r. أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على r و s كضلعين من أضلاعه. الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.

يكون مقدار الناتج 3.4 cm واتجاهه 59°.

19. $\langle 6, 1\rangle; \sqrt{37} \approx 6.1$ **20.** $\langle -16, 8\rangle; 8\sqrt{5} \approx 17.9$

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

19. $A(-1, 3), B(5, 4)$

20. $A(7, -2), B(-9, 6)$

21. $A(-8, -4), B(6, 1)$ **$\langle 14, 5\rangle; \sqrt{221} \approx 14.9$**

22. $A(2, -10), B(3, -5)$ **$\langle 1, 5\rangle; \sqrt{26} \approx 5.1$**

أوجد كل مما يلي لكل من $p = \langle 4, 0\rangle$ و $q = \langle -2, -3\rangle$ و $t = \langle -4, 2\rangle$.

23. $2q - p$ **$\langle -8, -6\rangle$**

24. $p + 2t$ **$\langle -4, 4\rangle$**

25. $t - 3p + q$ **$\langle -18, -1\rangle$**

26. $2p + t - 3q$ **$\langle 10, 11\rangle$**

أوجد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه v. **27-30. انظر الهامش.**

27. $v = \langle -7, 2\rangle$

28. $v = \langle 3, -3\rangle$

29. $v = \langle -5, -8\rangle$

30. $v = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

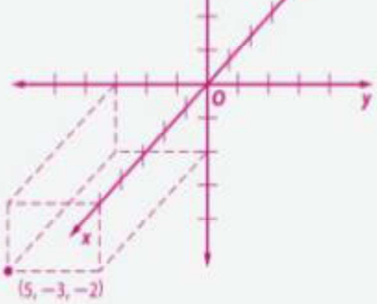
أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overline{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(3, -2)$ ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

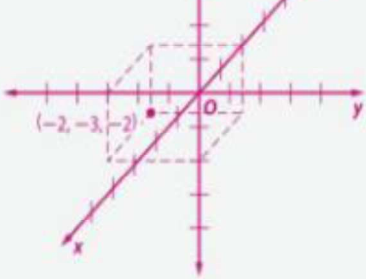
$\overline{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$	الصورة المركبة
$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$	عوّض
$= \langle 1, 1\rangle$	اطرح

أوجد المقدار باستخدام قانون المسافة.

$\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$= \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2}$	عوّض
$= \sqrt{2}$ تقريبًا $= 1.4$	بسّط

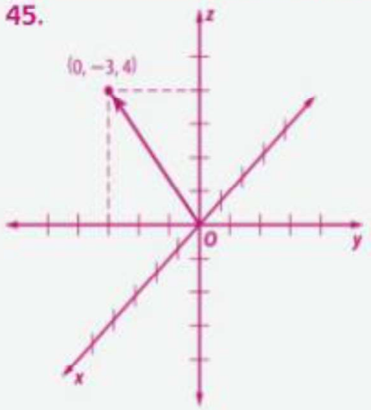
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39.


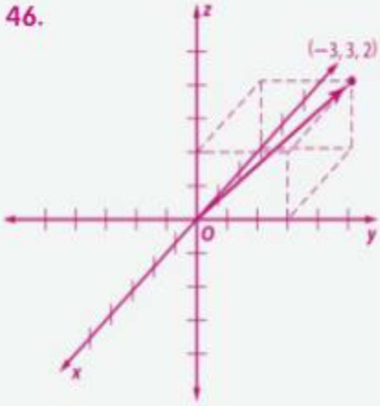
40.


إجابات إضافية

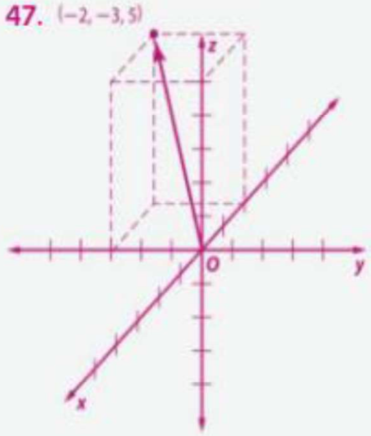
45.



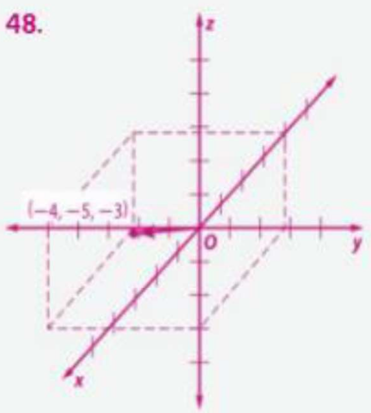
46.



47. (−2, −3, 5)



48.



7-3 نواتج الضرب النقطي ومساقط المتجهات

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

48: غير متعامدين — 1−، غير متعامدين

31. $u = \langle -3, 5\rangle, v = \langle 2, 1\rangle$ 32. $u = \langle 4, 4\rangle, v = \langle 5, 7\rangle$

33. $u = \langle -1, 4\rangle, v = \langle 8, 2\rangle$ 34. $u = \langle -2, 3\rangle, v = \langle 1, 3\rangle$

0: متعامدان — 7: غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

35. $u = \langle 5, -1\rangle, v = \langle -2, 3\rangle$ 135.0°

36. $u = \langle -1, 8\rangle, v = \langle 4, 2\rangle$ 70.6°

مثال 3

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من $x = \langle 2, -5\rangle$ و $y = \langle -4, 7\rangle$. ثم حدّد ما إذا كان x و y متعامدين أم لا.

$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$ ناتج الضرب النقطي

$= 2(-4) + -5(7)$ عوّض.

$= -8 + (-35) = -43$ بسّط.

حيث إن $x \cdot y \neq 0$، فإن x و y غير متعامدين.

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

37-40. انظر الهامش.

37. $(1, 2, -4)$ 38. $(3, 5, 3)$

39. $(5, -3, -2)$ 40. $(-2, -3, -2)$

41. $2\sqrt{38} \approx 12.3; (-1, 5, 6)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

$2\sqrt{29} \approx 10.8; (-7, 2, 1)$

41. $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$ 42. $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

43. $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$ 44. $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

$4\sqrt{19} \approx 17.4; (-3, -4, 2)$ $\sqrt{241} \approx 15.5; (2, -1.5, 4)$

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. 45-48. انظر الهامش.

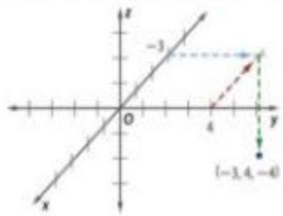
45. $a = \langle 0, -3, 4\rangle$ 46. $b = -3i + 3j + 2k$

47. $c = -2i - 3j + 5k$ 48. $d = \langle -4, -5, -3\rangle$

مثال 4

عيّن $(-3, 4, -4)$ في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

حدد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X ثم عيّن نقطة على بعد 4 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



7-5 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

49. $u = \langle 2, 5, 2\rangle, v = \langle 8, 2, -13\rangle$ 0: متعامدان

50. $u = \langle 5, 0, -6\rangle, v = \langle -6, 1, 3\rangle$ 48−، غير متعامدين

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v، ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v. 51-52. انظر الهامش.

