الوحدة 9 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

السابق

- في السابق قمت بتحديد المعادلات المتعامدة للقطوع المخروطية وتمثيلها بيانيا.

الحالي

- في **الوحدة 9**، ستقوم بما يلي:
  - التمثيل البياني للإحداثيات القطبية والمعادلات القطبية.
  - التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة وبين المعادلات القطبية والمعادلات المتعامدة.
  - تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
  - تحويل الأعداد المركبة بين الصورة القطبية والصورة المتعامدة.

لماذا؟

- **حفلات موسيقية** يمكن استخدام المعادلات القطبية لتمثيل أنماط الصوت للمساعدة في تحديد ترتيب المسرح وموضع المتحدث والميكروفون ومستوى الصوت ومستويات التسجيل. يمكن أيضا استخدام المعادلات القطبية في الإضاءة وزوايا الكاميرات عند تصوير الحفلات الموسيقية.

قراءة مسبقة استخدم مقدمات دروس الوحدة 9 للتوصل إلى توقعين أو ثلاثة بشأن الدروس المستفادة من هذه الوحدة. راجع عمل الطلاب.

مشروع الوحدة

مكان استراحة بأسلوب الإحداثيات القطبية

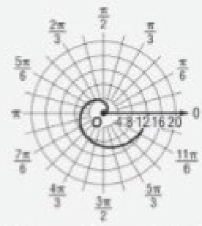
يستخدم الطلاب التمثيل البياني للإحداثيات القطبية والمعادلات، والتحويل بين المعادلات والإحداثيات القطبية والمتعامدة، وتحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية لتصميم مكان استراحة للمراهقين. كلّف الطلاب بالآتي:

- تصميم لوحة تصويب بالسهام الصغيرة على شبكة قطبية تتكون من قطاعين بالإضافة إلى نقطة هدف مع كتابة نصف قطرها والنقاط المكتسبة. كلّف الطلاب بتحديد موقع سهمين ورسمهما على لوحات التصويب الخاصة بهم وإيجاد المسافة بينهما.
- تصميم غرفة فيها خشبة مسرح. وكلّف الطلاب بتمثيل مجال الصوت الذي يستطيع مكبر الصوت التقاطه عن طريق كتابة معادلة لمنحنى قلبي الشكل وتمثيلها بيانيا.
- تصميم مخطط أرضية لغرفة حاسوب على مستوى مركب. ويجب تسمية الحواسيب والمقاعد على هيئة أعداد مركبة يتم التعبير عنها في الصورتين القطبية والمتعامدة.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعا النظام التالي:

التعريف: حلزون أرشميدس عبارة عن منحنى حلزوني يتكون من خلال مجموعة من النقاط التي توضحها المعادلة القطبية $r = a\theta + b$.

مثال:



طرح الأسئلة كيف يمكنكم معرفة أن فترة هذا التمثيل البياني هي $0 \le \theta \le 2\pi$؟ النقطة الداخلية للتمثيل البياني هي $(0, 0)$ والنقطة الأخيرة هي $(0, 2\pi)$.

إجابات إضافية

8. القيمة الصغرى المطلقة: (2.5, −1)
9. القيمة العظمى المطلقة: (2.25, 9.13)
10. القيمة العظمى النسبية: (1, 0)، القيمة الصغرى النسبية: (−1, −4)
11. القيمة العظمى النسبية: (−1.67, 6.48)، القيمة الصغرى النسبية: (1, −3)

السؤال الأساسي

- لماذا يعد وجود أكثر من نظام إحداثي واحد أمرًا مفيدًا؟ الإجابة النموذجية: لأنه – بحسب الحالة – قد يكون أحد الأنظمة الإحداثية أكثر إفادة من غيره من الناحية العملية.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

مثّل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو ليست أيًا منهما. قم بتأكيد إجابتك جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.

1. $f(x) = x^2 + 10$
2. $f(x) = -2x^3 + 5x$
3. $g(x) = \sqrt{x + 9}$
4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
5. $g(x) = 3x^5 - 7x$
6. $h(x) = \sqrt{x^2} - 5$

1–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

7. منطاد يمكن تمثيل المسافة بالأمتار بين منطاد وشخص عن طريق $d(t) = \sqrt{t^2 + 3000}$، حيث تمثل t الوقت بالثواني. حلّل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أم فردية، أم ليست أيًا منهما. زوجية

قرّب إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى النسبية أو المطلقة لكل دالة. حدّد قيم x حيث تظهر.

8. $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$
9. $g(x) = -2x^2 + 9x - 1$
10. $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
11. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

8–11. انظر الهامش.

12. صاروخ تم إطلاق صاروخ في الهواء. تمثل الدالة $h(t) = -5t^2 + 11t + 5$ الارتفاع h للصاروخ بالأمتار بعد t الثواني. أوجد القيم القصوى لهذه الدالة. القيمة القصوى المطلقة: (0.35, 10.5)

حدد كل الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المذكورة. ثم أوجد وارسم زاوية واحدة موجبة وواحدة سالبة مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المذكورة. 13–18. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

13. 165°
14. 205°
15. −10°
16. $\frac{\pi}{6}$
17. $\frac{4\pi}{3}$
18. $-\frac{\pi}{4}$

المفردات الجديدة

نظام إحداثي قطبي	polar coordinate system
قطب	pole
محور قطبي	polar axis
الإحداثيات القطبية	polar coordinates
معادلة قطبية	polar equation
تمثيل بياني قطبي	polar graph
منحنى قلبي الشكل	limaçon
قلبي الشكل	cardioid
منحنى الوردة	rose
منحنى ذو عروتين	lemniscate
حلزون أرشميدس	spiral of Archimedes
مستوى مركب	complex plane
محور حقيقي	real axis
محور تخيلي	imaginary axis
مستوى أرجاند	Argand plane
قيمة مطلقة لعدد مركب	absolute value of a complex number
صورة قطبية	polar form
صيغة مثلثية	trigonometric form
معامل	modulus
إزاحة زاوية	argument

مراجعة المفردات

ضلع ابتداء الزاوية الوضع المبدئي للشعاع

ضلع الانتهاء للزاوية وضع الشعاع بعد الدوران

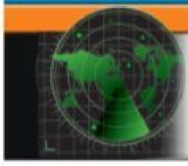
قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري لتتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية

الدرس 9-1 الإحداثيات القطبية

:: السابق
- قمت برسم الزوايا الموجبة والسالبة المعطاة بالدرجة والراديان في الوضع القياسي.

:: الحالي
- 1 التمثيل البياني للنقاط باستخدام الإحداثيات القطبية.
- 2 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا.

:: لماذا؟
- لتوفير مسارات آمنة وسفر آمن، يستخدم موظفو التحكم في المرور الجوي نظم رادار متطورة لتوجيه حركة مرور الطائرات. يضمن هذا أن تحافظ الطائرات على مسافة كافية من الطائرات والعلامات الأخرى. يستخدم الرادار قياس الزاوية والمسافة الاتجاهية لتعيين أوضاع الطائرة. بعد ذلك يستطيع موظفو التحكم نقل هذه المعلومات إلى الطيارين.



المفردات الجديدة
- نظام إحداثي قطبي polar coordinate system
- قطب pole
- محور قطبي polar axis
- الإحداثيات القطبية polar coordinates
- معادلة قطبية polar equation
- تمثيل بياني قطبي polar graph

1 تمثيل الإحداثيات القطبية بيانيًا

لتحقيق هذا الهدف، مثّلت المعادلات بيانيًا في نظام إحداثي متعامد. عندما يسجل موظفو التحكم في المرور الجوي مواقع الطائرات باستخدام المسافات والزوايا، يستخدمون **نظامًا إحداثيًا قطبيًا** أو مستوى قطبيًا.

في النظام الإحداثي المتعامد، يأتي المحوران x و y على شكل مستقيمين أفقي ورأسي على التوالي، وتسمى نقطة تقاطعهما O نقطة الأصل. يتحدد موقع النقطة P بالإحداثيات المتعامدة بالصورة (x, y)، حيث x و y هما المسافتان الأفقية والرأسية الموجهتان، على التوالي إلى النقطة. على سبيل المثال، تقع النقطة $(3, -4)$ على بعد 3 وحدات إلى يمين المحور y وعلى بعد 4 وحدات أسفل المحور x.

النظام الإحداثي المتعامد

في النظام الإحداثي القطبي، نقطة الأصل نقطة ثابتة O تسمى **القطب**. **المحور القطبي** شعاع ابتداء من القطب، ويكون أفقيًا في العادة وموجهًا نحو اليمين. يمكن تحديد موقع النقطة P في النظام الإحداثي القطبي عن طريق **الإحداثيات القطبية** بالصورة (r, θ)، حيث r هو المسافة الموجهة من القطب إلى النقطة و θ تمثل الزاوية الموجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

النظام الإحداثي القطبي

لتمثيل نقطة في الإحداثيات القطبية، تذكّر أن قيمة θ الموجبة تشير إلى دوران عكس حركة عقارب الساعة من المحور القطبي، بينما تشير القيمة السالبة إلى دوران في اتجاه حركة عقارب الساعة. إذا كانت r موجبة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء في θ. إذا كانت r سالبة، تقع P على الشعاع المقابل للضلع الطرفي في θ.

مثال 1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

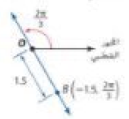
مثّل كل نقطة بيانيًا.

a. $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$، فارسم ضلع الانتهاء بزاوية 45 درجة مع المحور القطبي كضلع ابتداء له. بما أن $r = 2$، فعيّن نقطة على مسافة وحدتين من القطب على ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.

b. $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، فارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{2\pi}{3}$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن r سالبة، فقم بتوسيع ضلع الابتداء في الزاوية في الاتجاه المعاكس وعيّن نقطة على مسافة 1.5 وحدة من القطب على هذا الشعاع الموسع.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-1 رسم الزوايا الموجبة والسالبة المعطاة بالدرجات ووحدات الراديان في الوضع القياسي.

الدرس 9-1 التمثيل البياني للنقاط بالإحداثيات القطبية. التمثيل البياني للمعادلات القطبية البسيطة.

بعد الدرس 9-1 التمثيل البياني للمعادلات القطبية.

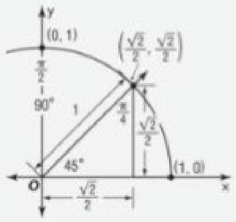
2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:
- بم تعلمك الإحداثيات (x, y) في أي زوج مرتّب؟ المسافات الأفقية والرأسية بالنسبة لنقطة الأصل
- ما الزاوية التي تتكون عند رسم مستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؟ $45°$

ارسم الجزء التالي من دائرة الوحدة على اللوحة.



- بم يعلمك الزوج المرتب (1, 45°)؟
الإجابة النموذجية: النقطة 1 وحدة من نقطة الأصل عبر الشعاع تكون زاوية 45° مع المحور x

1 التمثيل البياني للاحداثيات القطبية

يبين **المثالان 1 و 2** كيفية التمثيل البياني للاحداثيات القطبية بالصيغة (r, θ) عند إعطاء θ بالدرجات ووحدات الراديان في النظام الإحداثي القطبي. ويبين **المثال 3** كيفية إيجاد الاحداثيات القطبية المتعددة التي تذكر النقطة نفسها.

التقويم التكويني

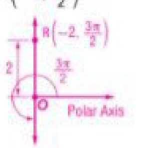
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

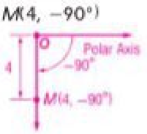
1 مثّل كل نقطة بيانيًا.

a. $S(1, 200°)$

b. $R\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$



c. $M(4, -90°)$



c. $C(3, -30°)$

بما أن $\theta = -30°$، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن $r = 3$، فمثّل نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.

تمرين موجّه

مثّل كل نقطة بيانيًا. **1A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

1A. $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 1B. $J(2.5, 240°)$ 1C. $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

كما يتم التمثيل البياني للإحداثيات المتعامدة على شبكة متعامدة، يتم التمثيل البياني للإحداثيات القطبية على شبكة دائرية أو قطبية تمثل المستوى القطبي.

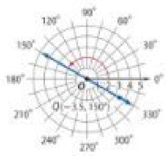
مثال 2 التمثيل البياني للنقاط على شبكة قطبية

مثّل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية.

a. $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن $r = 3$، فمثّل نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

b. $Q(-3.5, 150°)$



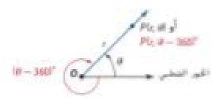
بما أن $\theta = 150°$، فارسم ضلع الانتهاء لزاوية $150°$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن r سالبة، فقم بتوسيع ضلع الابتداء في الزاوية في الاتجاه المعاكس ومثّل نقطة على مسافة 3.5 وحدات من القطب على هذا الشعاع الموسع.

تمرين موجّه **2A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

2A. $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 2B. $S(-2, -135°)$

نصيحة دراسية
القطب يمكن تمثيل القطب بواسطة $(0, \theta)$ حيث θ هي أي زاوية.

في النظام الإحداثي المتعامد، لكل نقطة مجموعة متفردة من الإحداثيات. لا ينطبق هذا على النظام الإحداثي القطبي. في الدرس 2-4، تعلمت أن لكل زاوية زوايا كثيرة لانهائية مشتركة في ضلع الانتهاء. لذلك، إذا كانت الاحداثيات القطبية لنقطة معينة هي (r, θ)، فإن لها أيضًا الاحداثيات القطبية $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما هو موضح.

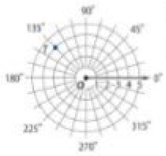


كما أنه بما أن r مسافة موجهة، فتمثل (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ أو $(-r, \theta \pm \pi)$ النقطة نفسها كما هو موضح.

بشكل عام، إذا كان n أي عدد صحيح، فيمكن تمثيل النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ) أيضاً بإحداثيات قطب بالصورة $(r, \theta + 360n°)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ معطاة بوحدة الراديان وكانت n هي أي عدد صحيح، فإن التمثيلات الأخرى لـ (r, θ) تأتي بالصورة $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

مثال 3 التمثيلات المتعددة للإحداثيات القطبية

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة T إذا علمت أن $-360° \le \theta \le 360°$.



أحد أزواج الإحداثيات القطبية التي تحدد النقطة T الإحداثي $(4, 135°)$. تأتي التمثيلات الثلاثة الأخرى كالتالي.

$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ اطرح $360°$ من θ
$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ استبدل r بـ $-r$
$= (-4, 315°)$ واجمع $180°$ مع θ

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ استبدل r بـ $-r$
$= (-4, -45°)$ واطرح $180°$ من θ

تمرين موجّه

أوجد ثلاثة أزواج إضافية من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة المعطاة إذا كان $-360° \le \theta \le 360°$ أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

3A. $(5, 240°)$ $(5, -120°), (-5, 60°), (-5, -300°)$

3B. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ $\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{7\pi}{6}\right), \left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

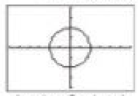
2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

تسمى المعادلة التي يتم التعبير عنها بدلالة إحداثيات القطب **معادلة قطبية**. على سبيل المثال، $r = 2 \sin \theta$ معادلة قطبية. **التمثيل البياني القطبي** هو مجموعة كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معينة.

سبق أن تعرفت على كيفية التمثيل البياني للمعادلات في النظام الإحداثي الديكارتي أو المتعامد. تعتبر التمثيلات البيانية للمعادلات التي تتضمن قيماً ثابتة مثل $x = 2$ و $y = -3$ أساسية في النظام الإحداثي الديكارتي. وعلى المنوال نفسه، تعتبر التمثيلات البيانية للمعادلتين القطبيتين $r = k$ و $\theta = k$، حيث k قيمة ثابتة، أساسية في النظام الإحداثي القطبي.

تلميح تقني

تمثيل المعادلات القطبية بيانياً لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ بيانياً على حاسبة تمثيل بياني، اضغط أولاً على MODE وقم بتغيير إعداد التمثيل البياني من FUNC إلى POL. عندما تضغط على $Y=$. لاحظ أن المتغير التابع قد تغير من Y إلى r وتغير المتغير المستقل من x إلى θ. مثّل بيانياً $r = 2$.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{16}$ by $[-6, 6]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

مثال 4 تمثيل المعادلات القطبية بيانياً

مثّل كل معادلة قطبية بيانياً.

a. $r = 2$

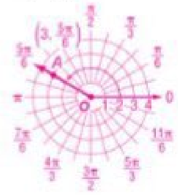
حلول $r = 2$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد وحدتين عن القطب، بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2.

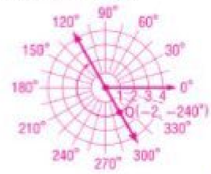
أمثلة إضافية

2 مثّل كل نقطة بيانياً على شبكة قطبية.

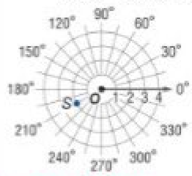
a. $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



b. $Q(-2, -240°)$



3 أوجد أربع أزواج مختلفة من الاحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة S إذا علمت أن $-360° < \theta < 360°$.



$(2, -150°), (2, 210°), (-2, 30°), (-2, -330°)$

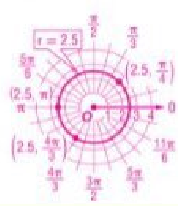
2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

يبين **المثال 4** كيفية التمثيل البياني للمعادلات القطبية البسيطة باستخدام التمثيلات البيانية التي تكون على شكل دوائر ومستقيمات. ويبين **المثال 5** كيفية إيجاد المسافة بين الاحداثيات القطبية باستخدام قانون المسافة القطبية.

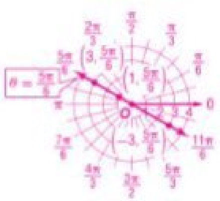
مثال إضافي

4 مثّل كل معادلة قطبية بيانياً.

a. $r = 2.5$

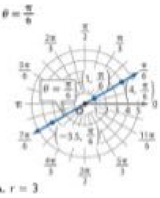


b. $\theta = \frac{5\pi}{6}$



b. $\theta = \frac{\pi}{6}$

حلول $\theta = \frac{\pi}{6}$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r هي أي عدد حقيقي. يتألف التمثيل البياني من كل النقاط على المستقيم التي تصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.



تمرين موجّه **4A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 9**

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

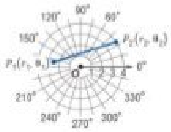
4A. $r = 3$ **4B.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستخدام الصيغة التالية.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة القطبية

إذا كانت $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ are نقطتين في المستوى القطبي، فإن المسافة P_1P_2 تتحدد بالعلاقة

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 63

انتبه!

الوضع عند استخدام صيغة المسافة القطبية، إذا تم إعطاء θ بالدرجة، فتأكد من ضبط حاسبة التمثيل البياني على وضع الدرجات.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد المسافة بين الإحداثيات القطبية

الحركة الجوية يتتبع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على ارتفاع واحد. إحداثيات الطائرتين هي $A(8, 310°)$ و $B(10, 345°)$، حيث تُقاس المسافة الموجهة بالكيلومتر.

a. اصنع تمثيلاً بيانيًا لهذا الموقف.

تقع الطائرة A على مسافة 8 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 310°. وتقع الطائرة B على مسافة 10 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 345°، كما هو موضح.

b. إذا كانت اللوائح تحظر على الطائرات المرور ضمن مسافة خمسة كيلومترات من بعضها البعض، فهل تنتهك الطائرتان اللوائح؟ اشرح.

استخدم صيغة المسافة القطبية.

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ صيغة المسافة القطبية

$$= \sqrt{8^2 + 10^2 - 2(8)(10)\cos(345° - 310°)} = 5.65$$ حوالي

$(r_2, \theta_2) = (10, 345°)$ و $(r_1, \theta_1) = (8, 310°)$

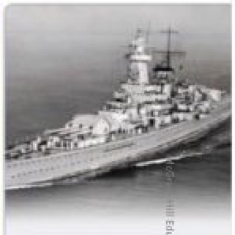
بين الطائرتين مسافة 5.65 كيلومترات، إذًا فهما لا تنتهكان هذه اللائحة.

تمرين موجّه

5. قوارب يعمل رادار بحري على تعقب حاملتي طائرات. إحداثيات الحاملتين هي $(13, 150°)$ و $(5, 65°)$، مع قياس r بالكيلومترات.

A. اصنع تمثيلاً بيانيًا لهذا الموقف. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

B. ما المسافة بين حاملتي الطائرات؟ **حوالي 13.40 كيلومترًا**



الربط بالحياة اليومية

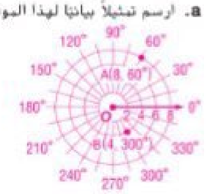
ابتكرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 بإمكانه أن يتتبع الطائرات في دائرة يبلغ نصف قطرها 128 كيلومترًا. في العام التالي، كانت ألمانيا أول بلد يزود سفينة حربية، السفينة غراف سبي، بأول نظام رادار.

المصدر: تاريخ صناعة أنظمة الاتصالات العالمية

مثال إضافي

5 الحركة الجوية يتتبع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على ارتفاع واحد. وإحداثيات الطائرتين هي $A(12, 60°)$ و $B(6, 300°)$، حيث تُقاس المسافة الموجهة بالكيلومترات.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذا الموقف.



b. ما المسافة الفاصلة بين الطائرتين؟ 15.9 كيلومترًا تقريبًا

التركيز على محتوى الرياضيات

المسافة على مستوى القطب يمكنك اعتبار المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي كضلع ثالث لمثلث، حيث يمثل الضلعان الآخران الشعاعين الخارجين من القطب إلى كل نقطة. لاحظ أن قانون المسافة في المستوى القطبي هو أحد صيغ قانون الـ Cosine المستخدم في إيجاد طول الضلع الثالث في المثلث عندما تكون الزاوية المقابلة والضلعان الآخران معلومين.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية قدم لكل فريق مكون من أربعة أو خمسة طلاب حبلاً وورقة الاحداثيات القطبية. يمثل أحد الطلاب أنه نقطة الأصل ويقف الطالبان الآخران عند نقاط مختلفة مثلما هو موضح في التمثيل البياني. وينبغي أن تكون المسافة الفعلية بينهم مثلما هو محدد مسبقًا في مقياس التمثيل البياني. قم بقياس المسافة بين الطلاب مستخدمًا الحبل وقارن بين النتيجة التي ستحصل عليها وبين المسافة الناتجة عن قانون المسافة.

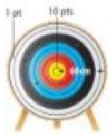
التمارين

1-12. انظر ملحق إجابات الوحدة 9

مثّل كل نقطة على شبكة قطبية بيانيًا. (المثالان 1 و 2)

1. $R(1, 120°)$
2. $T(-2.5, 330°)$
3. $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4. $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $B(5, -60°)$
7. $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
8. $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
9. $C(-4, \pi)$
10. $M(0.5, 270°)$
11. $P(4.5, -210°)$
12. $W(-1.5, 150°)$

13. **الرماية** يتألف الهدف في مسابقة رماية من 10 دوائر مشتركة في المركز وتقع على مسافات متساوية بقيم للدرجات من 1 إلى 10 نقاط من الدائرة الخارجية إلى المركز. افترض أن راميًا يستخدم هدفًا بنصف قطر يبلغ 60 سنتيمترًا يطلق السهام بالإحداثيات $(41, 315°)$، $(57, 45°)$، $(15, 240°)$. (المثالان 1 و 2)



a. عيّن نقاط إصابة الهدف التي يحققها الرامي على شبكة قطبية.
b. كم عدد النقاط التي يحرزها الرامي؟ **13 نقطة**
a. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \le 360°$ أو $-2\pi < \theta \le 2\pi$. (المثال 3)

14-21. انظر الهامش.