51. $u = \langle 1, -3, -2\rangle, v = \langle 2, 4, -3\rangle$

52. $u = \langle 4, 1, -2\rangle, v = \langle 5, -4, -1\rangle$

مثال 5

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ $u = \langle -4, 2, -3\rangle$ و $v = \langle 7, 11, 2\rangle$. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} k$$

$= \langle 37, -13, -58\rangle$

$(u \times v) \cdot u = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle -4, 2, -3\rangle$

$= -148 - 26 + 174 = 0$ ✔

$(u \times v) \cdot v = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle 7, 11, 2\rangle$

$= 259 - 143 - 116 = 0$ ✔

445

51. $\langle 17, -1, 10\rangle$; $\langle 17, -1, 10\rangle \cdot \langle 1, -3, -2\rangle = 0$ و $\langle 17, -1, 10\rangle \cdot \langle 2, 4, -3\rangle = 0$

52. $\langle -9, -6, -21\rangle$; $\langle -9, -6, -21\rangle \cdot \langle 4, 1, -2\rangle = 0$ و $\langle -9, -6, -21\rangle \cdot \langle 5, -4, -1\rangle = 0$

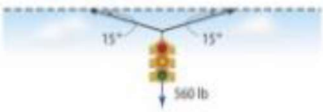
دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

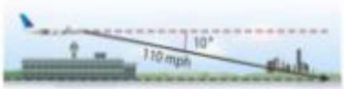
53. **البيسبول** يرمي لاعب بيسبول الكرة بسرعة مبدئية قدرها 55 قدمًا في الثانية وبزاوية °25 أعلى المحور الأفقي، كما هو موضح في الشكل أدناه. أوجد مقدار المركبات الأفقية والرأسية. (الدرس 1-7) **حوالي 49.8 ft/s؛ حوالي 23.2 ft/s**

54. **عربة أطفال** تدفع ليلى عربة أطفال بقوة تبلغ 200 نيوتن بزاوية °20 أسفل المحور الأفقي. أوجد مقدار المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7) **حوالي 187.9 N، حوالي 68.4 N**

55. **الأضواء** تُعلَّق إشارة مرور عند تقاطع من سلكين لهما نفس الطول بزاوية °15 أسفل المحور الأفقي كما هو موضح. فإذا كانت إشارة المرور تزن 560 رطلاً، فما مقدار الشد الذي يبذله السلكان لتظل إشارة المرور متزنة؟ (الدرس 1-7) **حوالي 1081.8 lb**



56. **الطائرات** تهبط طائرة بسرعة 110 أميال في الساعة وبزاوية °10 أسفل المحور الأفقي. أوجد الصورة المركبة للمتجه الذي يمثل سرعة الطائرة. (الدرس 2-7) **⟨108.3, −19.1⟩**



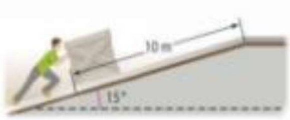
57. **المنقذ** يسبح منقذ في أحد حمامات السباحة بسرعة 4 أميال في الساعة وبزاوية °60 إلى جانب الحمام كما هو موضح. (الدرس 2-7)

a. ما السرعة التي يتحرك بها المنقذ إذا كان التيار في حمام السباحة يساوي ميلين في الساعة ويوازاة جانب الحمام كما هو موضح؟ **حوالي 5.3 mph**

b. ما الزاوية التي يتحرك بها المنقذ بالنسبة لجانب بداية حمام السباحة؟ **حوالي °40.9**

58. **المرور** توقفت سيارة تزن 1500 رطل وسط المرور على تل زاويه انحداره °10. حدد القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل. (الدرس 3-7) **حوالي 260.5 lb**

59. **الشغل** في أحد المخازن، يدفع جاسم صندوقًا موضوعًا على مزلقة بقوة ثابتة قدرها 80 نيوتن لأعلى منحدر بزاوية انحدار °15 بالنسبة للمحور الأفقي. حدد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله جاسم إذا دفع المنصة المتحركة 10 أمتار. (الدرس 3-7) **800 J**



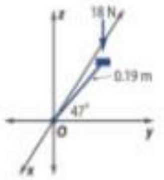
60. **الأقمار الصناعية** يمكن تمثيل موقع قمرين صناعيين يدوران في مدار بالإحداثيات (28,625, 32,461, −38,426) و (−31,613, −29,218, 43,015)، حيث تمثل (0, 0, 0) مركز الأرض وتذكر الإحداثيات بالأميال. ويبلغ نصف قطر الأرض حوالي 3963 ميلاً. (الدرس 4-7)

a. حدد المسافة بين القمرين. **حوالي 118,598 mi**

b. إذا وضع قمر ثالث بين القمرين مباشرة، فكم ستكون إحداثياته؟ **(−1494, 1621.5, 2294.5)**

c. هل يمكن وضع قمر ثالث بالإحداثيات التي تم التوصل إليها في الجزء b؟ وضّح استنتاجك. **انظر الهامش.**

61. **الدراجات** يبذل قائد دراجة قوة قدرها 18 نيوتن لأسفل على الدواسة لتحرك الدراجة. وقد كان موضع الدواسة المبدئي °47 أعلى محور y ومسافة طول 0.19 مترًا بالنسبة لمحور دوران الدواسة. (الدرس 5-7)



a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على محور دوران دواسة الدراجة في الصورة المركبة. **⟨−2.3, 0, 0⟩**

b. أوجد مقدار العزم واتجاهه.
حوالي 2.3 N · m ويوازي محور x السالب

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية

60c. لا؛ الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يوجد القمر الصناعي الثالث لأن إحداثياته تقع داخل كوكب الأرض.

إجابات إضافية

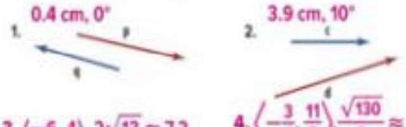
18. $\langle 65, 16, -59\rangle$;
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)11)$
$= 0$

19. $-7\mathbf{i} \cdot 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$;
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) +$
$8(-1) = 0$
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) +$
$8(-2) = 0$

7 تمرين على الاختبار

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

1. 0.4 cm, 0°
2. 3.9 cm, 10°

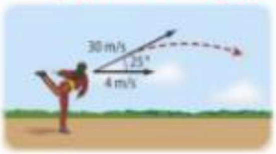


3. $\langle -6, 4\rangle, 2\sqrt{13} \approx 7.2$
4. $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \frac{\sqrt{130}}{2} \approx 5.7$

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

3. $A(1, -3), B(-5, 1)$
4. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

5. **السوفتبول** تضرب لاعبة السوفتبول في الفريق الخصم كرة على الأرض فتتدحرج إلى ليلى بيسار الملعب. تجري ليلى إلى الكرة بسرعة 4 أمتار في الثانية وتلتقطها ثم تتقدم لترميها إلى ملتقطة الكرة بسرعة 30 مترًا في الثانية وبزاوية 25° بالنسبة للمحور الأفقي في محاولة لتسجيل نقاط. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاه الرمية؟
حوالي 33.7 m/s؛ حوالي 22.1°



أوجد متّجه الوحدة الذي له نفس اتّجاه u.

6. $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$
7. $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

8. $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ ‎−16، غير متعامدين
9. $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ ‎0؛ متعامدان
10. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ ‎−14، غير متعامدين

11. **الاختيار من متعدد** اكتب $\mathbf{u}$ في صورة مجموع المتجهين المتعامدين، بحيث يكون أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$. **D**

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

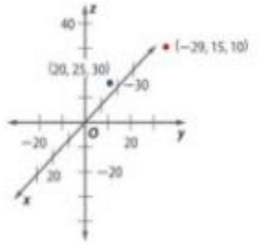
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

12. **الحركة** تدفع لميس صندوقًا على مستوى الأرض بقوة قدرها 120 رطلاً وبزاوية انخفاض 20°. حدد مقدار الشغل المبذول إذا تم تحريك الصندوق 25 قدمًا. حوالي 2819.1 ft-lb

أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$ و $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$.

13. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ $\langle -45, -42, 26\rangle$
14. $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ $\langle -1, -21, 1\rangle$

15. **منطاد الهواء الساخن** أثناء أحد المهرجانات، انطلق اثني عشر منطادًا، وبعدها بدقائق كانت إحداثيات أول منطادين هي $(20, 25, 30)$ و $(-29, 15, 10)$ كما هو موضح، حيث تذكر الإحداثيات بالقدم.



a. حدد المسافة بين أول منطادين انطلقا. حوالي 53.9 ft
b. يقع منطاد ثالث في منتصف المسافة بين أول منطادين. أوجد إحداثيات المنطاد الثالث. $(-4.5, 20, 20)$
c. أوجد متجه الوحدة للمنطاد الأول إذا انطلق من النقطة $(0, 0, 0)$. $\left\langle \frac{4\sqrt{77}}{77}, \frac{5\sqrt{77}}{77}, \frac{6\sqrt{77}}{77}\right\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

16. $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ 27.9°
17. $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 110.8°

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v. ‎18–19. انظر الهامش.