14. $(1, 150°)$
15. $(-2, 300°)$
16. $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
17. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
19. $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
20. $(2, -30°)$
21. $(-1, -240°)$

22. **القفز الحر** في منافسات الهبوط الدقيق، يحاول لاعبو القفز الحر الهبوط في أقرب نقطة ممكنة من "المركز الدقيق". مركز هدف علامته قرص قطره متران. (المثال 4)

a. اكتب المعادلات القطبية التي تمثل الحدود الثلاثة للهدف. **$r = 1, r = 10, r = 20$**
b. مثّل المعادلات بيانيًا على شبكة قطبية. **انظر الهامش.**

23-28. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. (المثال 4)

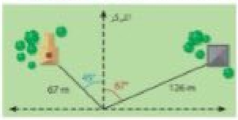
23. $r = 4$
24. $\theta = 225°$
25. $r = 1.5$
26. $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
27. $\theta = -15°$
28. $r = -3.5$

29. **لوح تصويب** يبلغ نصف قطر لوح تصويب 225 مليمترًا. تنقسم النقطة المركزية إلى قسمين. قسم يعطي 50 نقطة بنصف قطر 6.3 مليمترات. يحيط القسم الـ 25 نقطة بقسم الـ 50 نقطة بعد مسافة 9.7 مليمترات أخرى. (المثال 4)
a. اكتب مع التمثيل البياني المعادلات القطبية التي تمثل حدود لوح التصويب وهذين القسمين.
b. ما النسبة المئوية لمساحة نقطة الهدف من مساحة لوحة التصويب؟ **≈0.5%**
a. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. (المثال 5)

30. $(2, 30°), (5, 120°)$ **≈5.39**
31. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ **≈10.70**
32. $(6, 45°), (-3, 300°)$ **≈5.97**
33. $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ **8**
34. $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ **1**
35. $(4, -315°), (1, 60°)$ **≈3.05**
36. $(-2, -30°), (8, 210°)$ **≈ 7.21**
37. $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ **5**
38. $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ **≈4.84**
39. $(7, -90°), (-4, -330°)$ **≈6.08**
40. $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **≈4.26**
41. $(-5, 135°), (-1, 240°)$ **≈5.35**

42. **مسح الأراضي** يقوم ماسح الأراضي بوضع خريطة الأرض التي سيتم بناء مشروع سكني جديد عليها ويضع علامة على مسافة 67 مترًا من المركز بزاوية 45 درجة إلى يساره. تقع العلامة الثانية على مسافة 126 مترًا من المركز بزاوية 67 درجة إلى يمينه. حدد المسافة بين العلامتين. (المثال 5) **163 m**



43. **المراقبة** تتحرك كاميرا مراقبة مثبتة وتراقب أحد أجزاء منطقة دائرية محددة بواسطة $-60° \le \theta \le 150°$ و $0 \le r \le 40$، حيث تُقاس r بالمتر.
a. ارسم تمثيلًا بيانيًا لمنطقة تغطية الكاميرا الأمنية على شبكة قطبية.
b. أوجد مساحة المنطقة. **حوالي $2932.2\ m^2$**
a. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أوجد زوجًا مختلفًا للإحداثيات القطبية لكل نقطة بحيث تكون $0 \le \theta \le 180°$ أو $0 \le \theta \le \pi$.

44. $(5, 960°)$ **$(-5, 60°)$**
45. $\left(-2.5, \frac{5\pi}{2}\right)$ **$\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$**
46. $\left(4, \frac{11\pi}{4}\right)$ **$\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$**
47. $(1.25, -920°)$ **$(1.25, 160°)$**
48. $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ **$\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$**
49. $(-6, -1460°)$ **$(6, 160°)$**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-42 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورقة الشبكة القطبية يحتاج الطلاب عند حل التمارين في هذا الدرس إلى ورقة الشبكة القطبية.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 30-41 قد يحسب الطلاب المسافة بين النقطتين القطبيتين بطريقة خاطئة. اقترح عليهم أن يعيدوا التحقق عند تعويض قيمة سالبة محل θ في قانون المسافة القطبية. أو اقترح عليهم أن يضبطوا الآلة الحاسبة على الدرجات أو الراديان بحسب ما هو مذكور في المسألة.

تحليل الخطأ ينبغي أن يرى الطلاب في التمرين 65 أن علياء قد رسمت خطأ النقطة 5 وحدات من المحور القطبي، بحيث تميل على شعاع بزاوية 45° فوق المحور القطبي.

إجابات إضافية

14. $(-1, 330°), (1, -210°), (-1, -30°)$
15. $(2, 120°), (2, -240°), (-2, -60°)$
16. $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, -\frac{\pi}{6}\right)$
17. $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, -\frac{\pi}{3}\right), \left(-3, -\frac{4\pi}{3}\right)$
18. $\left(5, -\frac{\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, -\frac{7\pi}{6}\right)$
19. $\left(5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, -\frac{\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right)$
20. $(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$
21. $(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

22b.

إجابات إضافية

57. الإجابة النموذجية: $\theta = \frac{\pi}{12}$

58. $r = 2.5$ أو $r = -2.5$

59. $r = 4$ أو $r = -4$

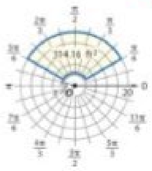
60. الإجابة النموذجية: $\theta = 135°$

50. **مسرح مدرج دائري** افترض أن مغنيًا يقدم عرضًا في مسرح مدرج دائري يمكننا تمثيل هذا الموقف بإحداثيات قطب بافتراض أن المغني يقف عند القطب ويتجه نحو المحور القطبي. بعد ذلك يمكن وصف المقاعد بأنها تشغل المساحة المحددة بالعلاقة $-45° \le \theta \le 45°$ و $9 \le r \le 72$، حيث يتم قياس r بالأمتار. **a. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذه المنطقة على شبكة قطبية.

b. إذا كان كل شخص يحتاج إلى مساحة 0.45 متر مربع، فكم عدد المقاعد التي يمكن للمسرح المدرج الدائري استيعابها؟ **حوالي 8906 مقاعد**

51. **الأمان** يضيء مصباح أمان معلق فوق منزل جزءًا من منطقة دائرية تتحدد بالعلاقة $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ و $x \le r \le 6$، حيث يتم قياس r بالأمتار. إذا كان إجمالي مساحة المنطقة يبلغ 28.27 مترًا مربعًا تقريبًا فأوجد x. **$\approx 3m$**



أوجد قيمة للإحداثي المفقود التي تحقق الشرط التالي.

52. $P_1 = (3, 35°); P_2 = (r, 75°); P_1P_2 = 4.174$ **$r \approx -1.404 = 6$**

53. $P_1 = (5, 125°); P_2 = (2, \theta); P_1P_2 = 4; 0 \le \theta \le 180°$ **$\approx 174.46°$**

54. $P_1 = (3, \theta); P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right); P_1P_2 = 5; 0 \le \theta \le \pi$ **$\frac{5\pi}{18}$**

55. $P_1 = (r, 120°); P_2 = (4, 160°); P_1P_2 = 3.297$ **$r = 1 = 5.13$**

56a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

56. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

a. **بيانيًا** مثل النقطتين $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. ارسم نظامًا إحداثيًا متعامدًا على شبكة قطبية بحيث تتطابق نقاط الأصل ويتوازى المحور x مع المحور القطبي. ينبغي أن يتوازى المحور y مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. اصنع مثلثًا واحدًا قائم الزاوية عن طريق توصيل النقطة A بنقطة الأصل عموديًا على المحور x. اصنع مثلثًا آخر قائم الزاوية عن طريق توصيل B بنقطة الأصل عموديًا على المحور x.

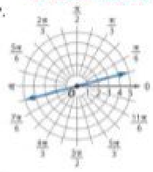
b. **عدديًا** احسب أطوال أضلاع كل مثلث.

c. **تحليليًا** ما العلاقة بين أطوال الأضلاع والإحداثيات المتعامدة لكل نقطة؟

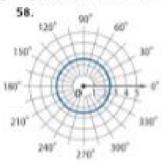
d. **تحليليًا** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) والإحداثيات المتعامدة (x, y).

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني قطبي. **57–60. انظر الهامش.**

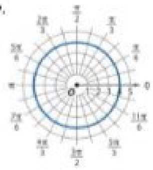
57.



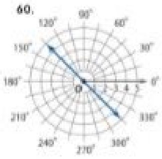
58.



59.



60.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. **التبرير** اشرح السبب في أن ترتيب النقاط المستخدم في قانون المسافة القطبية ليس مهمًا. بمعنى لماذا تستطيع أن تختار أيًا من النقطتين لتكون P_1 والأخرى لتكون P_2؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

62. **تحدٍ** أوجد زوجًا مرتبًا لإحداثيات قطب ليمثل النقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(-3, -4)$. ثم بتقريب قياس الزاوية إلى أقرب درجة. **$(5, 233°)$**

63. **البرهان** أثبت أن المسافة بين النقطتين ذواتي الإحداثيات القطبية $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$. (إرشاد: استخدم قانون Cosine) **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

64. **التبرير** صف ما يحدث لصيغة المسافة القطبية عندما تكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. اشرح هذا التغير. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

65. **تحليل الخطأ** مثّلت كل من علياء وعبير الإحداثيات القطبية $(5, 45°)$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

66. **الكتابة في الرياضيات** قم بتخمين سبب عدم كفاية الحصول على الإحداثيات القطبية لطائرة لتحديد موقعها بدقة.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب أن يكتبوا بضع جمل يقارنون فيها ويوازنون بين النظام الإحداثي القطبي ونظام الإحداثيات المتعامدة.

مراجعة شاملة

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v، ثم حدد ما إذا كانت u و v متعامدتين.

67. $u = \langle 4, 10, 1\rangle, v = \langle -5, 1, 7\rangle$ -3، غير متعامدتين

68. $u = \langle -5, 4, 2\rangle, v = \langle -4, -9, 8\rangle$ 0؛ متعامدتان

69. $u = \langle -8, -3, 12\rangle, v = \langle 4, -6, 0\rangle$ -14، غير متعامدتين

أوجد قيمة كل مما يلي حيث $a = \langle -4, 3, -2\rangle$ و $b = \langle 2, 5, 1\rangle$ و $c = \langle 3, -6, 5\rangle$.

70. $3a + 2b + 8c$ $\langle 16, -29, 36\rangle$

71. $-2a + 4b - 5c$ $\langle 1, 44, -17\rangle$

72. $5a - 9b + c$ $\langle -35, -36, -14\rangle$

73. **المعرض الوطني** إذا اشترى كل من سعيد وسلطان العدد الموضح أدناه من تذاكر الألعاب والأراجيح، فما سعر كل نوع من التذاكر؟ لعبة، AED 3؛ أرجوحة، AED 5

الشخص	نوع التذكرة	التذاكر	الإجمالي (AED)
سعيد	لعبة أرجوحة	6 15	93
سلطان	لعبة أرجوحة	7 12	81

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية. 74–76. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

74. $12w + 14x - 10y = 23$
$4w - 5y + 6z = 33$
$11w - 13x + 2z = -19$
$19x - 6y + 7z = -25$

75. $-6x + 2y + 5z = 18$
$5x - 7y + 3z = -8$
$y - 12z = -22$
$8x - 3y + 2z = 9$

76. $x + 8y - 3z = 25$
$2x - 5y + 11z = 13$
$-5x + 8z = 26$
$y - 4z = 17$

حُل كل معادلة لإيجاد جميع قيم x.

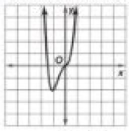
77. $2\cos^2 x + 5\sin x - 5 = 0$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

78. $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$ $\frac{3\pi}{4} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

79. $\cos^2 x + 3\cos x = -2$ $(2n + 1)\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT إذا كان الشكل يوضح أحد أجزاء التمثيل البياني لـ $f(x)$، فأي مما يلي يمكن أن يكون مدى $f(x)$؟ A

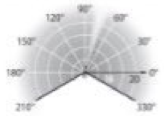


A $\{y \mid y \geq -2\}$
B $\{y \mid y \leq -2\}$
C $\{y \mid -2 < y < 1\}$
D $\{y \mid -2 \leq y \leq 1\}$
E $\{y \mid y > -2\}$

81. **مراجعة** أي مما يلي صورة مركبة من $\overline{RS}$ بنقطة البداية $R(-5, 3)$ ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟ F

F $\langle 7, -10\rangle$
G $\langle -3, 10\rangle$
H $\langle -7, 10\rangle$
J $\langle -3, -10\rangle$

82. رشاش العشب الموضح يمكنه تغطية جزء من منطقة دائرية تحدده المتباينتان القطبيتان $-30° \leq \theta \leq 210°$ و $0 \leq r \leq 6$، حيث يتم قياس r بالأمتار. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟ B



A 73.89 مترًا مربعًا
B 75.42 مترًا مربعًا
C 76.68 مترًا مربعًا
D 77.94 مترًا مربعًا

83. **مراجعة** ما نوع المخروط الذي يمثله $25y^2 = 400 + 16x^2$؟ H

F دائرة
G قطع ناقص
H قطع زائد
J قطع مكافئ

التدريس المتمايز BL

التوسع حدد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة.

- $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ $A(0, 4)$
- $B(2, 270°)$ $B(0, -2)$
- $C(3, \pi)$ $C(-3, 0)$
- $D(1, 360°)$ $D(1, 0)$

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني في استكشاف أشكال التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية وتناظرها.

نصيحة للتدريس
عند ضبط النافذة للتمثيل البياني للمعادلات القطبية، ينبغي أن يلاحظ الطلاب أن القيم، مثل 2π و $\frac{\pi}{24}$ تتحول إلى تقديرات الكسور العشرية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
قسم الطلاب ذوي القدرات المختلفة إلى مجموعات ثنائية. واطلب منهم العمل على حل النشاط والتمارين 9-1.

اطرح الأسئلة التالية:

- في التمارين 3-1. ما التغييرات بين التمثيل البياني والذي يليه؟ موقع الدائرة
- في التمارين 6-4. ما التغييرات بين التمثيل البياني والذي يليه؟ عدد الأوراق والتناظر
- في التمارين 9-7. ما التغييرات بين التمثيل البياني والذي يليه؟ حجم المنحنى قلبي الشكل

تدريب اطلب من الطلاب إتمام تحليل نتائج التمرينين 10 و 11.

3 التقويم

التقويم التكويني
استخدم التمرين 10 في تقويم ما إذا كان الطلاب يستوعبون كيف أن شكل وتناظر التمثيل البياني للمعادلة القطبية يتأثر بالقيم المستخدمة في المعادلة.

9-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

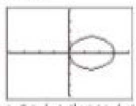
الهدف
- استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف أشكال التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية وتناظرها

في الدرس 9-1، مثّلت إحداثيات القطب ومعادلات قطبية بسيطة بيانيًا على النظام الإحداثي القطبي. ستتعرف الآن على الشكل والتناظر في التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا للمعادلات القطبية باستخدام حاسبة تمثيل بياني.

النشاط 1 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا، ثم صف شكل التمثيل البياني وتناظره.

a. $r = 3\cos\theta$

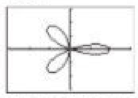


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

قم أولاً بتغيير وضع التمثيل البياني إلى القطبي ووضع الزاوية إلى الراديان. ثم أدخل $r = 3\cos\theta$ حيث r_1 في قائمة =Y. استخدم النافذة المعروضة.

تمثيل $r = 3\cos\theta$ البياني على شكل دائرة مركزها عند $(1.5, 0)$ ونصف قطرها 1.5 وحدة. التمثيل البياني متناظر مع المحور القطبي.

b. $r = 2\cos 3\theta$

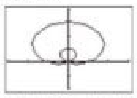


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

امسح المعادلة الناتجة من القسم **a** في القائمة =Y وأدخل $r = 2\cos 3\theta$. استخدم النافذة المعروضة.

تمثيل $r = 2\cos 3\theta$ البياني عبارة عن منحنى قطبي كلاسيكي يسمى وردة، وسيتناوله الدرس 9-2. يحتوي التمثيل البياني على 3 أوراق ويتناظر مع المحور القطبي.

c. $r = 1 + 2\sin\theta$



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-2, 4]$ scl: 1

امسح المعادلة الناتجة من القسم **b** في القائمة =Y. وأدخل $r = 1 + 2\sin\theta$. اضبط النافذة لعرض التمثيل البياني بالكامل.

تمثيل $r = 1 + 2\sin\theta$ البياني عبارة عن منحنى قطبي كلاسيكي يسمى منحنى قلبي الشكل، وسيتناوله الدرس 9-2. التمثيل البياني له منحنى بحلقة داخلية ويتناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

نصيحة دراسية
حوّل النافذة إلى الشكل المربع لعرض التمثيلات البيانية في هذا النشاط دون أي تشويه. حوّل النافذة إلى الشكل المربع عبر اختيار ZSquare تحت القائمة ZOOM.

التمارين

مثّل كل معادلة بيانيًا، ثم صف شكل التمثيل البياني وتناظره.

1. $r = -3\cos\theta$
2. $r = 3\sin\theta$
3. $r = -3\sin\theta$
4. $r = 2\cos 4\theta$
5. $r = 2\cos 5\theta$
6. $r = 2\cos 6\theta$
7. $r = 2 + 4\sin\theta$
8. $r = 1 - 3\sin\theta$
9. $r = 1 + 2\sin(-\theta)$

9-1. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

تحليل النتائج

10. **تحليل** اشرح كيف تؤثر كل قيمة في التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.
    a. قيمة n في $r = a\cos n\theta$
    b. قيمة $|a|$ في $r = b \pm a\sin n\theta$

    الإجابة النموذجية: يتمدد التمثيل البياني لـ $r = b \pm a\sin n\theta$ بزيادة $|a|$.

11. **التخمين** دون أن تلجأ للتمثيل البياني للمتباينة $r = 10\cos 24\theta$. صف شكل التمثيل البياني لها وتناظره. اشرح استنتاجك.

10a. الإجابة النموذجية: إذا كان n عددًا فرديًا، فسيكون عدد الأوراق مساويًا لـ n؛ وإذا كان n عددًا زوجيًا، فسيكون عدد الأوراق مساويًا لـ $2n$.

11. الإجابة النموذجية: بما أن المعادلة مشابهة لتمثيل $r = 2\cos 4\theta$ البياني، وهو وردة، فإن $r = 10\cos 24\theta$ سيكون وردة أيضًا. بما أن n عدد زوجي، فستحتوي الوردة على $2(24)$ أو 48 ورقة وستكون متناظرة مع المحور القطبي والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

من العملي إلى النظري
استخدم التمرين 11 في سد الفجوة بين وصف التمثيل البياني للمعادلة القطبية بتمثيلها بيانيًا لوصف التمثيل البياني من خلال تحليل المعادلة.

توسيع المفهوم
استعدادًا لدراسة التمثيل البياني للمعادلات القطبية بتحديد النقاط، اطلب من الطلاب الضغط على [TABLE] [2nd] ثم رسم التمثيل البياني الكافي للإحداثيات القطبية على الورقة، بحيث يتكون الشكل العام للتمثيل البياني باستخدام هذه الإحداثيات فقط.

9-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمت بتمثيل الدوال بيانيا في النظام الإحداثي المتعامد.	1 تمثيل المعادلات القطبية بيانيا. 2 تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيا.	• للحد من الضوضاء في الخلفية، تستخدم الشبكات التي تبث الفعاليات الرياضية ميكروفونات اتجاهية لالتقاط أصوات المباراة. تتمتع الميكروفونات الاتجاهية بالقدرة على التقاط الصوت من اتجاه واحد أو منطقة واحدة بالأساس. يمكن التعبير عن الأصوات التي تستطيع هذه الميكروفونات تتبعها بدوال قطبية.

المفردات الجديدة
منحنى قلبي الشكل limaçon
قلبي الشكل cardioid
منحنى الوردة rose
منحنى ذو عروتين lemniscate
حلزون أرشميدس spiral of Archimedes

1 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

عندما مثلت المعادلات بيانيا على نظام إحداثي متعامد، بدأت باستخدام معادلة للحصول على مجموعة من الأزواج المرتبة. ثم عينت هذه الإحداثيات كنقاط وقمت بالتوصيل بينها بمنحنى منتظم. في هذا الدرس، ستتعامل مع تمثيل المعادلات القطبية بيانيا بأسلوب مشابه.

مثال 1 تمثيل المعادلات القطبية بتحديد النقاط

مثّل كل معادلة بيانيا.

a. $r = \cos\theta$

اصنع جدول قيم لإيجاد قيم r المتوافقة مع قيم θ المختلفة على الفترة $[0, 2\pi]$. ثم بتقريب كل قيمة من قيم r إلى أقرب جزء من عشرة.

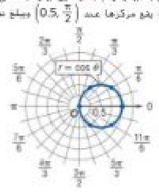
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \cos\theta$	1	0.9	0.5	0	−0.5	−0.9	−1	−0.9	−0.5	0	0.5	0.9	1

مثّل الأزواج المرتبة (r, θ) بيانيا وقم بالتوصيل بينها بمنحنى منتظم. يبدو أن التمثيل البياني المعروض في الشكل 9.2.1 عبارة عن دائرة يقع مركزها عند $(0.5, 0)$ ويبلغ نصف قطرها 0.5 وحدة.

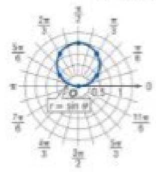
b. $r = \sin\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \sin\theta$	0	0.5	0.9	1	0.9	0.5	0	−0.5	−0.9	−1	−0.9	−0.5	0

مثّل الأزواج المرتبة بيانيا وقم بالتوصيل بينها بمنحنى منتظم. يبدو أن التمثيل البياني المعروض في الشكل 9.2.2 عبارة عن دائرة يقع مركزها عند $\left(0.5, \frac{\pi}{2}\right)$ ويبلغ نصف قطرها 0.5 وحدة.



الشكل 9.2.1



الشكل 9.2.2

تمرين موجّه 1A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

1A. $r = -\sin\theta$ 1B. $r = 2\cos\theta$ 1C. $r = \sec\theta$

لاحظ أنه مع زيادة θ في $[0, 2\pi]$، يتم تتبع كل تمثيل بياني بالأعلى مرتين. وهذا لأن الإحداثيات القطبية التي تم الحصول عليها في $[0, \pi]$ تمثل النقاط نفسها التي تم الحصول عليها في $[\pi, 2\pi]$.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-2 التمثيل البياني للدوال في النظام الإحداثي المتعامد.

الدرس 9-2 التمثيل البياني للمعادلات القطبية. تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيا.

بعد الدرس 9-2 التحويل بين المعادلات القطبية والمتعامدة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الخطوات التي ستتخذها في التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x$؟ الإجابة النموذجية: رسم جدول لقيم x و y. تحديد النقاط على شبكة الإحداثيات. ثم توصيل النقاط لتكوين مستقيم.
- ما أوجه الاختلاف بين المعادلة $r = \cos\theta$ والمعادلة $y = 3x$؟ بدلاً من إنتاج حلول بالشكل (x, y). تنتج المعادلة $r = \cos\theta$ حلولاً بالشكل (r, θ).

- كيف تقارن بين التمثيل البياني لـ $r = \cos\theta$ والتمثيل البياني لـ $y = 3x$؟ الإجابة النموذجية: ارسم جدولاً للقيم المشتملة على r باعتبارها المسافة الموجهة إلى كل نقطة وعلى θ باعتبارها الزاوية الموجهة. ارسم النقاط على شبكة قطبية بدلاً من شبكة متعامدة، ثم صل النقاط بمنحنى منتظم.

1 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

يبين **المثال 1** كيفية التمثيل البياني للدوال القطبية من خلال تحديد النقاط. ويبين **المثال 2** كيفية التمثيل البياني للمعادلات القطبية باستخدام تناظر المحور القطبي. ويبين **المثال 3** كيفية التمثيل البياني للمعادلات القطبية باستخدام التناظر بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ويبين **المثال 4** كيفية استخدام التناظر والأصفار وقيم r العظمى في معادلة للتمثيل البياني للمعادلة.

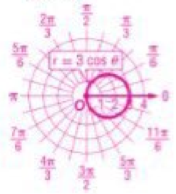
التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $r = 3\cos\theta$



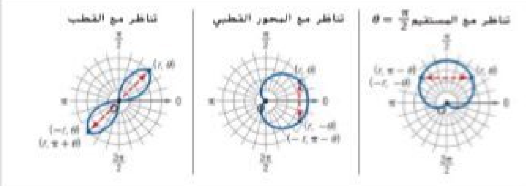
b. $r = 3\sin\theta$
انظر الهامش.

2 استخدم التناظر لتمثيل $r = 1 - 3\cos\theta$ بيانيًا. انظر الهامش.

ولما هو الحال بالنسبة إلى معرفة ما إذا كان التمثيل البياني في النظام الإحداثي المتعامد ينطوي على تناظر من حيث المحور x أو المحور y أو الأصل، فإن معرفة ما إذا كان التمثيل البياني لمعادلة قطبية متناظرًا أم لا يمكن أن يساعد في الحد من عدد النقاط المطلوبة لرسم تمثيلها البياني. يمكن أن تكون التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية متناظرة مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو المحور القطبي، أو القطب، كما هو موضح أدناه.

المفهوم الأساسي تناظر التمثيلات البيانية القطبية

تناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ | تناظر مع المحور القطبي | تناظر مع القطب



تقدم التعريفات البيانية أعلاه طريقة لاختبار معادلة قطبية من حيث التناظر. على سبيل المثال، إذا كان استبدال (r, θ) في معادلة قطبية بـ $(r, -\theta)$ أو $(-r, \pi - \theta)$ ينتج معادلة مكافئة، فإن تمثيلها البياني متناظر مع المحور القطبي. إذا اجتازت معادلة في أحد اختبارات التناظر، فهذا يكفي لضمان أن المعادلة تنطوي على ذلك النوع من التناظر. إلا أن العكس ليس صحيحًا. إذا فشلت معادلة قطبية في كل هذه الاختبارات، فربما يظل التمثيل البياني منطويًا على تناظر.

مثال 2 التناظر مع المحور القطبي

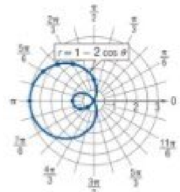
استخدم التناظر في تمثيل $r = 1 - 2\cos\theta$ بيانيًا.

بالتعويض من (r, θ) بـ $(r, -\theta)$ ينتج $r = 1 - 2\cos(-\theta)$. ولأن cosine دالة زوجية، $\cos(-\theta) = \cos\theta$. فيتم تبسيط هذه المعادلة إلى $r = 1 - 2\cos\theta$. ولأن التعويض أنتج معادلة تعادل المعادلة الأصلية، فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة متناظر مع المحور القطبي.

بسبب هذا التناظر، تحتاج فقط إلى عمل جدول قيم لإيجاد قيم r المقابلة لـ θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 1 - 2\cos\theta$	−1	−0.7	−0.4	0	1	2	2.4	2.7	3

بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التناظر مع المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.



يُسمى نوع المنحنى **منحنى قلبي الشكل**. تحتوي بعض المنحنيات قلبية الشكل على حلقات داخلية مثل هذه. تصل بعض المنحنيات الأخرى قلبية الشكل إلى نقطة معينة أو تكون لها نقرة أو تنحني فقط إلى الخارج.

نصيحة دراسية
تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا
من المألوف تمثيل الدوال القطبية بيانيًا بوحدات الراديان بدلاً من الدرجات.

تمرين موجّه

استخدم التناظر في تمثيل كل معادلة بيانيًا. **2A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

2A. $r = 1 - \cos\theta$

2B. $r = 2 + \cos\theta$

في المثالين 1 و 2، لاحظ أن التمثيلين البيانيين $r = \cos\theta$ و $r = 1 - 2\cos\theta$ متناظران مع المحور القطبي، بينما التمثيل البياني $r = \sin\theta$ متناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. يمكن تعميم هذه الملاحظات كالتالي.

المفهوم الأساسي اختبارات سريعة على التناظر في التمثيلات البيانية القطبية

الشرح يكون التمثيل البياني لمعادلة قطبية متناظراً مع
- المحور القطبي إذا كانت المعادلة تمثل دالة من $\cos\theta$
- المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت المعادلة تمثل دالة من $\sin\theta$

مثال التمثيل البياني لـ $r = 3 + \sin\theta$ متناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$

ستقوم بتعليل هذه الاختبارات في مسائل معينة في التمرين 66–65.

يمكن استخدام التناظر في تمثيل الدوال القطبية التي تعبر عن مواقف من الحياة اليومية بيانياً.

مثال 3 من الحياة اليومية التناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$

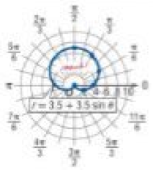
تقنية صوتية أثناء حفل موسيقي، تم وضع ميكروفون اتجاهي باتجاه الجمهور من مركز المسرح ليلتقط ضوضاء الجمهور للحصول على تسجيل مباشر. يمكن تمثيل مساحة الصوت التي يلتقطها الميكروفون بحساب $r = 3.5 + 3.5\sin\theta$. افترض أن واجهة المسرح تتجه نحو الشمال.

a. مثّل النمط القطبي للميكروفون بيانيًا.

بما أن هذه المعادلة القطبية دالة من دوال sine، إذا فهي متناظرة مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ولهذا، ارسم جدولاً واحسب قيم r على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = 3.5 + 3.5\sin\theta$	0	0.5	1.0	1.8	3.5	5.25	6.0	6.5	7

بتعيين هذه النقاط واستخدام التناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$، تحصل على التمثيل البياني الظاهر. هذا النوع من المنحنيات يسمى **قلبي الشكل**. يعتبر المنحنى قلبي الشكل نوعا خاصا من المنحنيات الصدفية له شكل قلب.



b. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن الميكروفون.

يشير النمط القطبي إلى أن الميكروفون سوف يلتقط أصواتا تبعد حتى 7 وحدات عن واجهة الميكروفون المباشرة، وحتى تبعد 3.5 وحدات للأصوات على يمين الميكروفون أو يساره مباشرة.

تمرين موجّه 3A–B. انظر الهامش.

3. تسجيل فيديو تسجل إحدى مدرسات المدارس الثانوية أشرطة فيديو للعروض التي تقدمها طالباتها باستخدام كاميرا فيديو ثابتة موضوعة في الغرفة من الخلف. يمكن تمثيل مساحة الصوت الذي يلتقطه ميكروفون الكاميرا بالعلاقة $r = 5 + 2\sin\theta$. افترض أن واجهة الصف الدراسي تتجه نحو شمال الكاميرا.

A. مثّل النمط القطبي للميكروفون بيانيًا.

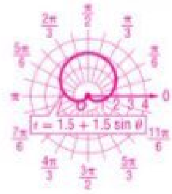
B. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن الميكروفون.

انتبه!
التمثيل البياني على الفترة تكفي في العادة فترة الدالة المثلثية المستخدمة في معادلة قطبية لتعقب التمثيل البياني بالكامل. لكنها لا تكفي أحيانا. الطريقة الأمثل لتعرف ما إذا كنت قد رسمت تمثيلاً بيانيا كافيا لتمييز نمط معين هي أن تعين المزيد من النقاط.

مثال إضافي

3 تكنولوجيا الإنارة يمكن تمثيل منطقة تتم إنارتها بواسطة مصباحين وينعكس ضوؤهما على مسرح من خلال المعادلة $r = 1.5 + 1.5\sin\theta$. افترض أن واجهة المسرح تتجه نحو الجنوب.

a. مثّل النمط القطبي للمصباحين بيانيًا



b. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن المصباحين. الإجابة النموذجية: يبين النمط القطبي أن المصباحين سينيران جزءًا كبيرا باتجاه نهاية المسرح، ولكنهما لن يضيئا جزءًا كبيرًا جدا في محاذاة حافة المسرح نحو الجمهور.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3A.

3B. يشير النمط القطبي أن مكبر الصوت سوف يلتقط أصواتا تبعد حتى 7 وحدات عن واجهة مكبر الصوت المباشرة، وحتى تبعد 5 وحدات للأصوات على يمين مكبر الصوت أو يساره مباشرة.

542 | الدرس 9-2 | التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

استخدمت فيما سبق النقاط العظمى والصغرى إلى جانب الأصفار للمساعدة في التمثيل البياني للدوال المثلثية. في التمثيل البياني لدالة قطبية، تصل r إلى أقصى مدى لها لإحدى قيم θ عندما تصل المسافة بين تلك النقطة (r, θ) والقطب إلى أقصى اتساع لها. للتوصل إلى النقطة (النقاط) العظمى على التمثيل البياني لمعادلة قطبية، أوجد قيم θ التي تصل $|r|$ عندها إلى أقصى مدى لها. وكذلك إذا كانت $r = 0$ عند بعض قيم θ، فنعلم أن التمثيل البياني يتقاطع مع القطب.

مثال 4 التناظر، والأصفار، وقيم r العظمى

استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل $r = 2\cos 3\theta$ بيانيًا.

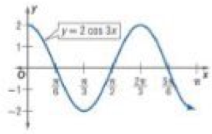
حدد تناظر التمثيل البياني.

هذه الدالة متناظرة مع المحور القطبي. لذا يمكنك إيجاد النقاط في الفترة $[0, \pi]$ ثم استخدام التناظر مع المحور القطبي لإكمال التمثيل البياني.

أوجد الأصفار وقيم r العظمى.

ارسم التمثيل البياني للدالة المتعامدة $y = 2\cos 3x$ في الفترة $[0, \pi]$.

من التمثيل البياني، تعرف أن $|y| = 2$ عندما تكون $x = 0$، و $\frac{\pi}{3}$، و $\frac{2\pi}{3}$، و π وتعرف أن $y = 0$ عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، و $\frac{\pi}{2}$، و $\frac{5\pi}{6}$.



بتفسير هذه النتائج بدلالة المعادلة القطبية $r = 2\cos 3\theta$، يمكننا القول بأن $|r|$ تصل لقيمتها العظمى 2 عندما تكون $\theta = 0$ أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π ومن $r = 0$ عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$.

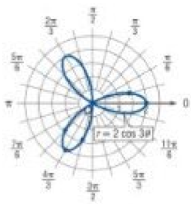
مثّل الدالة بيانيًا.

استخدم هذه النقاط وبعض النقاط الإضافية لرسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$r = 2\cos 3\theta$	2	1.4	0	−1	−2	−1.4	0	1.4	2	1.4	0	−1.4	−2

لاحظ أن التناظر مع المحور القطبي يمكن استخدامه لإكمال التمثيل البياني بعد تحديد موضع النقاط على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

يسمى هذا النوع من المنحنيات **الوردة**. يمكن أن تحتوي منحنيات الوردة على ثلاث حلقات متساوية أو أكثر.



تمرين موجّه

استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا. **4A–B، انظر الهامش.**

4A. $r = 3\sin 2\theta$

4B. $r = \cos 5\theta$

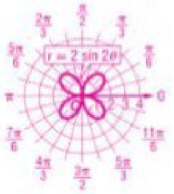
نصيحة دراسية

أسلوب بديل

عند حل الدالة المتعامدة $y = 2\cos 3x$، نجد أن الدالة تحتوي على قيم عظمى عندما تكون $x = 0$، أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π وعلى المنوال نفسه، تحتوي الدالة على أصفار عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$

مثال إضافي

4 استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل $r = 2\sin 2\theta$ بيانيًا.

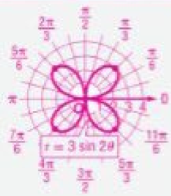


التدريس باستخدام التكنولوجيا

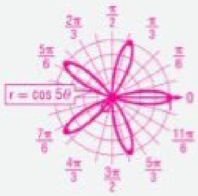
دفتر الملاحظات في دفتر الملاحظات اليومية الخاصة بالصف الدراسي، اطلب من الطلاب كتابة ملاحظة يفسرون فيها كيفية تحديد التناظر والأصفار وقيم r العظمى في دالة قطبية بالصيغة $r = a\cos n\theta$ وكيفية استخدام هذه المعلومات في تمثيل المعادلة بيانيًا.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4A.



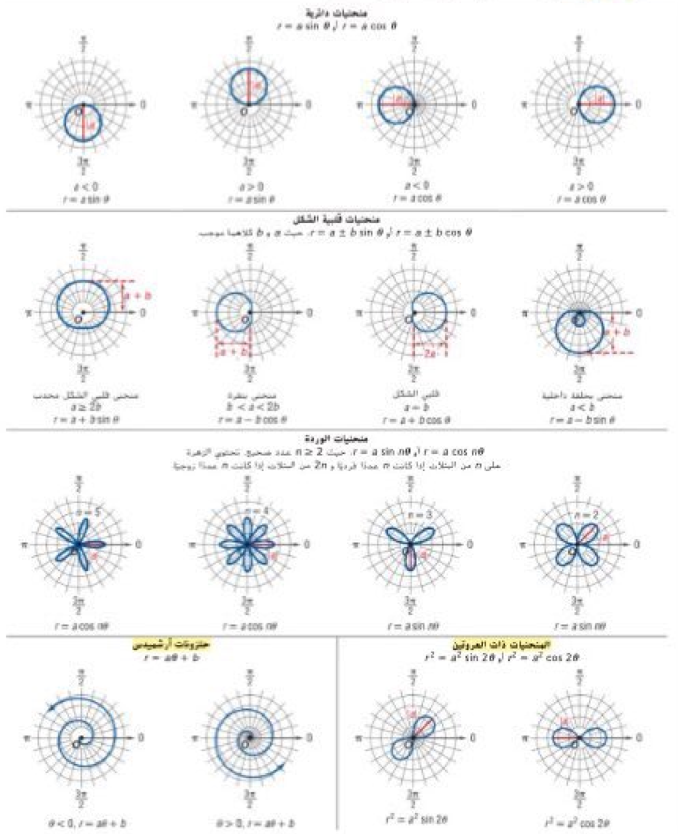
4B.



2 المنحنيات القطبية الكلاسيكية

الدوائر والمنحنيات صدفية الشكل والمنحنيات قلبية الشكل ومنحنيات الوردة من أمثلة المنحنيات الكلاسيكية. يتم تلخيص الأشكال والتمثيلات البيانية لنماذج هذه المنحنيات وغيرها من المنحنيات الكلاسيكية فيما يلي.

ملخص المفهوم أنواع خاصة من التمثيلات البيانية القطبية



التدريس المتمايز AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي/الموسيقي توجد العديد من أنواع مكبرات الصوت، منها مكبر الصوت قلبي الشكل، وشبه القلبي، وثنائي الاتجاه، وأحادي الاتجاه. وتبين الأنماط القطبية حساسية مكبرات الصوت بالنسبة إلى موقع مصدر الصوت. اطلب من الطلاب البحث عن مختلف أنواع مكبرات الصوت. إذا كانت المعدات متاحة، اطلب منهم قياس حساسية مكبر الصوت كدالة من زاوية مصدر الصوت. وناقش معهم أنواع مكبرات الصوت الأكثر مناسبة لمختلف المواقف.

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال في النظام الإحداثي المتعامد، يكون التمثيل البياني لـ $x^2 + y^2 = 1$ هو تمثيل بياني لدائرة وحدة، وهي ليست دالة. ومع ذلك، فهو تمثيل بياني لدالتين: التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{1-x^2}$ للنصف العلوي من الدائرة والتمثيل البياني لـ $y = -\sqrt{1-x^2}$ للنصف السفلي من الدائرة. في النظام الإحداثي القطبي، يكون التمثيل البياني لدائرة وحدة بالمعادلة $r = \cos \theta$ أو $r = \sin \theta$ هو دالة. لاحظ أن اختبار المستقيم الرأسي للدوال يكون صالحًا فقط للمعادلات الممثلة بيانيًا في نظام إحداثي متعامد.

2 المنحنيات القطبية الكلاسيكية

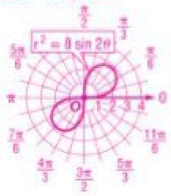
يبين **المثال 5** كيفية تحديد التناظر والأصفار وقيم r العظمى في منحنى قطبي كلاسيكي لتمثيل المعادلة بيانيًا.

مثال إضافي

2 حدد نوع المنحنى الناتج عن كل معادلة. ثم حدد التناظر والأصفار وقيم r العظمى الخاصة بها. واستخدم هذه المعلومات في التمثيل البياني للدالة.

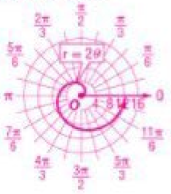
a. $r^2 = 8 \sin 2\theta$

منحنى ذو عروتين؛



b. $r = 2\theta, \theta > 0$

حلزون أرشميدس؛



إرشاد للمعلمين الجدد

التمثيلات البيانية القطبية إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في رسم التمثيلات البيانية القطبية باستخدام جدول القيم. فاقترح عليهم استخدام طريقة التمثيل البياني التي تأخذ شكل العجلة والمحاور. اطلب منهم أن يبدؤوا عند $0°$ ويعملوا عبر الدائرة عكس اتجاه عقارب الساعة. وعند كل محور (مضاعفات $30°$ أو $\frac{\pi}{6}$). اطلب منهم إيجاد قيمة r ورسم النقطة (r, θ).

مثال 5 تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيًا

حدد نوع المنحنى الناتج عن كل معادلة. ثم استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى في التمثيل البياني للدالة.

a. $r^2 = 16 \sin 2\theta$

نوع المنحنى والتناظر

المعادلة بالصيغة $r^2 = a^2 \sin 2\theta$، وإذا فإن تمثيلها البياني منحنى ذو عروتين. يؤدي التعويض عن (r, θ) بـ $(-r, \theta)$ إلى $(-r)^2 = 16 \sin 2\theta$ أو $r^2 = 16 \sin 2\theta$. ولهذا فالدالة تحتوي على تناظر مع القطب.

قيم r العظمى والأصفار

المعادلة $r^2 = 16 \sin 2\theta$ تعادل $r = \pm 4\sqrt{\sin 2\theta}$، وهي قيمة غير معرفة عندما تكون $\sin 2\theta < 0$. ولهذا، فإن مجال الدالة يقتصر على الفترتين $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. ولأنك تستطيع استخدام التناظر القطبي، تحتاج فقط إلى التمثيل البياني للنقاط في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. تحقق الدالة قيمة r العظمى $|a|$ أو 4 عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$ وقيمة r الصفرية عندما تكون $x = 0$ و $\frac{\pi}{2}$.

التمثيل البياني

استخدم هذه النقاط والتناظر المشار إليه في رسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	±2.8	±3.7	±4	±3.7	±2.8	0

b. $r = 3\theta$

نوع المنحنى والتناظر

المعادلة بالصيغة $r = a\theta + b$. ولذلك تمثيلها البياني عبارة عن حلزون أرشميدس. يؤدي التعويض عن (r, θ) بـ $(-r, -\theta)$ إلى $(-r) = 3(-\theta)$ أو $r = 3\theta$. ولهذا تحتوي الدالة على تناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

قيم r العظمى والأصفار

الحلزونات غير محدودة. ولذلك، ليس للدالة قيم r عظمى ولكن لها صفرًا وحيدًا عندما تكون $\theta = 0$.

التمثيل البياني

استخدم النقاط على الفترة $[0, 4\pi]$ في رسم التمثيل البياني للدالة. لإظهار التناظر، ينبغي أيضًا تمثيل النقاط بيانيًا على الفترة $[-4\pi, 0]$.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	4π
r	0	2.4	4.7	9.4	14.1	18.8	28.3	37.7

تمرين موجه **5A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

5A. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

5B. $r = 3 \sin 5\theta$

تلميح تقني

إعدادات النافذة تحدد قيمة θ الصغرى وقيمة θ العظمى قيم θ التي سيتم تمثيلها بيانيًا. الإعدادات العادية لهاتين القيمتين هي $\theta min=0$ و $\theta max=2\pi$. على الرغم من أنه قد يكون من الضروري تغيير هاتين القيمتين للحصول على تمثيل بياني كامل. تحدد الخطوة θ فترة تعيين النقاط. كلما انخفضت هذه القيمة كان شكل التمثيل البياني أكثر انتظامًا.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب الإحداثيات القطبية والتمثيلات البيانية للمعادلات القطبية.

اطرح السؤال التالي:

- ما أوجه المقارنة بين النظام الإحداثي القطبي والنظام الإحداثي المتعامد؟ الإجابة النموذجية: النظام الإحداثي القطبي هو نظام ثنائي الأبعاد أيضًا. تحدد النقاط فيه بأزواج مرتبة ويمكن استخدامه في تمثيل الدوال بيانيًا. ولكن في النظام الإحداثي القطبي، يتم تمثيل الإحداثيات بيانيًا بالنسبة إلى محور واحد وليس اثنين. وتحدد الإحداثيات باستخدام زاوية ومسافة. ويختلف النظام القطبي أيضًا من حيث اعتماده على دوائر وليس خطوطًا مستقيمة. مما يعني أنه يمكن تمثيل أي نقطة بأي عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة للإحداثيات القطبية بدلاً من الاعتماد على زوج واحد فقط.

التمارين

1-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مثّل كل معادلة بيانيًا بتعيين النقاط. (المثال 1)

1. $r = -\cos\theta$
2. $r = \csc\theta$
3. $r = \frac{1}{2}\cos\theta$
4. $r = 3\sin\theta$
5. $r = -\sec\theta$
6. $r = \frac{1}{3}\sin\theta$
7. $r = -4\cos\theta$
8. $r = -\csc\theta$

9-16. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم التناظر في التمثيل البياني لكل معادلة. (المثال 2 و 3)

9. $r = 3 + 3\cos\theta$
10. $r = 1 + 2\sin\theta$
11. $r = 4 - 3\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\cos\theta$
13. $r = 2 - 2\sin\theta$
14. $r = 3 - 5\cos\theta$
15. $r = 5 + 4\sin\theta$
16. $r = 6 - 2\sin\theta$

17-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى في تمثيل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $r = \sin 4\theta$
18. $r = 2\cos 2\theta$
19. $r = 5\cos 3\theta$
20. $r = 3\sin 2\theta$
21. $r = \frac{1}{2}\sin 3\theta$
22. $r = 4\cos 5\theta$
23. $r = 2\sin 5\theta$
24. $r = 3\cos 4\theta$

25. **علم الأحياء البحرية** يمكن ملاحظة منحنيات الوردة في الحياة البحرية. حدد التناظر والأصفار وقيم r العظمى في كل دالة تمثل نوعًا من الكائنات البحرية حيث $0 \le \theta \le \pi$ ثم استخدم المعلومات في تمثيل الدالة بيانيًا. (المثال 4)

a. يمكن تمثيل المسام التي تشكل نمط البتلة في أصافير كعك البحر (الشكل 9.2.3) بالعلاقة $r = 3\cos 5\theta$.

b. يمكن تمثيل مخطط جسم نجم البحر الشوكي (الشكل 9.2.4) بالعلاقة $r = 20\cos 8\theta$.

الشكل 9.2.4

الشكل 9.2.3

a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

حدد نوع المنحنى الناتج عن كل معادلة. ثم استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى في التمثيل البياني للدالة. (المثال 5)

26. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
27. $r = 4\theta + 1, \theta > 0$
28. $r = 2\sin 4\theta$
29. $r = 6 + 6\cos\theta$
30. $r^2 = 4\cos 2\theta$
31. $r = 5\theta + 2, \theta > 0$
32. $r = 3 - 2\sin\theta$
33. $r^2 = 9\sin 2\theta$

26-33. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

34. **التزلج الفني على الجليد** كان الموضوع الأصلي للتزلج الفني على الجليد هو حفر أشكال تعرف باسم الأشكال الإجبارية، على الجليد. يمكن تمثيل أحد هذه الأشكال بالعلاقة $r^2 = 25\cos 2\theta$ (المثال 5)

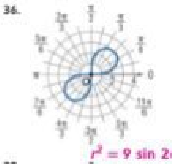
a. ما المنحنى الكلاسيكي الذي يمثله نموذج الشكل؟ **منحنى ذو عروتين**

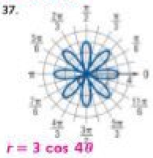
b. مثّل النموذج بيانيًا. **انظر الهامش.**

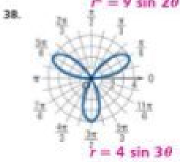
اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

35.

$r = 3\sin\theta$

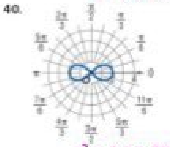
36.

$r^2 = 9\sin 2\theta$

37.

$r = 3\cos 4\theta$

38.

$r = 4\sin 3\theta$

39.

$r = -2\cos\theta$

40.

$r^2 = 4\cos 2\theta$

41. **مروحة** تحتوي مروحة سقف على محرك بخمس شفرات تمتد كل منها بمقدار 4 وحدات من المركز. يمكن تمثيل شكل المروحة بمنحنى وردة.

a. اكتب معادلتين قطبيتين يمكن استخدامهما لتمثيل المروحة. **$r = 4\cos 5\theta$; $r = 4\sin 5\theta$**

b. ارسم تمثيلين بيانيين للمروحة باستخدام المعادلتين اللتين كتبتهما. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

42-46. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم أحد الاختبارات الثلاثة لإثبات التناظر المحدد.

42. $r = 3 + \sin\theta$، متناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$
43. $r^2 = 4\sin 2\theta$، متناظر مع القطب
44. $r = 3\sin 2\theta$، متناظر مع المحور القطبي
45. $r = 5\cos 8\theta$، متناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$
46. $r = 2\sin 4\theta$، متناظر مع القطب

47. **البرسيم ذو الورقات الأربع** يمكن تمثيل شكل أحد أنواع البرسيم باستخدام منحنى وردة. اكتب معادلة قطبية للبرسيم إذا كان به:

a. 5 بتلات بطول 2 وحدة لكل بتلة

b. 4 بتلات بطول 7 وحدات لكل بتلة.

c. 8 بتلات بطول 6 وحدات لكل بتلة.

a-c. انظر الهامش.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-34 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورقة الشبكة القطبية يحتاج الطلاب عند حل العديد من تمارين هذا الدرس إلى ورقة الشبكة القطبية.

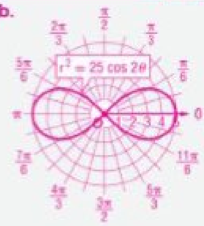
انتبه!