18. $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$
19. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

20. **القوارب** يعتبر ذراع الدفة رافعة تتحكم في موقع دفة توجيه القارب، وعندما تبذل قوة على ذراع الدفة سيدور المركب. افترض أن طول ذراع الدفة لقارب ما 0.75 مترًا ويستقر في المستوى xy بزاوية 15° من محور x الموجب. أوجد مقدار العزم المبذول على محور دوران ذراع الدفة إذا تم بذل قوة قدرها 50 نيوتن في اتجاه مواز لمحور y الموجب. حوالي 36.2 N • m

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

447

1 التركيز

الهدف تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.

نصيحة للتدريس

قد ترغب في إظهار مجال المتجه بعرض الطريقة التي يمكن بها الكشف عن خطوط المجال المغناطيسي وذلك بوضع برادة حديد بالقرب من مغناطيس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

ضع كل طالبين بقدرات مختلفة معًا في مجموعة واحدة. وكلّف الطلاب بحل الخطوات 3-1 من النشاط 1 وكذلك الإجابة عن تمارين تحليل النتائج 3-1. ثم اطلب منهم حل الخطوات 3-1 من النشاط 2 والإجابة عن تمريني تحليل النتائج 4 و 5.

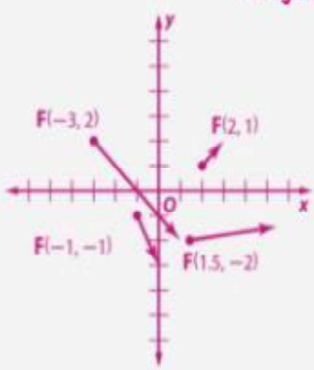
اطرح السؤال التالي:

- ما تعريف الدالة؟ الدالة هي علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

إجابة إضافية

النشاط 1

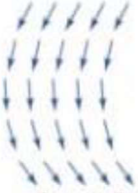
الخطوة 3



الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
مجالات المتجهات

الهدف

- تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.



في الوحدة 7، درست آثار تيارات الرياح والمياه على الأجسام المتحركة. وقد تم تمثيل القوة التي تبذلها الرياح أو التيارات بمتجه واحد.
ولكننا نعلم جميعًا أن التيار الموجود في مسطح مائي أو القوة التي يبذلها لا تكون بالضرورة ثابتة؛ بل تتغير من منطقة لأخرى. وإذا أردنا تمثيل التيار بأكمله أو تدفق الهواء في منطقة، فسنحتاج إلى تعيين متجه لكل نقطة في الفضاء، وبذلك نشكل مجال متجه.

ويشيع استخدام مجالات المتجهات في الهندسة والفيزياء لتمثيل مقاومة الهواء والقوى المغناطيسية والجاذبية وحركة السوائل. وبالرغم من أن هذه التطبيقات لمجالات المتجهات تتطلب عدة أبعاد، إلا أننا سنحلل مجالات المتجهات في بعدين فقط.

ومجال المتجه $F(x, y)$ هو دالة تحول الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد.

$F(x, y) = \langle f_1(x, y), f_2(x, y)\rangle$، حيث إن $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ دالتين عدديتين.

ولتمثيل مجال المتجه، أوجد قيمة $F(x, y)$ عند (x, y) ومثّل المتجه بيانيًا باستخدام (x, y) كنقطة البداية. ويتم ذلك مع عدة نقاط.

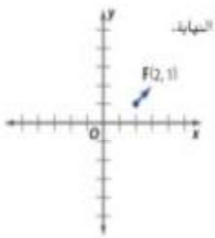
النشاط 1 مجالات المتجهات

أوجد قيمة $F(2, 1)$ و $F(-1, -1)$ و $F(1.5, -2)$ و $F(-3, 2)$ لمجال المتجه $F(x, y) = \langle y^2, x - 1\rangle$. ومثّل كل متجه بيانيًا مستخدمًا (x, y) كنقطة بداية.

الخطوة 1 لإيجاد قيمة $F(2, 1)$، افترض أن $x = 2$ و $y = 1$.

$$\begin{aligned}\langle y^2, x - 1\rangle &= \langle 1^2, 2 - 1\rangle \\ &= \langle 1, 1\rangle\end{aligned}$$

الخطوة 2 للتمثيل البياني، افترض أن $(2, 1)$ تمثل نقطة البداية للمتجه، ويجعل ذلك النقطة $(2 + 1, 1 + 1)$ أو $(3, 2)$ نقطة النهاية.



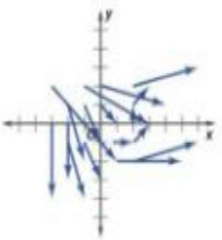
الخطوة 3 كرر الخطوتين 2-1 للدوال $F(-1, -1)$ و $F(1.5, -2)$ و $F(-3, 2)$. انظر الهامش.

تحليل النتائج

1. هل مقدار المتجهات وطولها متماثل أم مختلف؟ **مختلف**
2. خمّن السبب في أنه يمكن تعريف مجال المتجه كدالة.
3. هل يمكن تمثيل كل متجه في مجال المتجه بيانيًا؟ اشرح استنتاجك.

2. الإجابة النموذجية: يوجد متجه واحد بالضبط لكل نقطة (x, y) في مجال متجه.
3. لا؛ الإجابة النموذجية: لكل نقطة (x, y) في مستوى متجه مرتبط بها، ويوجد في المستوى عدد لا نهائي من النقاط.

ينبغي أن يتضمن التمثيل البياني لمجال متجه $F(x, y)$ عددًا من المتجهات التي تكون نقطة بدايتها (x, y). وتستخدم أجهزة التمثيل البياني لتمثيل مجالات المتجهات حيث إن رسمها باليد يعد أمرًا صعبًا.



McGraw-Hill Education

تمرين كلّف الطلاب بإتمام التمرين 6.

3 التقويم

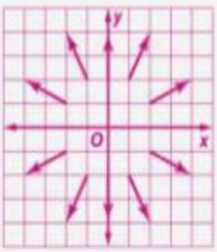
التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم استيعاب الطلاب لطريقة تحويل الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد وطريقة تمثيل هذه المتجهات بيانيًا في مجال المتجه.

من العملي إلى النظري

كلّف الطلاب بوصف تمثيلاتهم البيانية في التمرين 6 مع تقديم مثال على القوة التي يمكن تمثيلها بمجال المتجه هذا. الإجابة النموذجية: تشير المتجهات إلى عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ولها أطوال تساوي المسافة التي تفصل بينها ونقطة الأصل. ويمكن تمثيل رياح الأعاصير بمجال المتجه هذا.

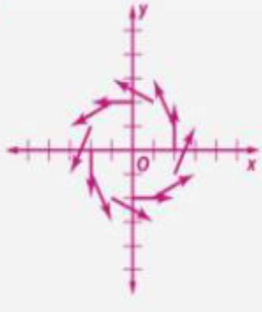
كلّف الطلاب بعد ذلك بإكمال جدول مشابه للجدول الوارد في التمرين 6 لمجال المتجه $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$. اطلب منهم تمثيل مجال المتجه بيانيًا ووصفه.



الإجابة النموذجية: تتجه جميع المتجهات إلى الخارج من نقطة الأصل بأطوال تساوي المسافات التي تفصلها عن نقطة الأصل. ويمكن تمثيل قوة انفجار ما بمجال المتجه هذا.

إجابة إضافية

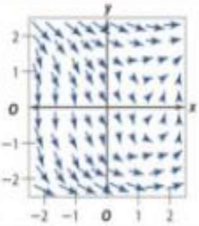
6.



نصيحة دراسية

التمثيل البياني لمجالات المتجهات لكلّ نقطة في المستوى متجه مقابل. وتوضح التمثيلات البيانية لمجالات المتجهات مجموعة مختارة من النقاط.

لمنع تداخل المتجهات مع بعضها البعض وتجنب أن يبدو التمثيل البياني مختلطًا، تقلل أجهزة التمثيل البياني من أطوال المتجهات بشكل تناسبي ولا تضع المتجهات إلا بفترات محددة. فعلى سبيل المثال، إذا واصلنا تمثيل العديد من المتجهات بيانيًا لمجال المتجه الموجود في النشاط 1، ستكون النتيجة هي التمثيل البياني الموجود إلى اليسار.