خطأ شائع قد يقوم بعض الطلاب بتمثيل جزء فقط من المعادلة بيانيًا. ذكرهم أنهم يجب أن يضبطوا نافذة حاسبات التمثيل البياني لتضم النقاط من 0 إلى 2π أو فترة الدالة، أيهما أكبر. وعند التمثيل البياني من خلال جدول قيم، يجب أيضًا أن يضيفوا القيم من 0 إلى 2π أو فترة الدالة، أيهما أكبر.

تحليل الخطأ في التمرين 62، ذكّر الطلاب أن اختبار المستقيم العمودي يتم تطبيقه فقط على المعادلات المرسومة على شبكة إحداثي متعامدة.

إجابات إضافية

34b.



47a. $r = 2\sin 5\theta$ أو $r = 2\cos 5\theta$

47b. $r = 7\sin 2\theta$ أو $r = 7\cos 2\theta$

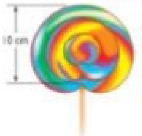
47c. $r = 6\sin 4\theta$ أو $r = 6\cos 4\theta$

إجابة إضافية

62. نهلة: الإجابة النموذجية: ينطبق اختبار المستقيم الرأسي على المعادلات المتعامدة فقط. وإذا تم إنشاء جدول قيم باستخدام المعادلة $r = 7 \sin 2\theta$. فهذا يوضح أن كل قيمة θ تتوافق مع قيمة r واحدة فقط.

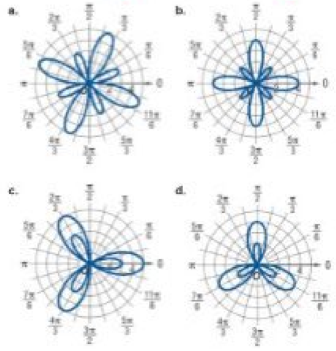
48. **حفلة موسيقية** تم بناء مسرح لإقامة حفلة موسيقية ووضعه في المركز كي يتمكن الجمهور من الإحاطة تمامًا بالموسيقيين. لتسجيل صوت الجمهور، تم وضع ميكروفونين اتجاهيين بجوار بعضهما البعض بحيث يتجه أحدهما إلى الشرق ويتجه الآخر إلى الغرب. يمكن تمثيل نمطي الميكروفونين بالمعادلتين القطبيتين $r = 2.5 + 2.5 \cos \theta$ و $r = -2.5 - 2.5 \cos \theta$.
   a. حدد نوع المنحنى الذي تحدده كل معادلة قطبية. **كلاهما قلبي الشكل.**
   b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نمط ميكروفون على الشبكة القطبية ذاتها.
   c. صف ما يخبرك به التمثيل البياني عن المساحة التي يغطيها الميكروفونان.
   b–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

49. **حلوى** اكتب معادلة يمكنها تمثيل هذه المصاصة في شكل منحنى قلبي الشكل إذا كانت متناظرة مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ وكان طرف المصاصة يبعد 10 سنتيمترات عن نقطة الغطاء العلوي بالعصا. **$r = 5 + 5 \sin \theta$**



صل كل معادلة بتمثيلها البياني.

50. $r = 1 + 4 \cos 3\theta$ **c**
51. $r = 1 - 4 \sin 4\theta$ **a**
52. $r = 1 - 3 \sin 3\theta$ **d**
53. $r = 1 + 3 \cos 4\theta$ **b**



أوجد x في الفترة $0 \le \theta \le x$ بحيث تكون x قيمة صغرى والتمثيل البياني مكتمل.

54. $r = 3 + 2 \cos \theta$ **2π**
55. $r = 2 - \sin 2\theta$ **2π**
56. $r = 1 + \cos \frac{\theta}{3}$ **6π**

صل كل معادلة بالمعادلة التي تنتج تمثيلاً بيانيًا مكافئًا.

57. $r = 5 + 4 \cos \theta$ **b**	a. $r = 5 + 4 \sin \theta$
58. $r = -5 + 4 \sin \theta$ **a**	b. $r = -5 + 4 \cos \theta$
59. $r = 5 - 4 \sin \theta$ **d**	c. $r = 5 - 4 \cos \theta$
60. $r = -5 - 4 \cos \theta$ **c**	d. $r = -5 - 4 \sin \theta$

61. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف حلزون أرشميدس.
   a. **بيانيًا** ارسم تمثيلات بيانية منفصلة لـ $r = \theta$ للفترات $0 \le \theta \le 3\pi$، $-3\pi \le \theta \le 0$، $-3\pi \le \theta \le 3\pi$.
   b. **لفظيًا** قم بعمل تخمين حول تناظر $r = \theta$. اشرح استنتاجك.
   c. **تحليليًا** برهن على تخمينك في الجزء b باستخدام أحد اختبارات التناظر التي نوقشت في هذا الدرس.
   d. **لفظيًا** كيف يؤثر تغيير فترة θ على المنحنيات الكلاسيكية الأخرى؟ كيف يختلف هذا عن طريقة تأثير الفترة على المنحنى في حلزون أرشميدس؟ اشرح استنتاجك.
   a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

62. **تحليل الخطأ** تعمل نهلة وهالة على تمثيل معادلات قطبية بيانيًا. تقول هالة إن $r = 7 \sin 2\theta$ ليست دالة لأنها لا تجتاز الاختبار الرأسي. تقول نهلة إن اختبار المستقيم الرأسي لا يسري على شبكة قطبية. هل أيهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

63. **التبرير** ارسم التمثيلات البيانية لكل من $r_1 = \cos \theta$، و $r_2 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$، $r_3 = \cos(\theta - \pi)$ على الشبكة القطبية نفسها. صف العلاقة بين التمثيلات البيانية الثلاثة. ضع تخمينًا بخصوص التغيير في التمثيل البياني عند طرح القيمة d من θ. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

64. **تحدٍ** أوجد حل نظام المعادلات القطبية التالية جبريًا على $[0, 2\pi]$. مثّل النظام بيانيًا وقارن نقاط التقاطع مع الحلول التي توصلت إليها. اشرح أي اختلافات.
   $r = 1 + 2 \sin \theta$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
   $r = 4 \sin \theta$

65. **البرهان** برهن على أن التمثيل البياني لـ $r = a + b \cos 2\theta$ متناظر مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

66. **البرهان** برهن على أن التمثيل البياني لـ $r = a \sin 2\theta$ متناظر مع المحور القطبي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

67. **الكتابة في الرياضيات** صف تأثير a على التمثيل البياني $r = a \cos \theta$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
   انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

68. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني لوردة ذات 8 بتلات، ثم اكتب معادلة تمثيلك البياني.

مراجعة شاملة

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. (الدرس 9-1) **71–69. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

69. $r = 3.5$
70. $\theta = -\frac{\pi}{3}$
71. $\theta = 225°$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

72. $u = \langle 4, -3, 5\rangle, v = \langle 2, 6, -8\rangle$ **133.9°**
73. $u = 2i - 4j + 7k, v = 5i + 6j - 11k$ **144.3°**
74. $u = \langle -1, 1, 5\rangle, v = \langle 7, -6, 9\rangle$ **61.4°**

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه له نقطة البداية والنهاية المذكورتان. اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ كتوفيق خطي للمتجهين i و j.

75. $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ $\mathbf{\frac{21}{5}i - \frac{2}{3}j}$
76. $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbf{-\frac{1}{4}i + \frac{1}{7}j}$
77. $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ $\mathbf{-15.8i - 6.1j}$

78. **ساحة العمل** يدفع مازن عربة يدوية مليئة بورق الشجر بقوة 525 نيوتن وزاوية 48° مع الأرض.
   a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل القوة التي يبذلها مازن إلى مركبات متعامدة. **انظر الهامش.**
   b. أوجد مقدار المركبتين الأفقي والرأسي للقوة.
   المكون الأفقي: 351.3 N، المكون الرأسي: 390.2 N

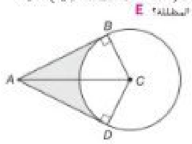
مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

79. $\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$
80. $\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$
81. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

81–79. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

82. **SAT/ACT** في الشكل، يمثل C مركز الدائرة. $AC = 12$ و $m\angle BAD = 60°$. كم يبلغ محيط المنطقة المظللة؟ **E**

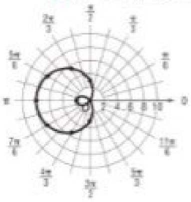


A $12 + 3\pi$
B $6\sqrt{3} + 4\pi$
C $6\sqrt{3} + 3\pi$
D $12\sqrt{3} + 3\pi$
E $12\sqrt{3} + 4\pi$

83. **مراجعة** أثناء تخطيط موقع مستو، حدد مسّاح أراض علامة بارزة على بُعد 135 مترًا بزاوية 30° على يسار المركز، وعلامة بارزة أخرى على بُعد 180 مترًا بزاوية 50° على يمين المركز. ما المسافة التقريبية بين العلامتين البارزتين؟ **G**

F 202 متر
G 206 أمتار
H 207 أمتار
J 211 مترًا

84. ما نوع المنحنى الذي يمثله الشكل؟ **B**



A منحنى ذو عروتين
B منحنى قلبي الشكل دائري
C منحنى وردة
D منحنى قلبي الشكل

85. **مراجعة** يعمل موظف تحكم في المرور الجوي على تعقب طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه. إحداثيات الطائرتين هي (8, 310°) و (9.6, 345°)، حيث r مقيسة بالكيلومتر. ما المسافة التقريبية بين الطائرتين؟ **H**

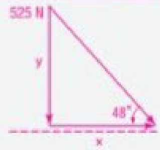
F 4.75 كيلومترات
G 5.2 كيلومترات
H 5.50 كيلومترات
J 5.94 كيلومترات

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا فقرة قصيرة عن كيف ساعدهم درس الأمس عن التمثيل البياني للمعادلات الخطية البسيطة في درس اليوم.

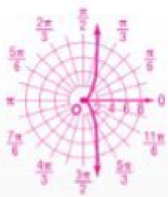
إجابات إضافية

78a.



التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب رسم التمثيل البياني لـ $r = 2 \sin\theta \tan\theta$.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-3 استخدام نظام الإحداثيات القطبية لتمثيل النقاط والمعادلات بيانيًا.

الدرس 9-3 التحويل بين الإحداثيات القطبية والمتعامدة. التحويل بين المعادلات القطبية والمتعامدة.

بعد الدرس 9-3 تحويل الأعداد المركبة من الصورة القطبية إلى الصورة المتعامدة والعكس.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

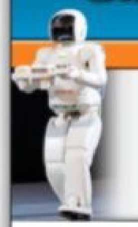
كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- إذا كان النظام الإحداثي المتعامد في موقع أعلى النظام الإحداثي القطبي، فأي نقطة قطبية تطابق نقطة الأصل؟ (0, 0) أو (0, 0°)
- أي نقطة قطبية تطابق النقطة المتعامدة (4, 0)؟ (4, 0) أو (4, 0°)

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 9-3 الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات



:: السابق

- استخدمت نظامًا إحداثيًا قطبيًا لتمثيل النقاط والمعادلات بيانيًا. (الدرس 9-1، 9-2)

:: الحالي

- 1 التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.
- 2 التحويل بين المعادلات القطبية والمتعامدة.

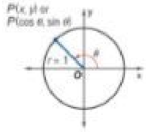
:: لماذا؟

- يبعث مستشعر فوق صوتي متصل بإنسان آلي إشعاعًا متجهًا للخارج بدور دورة كاملة. يتلقى المستشعر إشارة راجعة عندما يتقاطع الإشعاع مع جسم، ويحسب موضع الجسم من حيث مسافته r وقياس الزاوية θ بالنسبة إلى مقدمة الإنسان الآلي. ينقل المستشعر الإحداثيات القطبية هذه إلى الإنسان الآلي الذي يحولها إلى إحداثيات متعامدة كي يتمكن من تعيين الجسم على خريطة داخلية.

1 الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة

تذكر من الوحدة 4 أن إحداثيات نقطة $P(x, y)$ المقابلة لزاوية θ على دائرة وحدة لها نصف قطر يساوي 1 يمكن كتابتها بدلالة θ بالشكل $P(\cos\theta, \sin\theta)$ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$



إذا افترضنا أن r تمثل أي قيمة حقيقية، فيمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة كل من r و θ.

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$r\cos\theta = x \qquad r\sin\theta = y \qquad \text{اضرب كل طرف في } r$$

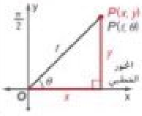
إذا افترضنا أن المحور القطبي والقطب في نظام الإحداثيات القطبية يتطابقان مع المحور الأفقي x الموجب ونقطة الأصل في النظام الإحداثي المتعامد، على التوالي، فقد أصبح لدينا الآن وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة.

المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة

إذا كانت النقطة P لها الإحداثيات القطبية (r, θ)، فيتم التعبير عن الإحداثيات المتعامدة (x, y) للنقطة P كالتالي

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

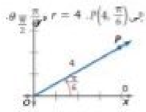


مثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة.

a. $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بالنسبة إلى $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$.



$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 4\cos\frac{\pi}{6} \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \qquad \text{صيغة التحويل} \qquad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 4\sin\frac{\pi}{6} \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$r = 4$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ بسّط.

الإحداثيات المتعامدة للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو بالتقريب $(3.46, 2)$ كما هو موضح.

- أي نقطة قطبية ستطابق النقطة المتعامدة $(4, 0)$؟ $(4, 90°)$ أو $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$
- أي نقطة متعامدة ستطابق النقطة القطبية $(4, \pi)$؟ $(-4, 0)$
- أي نقطة متعامدة ستطابق النقطة القطبية $(4, 270°)$؟ $(0, -4)$

1 اللاحداثيات القطبية والمتعامدة

يبين **المثال 1** كيفية تحويل اللاحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة. ويبين **المثال 2** كيفية تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى إحداثيات قطبية. ويبين **المثال 3** كيفية التحويل بين اللاحداثيات القطبية والمتعامدة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة من خلال اللاحداثيات القطبية المعطاة.

a. $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$
$D(1, 1.73)$

b. $F(-5, 45°)$
$F\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $H(4, -240°)$
$H\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

---

b. $Q(-2, 135°)$

بالنسبة إلى $Q(-2, 135°)$، $r = -2$ و $\theta = 135°$.

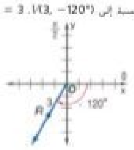
	صيغة التحويل	
$x = r\cos\theta$		$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2$ و $\theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	بسّط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2}$		$= -\sqrt{2}$

الإحداثيات المتعامدة للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو بالتقريب $(1.41, -1.41)$ كما هو موضح.

c. $V(3, -120°)$

بالنسبة إلى $V(3, -120°)$، $r = 3$ و $\theta = -120°$.

	صيغة التحويل	
$x = r\cos\theta$		$y = r\sin\theta$
$= 3\cos -120°$	$r = 3$ و $\theta = -120°$	$= 3\sin -120°$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right)$	بسّط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -\frac{3}{2}$		$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$



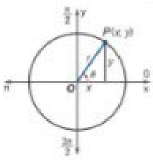
الإحداثيات المتعامدة للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو بالتقريب $(-1.5, -2.6)$ كما هو موضح.

تمرين موجّه

1A. $R(-6, -120°)$ $(3, 3\sqrt{3})$
1B. $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
1C. $T(-3, 45°)$ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

نصيحة دراسية
تحويلات الإحداثيات إن عملية تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية هي نفسها العملية المستخدمة لتحديد مقدار المتجهات واتجاهها في الوحدة 8

لكتابة زوج من الإحداثيات المتعامدة بالصورة القطبية، عليك إيجاد المسافة r التي تبعدها النقطة (x, y) من نقطة الأصل أو القطب، وزاوية القياس θ المقيسة لهذه النقطة من المحور x أو المحور القطبي.



لإيجاد المسافة r بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل، استخدم نظرية فيثاغورس.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

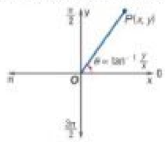
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

ترتبط الزاوية θ بكل من x و y عن طريق دالة ظل الزاوية.

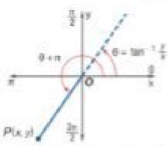
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ نسبة ظل الزاوية

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ تعريف دالة معكوس ظل الزاوية

تذكّر أن دالة معكوس ظل الزاوية لا تكون معرّفة إلا على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $[-90°, 90°]$. في النظام الإحداثي المتعامد، يشير هذا إلى قيم θ في الربعين الأول والرابع أو عندما تكون $x > 0$ كما يظهر في الشكل 9.3.1. إذا كانت إحدى النقاط تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث، أي عندما تكون $x < 0$، يجب أن تضيف π أو $180°$ إلى قياس الزاوية الناتجة من دالة معكوس ظل الزاوية، كما هو موضح في الشكل 9.3.2



عندما تكون $x > 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
الشكل 9.3.1



عندما تكون $x < 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
الشكل 9.3.2

إرشاد للمعلمين الجدد

ضبط الوضع ذكّر الطلاب بأنه يجب عند حساب الإحداثيات المتعامدة في المثال 1a أن يضغطوا على MODE ليتأكدوا من ضبط الإعداد على RADIAN (راديان). ويجب في المثالين 1b و1c أن يضغطوا على MODE ليتأكدوا من ضبط الإعداد على DEGREE (درجة).

مثال إضافي

2 أوجد زوجين من اللاحداثيات القطبية لكل نقطة في الإحداثيات المتعامدة المعطاة، مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.

a. $E(2, -4)$ الإجابة النموذجية: $E(4.47, -1.11)$ و $E(4.47, 5.18)$

b. $G(-2, -4)$ الإجابة النموذجية: $G(4.47, 4.25)$ و $G(-4.47, 7.39)$

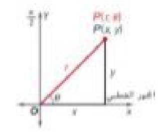
المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية

إذا كانت النقطة P لها إحداثيات متعامدة (x, y) فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P تتحدد بواسطة

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$



تذكّر أن الإحداثيات القطبية ليست منفردة. يؤدي التحويل من الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية إلى تمثيل واحد فقط للإحداثيات القطبية. إلا أن هناك عددًا لا نهائيًا من التمثيلات القطبية لنقطة معينة في الشكل المتعامد.

مثال 2 تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية

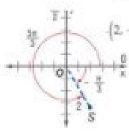
أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات المتعامدة المعطاة.

a. $S(1, -\sqrt{3})$

بالنسبة إلى $S(x, y) = (1, -\sqrt{3})$. فإن $x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$. ولأن $x > 0$، استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ للتوصل إلى θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$	$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسّط.	$= -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

إحدى مجموعات الإحداثيات القطبية لـ S هي $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$. هناك تمثيل آخر يستخدم قيمة θ موجبة وهو $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$، كما هو موضح.



b. $T(-3, 6)$

بالنسبة إلى $T(x, y) = (-3, 6)$، فإن $x = -3$ و $y = 6$. ولأن $x < 0$، فاستخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ للتوصل إلى θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$x = -3$ و $y = 6$	$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$
$= \sqrt{45}$ حوالي $= 6.71$	بسّط.	$= \tan^{-1}(-2) + \pi$ حوالي $= 2.03$

إحدى مجموعات الإحداثيات القطبية لـ T هي تقريبًا $(6.71, 2.03)$. هناك تمثيل آخر يستخدم قيمة r سالبة هو $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$، كما هو موضح.

تمرين موجّه

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة في الإحداثيات المتعامدة المعطاة، مع التقريب إلى أقرب مئة، إذا لزم الأمر.

2A. $V(8, 10)$ الإجابة النموذجية: $(12.81, 0.90)$ و $(-12.81, 4.04)$

2B. $W(-9, -4)$ الإجابة النموذجية: $(9.85, 3.56)$ و $(-9.85, 6.70)$

تلميح تقني

تحويلات الإحداثيات لتحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية باستخدام حاسبة، اضغط على 2nd APPS لعرض قائمة ANGLE. حدد R▸Pr(لإدخال الإحداثيات. سيؤدي هذا إلى حساب قيمة r. لحساب θ، كرر هذه العملية لكن حدد R▸Pθ(.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الطلاب إلى مجموعات ثلاثية. واطلب من كل طالب أن يقدم اللاحداثيات القطبية لإحدى النقاط إلى طالب ثانٍ. ويحول الطالب الثاني الإحداثيات إلى صورة متعامدة ويمررها إلى طالب ثالث، والذي بدوره يحولها مرة أخرى إلى صورة قطبية. ينبغي أن يقارن الطلاب الآن بين الصورتين القطبيتين. إذا لم تكونا متطابقتين، فاسأل الطلاب هل حدث خطأ بالضرورة أم لا. كرر تلك العملية مبتدئًا بالإحداثيات المتعامدة.

في بعض الظواهر من الحياة اليومية، يكون من المفيد التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

مثال 3 من الحياة اليومية تحويل الإحداثيات

علم الإنسالات راجع بداية الدرس. لنفترض أن الإنسان الآلي يتجه نحو الشرق ويرصد المجس وجود جسم عند $(5, 295°)$

a. ما الإحداثيات المتعامدة التي سيتعين على الإنسان الآلي حسابها؟

$y = r \sin \theta$	صيغة التحويل	$x = r \cos \theta$
$= 5 \sin 295°$	$r = 5$ ، $\theta = 295°$	$= 5 \cos 295°$
≈ -4.53	بسّط.	≈ 2.11

يقع الجسم عند الإحداثيات المتعامدة $(2.11, -4.53)$

b. إذا كان لجسم تم اكتشافه الإحداثيات المتعامدة $(3, 7)$، فكم يبعد الجسم وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجانب الأمامي للإنسان الآلي؟

$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$	صيغة التحويل	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$= \tan^{-1} \frac{7}{3}$	$x = 3$ ، $y = 7$	$= \sqrt{3^2 + 7^2}$
$\approx 66.8°$	بسّط.	≈ 7.62

يقع الجسم عند الإحداثيات القطبية $(7.62, 66.8°)$

الربط بالحياة اليومية
ديكستروز مانيبيوليتور، أو ديكستر إنسان آلي للمهام الخاصة صنع وكالة ناسا ويصل وزنه 15,100 نيوتن ويبلغ طوله 3.6 أمتار ويبلغ طول ذراعه 3.3 أمتار. يتولى ديكستر مسؤولية أداء بعض المهام في الفضاء كانت قبل ذلك تتطلب رواد فضاء لأدائها.
المصدر: جريدة New York Times

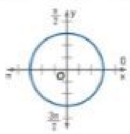
تمرين موجّه

3. **الصيد** باحث الأسماك نوع من الرادار يستخدم في تحديد موقع الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق ويعطي باحث الأسماك الإحداثيات القطبية $(6, 125°)$ لسرب أسماك.
   A. ما الإحداثيات المتعامدة لسرب الأسماك؟ $(-3.44, 4.91)$
   B. إذا كان لسرب أسماك تم اكتشافه الإحداثيات المتعامدة $(-2, 6)$ فكم يبعد السرب وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجهة الأمامية من القارب؟ $(6.32, 108.4°)$

2 المعادلات القطبية والمتعامدة

في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج أحيانًا إلى التحويل من الصورة المتعامدة لمعادلة إلى صورتها القطبية وبالعكس لتيسير بعض الحسابات. بعض المعادلات المتعامدة المعقدة لها معادلات قطبية أبسط بكثير. فلننظر إلى المعادلتين المتعامدة والقطبية للتمثيل البياني الدائري أدناه.

المعادلة المتعامدة
$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة القطبية
$r = 3$

وبالمثل، بعض المعادلات القطبية لها معادلات متعامدة أبسط بكثير، مثل الخط المستقيم بيانيًا أدناه.

المعادلة القطبية
$r = \frac{6}{2 \cos \theta - 3 \sin \theta}$

المعادلة المتعامدة
$2x - 3y = 6$

مثال إضافي

3. **علم الإنسالات** راجع بداية الدرس. لنفترض أن الإنسان الآلي يتجه نحو الشرق ويرصد المجس وجود جسم عند $(3, 280°)$.
   a. ما الإحداثيات المتعامدة التي سيتعين على الإنسان الآلي حسابها؟ $(0.52, -2.95)$
   b. إذا كان لجسم تم اكتشافه من قبل الإحداثيين المتعامدين $(4, 9)$، فكم يبعد الجسم وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجانب الأمامي من الإنسان الآلي؟ $(9.85, 66.0°)$

التركيز على محتوى الرياضيات

الإحداثيات القطبية في صورة ثلاثية الأبعاد مثلما هو الحال مع النقاط والمتجهات في الوحدة السابقة، ستفيد الإحداثيات القطبية في التطبيقات ثلاثية الأبعاد. يمكن توسعة النظام الإحداثي القطبي إلى صورة ثلاثية الأبعاد بطريقة من طريقتين. سنجمع في الطريقة الأول إحداثي ثالث لقياس الارتفاع فوق المستوى الإحداثي، وهذا هو النظام الإحداثي الإسطواني. وسنجمع في الطريقة الثانية إحداثي ثالث لقياس الزاوية مع المحور الثالث؛ وهذا هو النظام الإحداثي الدائري. لاحظ أن النظام الإحداثي الدائري مشابه لنظام خطوط الطول والعرض لنصف قطر ثابت.