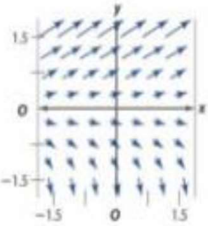


حلل دوال المركبات لمجال متجه لتحديد نوع التمثيل البياني الناتج عنها.

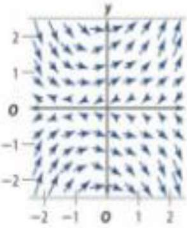
النشاط 2 مجالات المتجهات

صل بين كل مجال متجه وتمثيله البياني.

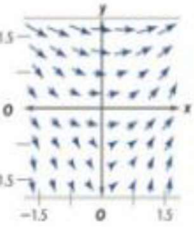
$\mathbf{F}(x, y) = \langle 2, 1 + 2xy \rangle$ $\quad$ $\mathbf{G}(x, y) = \langle e^y, x \rangle$ $\quad$ $\mathbf{H}(x, y) = \langle e^x, y \rangle$



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

الخطوة 1 ابدأ بتحليل المركبات التي تكوّن $\mathbf{F}(x, y)$. سينتج عن المركب الثاني $(1 + 2xy)$ نتيجة موجبة عندما يكون لكل من x و y نفس العلامة. يكون المركب الرأسي للمتجهات في الربع الأول والثالث موجبًا، مما يجعل المتجهات في هذين الربعين متجهين لأعلى.

الخطوة 2 التمثيل البياني الذي يحتوي على متجهات متجهة لأعلى في الربعين الأول والثالث هو الشكل 2.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1-2 مع بقية مجالات المتجهات. **انظر الهامش.**

تحليل النتائج

4. افترض أن المتجهات في مجال المتجه تمثل قوة. ما العلاقة بين القوة ومقدار المتجه وطوله؟

5. بتمثيل الرياح بمتجه واحد وافتراض أن القوة الناشئة ظلت ثابتة بمنطقة بأكملها. إذا كانت القوة الناشئة عن الرياح ممثلة بعدة متجهات في مجال متجه، فما الافتراض الذي ينبغي التوصل إليه بشأن البعد الثالث؟

4. **الإجابة النموذجية: كلما زاد طول المتجه، زاد مقداره. كلما زاد مقدار المتجه، زادت القوة المرتبطة به.**

5. **الإجابة النموذجية: إن تمثيل مجال المتجه في بعدين فقط يتجاهل البعد الثالث ويفترض أن القوة الناشئة عن الرياح ستظل ثابتة على طول المستوى z.**

استخدام النماذج والتطبيق

6. أكمل الجدول لمجال المتجه $\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$. ثم مثّل كل متجه بيانيًا. **انظر إلى الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.**

(x, y)	$\langle -y, x \rangle$	(x, y)	$\langle -y, x \rangle$
(2, 0)	⟨0, 2⟩	(−2, 1)	⟨−1, −2⟩
(1, 2)	⟨−2, 1⟩	(−2, 0)	⟨0, −2⟩
(2, 1)	⟨−1, 2⟩	(−1, −2)	⟨2, −1⟩
(0, 2)	⟨−2, 0⟩	(0, −2)	⟨2, 0⟩
(−1, 2)	⟨−2, −1⟩	(1, −2)	⟨2, 1⟩
(−2, −1)	⟨1, −2⟩	(2, −1)	⟨1, 2⟩

إجابة إضافية

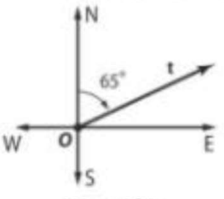
النشاط 2

الخطوة 3

بالنسبة إلى $\mathbf{G}(x, y)$، فإن المركبة الثانية هو x. وهذا سينتج عنه قيم موجبة للمركبة الرأسية للمتجهات عندما تكون x موجبة في الربعين I و IV. وبالتالي، ستشير المتجهات في مجال المتجه هذا إلى الأعلى في الربعين I و IV. وهذا يتفق مع الشكل 3. وهذا يترك $\mathbf{H}(x, y)$ متوافقًا مع الشكل 1. فالمركبة الثانية لـ $\mathbf{H}(x, y)$ هو y. وهذا سينتج عنه قيم موجبة للمركبة الرأسية للمتجهات عندما تكون y موجبة في الربعين I و II. وبالتالي، سوف تشير المتجهات في مجال المتجه هذا إلى الأعلى في الربعين I و II. وهذا يتوافق مع الشكل 1.

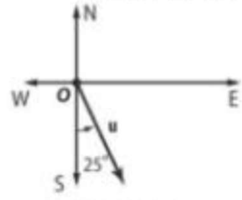
الدرس 7-1 (تمرين موجّه)

2A. الإجابة النموذجية:



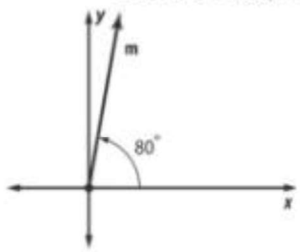
1 in. : 10 ft/s

2B. الإجابة النموذجية:



1 in. : 10 mph

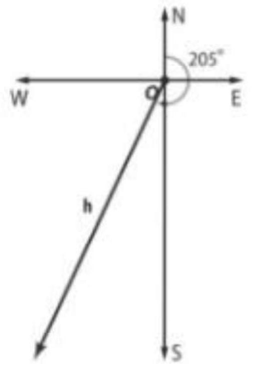
2C. الإجابة النموذجية:



1 cm : 30 lb

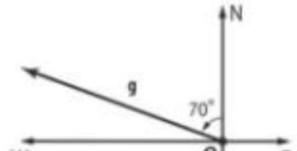
الدرس 7-1

7. الإجابة النموذجية:



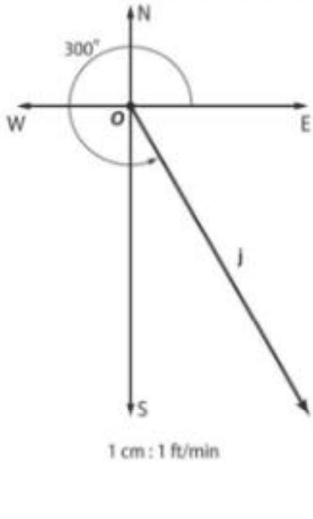
1 cm : 3 in./s

8. الإجابة النموذجية:



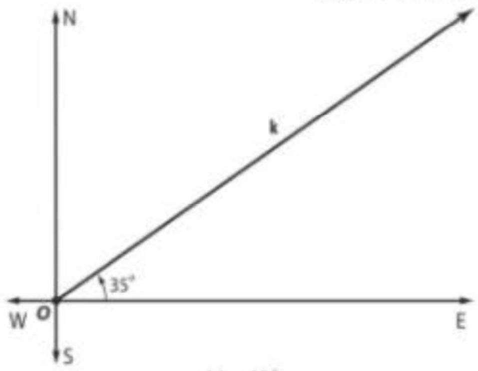
1 cm : 2 km/h

9. الإجابة النموذجية:



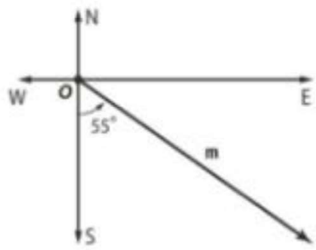
1 cm : 1 ft/min

10. الإجابة النموذجية:



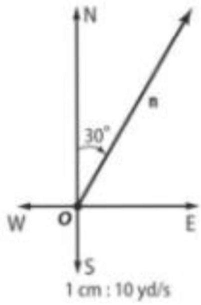
1 in. : 10 km

11. الإجابة النموذجية:



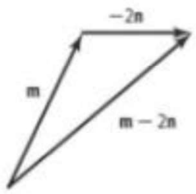
1 cm : 10 m

12. الإجابة النموذجية:

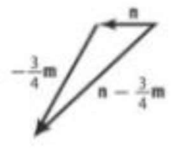


1 cm : 10 yd/s

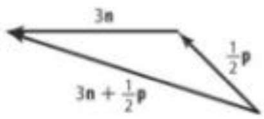
27.