2 المعادلات القطبية والمتعامدة

يبين **المثال 4** كيفية تحويل معادلة متعامدة إلى صورة قطبية. ويبين **المثال 5** كيفية تحويل معادلة قطبية إلى صورة متعامدة.

552 | الدرس 9-3 | الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

يتم تحويل المعادلة المتعامدة إلى معادلة قطبية بشكل مباشر تمامًا. استبدل x بـ $r\cos\theta$ واستبدل y بـ $r\sin\theta$. ثم بسّط المعادلة الناتجة باستخدام معالجات جبرية ومتطابقات مثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات المتعامدة إلى معادلات قطبية

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

a. $(x-4)^2+y^2=16$

التمثيل البياني لـ $(x-4)^2+y^2=16$ عبارة عن دائرة بنصف قطر 4 يقع عند $(4, 0)$. للتوصل إلى الصورة القطبية لهذه المعادلة، استبدل x بـ $r\cos\theta$ واستبدل y بـ $r\sin\theta$. ثم بسّط.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب.
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	يطرح 16 من كل طرف.
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	افصل الحدود المربعة.
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلّل إلى العوامل.
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	بقسمة كل طرف على r.

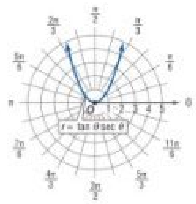
التمثيل البياني لهذه المعادلة القطبية (الشكل 9.3.3) عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة $(4, 0)$.

b. $y=x^2$

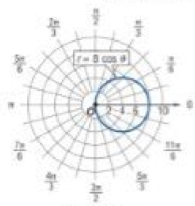
التمثيل البياني للمعادلة $y=x^2$ عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند النقطة الأصل ثم يتسع

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	اضرب.
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	اقسم كل طرف على $r\cos^2\theta$.
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	أعد الكتابة.
$\tan\theta\sec\theta=r$	متطابقة ناتج القسمة ومتطابقة المعكوس الضربي

التمثيل البياني للمعادلة القطبية $r=\tan\theta\sec\theta$ (الشكل 9.3.4) عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند القطب ثم يتسع.



الشكل 9.3.4



الشكل 9.3.3

تمرين موجّه **4A–B. انظر الهامش.**

4A. $x^2+(y-3)^2=9$

4B. $x^2-y^2=1$

نصيحة دراسية

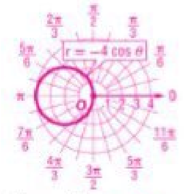
المتطابقات المثلثية ستجد أنه من المفيد مراجعة المتطابقات المثلثية التي درستها في الوحدة 5 لتساعدك على تبسيط الصور القطبية للمعادلات المتعامدة. يوجد موجز لهذه المتطابقات على غلاف هذا الكتاب من الداخل.

مثال إضافي

4 حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

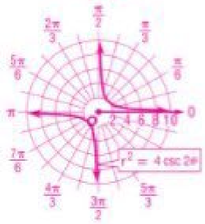
a. $(x+2)^2+y^2=4$

دائرة؛ $r=-4\cos\theta$



b. $2xy=4$ قطع زائد؛

$r^2=4\csc 2\theta$



إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4A. دائرة؛ $r=6\sin\theta$

4B. قطع زائد؛ $r^2=\sec 2\theta$

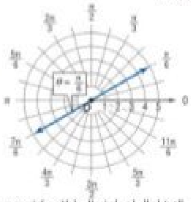
ولكتابة معادلة قطبية في صورة متعامدة، فإنك تستخدم أيضًا العلاقات $r^2 = x^2 + y^2$، $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ إلى جانب العلاقة $\tan\theta = \frac{y}{x}$. إلا أن العملية ليست مباشرة مثل التحويل من صورة متعامدة إلى صورة قطبية.

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات متعامدة

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها، وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

a. $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	إيجاد ظل الزاوية لكل طرف
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب كل طرف في x

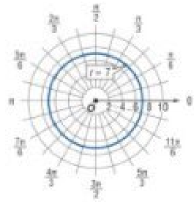


التمثيل البياني لهذه المعادلة عبارة عن مستقيم يمر بنقطة الأصل وله ميل $\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو حوالي $\frac{2}{3}$، كما هو مبين من التمثيل البياني $\theta = \frac{\pi}{6}$ الموضح.

b. $r = 7$

$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	تربيع كل طرف
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$

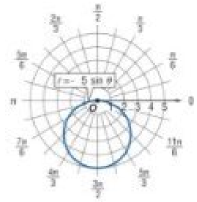
التمثيل البياني لهذه المعادلة المتعامدة عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ولها نصف قطر 7، كما هو مبين من التمثيل البياني $r = 7$ الموضح.



c. $r = -5\sin\theta$

$r = -5\sin\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r\sin\theta$	بضرب كل طرف في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2$ و $y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	بإضافة 5y إلى كل طرف

نظرًا لأنه في الصورة القياسية $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$، فبإمكانك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة على هيئة دائرة مركزها عند النقطة $(0, -2.5)$ ولها نصف قطر 2.5، كما هو مبين من التمثيل البياني $r = -5\sin\theta$.



نصيحة دراسية

طريقة بديلة تشتمل على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة المتعامدة، هاتان النقطتان هما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$ بمعادلة المستقيم المار بهما هي $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

نصيحة دراسية

التحويل إلى الصورة المتعامدة هناك عمليات تعويض أخرى مفيدة وهي عبارة عن أشكال مختلفة للمعادلات $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ مثل $r = \frac{x}{\cos\theta}$، $r = \frac{y}{\sin\theta}$

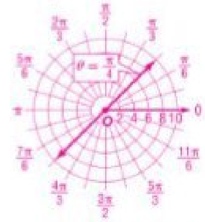
تمرين موجّه 5A-C. انظر الهامش.

5A. $r = -3$ **5B.** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **5C.** $r = 3\cos\theta$

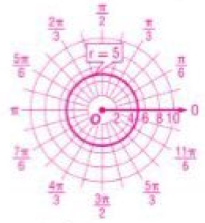
مثال إضافي

5 اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة. ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

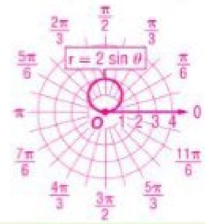
a. $\theta = \frac{\pi}{4}$ $y = x$ مستقيم



b. $r = 5$ $x^2 + y^2 = 25$ دائرة



c. $r = 2\sin\theta$ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ دائرة



إجابات إضافية (تمرين موجّه)

5A. $x^2 + y^2 = 9$؛ دائرة

5B. $y = \sqrt{3}x$؛ مستقيم

5C. $x^2 + y^2 - 3x = 0$؛ دائرة

التمارين

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة ذات الإحداثيات القطبية المعطاة. قم بالتقريب إلى أقرب مئة، إذا لزم الأمر. (المثال 1)

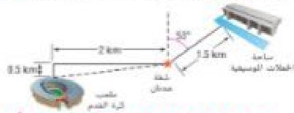
1. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
2. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
3. $(5, 240°)$ $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $(2.5, 250°)$ $(-0.86, -2.35)$
5. $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $(1, \sqrt{3})$
6. $(-13, -70°)$ $(-4.45, 12.22)$
7. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ $(0, 3)$
8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
9. $(-2, 270°)$ $(0, 2)$
10. $(4, 210°)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$
11. $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
12. $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة ذات الإحداثيات المتعامدة المعطاة. $0 \le \theta \le 2\pi$. قم بالتقريب إلى أقرب مئة، إذا لزم الأمر. (المثال 2)

13-24. انظر الهامش.

13. $(7, 10)$
14. $(-13, 4)$
15. $(-6, -12)$
16. $(4, -12)$
17. $(2, -3)$
18. $(0, -173)$
19. $(a, 3a), a > 0$
20. $(-14, 14)$
21. $(52, -31)$
22. $(3b, -4b), b > 0$
23. $(1, -1)$
24. $(2, \sqrt{2})$

25. **المسافة** عندما وقف مدحان فوق مبنى مسكنه، حدد أن إحدى ساحات الحفلات الموسيقية تقع بزاوية 53° إلى الشمال الشرقي. افترض أن الساحة تقع على بعد 1.5 كيلومتر بالضبط من شقة مدحان. (المثال 3)



حوالي 0.90 km شمالاً وحوالي 1.20 km شرقاً

a. كم عدد الكيلومترات التي يجب أن يقطعها مدحان شرقاً وشمالاً حتى يبلغ الساحة؟

b. إذا كان هناك ملعب كرة قدم على بعد 2 كيلومتر غرباً و 0.5 كيلومتر جنوباً من شقة مدحان، فما الإحداثيات القطبية للملعب إذا كانت شقة مدحان عند القطب؟

الإجابة النموذجية: $(2.06, 194.04°)$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة. ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة. (المثال 4)

26. $x = -2$
27. $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
28. $y = -3$
29. $x = y^2$
30. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
31. $(x - 1)^2 - y^2 = 1$
32. $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
33. $y = \sqrt{3}x$
34. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
35. $x^2 + (y - 8)^2 = 64$

26-35. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

36-45. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة. (المثال 5)

36. $r = 3 \sin \theta$
37. $\theta = -\frac{\pi}{3}$
38. $r = 10$
39. $r = 4 \cos \theta$
40. $\tan \theta = 4$
41. $r = 8 \csc \theta$
42. $r = -4$
43. $\cot \theta = -7$
44. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
45. $r = \sec \theta$

46. **الزلازل** يمكن تمثيل الموجات الزلزالية لأحد الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث تقاس r بالكيلومترات. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي للزلزال بيانياً. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

b. اكتب معادلة بالصورة المتعامدة لتمثيل الموجات الزلزالية بيانياً. $x^2 + y^2 - 12.6y = 0$

c. أوجد الإحداثيات المتعامدة للبؤرة الزلزالية ووضح المساحة المتضررة من الزلزال.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

47. **الميكروفون** تعبر المعادلة $r = 2 + 2 \cos \theta$ عن النمط القطبي لميكروفون اتجاهي في مباراة كرة قدم. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي بيانياً. a-4b انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

b. هل سيكتشف الميكروفون الصوت الناشئ من النقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(-2, 0)$؟ اشرح.

48-55. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

48. $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
49. $r = 10 \csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
50. $r = 3 \csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
51. $r = -2 \sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
52. $r = 4 \sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
53. $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
54. $r = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
55. $r = 4 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

56. **الفلك** تستخدم المعادلات القطبية في تمثيل مسارات الأقمار الصناعية أو الأجسام الأخرى التي تدور في الفضاء. افترض أنه يتم تمثيل مسار قمر صناعي بالمعادلة $r = \frac{4}{4 + 3 \sin \theta}$، حيث يتم قياس r بعشرات الآلاف من الكيلومترات، مع وضع الكرة الأرضية عند القطب.

a. ارسم تمثيلاً بيانياً لمسار القمر الصناعي.

b. حدد أدنى وأقصى مسافة يبعدها القمر الصناعي عن الأرض في أي وقت.

c. افترض أن قمراً صناعياً ثانياً يمر عبر نقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(1.5, -3)$. هل القمران الصناعيان معرضان لأي خطر تصادم عند هذه النقطة؟ اشرح.

a-5c انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 47 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورقة الشبكة القطبية يحتاج الطلاب عند حل العديد من تمارين هذا الدرس إلى ورقة الشبكة القطبية.

انتبه!

خطأ شائع ابحث عن الطلاب الذين يعوضون خطأً عن x و y عند تحويل النقاط بين اللاحداثيات القطبية والمتعامدة. اطلب من كل طالب أن يحتفظ في كتابه ببطاقة فهرسة مكتوب فيها صيغ التحويل لـ x و y و r و θ.

إجابات إضافية

13. $(12.21, 0.96)$ و $(-12.21, 4.10)$
14. $(13.60, 2.84)$ و $(-13.60, 5.98)$
15. $(13.42, 4.25)$ و $(-13.42, 1.11)$
16. $(12.65, 5.03)$ و $(-12.65, 1.89)$
17. $(3.61, 5.30)$ و $(-3.61, 2.16)$
18. $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right)$ و $\left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$
19. $(3.16a, 1.25)$ و $(-3.16a, 4.39)$
20. $\left(14\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ و $\left(-14\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$
21. $(60.54, 5.74)$ و $(-60.54, 2.60)$
22. $(5b, 5.35)$ و $(-5b, 2.21)$
23. $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ و $\left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
24. $(2.45, 0.62)$ و $(-2.45, 3.76)$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة. ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

57. $6x - 3y = 4$

58. $2x + 5y = 12$

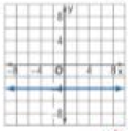
59. $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

60. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

57-60. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

اكتب معادلة قطبية ومتعامدة لكل تمثيل بياني.

61.



62.

انظر الهامش.

الإجابة النموذجية: $y = -4; r = -4 \csc \theta$

63.

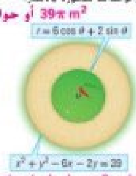
64.

انظر الهامش.

الإجابة النموذجية: $x^2 + (y-2)^2 = 4; r = 4 \sin \theta$

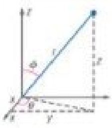
65. **الجولف** في الحفرة 18 من ملعب الجولف في هيلي بانيز، المساحة الخضراء الدائرية محاطة بحلقة من الرمال كما يظهر في الشكل. أوجد مساحة المنطقة المغطاة بالرمال بافتراض أن الحفرة تمثل القطب في كل من المعادلتين، والوحدات مذكورة بالأمتار.

$39\pi\ m^2$ أو حوالي $122.52\ m^2$



66. $(x, y, z) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$

66. **التشبيه** تعمل الرافعات الذراعية على نظام ثلاثية الأبعاد من الإحداثيات القطبية تسمى الإحداثيات الكروية. لدينا نقطة في الفراغ بالإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) حيث تمثل r المسافة من القطب، وتمثل θ زاوية الدوران حول المحور الرأسي وتمثل ϕ الزاوية القطبية من المحور الرأسي الموجب. إذا كانت لدينا نقطة بالإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) فأوجد الإحداثيات المتعامدة (x, y, z) بدلالة r و θ و ϕ.



67. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a-e. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

a. **بيانيًا** يمكن تحديد موضع العدد المركب $a + bi$ على مستوى مركب باستخدام الزوج المرتب (a, b)، حيث المحور x هو المحور الحقيقي R والمحور y هو المحور التخيلي i. مثّل العدد المركب $6 + 8i$ بيانيًا.

b. **عدديًا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات المتعامدة المحددة في الجزء a إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

c. **بيانيًا** مثّل العدد المركب $-3 + 3i$ بيانيًا على نظام إحداثي متعامد.

d. **بيانيًا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات المتعامدة المحددة في الجزء c إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

e. **تحليليًا** بالنسبة للعدد المركب $a + bi$، أوجد تعبيرًا ليتم تحويله إلى الإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. **تحليل الخطأ** علي وعيسى يكتبان المعادلة القطبية $r = \sin \theta$ بصورة متعامدة. يعتقد عيسى أن الإجابة هي $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. يعتقد علي أن الإجابة ببساطة هي $y = \sin x$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

69. **تحدٍ** معادلة الدائرة هي $r = 2a \cos \theta$. اكتب هذه المعادلة بصورة متعامدة. أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها.

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$؛ نصف القطر $= a$، المركز $= (a, 0)$

70. **التبرير** على أساس مجموعة الإحداثيات المتعامدة (x, y) وقيمة r، اكتب تعبيرات للتوصل إلى θ بدلالة sine وبدلالة cosine. (إرشاد: قد تكون مضطرًا لكتابة عدة تعبيرات لكل دالة مشابهة للتعبيرات الواردة في هذا الدرس باستخدام ميلٍ.)

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

71. **الكتابة في الرياضيات** خمّن متى يكون التمثيل البياني للمعادلة أسهل عند تمثيل المعادلة بالصورة القطبية بدلاً من المتعامدة والعكس.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

72. **البرهان** استخدم $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ لإثبات أن $r = x \sec \theta$ و $r = y \csc \theta$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

73. **تحدٍ** اكتب $r^2(4\cos^2 \theta + 3\sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$ بصورة متعامدة. (إرشاد: وزّع قبل التعويض عن قيمتي r^2 و r. ينبغي أن تكون المعادلة المتعامدة مخروطية.)

انظر الهامش.

74. **الكتابة في الرياضيات** استخدم تعريف المحور القطبي المقدم في الدرس 9-1 لشرح السبب وراء ضرورة ذكر أن الإنسان الآلي في المثال 3 كان مواجهًا للشرق تمامًا. كيف يمكن أن يساعد استخدام الاتجاهات الرئيسية في التخلص من هذا؟

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

إجابات إضافية

64. الإجابة النموذجية: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25; r = 6 \cos \theta - 8 \sin \theta$

73. $\frac{(x-a)^2}{3} + \frac{(y+b)^2}{4} = 1$

556 | الدرس 9-3 | الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

مراجعة شاملة

استخدم التناظر لتمثيل كل معادلة بيانيًا. (الدرس 9-2) 75–77. انظر الهامش.

75. $r = 1 - 2\sin\theta$
76. $r = -2 - 2\sin\theta$
77. $r = 2\sin 3\theta$

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \le 360°$ أو $-2\pi < \theta \le 2\pi$. (الدرس 9-1)

78. $T(1.5, 180°)$
$(1.5, -180°), (-1.5, 0°), (-1.5, 360°)$

79. $U\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$
$\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(1, \frac{4\pi}{3}\right), \left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$

80. $V(4, 315°)$
$(4, -45°), (-4, 135°), (-4, -225°)$

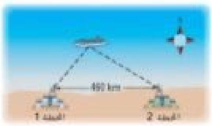
أوجد الزاوية θ بين u و v.

81. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$
91.8°، غير متعامدين

82. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$
90°، متعامدان

83. $\mathbf{u} = \langle 1, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -2\rangle$
98.3°، غير متعامدين

84a. $\frac{x^2}{2916} - \frac{y^2}{49{,}986} = 1$



84. **الإبحار** تقع محطتا بث طويل المدى على مسافة 460 كيلومترًا من بعضهما البعض. تتلقى إحدى السفن إشارات من كلتا المحطتين وتحدد أن مسافتها من المحطة 2 تزيد على مسافتها من المحطة 1 بمقدار 108 كيلومترات. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.
a. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل التي توجد عندها السفينة.
b. مثّل المعادلة بيانيًا مع توضيح فرع القطع الزائد الذي توجد فيه السفينة.
c. أوجد إحداثيات موقع السفينة على الشبكة الإحداثية إذا كانت تبعد عن المحور x بمقدار 110 كيلومترات. $(-60.2, 110)$

85. **الدراجات** تصنع شركة ووديلاند للدراجات طرازين من دراجات الطرق الوعرة، طراز "مغامرة" الذي يبلغ سعر بيعه AED 250 وطراز "المغامرة الكبرى" الذي يبلغ سعر بيعه AED 350. يستخدم كلا الطرازين الإطار نفسه. يبلغ الوقت المطلوب للطلاء والتجميع لطراز "مغامرة" ساعتين، بينما يبلغ الوقت 3 ساعات لطراز "المغامرة الكبرى". إذا كان متاحًا للإنتاج 375 إطارًا و450 ساعة عمل، فكم العدد الذي ينبغي إنتاجه من كل طراز لزيادة العائد؟ ما الحد الأقصى للعائد؟ 75 من طراز "المغامرة"، و 100 من طراز "المغامرة الكبرى": AED 53,750

حل كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان. 86–88. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

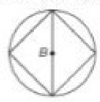
86. $3x + 9y + 6z = 21$
$4x - 10y + 3z = 15$
$-5x + 12y - 2z = -6$

87. $x + 5y - 3z = -14$
$2x - 4y + 5z = 18$
$-7x - 6y - 2z = 1$

88. $2x - 4y + z = 20$
$5x + 2y - 2z = -4$
$6x + 3y + 5z = 23$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. **SAT/ACT** تم رسم مربع داخل الدائرة B. إذا كان محيط الدائرة يبلغ 50π، فما طول قُطر المربع؟ D



A $10\sqrt{2}$
B 25
C $25\sqrt{2}$
D 50
E $50\sqrt{2}$

90. **مراجعة** أي مما يلي قد يكون معادلة لزهرة مثلات بتلات؟ G
F $r = 3\sin\theta$
G $r = \sin 3\theta$
H $r = 6\sin\theta$
J $r = \sin 6\theta$

91. ما الصورة القطبية لـ $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟ C
A $r = \sin\theta$
B $r = 2\sin\theta$
C $r = 4\sin\theta$
D $r = 8\sin\theta$

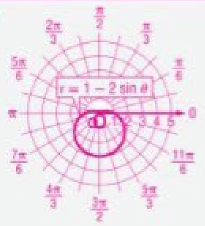
92. **مراجعة** أي مما يلي يمكن أن يكون معادلة لحلزون أرشميدس الذي يمر عبر $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$؟ J
F $r = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\theta$
G $r = \theta$
H $r = \frac{3}{4}$
J $r = \frac{\theta}{2}$

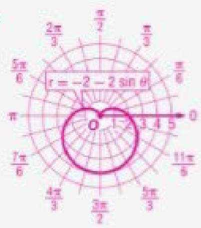
انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين 68، اقترح على الطلاب أولاً أن يمثلوا بيانيًا جميع المعادلات الثلاث. ثم يكتبوا $r = \sin\theta$ في صورة متعامدة.

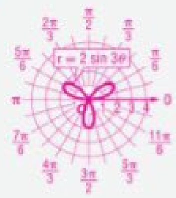
4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من كل طالب أن يكتب فقرة يشرح فيها كيف ساعده موضوع اليوم في فهم درس الغد عن تحديد المعادلة القطبية للمخروطات.

إجابات إضافية

75.


76.


77.


التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب توضيح أن $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ هي معادلة لدائرة بتحويلها إلى الإحداثيات المتعامدة. ثم اطلب منهم إيجاد المركز ونصف القطر.

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$r^2 = ra\cos\theta + rb\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2;$$

المركز $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$، نصف القطر $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

اختبار نصف الوحدة
الدروس من 1-9 إلى 3-9

مثّل بيانيًا كل نقطة على شبكة قطبية. (الدرس 1-9) **1-4. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

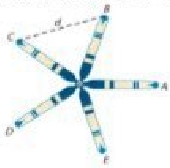
1. $A(-2, 45°)$
2. $D(1, 315°)$
3. $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
4. $B\left(3, -\frac{5\pi}{6}\right)$

5-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. (الدرس 1-9)

5. $r = 3$
6. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$
7. $\theta = 60°$
8. $r = -1.5$

9. **طائرات مروحية** يتألف دوّار طائرة مروحية من خمس شفرات على مسافات متساوية. يبلغ طول كل شفرة 3.45 أمتار. (الدرس 1-9)



الإجابة النموذجية: $A(11.5, 3°)$; $B(11.5, 75°)$; $C(11.5, 147°)$; $D(11.5, 219°)$; $E(11.5, 291°)$

a. إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي تساوي °3، فاكتب زوجًا مرتبًا لتمثيل طرف كل شفرة على الشبكة القطبية. افترض أن مركز الدوّار يقع عند القطب.

b. ما المسافة d بين أطراف شفرات الطائرة المروحية مقربًا لأقرب جزء من عشرة من المتر؟ **13.5 m**

10-13. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مثّل بيانيًا كل معادلة مما يلي. (الدرس 2-9)

10. $r = \frac{1}{4}\sec\theta$
11. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
12. $r = 3\csc\theta$
13. $r = 4\sin\theta$

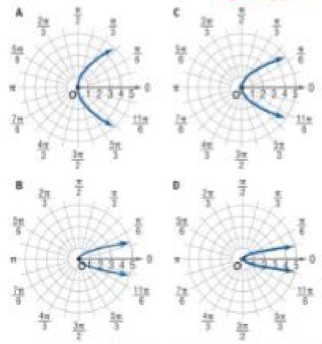
14. **زجاج مزخرف** النافذة الوردية عبارة عن نافذة دائرية تُستخدم في العمارة القوطية. يتجه نمط النافذة بشكل إشعاعي من المركز. يمكن التوصل إلى القيمة التقريبية للنافذة الموضحة من خلال المعادلة $r = 3\sin 6\theta$. استخدم التناظر والأصفار وقيم r القصوى في الدالة لتمثيل الدالة بيانيًا. (الدرس 2-9) **انظر الهامش.**

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثّله بيانيًا. (الدرس 2-9)

15. $r = \frac{1}{2}\sin\theta$
16. $r = \frac{1}{3}\theta + 3, \theta \geq 0$
17. $r = 1 + 2\cos\theta$
18. $r = 5\sin 3\theta$

15-18. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

19. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني القطبي لـ $y^2 = \frac{1}{2}x$ (الدرس 3-9) **B**



أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة لها إحداثيات قطبية المعطاة. (الدرس 3-9)

20. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ $(-2, 2\sqrt{3})$
21. $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
22. $(-1, 210°)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
23. $(3, 30°)$ $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

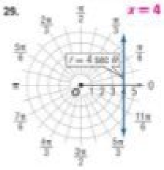
أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة لها الإحداثيات المتعامدة المعطاة إذا كانت $0 \leq \theta \leq 2\pi$. قم بالتقريب إلى أقرب مئة إذا لزم الأمر. (الدرس 3-9)

24. $(-3, 5)$ $(5.83, 2.11)$ و $(-5.83, 5.25)$
25. $(8, 1)$ $(8.06, 0.12)$ و $(-8.06, 3.27)$
26. $(7, -6)$ $(9.22, 5.57)$ و $(-9.22, 2.43)$
27. $(-4, -10)$ $(10.77, 4.33)$ و $(-10.77, 1.19)$

اكتب معادلة متعامدة لكل تمثيل بياني. (الدرس 3-9)

28. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

29. $x = 4$



الدروس من 1-9 إلى 3-9

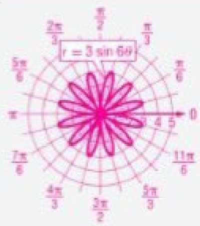
التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابة إضافية

14.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-4 تعريف القطوع المخروطية.