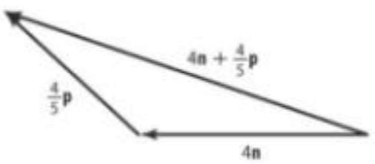
28.



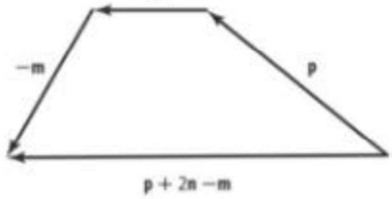
29.



30.

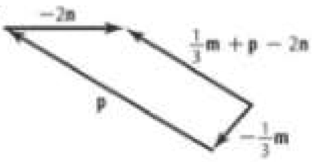


31.

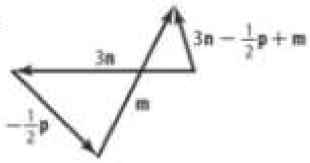


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

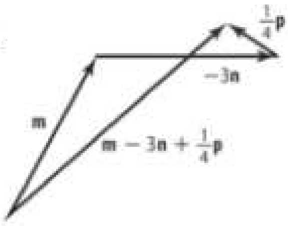
32.



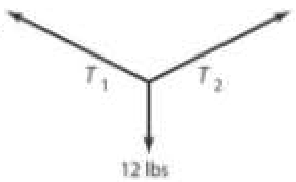
33.



34.



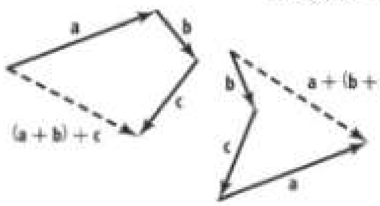
54a.



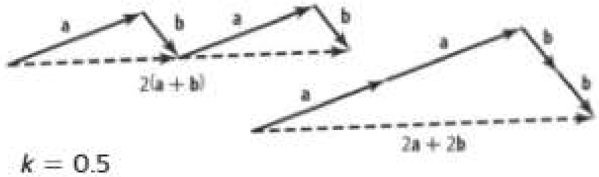
54b.

60. الإجابة النموذجية:

61. الإجابة النموذجية:

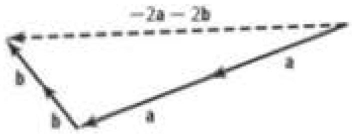


62. الإجابة النموذجية: $k = 2$

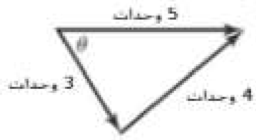


$k = 0.5$

$k = -2$



63. الإجابة النموذجية:

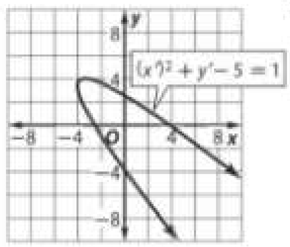


68. ناصر؛ الإجابة النموذجية: وضع ناصر نقطة بداية المتجه الثاني على نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة البداية للمتجه الأول إلى نقطة النهاية للمتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستخدام قاعدة المثلث. أما منصور فوضع نقطتي البداية للمتجهين معًا، وهذه هي الخطوة الأولى من استخدام قاعدة متوازي الأضلاع ولكنه لم يكمل المتوازي.

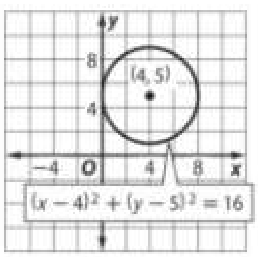
69. نعم؛ الإجابة النموذجية: من الممكن أن يساوي مجموع المتجهين أحد المركبات، فقط عندما يكون أحد المتجهين متجهًا صفريًا.

70. الإجابة النموذجية: عند استخدام قاعدة المثلث، يتم وضع نقطة البداية للمتجهات التالية على نقطة النهاية للمتجهات السابقة، ثم يتم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. وعند استخدام قاعدة متوازي الأضلاع، يتم وضع نقاط البداية للمتجهين عند النقطة نفسها، ثم يتم إكمال متوازي الأضلا ع ورسم المحصلة من نقطتي بداية المتجهين إلى رأس الزاوية المقابلة من متوازي الأضلاع. ويمكن استخدام كل من قاعدة المثلث وقاعدة متوازي الأضلاع لإيجاد محصلة متجهين أو أكثر.

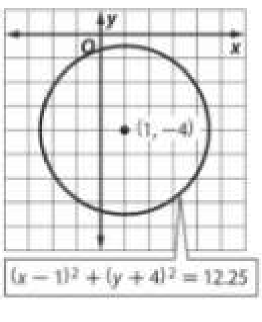
72.



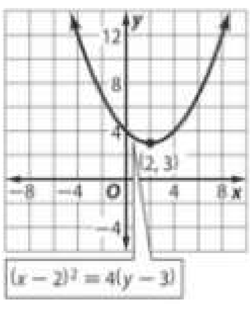
73.



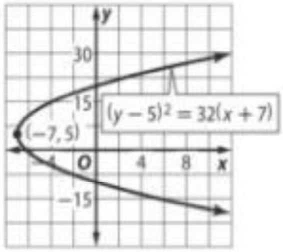
74.



75.



76.



الدرس 7-2

68. الإجابة النموذجية: لإيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع، استخدم مركبات المتجه الرأسية والأفقية والمعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{b}{a}$ لتحديد الزاوية التي يصنعها المتجه مع المحور x الموجب. ثم اجمع القيمة الناتجة إلى $360°$ لإيجاد زاوية اتجاه المتجه في الربع الرابع.

70.
$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle \\ &= \langle x_2+x_1, y_2+y_1\rangle \\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{a} \end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2+x_3, y_2+y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle) \\ &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \end{aligned}$$

72.
$$\begin{aligned} k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) \\ &= k\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle \\ &= \langle k(x_1+x_2), k(y_1+y_2)\rangle \\ &= \langle kx_1+kx_2, ky_1+ky_2\rangle \\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle \\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle \\ &= k\mathbf{a}+k\mathbf{b} \end{aligned}$$

73.
$$\begin{aligned} |k\mathbf{a}| &= |k\langle x_1, y_1\rangle| \\ &= |\langle kx_1, ky_1\rangle| \\ &= \sqrt{(kx_1)^2+(ky_1)^2} \\ &= \sqrt{k^2x_1^2+k^2y_1^2} \\ &= \sqrt{k^2(x_1^2+y_1^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2} \\ &= |k|\,|\langle x_1, y_1\rangle| \\ &= |k|\,|\mathbf{a}| \end{aligned}$$

82.
$$\begin{aligned} \sin(\theta+180°) &= \sin\theta\cos 180° + \cos\theta\sin 180° \\ &= \sin\theta(-1) + \cos\theta(0) \\ &= -\sin\theta \end{aligned}$$

83.
$$\begin{aligned} &\sin(60°+\theta) + \sin(60°-\theta) \\ &= \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta + \sin 60°\cos\theta - \cos 60°\sin\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ &= \sqrt{3}\cos\theta \end{aligned}$$

الدرس 7-3

25. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29}\right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29}\right\rangle$

26. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$; $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle + \langle 6, 6\rangle$

27. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{120}{17}, -\frac{30}{17}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{120}{17}, -\frac{30}{17}\right\rangle + \left\langle \frac{16}{17}, \frac{64}{17}\right\rangle$

28. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10}\right\rangle$

29. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73}\right\rangle$

30. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right\rangle + \left\langle -\frac{74}{13}, \frac{111}{13}\right\rangle$

31. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{93}{13}, -\frac{62}{13}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle \frac{93}{13}, -\frac{62}{13}\right\rangle + \left\langle -\frac{28}{13}, -\frac{42}{13}\right\rangle$

32. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{477}{130}, -\frac{371}{130}\right\rangle$; $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{477}{130}, -\frac{371}{130}\right\rangle + \left\langle \frac{217}{130}, -\frac{279}{130}\right\rangle$

69. $\cos 90° = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حيث. $\theta = 90°$

$0 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ $\cos 90° = 0$

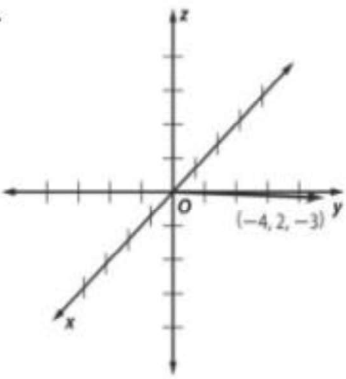
$0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ بضرب كل جانب في $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

70.
$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle &\stackrel{?}{=} \langle v_1,v_2\rangle\cdot\langle u_1,u_2\rangle \\ u_1v_1+u_2v_2 &= u_1v_1+u_2v_2 \end{aligned}$$

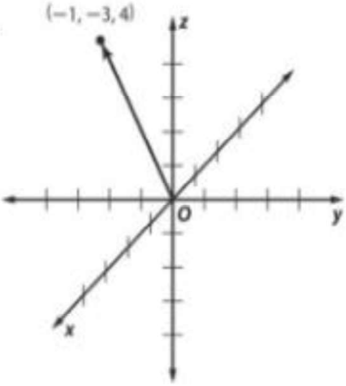
71.
$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot(\langle v_1,v_2\rangle + \langle w_1,w_2\rangle) &\stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle + \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle w_1,w_2\rangle \\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1+w_1, v_2+w_2\rangle &\stackrel{?}{=} (u_1v_1+u_2v_2) + (u_1w_1+u_2w_2) \\ u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2) &\stackrel{?}{=} u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2 \\ u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2 &= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2 \end{aligned}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3A.

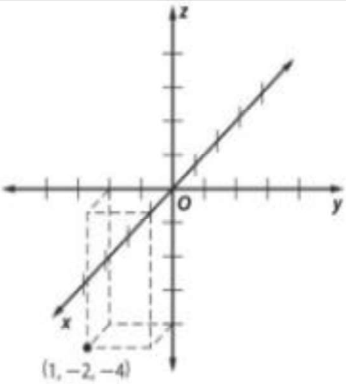


3B.

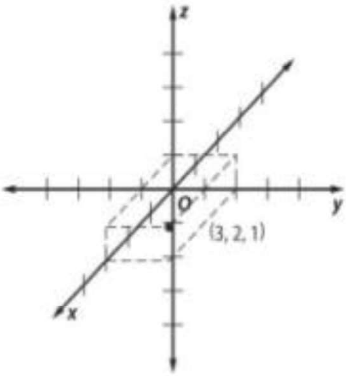


الدرس 7-4

1.



2.

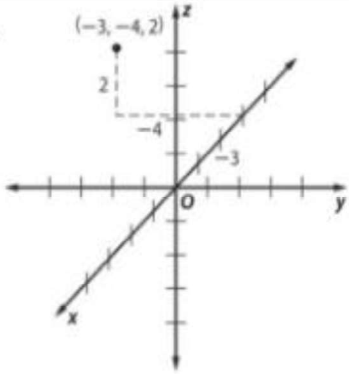


72.

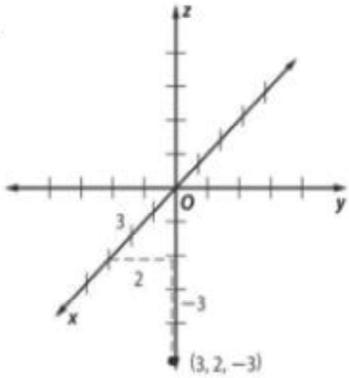
$$\begin{aligned}
k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &&= \mathbf{u}\cdot k\mathbf{v}\\
k(\langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle) &\stackrel{?}{=} k\langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle &&\stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot k\langle v_1,v_2\rangle\\
k(u_1v_1+u_2v_2) &\stackrel{?}{=} \langle ku_1,ku_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle &&\stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle kv_1,kv_2\rangle\\
ku_1v_1+ku_2v_2 &= ku_1v_1+ku_2v_2 &&= ku_1v_1+ku_2v_2
\end{aligned}$$

الدرس 7-4 (تمرين موجّه)

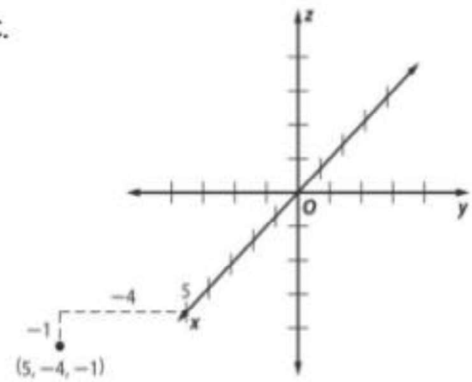
1A.



1B.

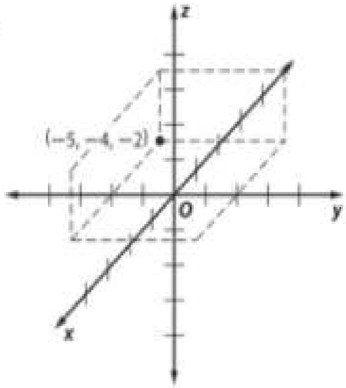


1C.

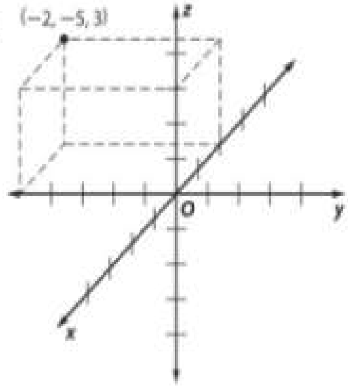


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

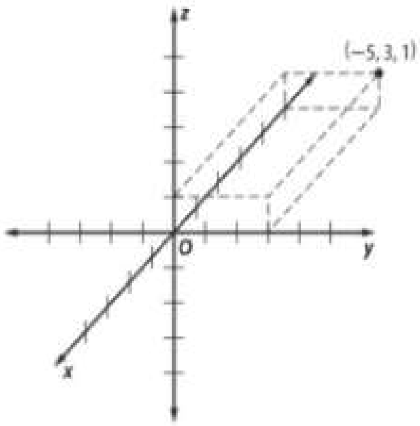
3.



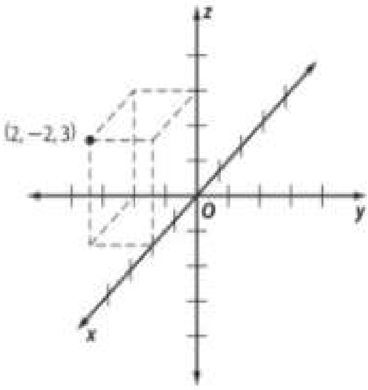
4.



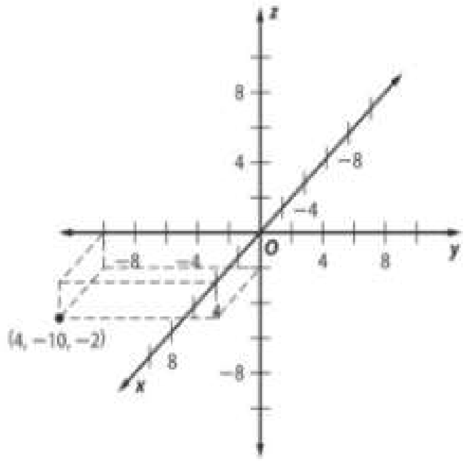
5.



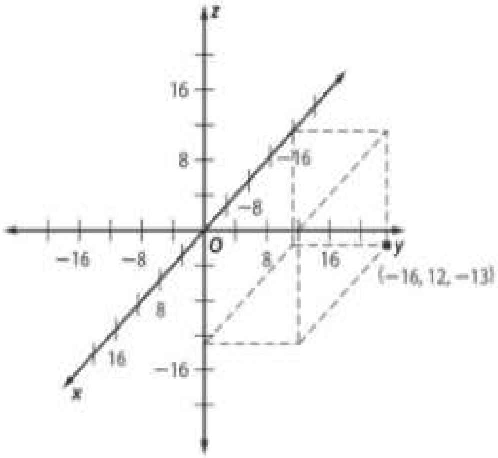
6.