الدرس 9-4 تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية. كتابة المعادلة القطبية للمخروط وتمثيلها بيانيًا علمًا باختلافه المركزي ومعادلة الدليل الخاص به.

بعد الدرس 9-4 إيجاد مساحة المنطقة المحاطة بمنحنى أعطيت المعادلة الخاصة به في صورة قطبية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ماذا تعرف عن القطع الناقص في المعادلة المتعامدة $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$؟ المحور الأكبر أفقي، والبعد البؤري عند $(\pm4, 0)$، والمركز $(0, 0)$

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 9-4 الصور القطبية للقطوع المخروطية

..السابق

- لقد قمت بتحديد القطوع المخروطية.

..الحالي

1. تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
2. كتابة المعادلة القطبية وتمثيلها بيانيًا لقطع مخروطي أعطي اختلافه المركزي وأعطيت معادلة دليله.

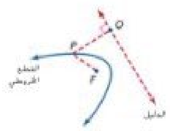
..لماذا؟

- يمكن استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية لتمثيل الحركة المدارية، مثل مدار كوكب حول الشمس أو مدار قمر صناعي حول كوكب.

1 استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

حددت في السابق القطوع المخروطية بدلالة المسافة بين البؤرة والدليل (قطع مكافئ) أو بين بؤرتين (قطع ناقص وقطع زائد). يمكننا بدلاً من ذلك تحديد كل هذه المنحنيات باستخدام تعريف دليل البؤرة للقطع المكافئ.

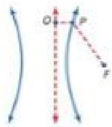
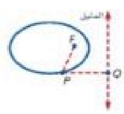
وبصورة عامة، يمكن تعريف القطع المخروطي على أنه المحلّ الهندسي لمجموعة نقاط، بحيث يتحقق أن نسبة المسافة من نقطة ما على القطع P إلى البؤرة والمسافة من النقطة نفسها إلى مستقيم ثابت لا يضم P (الدليل) هي نسبة ثابتة. تمثل هذه النسبة الثابتة $\frac{PF}{PQ}$ الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويشار إليها بالرمز e.



e بمثابة نسبة ثابتة $e=\frac{PF}{PQ}$ أو **e بمثابة مضاعف ثابت** $PF = e \cdot PQ$

تذكر أنه في القطع المكافئ، $PF = PQ$. ولهذا يحتوي القطع المكافئ على الاختلاف المركزي $\frac{PQ}{PQ}$ أو 1. تعطينا قيم e الأخرى قطوعًا مخروطية أخرى. تتلخص هذه الاختلافات المركزية فيما يلي.

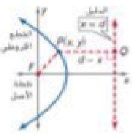
ملخص المفهوم الاختلاف المركزي

قطع زائد	قطع مكافئ	قطع ناقص
$e > 1$	$e = 1$	$0 < e < 1$
		
$\frac{PF}{PQ} > 1$	$\frac{PF}{PQ} = 1$	$0 < \frac{PF}{PQ} < 1$

تذكر أيضًا أنه حين يقع مركز قطع مخروطي عند نقطة الأصل، فإن المعادلات المتعامدة للقطوع المخروطية تأخذ صورة أبسط.

القطوع الزائدة	القطوع المكافئة	القطوع الناقصة
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y^2=4px$ أو $x^2=4py$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

باستخدام تعريف البؤرة-الدليل، تشتق معادلة القطع المخروطي التي بالصورة القطبية إذا كانت إحدى بؤر القطع تقع عند نقطة الأصل.



لننظر إلى قطع مخروطي تقع بؤرته عند نقطة الأصل ويقع دليله إلى اليمين عند $x = d$. بالنسبة لأية نقطة $P(x, y)$ على المنحنى، تتحدد المسافة PF بواسطة $\sqrt{x^2 + y^2}$، وتتحدد المسافة PQ بواسطة $d - x$. يمكننا تعويض هذه التعابير في تعريف القطع المخروطي.

$PF = e \cdot PQ$ تعريف القطع المخروطي

$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$ $PF = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $PQ = d - x$

ينبغي أن يدفعك التعبير $\sqrt{x^2 + y^2}$ إلى التفكير في الإحداثيات القطبية. الواقع أن المعادلة بالأعلى لها صورة أبسط في النظام الإحداثي القطبي.

$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$	الصورة المتعامدة لقطع مخروطي معرّف بدلالة اختلافه المركزي e
$r = e(d - r\cos\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x = r\cos\theta$
$r = ed - er\cos\theta$	خاصية التوزيع
$r + er\cos\theta = ed$	اعزل حدود r
$r(1 + e\cos\theta) = ed$	بالتحليل إلى العوامل
$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$	بالحل لإيجاد r

هذه المعادلة الأخيرة هي الصورة القطبية لمعادلة القطوع المخروطية عند وجود البؤرة عند القطب ووجود الدليل الرأسي والمركز أو الرأس إلى يمين القطب. يمكن أن تنتج التوجيهات المختلفة للبؤرة والدليل صورًا مختلفة من هذه المعادلة القطبية كما هو وارد في الملخص أدناه.

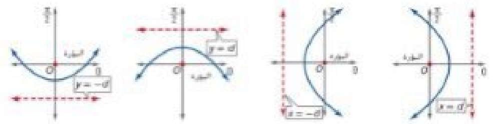
نصيحة دراسية
القطوع المخروطية الأخرى عند تعريف القطوع المخروطية من حيث اختلافها المركزي، تعتبر e قيمة ثابتة موجبة. ثمة لا توجد دوائر أو مستقيمات أو قطوع مخروطية متحسرة أخرى.

المفهوم الأساسي المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

يكون للقطع المخروطي الذي اختلافه المركزي $e > 0$ وفيه $d > 0$، وتقع بؤرته عند القطب، المعادلة القطبية التالية.

- $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = d$ (الشكل 9.4.1)
- $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = -d$ (الشكل 9.4.2)
- $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = d$ (الشكل 9.4.3)
- $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = -d$ (الشكل 9.4.4)

في كل من الأمثلة أدناه، يكون $e = 1$، وبالتالي يأخذ القطع المخروطي صورة قطع مكافئ.



الشكل 9.4.1 الشكل 9.4.2 الشكل 9.4.3 الشكل 9.4.4

قراءة في الرياضيات
الاختلاف المركزي في كل من هذه المعادلات القطبية، الحرف e عبارة عن متغير يمثل الاختلاف المركزي للقطع المخروطي. ينبغي عدم الخلط بينه وبين العدد النسبي e، وهو قيمة ثابتة.

سوف تشتق المعادلات الثلاث الأخيرة من هذه المعادلات في التمارين 50-52

لاحظ أنه بالنسبة إلى $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$، يقع دليل القطع المخروطي إلى يسار القطب. بالنسبة إلى $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$، يقع الدليل فوق القطب. بالنسبة إلى $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$، يقع الدليل تحت القطب.

- ما نسبة c إلى a في القطع الناقص؟ $4 \div 5 = 0.8$
- هل يمكن أن تكون نسبة c إلى a في القطع الزائد الممثل بالمعادلة $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ تساوي 0.8 أيضًا؟ اشرح. لا، فيما أن $a^2 + b^2 = c^2$ في القطع الزائد، فإن $\sqrt{34} \div 5 \approx 1.12$.
- ما أوجه مقارنة نسبة c إلى a في القطع الناقص وفي القطع الزائد وبين 1؟ القطع الناقص: <1، القطع الزائد: >1

1 استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

يبين **المثال 1** كيفية تحديد القطوع المخروطية من خلال المعادلات القطبية لها، ويشمل ذلك تحديد الاختلاف المركزي ومعادلة الدليل.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي.

a. $r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}$ $e = \frac{2}{3}$؛ قطع ناقص؛ $x = 5$

b. $r = \frac{-15}{6\sin\theta - 3}$ $e = 2$؛ قطع زائد؛ $y = -2.5$

التركيز على محتوى الرياضيات

القطوع المخروطية في الصورة القطبية يركز الدرس على ثلاثة من أربعة قطاعات مخروطية (القطع الناقص، والقطع المكافئ، والقطع الزائد). أما القطع الرابع، وهو الدائرة، فإن له اختلاف مركزي يساوي 0. ومعادلة الدائرة في اللاحداثيات القطبية هي معادلة بسيطة بالصيغة $r = a$، حيث a ثابت.

لتحليل المعادلة القطبية لقطع مخروطي، ابدأ بكتابة المعادلة بالصورة القياسية، $r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$ في هذه الصورة، حدد الاختلاف المركزي واستخدم هذه القيمة لتحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة. ثم حدد معادلة الدليل واستخدمه في وصف توجيه القطع المخروطي.

مثال 1 تحديد القطوع المخروطية من المعادلات القطبية

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

a. $r = \frac{9}{3 + 2.25\cos\theta}$

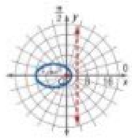
اكتب المعادلة بالصورة القياسية، $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$

$r = \frac{9}{3 + 2.25\cos\theta}$ المعادلة الأصلية

$r = \frac{3(3)}{3(1 + 0.75\cos\theta)}$ بتحليل البسط والمقام إلى العوامل

$r = \frac{3}{1 + 0.75\cos\theta}$ بقسمة البسط والمقام على 3

في هذه الصورة، يمكنك أن تفهم من المقام أن $e = 0.75$. ولهذا، فإن القطع المخروطي قطع ناقص. بالنسبة للمعادلات القطبية لهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = d$. نعلم من البسط أن $ed = 3$. ولهذا فإن $d = 3 \div 0.75$ أو 4. ولهذا، فإن معادلة الدليل هي $x = 4$.



تحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{9}{3 + 2.25\cos\theta}$ ودليلها $x = 4$ باستخدام إما التقنيات الواردة في الدرس 9-2 أو حاسبة تمثيل بياني. التمثيل البياني على شكل قطع ناقص يقع دليله إلى يمين القطب. ✓

b. $r = \frac{-16}{4\sin\theta - 2}$

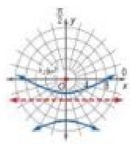
اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

$r = \frac{-16}{4\sin\theta - 2}$ المعادلة الأصلية

$r = \frac{-2(8)}{-2(1 - 2\sin\theta)}$ بتحليل البسط والمقام إلى العوامل

$r = \frac{8}{1 - 2\sin\theta}$ بقسمة البسط والمقام على -2.

المعادلة بالصورة $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$، ولذلك فإن $e = 2$. ولهذا، فإن القطع المخروطي على شكل قطع زائد. بالنسبة للمعادلات القطبية لهذه الصورة، معادلة الدليل هي $y = -d$. لأن $ed = 8$ أو $d = 8 \div 2$ أو 4. ولهذا، فإن معادلة الدليل هي $y = -4$.



تحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{-16}{4\sin\theta - 2}$ ودليلها $y = -4$. التمثيل البياني على شكل قطع زائد ببؤرة واحدة عند نقطة الأصل فوق الدليل. ✓

تمرين موجه

1A. $r = \frac{-6}{3\cos\theta - 1}$ $e = 3$؛ قطع زائد؛ $x = -2$

1B. $r = \frac{9}{3 + 3\sin\theta}$ $e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $y = 3$

1C. $r = \frac{1}{6 + 1.2\cos\theta}$ $e = 0.2$؛ قطع ناقص؛ $x = \frac{5}{6}$

نصيحة دراسية

ثنائيات البؤرة-الدليل بينما يحتوي القطع المكافئ على بؤرة واحدة ودليل واحد، تحتوي القطوع الناقصة والقطوع المكافئة على ثنائي بؤرة-دليل. يمكن استخدام أي من ثنائي البؤرة-الدليل لعمل قطع مخروطي.

نصائح للمعلمين الجدد

القطاعات المخروطية اقترح على الطلاب أن يكتب كلٌ منهم الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد في إحدى بطاقات الملاحظات ليراجعها عند الحاجة.

2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

يمكنك كتابة المعادلة القطبية لقطع مخروطي عند إعطائك اختلافه المركزي ومعادلة الدليل أو إعطائك اختلافه المركزي إضافة إلى بعض الخواص الأخرى.

مثال 2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

اكتب معادلةً قطبيةً للقطع المخروطي ذي الخواص المعطاة ومثّله مع دليله بيانيًا.

a. $e = 2$؛ الدليل: $y = 4$

بما أن $e = 2$، فالقطع المخروطي قطع زائد. يقع الدليل $y = 4$ فوق القطب، ولهذا فالمعادلة بالصورة $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$. استخدم قيمتي e و d لكتابة المعادلة.

$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ الصورة القطبية لقطع مخروطي دليله $y = d$

$r = \frac{2(4)}{1 + 2\sin\theta}$ أو $\frac{8}{1 + 2\sin\theta}$ $\quad e = 2$ ، $d = 4$

ارسم التمثيل البياني لهذه المعادلة القطبية ودليلها.
التمثيل البياني على شكل قطع زائد يقع دليله فوق القطب.

b. $e = 0.5$؛ الرأسان عند $(-4, 0)$ و $(12, 0)$

بما أن $e = 0.5$، فالقطع المخروطي قطع ناقص. يقع مركز القطع الناقص عند $(4, 0)$، وهي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين المعطيين. تقع هذه النقطة إلى يمين القطب. ولهذا سيقع الدليل إلى يسار القطب عند $x = -d$. المعادلة القطبية لقطع مخروطي بهذا الدليل هي $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$.

استخدم قيمة e والصورة القطبية لنقطة على القطع المخروطي للتوصل إلى قيمة d. تحتوي نقطة الرأس $(12, 0)$ على الإحداثيات القطبية $(r, \theta) = \left(\sqrt{12^2 + 0^2}, \tan^{-1}\frac{0}{12}\right)$ أو $(12, 0)$.

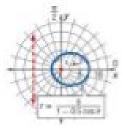
$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ الصورة القطبية لقطع مخروطي دليله $x = -d$

$12 = \frac{0.5d}{1 - 0.5\cos 0}$ $\quad e = 0.5$ ، $r = 12$ ، $\theta = 0$

$12 = \frac{0.5d}{0.5}$ $\quad \cos 0 = 1$

$12 = d$ بسّط.

لهذا، فإن معادلة القطع الناقص هي $r = \frac{0.5 \cdot 12}{1 - 0.5\cos\theta}$ أو $r = \frac{6}{1 - 0.5\cos\theta}$. ولأن $d = 12$، فإن معادلة الدليل هي $x = -12$. التمثيل البياني قطع ناقص برأسين عند $(-4, 0)$ و $(12, 0)$.



نصيحة دراسية
آثار تعدد الاختلافات المركزية

تمرين موجّه **2A–B. انظر الهامش.**

2A. $e = 1$؛ الدليل: $x = 2$ $\quad$ **2B.** $e = 2.5$؛ الرأسان عند $(0, -3)$ و $(0, -7)$

حلّلت في السابق المعادلات المتعامدة للقطوع المخروطية في الصورة القياسية لوصف الخواص الهندسية للقطوع المكافئة والقطوع الناقصة والقطوع الزائدة. يمكنك استخدام التحليل الهندسي للتمثيل البياني لقطع مخروطي معين في صورة قطبية لكتابة المعادلة بصورة متعامدة.

2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

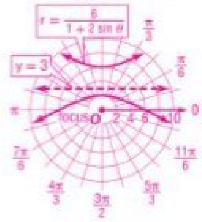
يبين **المثال 2** طريقة كتابة معادلة قطبية وتمثيلها بيانيًا لقطع مخروطي علمًا بالاختلاف المركزي ومعادلة الدليل أو رؤوس المخروط. ويبين **المثال 3** طريقة كتابة معادلة لمخروط في صورة متعامدة علمًا بالمعادلة الخاصة به في صورة قطبية.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة قطبية للقطع المخروطي ذي الخواص المعطاة ومثّله مع دليله بيانيًا.

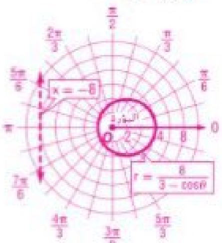
a. $e = 2$؛ الدليل: $y = 3$

قطع زائد: $r = \frac{6}{1 + 2\sin\theta}$



b. $e = \frac{1}{3}$؛ رؤوس عند $(-2, 0)$ و $(4, 0)$

قطع ناقص: $r = \frac{8}{3 - \cos\theta}$



التدريس المتمايز OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من المجموعات اختيار قطع مخروطي. ويتعين عليهم أن يطوروا دروسهم الخاصة ليدرّسوا للطلاب كيفية تحويل المعادلات المتعامدة الخاصة بنوع القطع المخروطي إلى معادلات قطبية. وينبغي تقديم تلك الدروس لبقية الصف وإضافة مساعدات بصرية وأمثلة للمسائل. وينبغي أن يشارك بقية الطلاب في طرح الأسئلة والإجابة عنها. ثم تقدم المجموعة بعدئذٍ تلخيصًا مفصلًا بالدرس وطريقة تقديمه.

مثال إضافي

3 اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة.

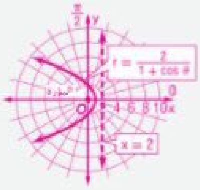
a. $r = \frac{6}{1-\sin\theta}$ $x^2 = 12y + 36$

b. $r = \frac{1.8}{1-0.8\cos\theta}$

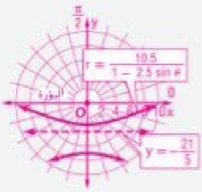
$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

2A. $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$



2B. $r = \frac{10.5}{1-2.5\sin\theta}$



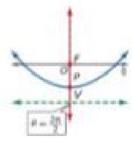
مثال 3 كتابة الصورة القطبية لمقاطع مخروطية بالصورة المتعامدة

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة.

a. $r = \frac{4}{1-\sin\theta}$

الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية

بالنسبة لهذه المعادلة، $e = 1$ و $d = 4$. يحدد الاختلاف المركزي وصورة المعادلة أن هذا قطع مكافئ ينفتح رأسيًا مع وجود البؤرة عند القطب والدليل $y = -4$. المعادلة العامة لهذا القطع المكافئ بالصورة المتعامدة هي $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.


الشكل 9.4.5

الخطوة 2 حدد قيم h و k و p

تقع الرأس بين البؤرة F ودليل القطع المكافئ الذي يتشكل عندما تكون $\theta = \frac{3\pi}{2}$، كما يظهر في الشكل 9.4.5. بإيجاد قيمة الدالة عند هذه القيمة، نجد أن الرأس يقع عند الإحداثيات القطبية $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$، التي تقابل الإحداثيات المتعامدة $(0, -2)$. لذلك، $(h, k) = (0, -2)$. المسافة p من الرأس عند $(0, -2)$ إلى البؤرة عند $(0, 0)$ تبلغ 2.

الخطوة 3 عوض من قيم h و k و p في الصورة القياسية لمعادلة قطع مكافئ.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الصورة القياسية للقطع المكافئ
$(x-0)^2 = 4(2)[y-(-2)]$	$h = 0$ و $k = -2$ و $p = 2$
$x^2 = 8y + 16$	بسّط.

b. $r = \frac{3.2}{1-0.6\cos\theta}$

الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية

بالنسبة لهذه المعادلة، $e = 0.6$ و $d \approx 5.3$. يحدد الاختلاف المركزي وصورة المعادلة أن هذا قطع ناقص بالدليل $x = -5.3$. ولهذا، يقع المحور الأكبر للقطع الناقص بطول المحور القطبي أو المحور x. المعادلة العامة لهذا القطع الناقص بالصورة المتعامدة هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.


الشكل 9.4.6

الخطوة 2 حدد قيم h و k و a و b.

الرؤوس هي النقاط الطرفية للمحور الأكبر وتتشكل عندما تكون $\theta = 0$ و π كما هو موضح في الشكل 9.4.6. بإيجاد قيمة الدالة عند هذه القيم، نجد أن الرأسين بالإحداثيات القطبية $(8, 0)$ و $(2, \pi)$، والتي تقابل الإحداثيات المتعامدة $(8, 0)$ و $(-2, 0)$. مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة بين الرأسين، ولهذا $(h, k) = (3, 0)$.

تبلغ المسافة a بين المركز وكل رأس 5، والمسافة c من المركز إلى البؤرة عند $(0, 0)$ هي 3. حسب علاقة فيثاغورث $b = \sqrt{a^2 - c^2}$، أو $b = \sqrt{5^2 - 3^2}$ أو 4.

الخطوة 3 عوض من قيم h و k و a و b في الصورة القياسية لمعادلة قطع ناقص.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	الصورة القياسية للقطع الناقص
$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1$	$h = 3$ و $k = 0$ و $a = 5$ و $b = 4$
$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	بسّط.

تمرين موجّه

3A. $r = \frac{2.5}{1-1.5\cos\theta}$ $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

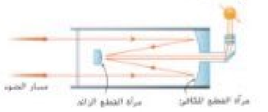
3B. $r = \frac{5}{1+\sin\theta}$ $x^2 = -10y + 25$

التمارين

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية. (المثال 1) **1-8. انظر الهامش.**

1. $r = \frac{20}{4 + 4\sin\theta}$
2. $r = \frac{18}{2 - 6\cos\theta}$
3. $r = \frac{21}{3\cos\theta + 1}$
4. $r = \frac{24}{4\sin\theta + 8}$
5. $r = \frac{-12}{6\cos\theta - 6}$
6. $r = \frac{9}{4 - 3\sin\theta}$
7. $r = \frac{-8}{\sin\theta - 0.25}$
8. $r = \frac{10}{2.5 + 2.5\cos\theta}$

9. **المناظير الفلكية** منظار كاسيغرين الفلكي الذي تم اختراعه عام 1692، ينتج صورة عن طريق انعكاس الضوء على مرآتين على شكل قطع مكافئ وقطع زائد. حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل لكل معادلة تمثل مرآة في المنظار الفلكي. (المثال 1)



a. $r = \frac{7}{2\sin\theta + 2}$ **$e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $y = 3.5$**

b. $r = \frac{28}{12.5\cos\theta + 5}$ **$e = 2.5$؛ قطع زائد؛ $x = 2.24$**

اكتب معادلةً قطبيةً للقطع المخروطي ذي الخواص المعطاة ومثّله مع دليله بيانيًا. (المثال 2)

10. $e = 1$، الدليل: $y = 6$
11. $e = 0.75$، الدليل: $x = -8$
12. $e = 5$، الدليل: $x = 2$
13. $e = 0.1$، الدليل: $y = 8$
14. $e = 6$، الدليل: $y = -7$
15. $e = 1$، الدليل: $x = -1.5$
16. $e = 0.8$، الرأسان عند $(-36, 0)$ و $(4, 0)$
17. $e = 1.5$، الرأسان عند $(-3, 0)$ و $(-15, 0)$

10-17. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة. (المثال 3) **18-25. انظر الهامش.**

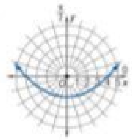
18. $r = \frac{4.8}{1 + \sin\theta}$
19. $r = \frac{30}{4 + \cos\theta}$
20. $r = \frac{5}{1 - 1.5\cos\theta}$
21. $r = \frac{5.1}{1 + 0.7\sin\theta}$
22. $r = \frac{12}{1 - \cos\theta}$
23. $r = \frac{6}{0.25 - 0.75\sin\theta}$
24. $r = \frac{4.5}{1 + 1.25\sin\theta}$
25. $r = \frac{8.4}{1 - 0.4\cos\theta}$

26-29. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

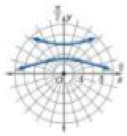
حاسبة التمثيل البياني حدِّد نوع القطع المخروطي لكلِّ معادلة قطبية مما يلي. ثم مثّل كل معادلة بيانيًا.

26. $r = \frac{3}{2 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$
27. $r = \frac{3}{1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$
28. $r = \frac{2}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}$
29. $r = \frac{4}{1 + 2\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}$

صل كل معادلة قطبية بتمثيلها البياني.

a.


b.


c.


d.


30. $r = \frac{10}{1 + \cos\theta}$ **d**
31. $r = \frac{4}{1 - \sin\theta}$ **a**
32. $r = \frac{5}{2 - \cos\theta}$ **b**
33. $r = \frac{12}{1 + 3\sin\theta}$ **c**

34-37. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية. ثم ارسم التمثيل البياني للمعادلة وحدد الدليل.

34. $r = \frac{12}{2 - 0.75\cos\theta}$
35. $r = \frac{1}{0.2 - 0.2\sin\theta}$
36. $r = \frac{6}{1.2\sin\theta + 0.3}$
37. $r = \frac{8}{\cos\theta + 5}$

38a. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

38. **الفلك** يتحرك المذنب بوريلي حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص بالاختلاف المركزي $e = 0.624$. تُعرف النقطة الأقرب إلى الشمس في مدار المذنب بأنها الحضيض، بينما تُعرف النقطة الأبعد من الشمس بأنها الأوج. يقع الأوج على مسافة 5.83 AU (وحدات فلكية، بناء على المسافة بين الكرة الأرضية والشمس) من الشمس ويقع الحضيض على مسافة 1.35 AU. يبلغ قطر الشمس 0.0093 AU تقريبًا.

a. اكتب معادلة قطبية للمسار الذي على شكل قطع ناقص لمذنب بوريلي. ومثّل تلك المعادلة بيانيًا.

b. حدد المسافة بالكيلومترات بين مذنب بوريلي وبين الشمس عند الأوج والحضيض إذا كانت كل مليون كيلومتر $1\ AU \approx 150$

الأوج: 872.57 مليون كيلومتر؛ الحضيض: 202.05 مليون كيلومتر

البرهان أثبت كلًا مما يلي. **39-40. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

39. $b = a\sqrt{1 - e^2}$ لقطع ناقص
40. $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ لقطع زائد

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 25 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورقة الشبكة القطبية يحتاج الطلاب إلى استخدام ورقة الشبكة القطبية عند تمثيل القطوع المخروطية بيانيًا في العديد من التمارين.

انتبه!

خطأ شائع في التمرينين 47 و 48، راقب الطلاب الذين حددوا الصورة القطبية بطريقة خاطئة. ذكّر الطلاب بأنهم يجب أولاً أن يحددوا نوع المخروط الذي تمثله كل معادلة متعامدة.

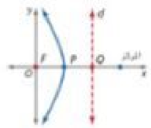
إجابات إضافية

1. $e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $y = 5$
2. $e = 3$؛ قطع زائد؛ $x = -3$
3. $e = 3$؛ قطع زائد؛ $x = 7$
4. $e = 0.5$؛ قطع ناقص؛ $y = 6$
5. $e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $x = -2$
6. $e = 0.75$؛ قطع ناقص؛ $y = -3$
7. $e = 4$؛ قطع زائد؛ $y = -8$
8. $e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $x = 4$

19. $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{y^2}{60} = 1$
20. $\frac{(x+6)^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$
21. $\frac{x^2}{51} + \frac{(y+7)^2}{100} = 1$
22. $y^2 = 24(x+6)$
23. $\frac{(y+9)^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$
24. $\frac{(y-10)^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$
25. $\frac{(x-4)^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1$

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

41. **البرهان** استخدم تعريف الاختلاف المركزي لقطع مخروطي، $PF = ePQ$ ورسم القطع الزائد المبيّن أدناه للتحقق من أن $d = \frac{a(e^2-1)}{e}$ لأي قطع زائد.

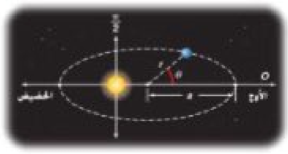


اكتب كل معادلة متعامدة بالصورة القطبية. **42–45. انظر الهامش.**

42. $x^2 = 4y + 4$
43. $-10y + 25 = x^2$
44. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$
45. $\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

46. **علم الفلك** تدور الكواكب حول الشمس بمدارات على شكل قطع ناقص تقريبًا حيث تقع الشمس عند إحدى البؤرتين، وذلك وفق ما هو موضّح أدناه.



a. بيّن أن المعادلة القطبية لمسار الكواكب يمكن أن تكتب بالصيغة $r = \frac{a(1-e^2)}{(1-e\cos\theta)}$.

b. أثبت أن مسافة أقرب نقطة لأي كوكب إلى الشمس (الحضيض) هي $a(1-e)$ وأن مسافة أبعد نقطة من الشمس (الأوج) هي $a(1+e)$.

c. استخدم الصيغتين الواردتين في القسم a لإيجاد مسافتي الحضيض والأوج لكل كوكب من الكواكب.

الكوكب	e	a	الكوكب	e	a
الأرض	0.017	1.000	نبتون	0.009	30.06
المشتري	0.048	5.203	زحل	0.056	9.539
المريخ	0.093	1.524	أورانوس	0.047	19.18
عطارد	0.206	0.387	الزهرة	0.007	0.723

d. ما الكوكب الذي يتمتع بأصغر مسافة بين الحضيض والرأس؟ وما الكوكب الذي يتمتع بأكبر مسافة بينهما؟ **عطارد: نبتون**

اكتب كل معادلة بصورة قطبية. (إرشاد: قم بإزاحة كل قطع مخروطي بحيث تقع البؤرة على القطب.)

47. $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ $\quad r' = \frac{4.5}{1+1.25\cos\theta'}$

48. $3(x+3)^2 + 4y^2 = 192$ $\quad r' = \frac{6}{1+0.5\cos\theta'}$

49a–f. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

49. **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة آثار تغيير الاختلاف المركزي والدليل على التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية.

a. **عدديًا** اكتب معادلة قطع مخروطي بؤرته $(0, 0)$ ودليله $x = 3$ حيث $e = 0.4$ و 0.6 و 1 و 1.6 و 2. ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة.

b. **بيانيًا** مثّل بيانيًا الاختلاف المركزي ودليله لكل من المعادلات التي توصلت إليها في القسم a على المستوى الإحداثي نفسه.

c. **لفظيًا** صف التغيرات التي تحدث في التمثيلات البيانية في القسم b مع اقتراب e من 2.

d. **عدديًا** اكتب معادلة قطع مخروطي بؤرته $(0, 0)$ واختلافه المركزي $e = 0.5$ من أجل $d = 0.25$ و 1 و 4.

e. **بيانيًا** مثّل جميع المعادلات بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

f. **لفظيًا** صف العلاقة بين قيمة d والمسافة بين الرأسين والبؤرتين في التمثيلات البيانية في القسم e.

50–52. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

اشتقّ كلاً من المعادلات القطبية التالية لقطوع مخروطية وفق ما هو وارد في الصفحة 562 بالنسبة للمعادلة $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$. أدرج رسمًا تخطيطيًا مع كل اشتقاق.

50. $r = \frac{ed}{1-e\cos\theta}$

51. $r = \frac{ed}{1+e\sin\theta}$

52. $r = \frac{ed}{1-e\sin\theta}$

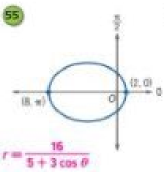
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

53. **الكتابة في الرياضيات** صف تعريفين يمكن استخدامهما في تعريف القطع المخروطي.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

54. **التبرير** اشرح السبب في أن $r = \frac{ed}{1+e\sin\theta}$ لا تعطِ دائرة حقيقية لأي قيمة من قيم e. **انظر الهامش.**

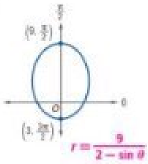
التحدي حدّد معادلةً قطبيةً للقطع المكافئ ذي الرأسين المعطيين إذا كانت إحدى البؤرتين تقع عند القطب.

55.



$r = \frac{16}{5+3\cos\theta}$

56.



$r = \frac{9}{2-\sin\theta}$

57. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام معادلة قطبية بالبؤرة $(0, 0)$ للتوصل إلى المسافة من البؤرة إلى أية نقطة على القطع المخروطي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

إجابات إضافية

42. $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$
43. $r = \frac{5}{1+\sin\theta}$
44. $r = \frac{3}{1-0.5\cos\theta}$
45. $r = \frac{6}{1+0.5\cos\theta}$

54. الإجابة النموذجية: بما أن $e = 0$ في دائرة، فإن المعادلة تتحول في أبسط صورة إلى $r = 0$، وهي نقطة.

مراجعة شاملة

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة بالإحداثيات المتعامدة المعطاة $0 \le \theta \le 2\pi$.
قم بالتقريب إلى أقرب مئة، إذا لزم الأمر. (الدرس 9-1)

58. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right), \left(-2, \frac{7\pi}{4}\right)$

59. $(-2, -5)$ $(5.39, 4.33), (-5.39, 1.19)$

60. $(8, -12)$ $(14.42, 5.30), (-14.42, 2.16)$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثّله بيانيًا. (الدرس 9-2) 61–63. انظر الهامش.

61. $r = 3 + 3\cos\theta$

62. $r = -2\sin 3\theta$

63. $r = \frac{1}{2}\theta, \theta \ge 0$

حدّد معادلة القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواص مما يلي. 64–66. انظر الهامش.

64. الرأسان المشتركان $(5, 8)$، $(5, 0)$، البعد البؤري $(8, 4)$، $(2, 4)$

65. المحور الأكبر $(-2, 4)$ إلى $(8, 4)$، المحور الأصغر $(3, 1)$ إلى $(3, 7)$

66. البعد البؤري $(1, -1)$، $(9, -1)$، طول المحور الأصغر يساوي 6

67. **الأولمبياد** في الألعاب الأولمبية، تتحدد مراتب الفرق وفقًا لإجمالي نقاط كل فريق. يعطي كل نوع من الميداليات الأولمبية عددًا معينًا من النقاط للفريق. استخدم المعلومات التالية في تحديد الدورة الأولمبية التي حقق فيها البلد أكثر نقاط. الدورة الأولمبية عام 1996

الميدالية	النقاط
ذهبية	3
فضية	2
برونزية	1

الدورة الأولمبية	ذهبية	فضية	برونزية
1996	44	32	25
2000	37	24	31
2004	35	39	29
2008	36	38	36

أوجد قيم $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$، و $\tan 2\theta$ للقيمة المعطاة والفترة المعطاة. 68–70. انظر الهامش.

68. $\sin\theta = \frac{2}{3}, (0°, 90°)$

69. $\tan\theta = -\frac{24}{7}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

70. $\sin\theta = -\frac{4}{5}, \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

71–73. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

حدد الخطوط المقاربة الرأسية. ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

71. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

72. $y = 4\cot\frac{x}{2}$

73. $y = 2\cot\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 0.75$

أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمس المثلثية المتبقية لـ θ.

74. $\sec\theta = 2$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$

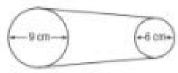
$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = \frac{1}{2}, \tan\theta = \sqrt{3}, \csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

75. $\csc\theta = \sqrt{5}$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan\theta = \frac{1}{2}, \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot\theta = 2$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

76. **SAT/ACT** بكرة يبلغ قطرها 9 سنتيمترات تلتف حول بكرة يبلغ قطرها 6 سنتيمترات كما هو موضح في الشكل. إذا كانت البكرة الأكبر تدور بسرعة 120 rpm (دورة في الدقيقة). فما سرعة دوران البكرة الأصغر؟ D



A 80 rpm
B 120 rpm
C 160 rpm
D 180 rpm
E 200 rpm

77. ما نوع القطع المخروطي المعطى بالمعادلة $r = \frac{3}{2 - 0.5\cos\theta}$؟ G

F دائرة
G قطع ناقص
H قطع مكافئ
J قطع زائد

78. **مراجعة** أي من الخيارات التالية يحتوي على الصورة المركّبة والمقدار للمتجه $\overline{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, 4, -2)$ ونقطة نهايته $B(-5, 2, 1)$؟ A

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$
B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$
C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$
D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

79. **مراجعة** ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي تصفه العلاقة $\frac{y^2}{47} + \frac{(x-12)^2}{34}$؟ H

F 0.38
G 0.41
H 0.53
J 0.62

التدريس المتمايز BL

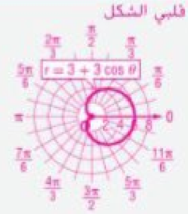
التوسع اطلب من الطلاب توضيح أن المعادلة $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ يمكن كتابتها بالصيغة $r = \frac{d}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}$ عندما تكون $e = 1$. بما أن $e = 1$، إذًا $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} = \frac{d}{1 - \cos\theta} = \frac{d}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}$.

4 التقويم

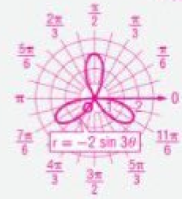
عيّن مصطلح الرياضيات قدّم للطلاب معادلة قطبية بالصيغة القياسية للمخروط. واطلب منهم إخبارك بقيمة e ونوع المخروط الممثل في المعادلة.

إجابات إضافية

61. قلبي الشكل



62. وردة



63. حلزون أرشميدس

64. $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

65. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

66. $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

68. $\frac{4\sqrt{5}}{9}; \frac{1}{9}; 4\sqrt{5}$

69. $-\frac{336}{625}; -\frac{527}{625}; \frac{336}{527}$

70. $\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; -\frac{24}{7}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-5 إجراء العمليات على الأعداد المركبة المكتوبة في صورة متعامدة.

الدرس 9-5 تحويل الأعداد المركبة من الصورة المتعامدة إلى الصورة القطبية والعكس. إيجاد نواتج ضرب الأعداد المركبة المكتوبة في صورة قطبية ونواتج قسمتها وقواها الأسية وجذورها.

بعد الدرس 9-5 برهان نظرية دي موافر.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

ارسم على اللوحة خمسة صناديق تعشيش.

(يتبع في الصفحة المقبلة)

الدرس 9-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

:: السابق

- أجريت العمليات بالأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المتعامدة.

:: الحالي

1. تحويل الأعداد المركبة من الصورة المتعامدة إلى الصورة القطبية والعكس.
2. إيجاد نواتج ضرب الأعداد المركبة ونواتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية.

:: لماذا؟

- يستخدم المهندسون الميكانيكيون الأعداد المركبة في وصف بعض العلاقات في الكهرباء. الجهد E، والمعاوقة Z، والتيار I هي الكميات الثلاث التي تربط بينها المعادلة $E = I \cdot Z$ المستخدمة في وصف التيار المتردد. يمكن كتابة كل متغير في صورة عدد مركب بالصيغة $a + bj$ حيث j عدد تخيلي (يستخدم المهندسون الرمز j لكي لا يحدث خلط بينه وبين التيار I). بالنسبة للمعاوقة، يمثل الجزء الحقيقي a معارضة تدفق التيار بسبب المقاومات ويرتبط الجزء التخيلي b بالمعارضة الناجمة عن المستحثات والمكثفات.

المفردات الجديدة

مستوى مركب complex plane
محور حقيقي real axis
محور تخيلي imaginary axis
مستوى أرجاند Argand plane
القيمة المطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number
صورة قطبية polar form
صيغة مثلثية trigonometric form
معامل modulus
إزاحة زاوية argument
جذور الوحدة من الدرجة p pth roots of unity

1 الصور القطبية للأعداد المركبة

العدد المركب المذكور في صورة متعامدة، $a + bi$، له مكون حقيقي a ومكون تخيلي bi. يمكنك تمثيل عدد مركب بيانيًا على **المستوى المركب** عن طريق تمثيله بالنقطة (a, b)، على منوال المستوى الإحداثي. نحتاج إلى محورين لتمثيل عدد مركب. يتم تعيين المكون الحقيقي على المحور الأفقي المسمى **المحور الحقيقي**، ويتم تعيين المكون التخيلي على المحور الرأسي المسمى **المحور التخيلي**. يمكن أيضًا الإشارة إلى المستوى المركب باسم **مستوى أرجاند**.

فلنأخذ عددًا مركبًا حيث $a + 0i$ و $b = 0$. النتيجة هي العدد الحقيقي a الذي يمكن تمثيله بيانيًا باستخدام خط أعداد حقيقية فقط أو المحور الحقيقي. عندما تكون $b \neq 0$، فالمحور التخيلي مطلوب لتمثيل المكون التخيلي.

تذكّر أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي بُعده من الصفر على خط الأعداد. وعلى نفس المنوال، **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي بُعده عن الصفر في المستوى المركب. عند تمثيل $a + bi$ بيانيًا على المستوى المركب، يمكن حساب المسافة من الصفر باستخدام نظرية فيثاغورث.

المفهوم الأساسي قيمة مطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

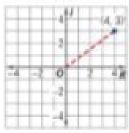
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 1 التمثيلات البيانية والقيم المطلقة للأعداد المركبة

مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة.

a. $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

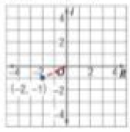
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4$ ، $b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسّط.

القيمة المطلقة لـ $4 + 3i = 5$.

b. $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2$ ، $b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بسّط.

القيمة المطلقة لـ $-2 - i \approx 2.24$.

تمرين موجّه

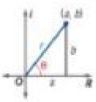
1A. $5 + 2i$ 1A–B. انظر الهامش.

1B. $-3 + 4i$

انتبه!

الصورة القطبية ينبغي عدم خلط الصورة القطبية للعدد المركب مع الإحداثيات القطبية للعدد المركب. تعتبر الصورة القطبية للعدد المركب طريقة أخرى لتمثيل العدد المركب. سيتناول هذا الدرس لاحقًا الإحداثيات القطبية للعدد المركب.

مثلما يمكن كتابة إحداثيات متعامدة (x, y) في صورة قطبية، يمكن عمل ذلك أيضًا مع الإحداثيات التي تعبّر عن التمثيل البياني لعدد مركب في المستوى المركب. النسب المثلثية نفسها التي تم استخدامها في التوصل إلى قيمتي x و y يمكن تطبيقها لتمثيل قيمتي a و b.



$\cos \theta = \frac{a}{r}$ ، $\sin \theta = \frac{b}{r}$

$r \cos \theta = a$ $r \sin \theta = b$ اضرب كل طرف في r.

بالتعويض عن تمثيلات الصورة القطبية بـ a و b، يمكننا حساب **الصورة القطبية** أو **الصيغة المثلثية** للعدد المركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r \cos \theta + (r \sin \theta)i$ $a = r \cos \theta$ ، $b = r \sin \theta$

$= r(\cos \theta + i \sin \theta)$ التحليل إلى العوامل

في حالة العدد المركب، يمثل r القيمة المطلقة، أو **المعامل**، في العدد المركب ويمكن التوصل إليه باستخدام العملية نفسها التي استخدمتها عند التوصل إلى القيمة المطلقة، $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. يطلق على الزاوية θ اسم **إزاحة زاوية** للعدد المركب. على نفس منوال التوصل إلى θ باستخدام إحداثيات متعامدة (x, y)، عند استخدام عدد مركب، $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ إذا كانت $a < 0$.

المفهوم الأساسي الصورة القطبية لعدد مركب

تكون الصورة القطبية أو الصيغة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r \cos \theta$ ، $b = r \sin \theta$ ، $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

حيث $a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ حيث $a < 0$.

نصيحة دراسية

الإزاحة الزاوية تسمى الإزاحة الزاوية للعدد المركب أيضًا السعة. كما في الإحداثيات القطبية تمامًا، θ ليست منفردة على الرغم من أنها مذكورة في العادة في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

اطرح الأسئلة التالية:

- استخدم رسم فن التخطيطي لتوضيح كيفية ارتباط الأعداد المركبة والحقيقية والنسبية والصحيحة والكلية ببعضها البعض. انظر الرسم التخطيطي في الصفحة السابقة.
- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي في صورة عدد مركب؟ فسّر. نعم، يمكن كتابة أي عدد حقيقي a في صورة عدد مركب $a + 0i$.
- بما أن مجموعة الأعداد المركبة تضم جميع الأعداد الحقيقية، هل تعتقد أنه يمكننا جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها أو لا؟ نعم

1 الصور القطبية للأعداد المركبة

يبين **المثال 1** كيفية التمثيل البياني للعدد المركب في المستوى المركب وإيجاد قيمته المطلقة. ويبين **المثال 2** كيفية التعبير عن العدد المركب في صورة قطبية. ويبين **المثال 3** كيفية التمثيل البياني لعدد مركب مكتوب في صورة قطبية، ثم تحويل الصورة القطبية إلى صورة متعامدة.

التقويم التكويني

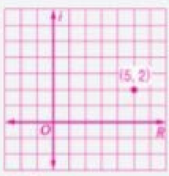
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

إرشاد للمعلمين الجدد

مستوى أرجاند يُعرف المستوى المركب أيضًا باسم مستوى أرجاند، لأنه يُستخدم في رسوم أرجاند التخطيطية. ولقد سُمي بهذا الاسم نسبةً لجين روبرت أرجاند (1768–1822)، رغم أن كاسبار ويسل (1745–1818) كان أول من وصفها. يمكن استخدام رسوم أرجاند التخطيطية في التمثيل البياني لموقع أعمدة وأصفار الدالة في المستوى المركب.

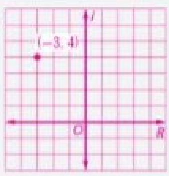
إجابات إضافية (تمرين موجّه)

1A.



$\sqrt{29} \approx 5.39$

1B.

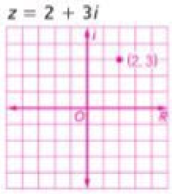


5

أمثلة إضافية

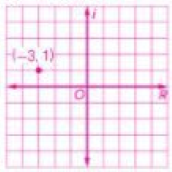
1 مثّل كل عدد في المستوى المركب بيانيًا، وأوجد قيمته المطلقة.

a. $z = 2 + 3i$



$\sqrt{13} \approx 3.61$

b. $z = -3 + i$



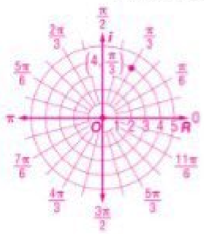
$\sqrt{10} \approx 3.16$

2 عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

a. $-2 + 5i$ $5.39(\cos 1.95 + i \sin 1.95)$

b. $6 + 2i$ $6.32(\cos 0.32 + i \sin 0.32)$

3 مثّل بيانيًا $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في صورة متعامدة.



$2 + 2\sqrt{3}i$

مثال 2 الأعداد المركبة في الصورة القطبية

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

a. $-6 + 8i$

أوجد المعامل r والإزاحة الزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$

$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ — $a = -6$ ، $b = 8$ — $= \tan^{-1} -\frac{8}{6} + \pi$ حوالي $= 2.21$

تساوي الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ حوالي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$.

b. $4 + \sqrt{3}i$

أوجد المعامل r والإزاحة الزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$ — $a = 4$ ، $b = \sqrt{3}$ — $= \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \sqrt{19}$ حوالي $= 4.36$ — بسّط — ≈ 0.41

تساوي الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ حوالي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$.

تمرين موجّه

2A. $9 + 7i$ $11.4(\cos 0.66 + i \sin 0.66)$ 2B. $-2 - 2i$ $2.83\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

قراءة في الرياضيات
الصورة القطبية غالبًا ما يتم اختصار الصورة القطبية $r\cos\theta + i\sin\theta$ إلى $r \text{ cis } \theta$. في المثال 2a، يمكن أيضًا التعبير عن $-6 + 8i$ بالشكل $10 \text{ cis } 2.21$، حيث $10 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$ و $2.21 = \tan^{-1} -\frac{8}{6}$.

يمكنك استخدام الصورة القطبية للعدد المركب لتمثيل العدد بيانيًا على شبكة قطبية باستخدام قيمتي r و θ كإحداثيين قطبيين (r, θ). يمكنك أيضًا أن تأخذ عددًا مركبًا مكتوبًا بصورة قطبية وتحوله إلى صورة متعامدة عن طريق إيجاد القيمة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية للعدد المركب بيانيًا وتحويلها

مثّل بيانيًا $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في صورة متعامدة.

قيمة r تساوي 3، وقيمة θ تساوي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

للتعبير عن العدد بصورة متعامدة، أوجد القيم المثلثية وبسّطها.

$3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ — الصورة القطبية

$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ — أوجد قيمة cosine وقيمة sine.