7.



8.



9. $5\sqrt{6} \approx 12.2; \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

10. $7\sqrt{2} \approx 9.9; \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

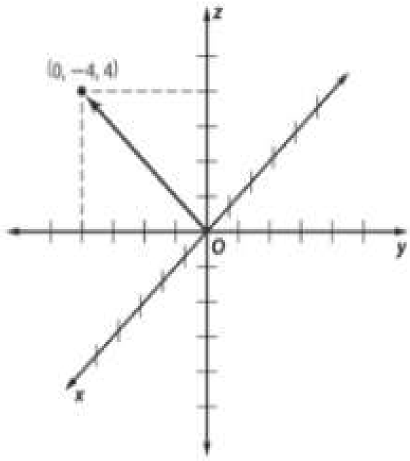
11. $\sqrt{542} \approx 23.3; \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, 3\right)$

12. $7\sqrt{5} \approx 15.7; \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

13. $4\sqrt{14} \approx 15.0; (3, 4, 4)$

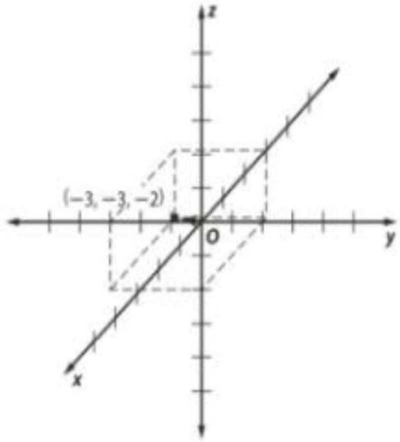
14. $\sqrt{83} \approx 9.1; \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

17.

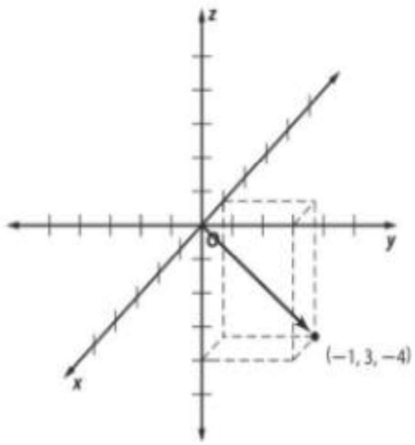


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

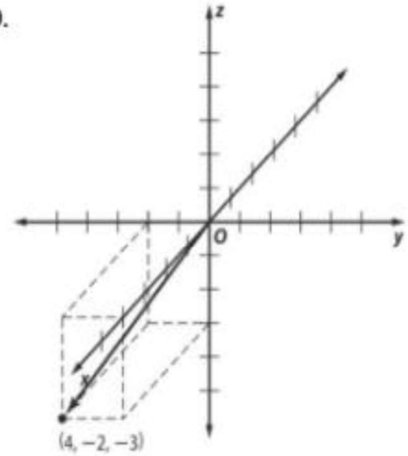
18.



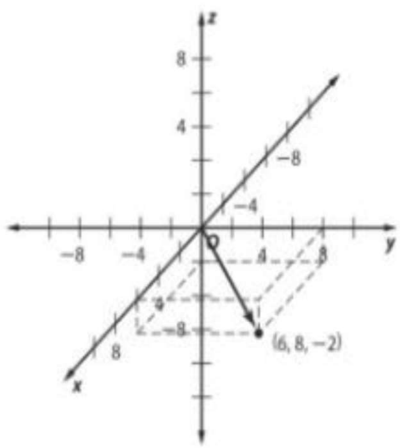
19.



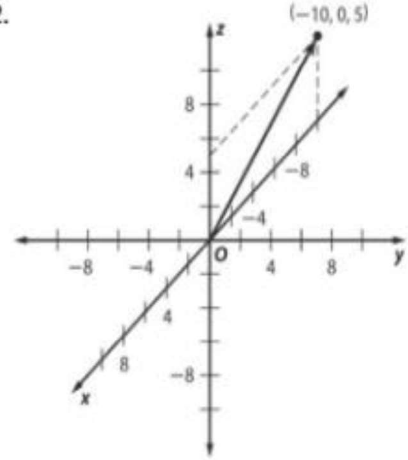
20.



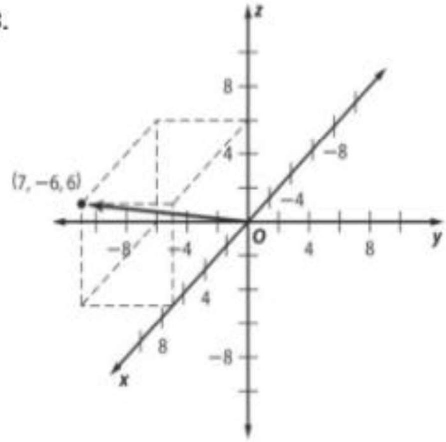
21.



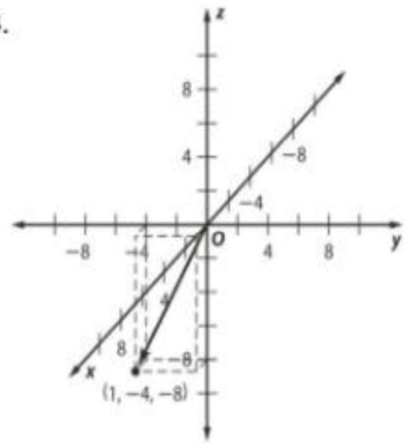
22.



23.



24.



25. $\langle 16, 2, 8\rangle$; 18; $\left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right\rangle$

26. $\langle 0, -8, 12\rangle$; $4\sqrt{13}$; $\left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$

27. $\langle -3, -5, -10\rangle$; $\sqrt{134}$; $\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67}\right\rangle$

28. $\langle -4, 8, 20\rangle$; $4\sqrt{30}$; $\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right\rangle$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. $\langle -1, 8, -10\rangle$; $\sqrt{165}$; $\left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33}\right\rangle$

30. $\langle -6, -15, 4\rangle$; $\sqrt{277}$; $\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277}\right\rangle$

31. $\langle 4, -15, 5\rangle$; $\sqrt{266}$; $\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266}\right\rangle$

32. $\langle 20, 32, 42\rangle$; $2\sqrt{797}$; $\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797}\right\rangle$

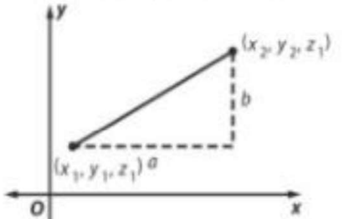
33. $\langle 11, -23, -13\rangle$; $3\sqrt{91}$; $\left\langle \frac{11\sqrt{91}}{273}, -\frac{23\sqrt{91}}{273}, -\frac{\sqrt{91}}{21}\right\rangle$

34. $\langle -14, -10, -5\rangle$; $\sqrt{321}$; $\left\langle -\frac{14\sqrt{321}}{321}, -\frac{10\sqrt{321}}{321}, -\frac{5\sqrt{321}}{321}\right\rangle$

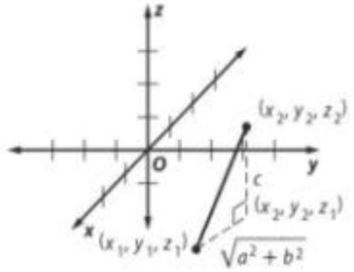
60a. $\langle 9.4 \times 10^5, 2.2 \times 10^6, -6.5 \times 10^5\rangle$,
$\langle -9.4 \times 10^5, 2.2 \times 10^6, -6.5 \times 10^5\rangle$

61.
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2}$$
$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$$

66. الإجابة النموذجية: افترض أن النقطتين هما (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_1). النقطة الموجودة في المستوى **xy** والتي تقع مباشرة أسفل النقطة الثانية هي (x_2, y_2, z_1). استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_1). افترض أن المركّب **x** للمسافة هو **a** وأن المركّب **y** للمسافة هو **b**.



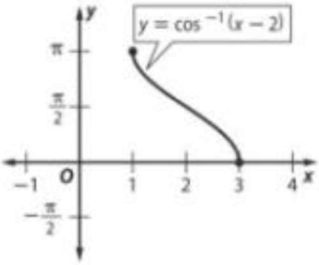
لذلك، المسافة من (x_1, y_1, z_1) إلى (x_2, y_2, z_1) هي $\sqrt{a^2 + b^2}$. الآن، استخدم نظرية فيثاغورس مرة أخرى لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_1). المركّب **xy** للمسافة هو $\sqrt{a^2 + b^2}$. افترض أن المركّب **z** للمسافة هو **c**.



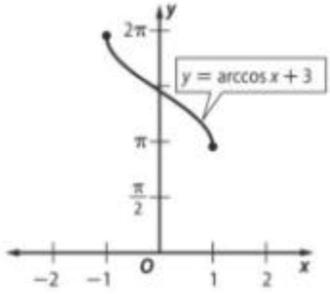
إذًا، فإن المسافة من (x_1, y_1, z_1) إلى (x_2, y_2, z_2) هي $\sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2}$ أو $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. وحيث إن $a = x_2 - x_1$، $b = y_2 - y_1$، أو $c = z_2 - z_1$، فإن المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) هي $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

69. الإجابة النموذجية: الأصح استخدام بُعدين عند وصف موضع على الخريطة، حيث إن الخريطة نفسها ثنائية الأبعاد. أما عندما يتطلب وصف موضع جسم ما استخدام البعد الإضافي للارتفاع، مثل موضع طائرة، فيكون من الأصح استخدام ثلاثة أبعاد.

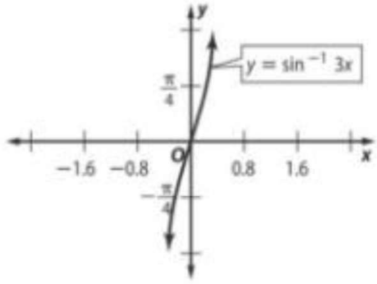
81.



82.

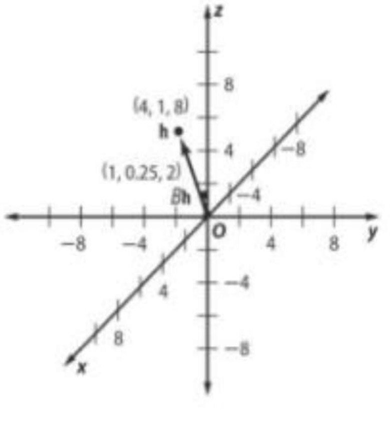


83.



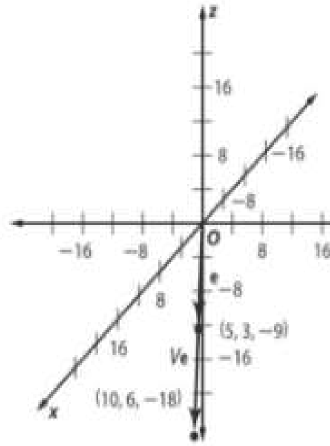
التوسع 7-4

1.

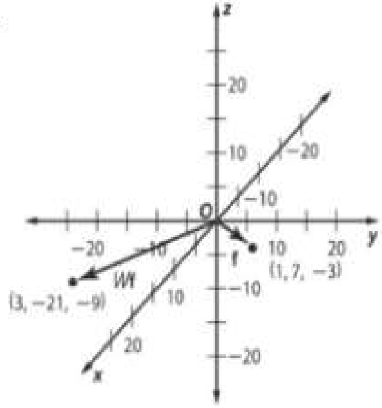


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

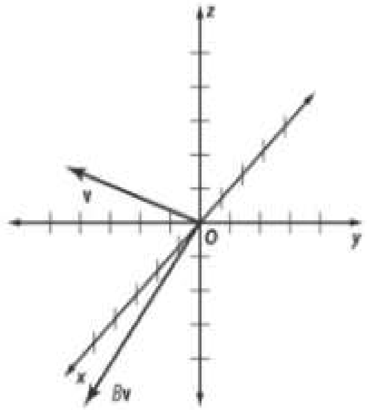
2.



3.



4.



الدرس 7-5 (تمرين موجّه)

3A. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 9, -21, -6 \rangle \cdot \langle 4, 2, -1 \rangle$
$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$
$= 36 + (-42) + 6$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 9, -21, -6 \rangle \cdot \langle 5, 1, 4 \rangle$
$= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)$
$= 45 + (-21) + (-24)$
$= 0$

3B. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -1, -7, 3 \rangle \cdot \langle -2, -1, -3 \rangle$
$= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)$
$= 2 + 7 + (-9)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -1, -7, 3 \rangle \cdot \langle 5, 1, 4 \rangle$
$= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)$
$= -5 + (-7) + 12$
$= 0$

الدرس 7-5

16. $\langle 21, 7, 0 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 21, 7, 0 \rangle \cdot \langle -1, 3, 5 \rangle$
$= 21(-1) + 7(3) + 0(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 21, 7, 0 \rangle \cdot \langle 2, -6, -3 \rangle$
$= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)$
$= 0$

17. $\langle 25, 6, 71 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 25, 6, 71 \rangle \cdot \langle 4, 7, -2 \rangle$
$= 25(4) + 6(7) + 71(-2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 25, 6, 71 \rangle \cdot \langle -5, 9, 1 \rangle$
$= 25(-5) + 6(9) + 71(1)$
$= 0$

18. $\langle 38, 26, 21 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 38, 26, 21 \rangle \cdot \langle 3, -6, 2 \rangle$
$= 38(3) + 26(-6) + 21(2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 38, 26, 21 \rangle \cdot \langle 1, 5, -8 \rangle$
$= 38(1) + 26(5) + 21(-8)$
$= 0$

19. $\langle -56, -35, -42 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -56, -35, -42 \rangle \cdot \langle 5, -8, 0 \rangle$
$= (-56)(5) + (-35)(-8) + (-42)(0)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -56, -35, -42 \rangle \cdot \langle -4, -2, 7 \rangle$
$= (-56)(-4) + (-35)(-2) + (-42)(7)$
$= 0$

20. $\langle 7, 23, 12 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 7, 23, 12 \rangle \cdot \langle -2, -2, 5 \rangle$
$= 7(-2) + 23(-2) + 12(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 7, 23, 12 \rangle \cdot \langle 7, 1, -6 \rangle$
$= 7(7) + 23(1) + 12(-6)$
$= 0$

21. $\langle 29, 12, 13 \rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 29, 12, 13 \rangle \cdot \langle -4, 1, 8 \rangle$
$= 29(-4) + 12(1) + 13(8)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 29, 12, 13 \rangle \cdot \langle 3, -4, -3 \rangle$
$= 29(3) + 12(-4) + 13(-3)$
$= 0$

60. الإجابة النموذجية: قاعدة متوازي السطوح عبارة عن متوازي أضلاع مساحته تساوي $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. والارتفاع يساوي $|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$. إذًا، حجم متوازي السطوح هو $V = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|\,|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$

$$V = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|\,|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$$
$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cdot \left|\frac{u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right|$$
$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cdot \frac{|u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \text{ أو } |u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

65. الإجابة النموذجية: لتحديد ما إذا كان متجهان متوازيين أم متعامدين، يمكنك استخدام القانون الخاص بالزاوية المحصورة بين متجهين. إذا كان قياس الزاوية 0 أو 180، فإنهما متوازيان. أما إذا كان قياس الزاوية 90، فإنهما متعامدان. يمكنك أيضًا إيجاد الصورة المركبة لمتجهين واستخدام نسب الإحداثيات لتحديد ما إذا كان متجهان متعامدين أم لا. إذا كانت نسب الإحداثيات الثلاثة للمتجهات المركبة واحدة، فإن المتجهين متوازيان. ولتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا ، فيمكنك إيجاد ناتج الضرب النقطي للمتجهين. فإذا كان ناتج الضرب النقطي يساوي 0، فإن المتجهين متعامدان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education