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ — خاصية التوزيع

الصورة المتعامدة من $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمرين موجّه 3A–B. انظر الهامش للاطلاع على التمثيلات البيانية.

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه بصورة متعامدة.

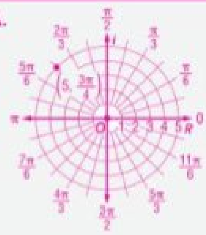
3A. $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ $-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ 3B. $4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ $2 - 2\sqrt{3}i$

تلميح تقني
تحويلات العدد المركب يمكنك تحويل عدد مركب في صورة القطبية إلى صورة متعامدة عن طريق إدخال التعبير في صورة قطبية ثم تحديد ENTER. لتكون في وضع قطبي، حدد MODE ثم $a + bi$.

```
3(cos(π/6)+isin(
π/6))
2.598076211+1.5i
```


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3A.



3B.

2 نواتج الضرب والقسمة والقوى الأسية والجذور للأعداد المركبة

تساعد الصورة القطبية للأعداد المركبة، إلى جانب قانوني الجمع والفارق في cosine و sine، إلى حد كبير في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. يمكن التوصل إلى قانون ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية عن طريق إجراء عملية الضرب.

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$ المعادلة الأصلية

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$ الحل

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$ $i^2 = -1$ وتجميع الحدود التخيلية.

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$ استخراج العامل i.

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$ مجموع متطابقات sine و cosine

المفهوم الأساسي ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها في الصورة القطبية

بافتراض الأعداد المركبة $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

قانون ناتج الضرب $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

قانون ناتج القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ حيث z_2 و $r_2 \neq 0$

ستثبت قانون ناتج القسمة في التدريب 77.

قراءة في الرياضيات صيغ الجمع المعاملات هي صيغة الجمع من العامل

لاحظ أنه عند ضرب الأعداد المركبة، فإنك تضرب المعاملات وتجمع الإزاحات الزاوية. عند القسمة، فإنك تقسم المعاملات وتطرح الإزاحات الزاوية.

مثال 4 ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

أوجد $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية. ثم عبّر عن الناتج في صورة متعامدة.

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ التعبير الأصلي

$$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$ قانون ناتج الضرب

$$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ بسّط.

والآن أوجد الصورة المتعامدة لناتج الضرب.

$$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ الصورة القطبية

$$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$ أوجد القيمة.

$$= 4\sqrt{3} - 4i$$ خاصية التوزيع

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. الصورة المتعامدة لناتج الضرب هي $4\sqrt{3} - 4i$.

تمرين موجّه

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي في صورة قطبية. ثم عبّر عن ناتج الضرب بصورة متعامدة.

4A. $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $-3.88 + 14.49i$

4B. $-6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $-12\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$, $3.11 + 11.59i$

2 نواتج الضرب والقسمة والقوى الأسية والجذور للأعداد المركبة

يبين **المثال 4** كيفية إيجاد ناتج ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بصورة قطبية. ويبين **المثال 5** كيفية إيجاد ناتج قسمة الأعداد المركبة المكتوبة بصورة قطبية. ويبين **المثال 6** كيفية استخدام نظرية دي موافر في إيجاد القوى الأسية للأعداد المركبة. ويبين **المثال 7** كيفية إيجاد جذور عدد مركب. ويبين **المثال 8** كيفية إيجاد جذور الوحدة.

مثال إضافي

4 أوجد $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في صورة قطبية. ثم عبّر عن الناتج في صورة متعامدة. $10(\cos\pi + i\sin\pi)$; -10

التركيز على محتوى الرياضيات

الضرب في عدد مركب يمكن اعتبار عملية ضرب عدد في عدد مركب معلوم كعمليتي دوران وتغيير أبعاد متزامنتين. فالضرب في i هو عملية دوران عكس اتجاه عقارب الساعة بزاوية $90°$ ($\frac{\pi}{2}$ راديان). وبالمثل، فإن الضرب في $i^2 = -1$ هي عملية دوران بزاوية $180°$ (π راديان).

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من مجموعات الطلاب كتابة دليل مفصل الخطوات عن طريقة حل مسألة معينة، مثل المثال 4. واطلب منهم ذكر جميع التفاصيل الدقيقة، وكأن من يقرأ الدليل يعرف القليل عن الرياضيات. ثم اطلب من تلك المجموعات تبادل الأدلة والتحقق من التسلسل المنطقي للخطوات.

مثال إضافي

5 **الكهرباء** إذا كان الجهد الكهربائي لدائرة كهربائية E يساوي 100 فولت والمقاومة Z تساوي $4 - 3j$ أوم. فأوجد شدة التيار I في الدائرة الكهربائية في الصورة المتعامدة. استخدم $E = I \cdot Z$.
$16.04 + 11.94j$ amps

كما ذكرنا في بداية هذا الدرس، يمكن استخدام نواتج قسمة الأعداد المركبة لتوضيح العلاقات في الكهرباء.

مهنة من الحياة اليومية

المهندسون الكهربائيون يصمم المهندسون الكهربائيون ويخترعون التكنولوجيا الجديدة المستخدمة في تصنيع نظام تحديد المواقع العالمي والمولدات العملاقة التي تزود مدناً بأكملها بالطاقة والمحركات التوربينية المستخدمة في الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما يعملون أيضاً على تحسين عدة منتجات مثل الهواتف الخلوية والسيارات والروبوتات.

مثال 5 من الحياة اليومية ناتج قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

الكهرباء إذا كان الجهد الكهربائي لدائرة كهربائية E يساوي 150 والمعاوقة Z تساوي $6 - 3j$ أوم. فأوجد شدة التيار I بالأمبير في الدائرة الكهربائية في الصورة المتعامدة. استخدم $E = I \cdot Z$

عبّر عن كل عدد بالصورة القطبية.

$150 = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ — $r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150;\ \theta = \tan^{-1} \frac{0}{150} = 0$

$6 - 3j = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$ — $r = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5};\ \theta = \tan^{-1} -\frac{3}{6}$ حوالي -0.46

حل بإيجاد قيمة التيار I في $I \cdot Z = E$

$I \cdot Z = E$ — المعادلة الأصلية

$I = \frac{E}{Z}$ — اقسم كل طرف على Z.

$I = \frac{150(\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$ — $E = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ و $Z = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$ — قانون ناتج القسمة

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ — بسّط.

والآن حوّل التيار إلى الصورة المتعامدة.

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ — المعادلة الأصلية

$= 10\sqrt{5}(0.90 + 0.44j)$ — أوجد القيمة.

$= 20.12 + 9.84j$ — خاصية التوزيع

يساوي التيار حوالي $20.12 + 9.84j$ amps.

تمرين موجّه

5. **الكهرباء** دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي 120 فولت وتبلغ شدة تيارها $8 + 6j$ amps. أوجد معاوقة الدائرة في الصورة المتعامدة. $9.63 - 7.17j$

قبل حساب القوى الأسية والجذور للأعداد المركبة، قد يكون من المفيد التعبير عن الأعداد المركبة بصورة قطبية. يعود الفضل إلى أبراهام دي موافر في اكتشاف نمط مفيد لإيجاد قيمة القوى الأسية للأعداد المركبة.

ويمكننا استخدام قانون ناتج ضرب الأعداد المركبة للمساعدة في تخيل النمط الذي اكتشفه دي موافر.

أولاً، أوجد z^2 بأخذ ناتج ضرب $z \cdot z$.

$z \cdot z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$ — اضرب.

$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$ — قانون ناتج الضرب

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ — بسّط.

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$ — اضرب.

$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$ — قانون ناتج الضرب

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ — بسّط.

لاحظ أنه عند حساب هذه القوى الأسية للعدد المركب، تأخذ الأس النوني للمعاملات وتضرب الإزاحات الزاوية في n.

الربط **بتاريخ الرياضيات**

أبراهام دي موافر (1667-1754) اشتهر عالم الرياضيات الفرنسي دي موافر بالنظرية المسماة باسمه وكتابه عن نظرية الاحتمال، مذهب الفرص. ويعتبر واحداً من رواد حساب المثلثات التحليلي والاحتمال.

يلخص هذا النمط أدناه.

المفهوم الأساسي نظرية دي موافر

إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فبالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة n يكون $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

ستثبت نظرية دي موافر في الدرس 10-4.

مثال 6 نظرية دي موافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$، وعبر عنه في الصورة المتعامدة.

أولاً، اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ في الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4$ و $b = 4\sqrt{3}$	$= \tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسّط.	$= \tan^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بسّط.	$= \frac{\pi}{3}$

صورة $4 + 4\sqrt{3}i$ القطبية هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استخدم نظرية دي موافر لإيجاد القوة الأسية من الدرجة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{نظرية دي موافر}$$

$$= 262{,}144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \quad \text{بسّط.}$$

$$= 262{,}144(1 + 0i) \quad \text{أوجد القيمة}$$

$$= 262{,}144 \quad \text{بسّط.}$$

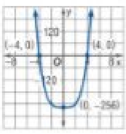
إذاً، $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262{,}144$.

تمرين **موجّه**

أوجد كل قوة أسية، وعبر عنه بالصورة المتعامدة.

6A. $(1 + \sqrt{3}i)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}i$

6B. $(2\sqrt{3} - 2i)^6$ $-32{,}768 + 32{,}768\sqrt{3}i$



في نظام الأعداد الحقيقية، يكون للمعادلة $x^4 = 256$ حلان هما 4 و -4. يوضح تمثيل $y = x^4 - 256$ البياني أن هناك صفرين حقيقيين في -4 و $x = 4$. إلا أنه في نظام الأعداد المركبة، هناك حلان حقيقيان وحلان مركبان.

تعلمت من خلال نظرية الجبر الأساسية في الدرس 4-2 أن كثيرات الحدود من الدرجة n تحتوي على n أصفار بالضبط كما في نظام الأعداد المركبة. ولهذا فالمعادلة $x^4 = 256$. عند إعادة كتابتها بالشكل $x^4 - 256 = 0$ تحتوي على أربعة حلول أو جذور، 4، -4، و $4i$، $-4i$. بشكل عام، كل الأعداد المركبة غير الصفر تحتوي على p جذور مختلفة من الدرجة p، أي أن كلاً منها يحتوي على جذرين تربيعيين وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة من الجذور الرابعة وهكذا.

مثال إضافي

6 أوجد $(3 + 3\sqrt{3}i)^4$ وعبّر عنه في صورة متعامدة. $-648 - 648\sqrt{3}i$

إرشاد للمعلمين الجدد

نظرية دي موافر يُطلب من الطلاب إثبات أن نظرية دي موافر قابلة للتطبيق على أي عدد صحيح موجب n في الدرس 10-4. قبل أن يمكنهم إثبات قابليتها للتطبيق، يجب أن يفهم الطلاب مبدأ الاستقراء الرياضي الذي سيتعلمونه في الدرس 10-4.

572 | الدرس 9-5 | الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

مثال إضافي

7 أوجد الجذور الخامسة لـ $-2-2i$.
$0.87 + 0.87i,\ -0.56 + 1.10i,\ -1.22 - 0.19i,\ -0.19 - 1.22i,\ 1.10 - 0.56i$

إرشاد للمعلمين الجدد

قانون الجذور المختلفة إن برهان قانون الجذور المختلفة يتجاوز حدود هذا المنهج.

مراجعة المفردات
نظرية الجبر الأساسية بالة كثيرة الحدود من الدرجة n، حيث $n > 0$ بها صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

لإيجاد قيمة جميع الجذور لكثيرة الحدود، يمكننا استخدام نظرية دي موافر للوصول إلى التعبير التالي.

المفهوم الأساسي الجذور المختلفة

بالنسبة للعدد الصحيح الموجب p يحتوي العدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ على p جذور مختلفة من الدرجة p. يتم التوصل إليها من خلال

$$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$$

حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$

يمكننا استخدام هذا القانون مع قيم n المختلفة، لكن يمكننا التوقف عندما تكون $n = p - 1$. وعند تساوي n مع p أو تجاوزها، تتكرر الجذور كما يظهر من التالي.

$$\frac{\theta+2n\pi}{p} = \frac{\theta}{p} + 2\pi$$ مشترك مع $\frac{\theta}{p}$، عندما تكون $n = 0$

مثال 7 الجذور p لعدد مركب

أوجد الجذر من الدرجة الرابعة لـ $-4-4i$.

أولاً اكتب $-4-4i$ في الصورة القطبية.

$r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$$-4-4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

والآن اكتب تعبيراً للجذور من الدرجة الرابعة.

$\theta = \frac{5\pi}{4}$، $p = 4$، و $r^{\frac{1}{p}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}{4}\right)$$

بسّط

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

افترض أن $n = 0, 1, 2$ بالتسلسل لإيجاد الجذور من الدرجة الرابعة.

بافتراض أن $n = 0$ جذور مختلفة

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(0)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(0)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الأول من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) = 0.86 + 1.28i$$

بافتراض أن $n = 1$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الثاني من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) = 0.86 + 1.28i$$

بافتراض أن $n = 2$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الثالث من الدرجة الرابعة

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) = -0.86 - 1.28i$$

بافتراض أن $n = 3$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(3)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{(3)\pi}{2}\right)\right]$$

الجذر الرابع من الدرجة الرابعة

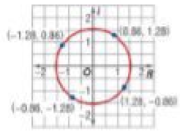
$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) = 1.28 - 0.86i$$

تكون الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-4-4i$ هي تقريباً $0.86 + 1.28i$ و $-1.28 + 0.86i$ و $-0.86 - 1.28i$ و $1.28 - 0.86i$.

تمرين موجّه

7A. أوجد جذور $2 + 2i$ التكعيبية.
$1.37 + 0.37i,\ -1 + i,\ -0.37 - 1.37i$

7B. أوجد جذور $4\sqrt{3} - 4i$ من الدرجة الخامسة.
$0.62 + 1.38i,\ -1.13 + 1.01i,\ -1.31 - 0.76i,\ 0.32 - 1.48i,\ 1.51 - 0.16i$



يمكننا تقديم ملاحظات حول الجذور المختلفة لعدد عن طريق التمثيل البياني للجذور على مستوى إحداثي. وكما يظهر على اليسار، تقع الجذور الأربعة من الدرجة الرابعة الموجودة في المثال 7 على دائرة. إذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل عدد مركب، نجد أن لكل منها معاملاً واحداً هو $\sqrt[4]{32}$، والذي يقوم بدور نصف قطر الدائرة. تقع الجذور أيضاً على مسافات متساوية حول الدائرة نتيجة اختلاف الإزاحات الزاوية بواسطة $\frac{\pi}{2}$.

تقع حالة خاصة من التوصل للجذور عند التوصل لجذور العدد 1 من الدرجة p عندما يكون 1 مكتوباً بصورة قطبية، $r = 1$ كما هو مذكور في الفقرة السابقة، فإن معامل جذورنا هو نصف قطر الدائرة التي تتكون من تعيين الجذور على مستوى إحداثي. ولهذا تقع جذور العدد 1 من الدرجة p على دائرة الوحدة. يشار إلى إيجاد جذور العدد 1 من الدرجة p بأنه إيجاد **جذور الوحدة من الدرجة p**

مثال 8 جذور الوحدة pth

أوجد جذور الوحدة من الدرجة الثامنة.

أولاً اكتب 1 في الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ — $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب تعبيراً للجذر من الدرجة الثامنة.

$1\left(\cos \frac{0 + 2n\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2n\pi}{8}\right)$ — $\theta = 0$ و $p = 8$ و $r^{\frac{1}{p}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

$= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$ — بسّط.

افترض أن $n = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1.

$n = 0 \quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$ — الجذور المختلفة

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ — الجذر الأول

لاحظ أن معامل كل عدد مركب هو 1. يتم التوصل إلى الإزاحات الزاوية عن طريق $\frac{n\pi}{4}$، مما يؤدي إلى زيادة θ بمقدار $\frac{\pi}{4}$ لكل جذر لاحق. ولهذا يمكننا حساب الجذور المتبقية عن طريق إضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى كل θ سابقة.

$\cos 0 + i \sin 0 = 1$ — الجذر من الدرجة 1

$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ — الجذر من الدرجة 2

$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ — الجذر من الدرجة 3

$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ — الجذر من الدرجة 4

$\cos \pi + i \sin \pi = -1$ — الجذر من الدرجة 5

$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ — الجذر من الدرجة 6

$\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$ — الجذر من الدرجة 7

$\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ — الجذر من الدرجة 8

الجذور من الدرجة الثامنة للعدد 1 هي 1 و $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و i و $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و -1 و $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $-i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$، كما هو موضح في الشكل 9.5.1

تمرين موجّه

8A. أوجد الجذور التكعيبية للوحدة.

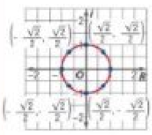
8B. أوجد الجذور من الدرجة السابعة للوحدة.

نصيحة دراسية

الجذور من الدرجة p لعدد مركب يكون لكل جذر معامل أو نفس الإزاحة الزاوية للجذر الأول هي $\frac{\theta}{p}$، ويتم التوصل إلى كل جذر لاحق عن طريق تكرار إضافة $\frac{2\pi}{p}$ إلى الإزاحة الزاوية.

8A. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8B. $1, 0.62 + 0.78i, -0.22 + 0.97i, -0.90 + 0.43i, -0.90 - 0.43i, -0.22 - 0.97i, 0.62 - 0.78i$



الشكل 9.5.1

مثال إضافي

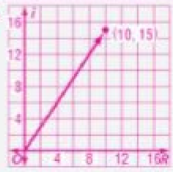
8 أوجد الجذور الخامسة للوحدة.
$1, 0.31 + 0.95i, -0.81 + 0.59i, -0.81 - 0.59i, 0.31 - 0.95i$

إرشاد للمعلمين الجدد

الجذور النونية للوحدة هندسياً، توجد الجذور النونية للوحدة على دائرة الوحدة في المستوى المركب، والنقاط هي رؤوس الجانب النوني "n" من المضلع المنتظم. لاحظ أن جذراً واحداً يساوي دائماً 1.

إجابات إضافية

9a.



10. $4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

11. $\sqrt{5}(\cos 2.68 + i \sin 2.68)$

12. $3\sqrt{2}(\cos -0.34 + i \sin -0.34)$

13. $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

14. $\sqrt{41}(\cos 0.90 + i \sin 0.90)$

15. $2\sqrt{5}(\cos 2.03 + i \sin 2.03)$

16. $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

17. $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

26. $24\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; $-12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}i$

27. $10(\cos 180° + i \sin 180°)$; -10

28. $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

29. $4(\cos 360° + i \sin 360°)$; 4

30. $\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; $-\frac{3}{4}i$

31. $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

32. $3(\cos 210° + i \sin 210°)$; $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

33. $3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; $3i$

34. $10(\cos 315° + i \sin 315°)$; $5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

35. $\frac{1}{6}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$; $\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{12}i$

46. $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

47. $0.97 + 0.26i, 0.26 + 0.97i, -0.71 + 0.71i, -0.97 - 0.26i, -0.26 - 0.97i, 0.71 - 0.71i$

التمارين

مثّل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة. (المثال 1)

1. $z = 4 + 4i$ $4\sqrt{2} \approx 5.66$
2. $z = -3 + i$ $\sqrt{10} \approx 3.16$
3. $z = -4 - 6i$ $2\sqrt{13} \approx 7.21$
4. $z = 2 - 5i$ $\sqrt{29} \approx 5.39$
5. $z = 3 + 4i$ 5
6. $z = -7 + 5i$ $\sqrt{74} \approx 8.60$
7. $z = -3 - 7i$ $\sqrt{58} \approx 7.62$
8. $z = 8 - 2i$ $2\sqrt{17} \approx 8.25$

المتجهات لتكن القوة المبذولة على أحد الأجسام بالعدد المركب ... حيث تقاس المركبات بوحدة النيوتن (N). (المثال 1)
10 15

مثّل ... كمتجه في المستوى المركب.
أوجد مقدار المتجه وزاوية اتجاهه.

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية. (المثال 2)

10. $4 + 4i$
11. $-2 + i$
12. $4 - \sqrt{2}i$
13. $2 - 2i$
14. $4 + 5i$
15. $-2 + 4i$
16. $-1 - \sqrt{3}i$
17. $3 + 3i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنها بصورة متعامدة. (المثال 3)

18. $10(\cos 6 + i\sin 6)$
19. $2(\cos 3 + i\sin 3)$
20. $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
21. $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
22. $\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
23. $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
24. $-3(\cos 180° + i\sin 180°)$
25. $\frac{3}{2}(\cos 360° + i\sin 360°)$

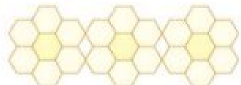
أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة المتعامدة. (المثالان 4، 5)

26. $6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
27. $5(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i\sin 45°)$
28. $3\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i\sin \pi)$
29. $2(\cos 90° + i\sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i\sin 270°)$
30. $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
31. $4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
32. $\frac{1}{2}(\cos 60° + i\sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i\sin 150°)$
33. $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
34. $5(\cos 180° + i\sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i\sin 135°)$
35. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد كل قوة أسية، وعبر عنها بالصورة المتعامدة. (المثال 6)

36. $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$ 4096
37. $(12i - 5)^3$ $2035 - 828i$
38. $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ 256
39. $(\sqrt{3} - i)^3$ $-8i$
40. $(3 - 5i)^4$ $-644 + 960i$
41. $(2 + 4i)^4$ $-112 - 384i$
42. $(3 - 6i)^4$ $-567 + 1944i$
43. $(2 + 3i)^2$ $-5 + 12i$
44. $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$ $27i$
45. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ -16

التصميم تعد ... مها لدى شركة إعلانات. تريد أن تضع تصميمًا يتألف من أشكال سداسية منتظمة ليكون عملاً فنيًا يظهر في أحد عروضها. تستطيع مها أن تحدد مواقع رؤوس الزوايا لشكل سداسي منتظم عن طريق التمثيل البياني لحلول $0 \quad 1 \quad ^6$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس الزوايا لأحد الأشكال الخماسية. (المثال 7)



أوجد جميع الجذور المختلفة من الدرجة ... للعدد المركب. (المثالان 7 و 8)

الجذور من الدرجة السادسة لـ
الجذور من الدرجة الخامسة لـ
الجذور من الدرجة الرابعة لـ 4 3 4
الجذور التكعيبية لـ 44 117
الجذور من الدرجة الخامسة لـ 2 11 1
الجذر التربيعي لـ 4 3
أوجد الجذور التربيعية للوحدة
أوجد جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

الكهرباء تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة تسلسلية
أوم ... 5(cos 0.9 sin 0.9) أوم، وتبلغ في الجزء الثاني من الدائرة
أوم ... 8(cos 0.4 sin 0.4) أوم
حوّل كل تعبير إلى الصورة المتعامدة.
اجمع إجاباتك التي توصلت إليها في الجزء a لإيجاد إجمالي نسبة المعاوقة في الدائرة. أوم
حوّل إجمالي المعاوقة مرة أخرى إلى الصورة القطبية. أوم

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي. ثم كرر العملية بضرب الصور القطبية لكل زوج من الأعداد المركبة باستخدام قانون ناتج الضرب.

56. $(1 - i)(4 + 4i)$
57. $(3 + i)(3 - i)$
58. $(4 + i)(3 - i)$
59. $(-6 + 5i)(2 - 3i)$
60. $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i)$
61. $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-54 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورق شبكة قطبي بالنسبة للتمارين 18 إلى 25 و 85 إلى 87. سيحتاج الطلاب إلى ورق شبكة قطبي.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب الأعداد القطبية والمركبة.

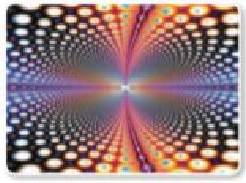
اطرح السؤال التالي:

- كيف تفيدك الأعداد المركبة والقطبية في مواقف الحياة اليومية؟
الإجابة النموذجية: تفيد الأعداد القطبية في المواقف التي يعبر فيها بسهولة كبيرة عن المعلومات من حيث المسافة من نقطة الأصل. بينما يمكن استخدام الأعداد المركبة في تمثيل العلاقات المشتملة على الكهرباء.

إجابات إضافية

48. $0.59 + 0.81i, -0.59 + 0.81i, -0.95 - 0.31i, -i, 0.95 - 0.31i$
49. $0.22 + 1.67i, -1.67 + 0.22i, -0.22 - 1.67i, 1.67 - 0.22i$
50. $3 + 4i, -4.96 + 0.60i, 1.96 - 4.60i$
51. $1.64 + 0.55i, -0.02 + 1.73i, -1.65 + 0.52i, -1.00 - 1.41i, 1.03 - 1.39i$

62. **الأنماط الهندسية المتكررة** النمط الهندسي المتكرر هي أشكال هندسية تتكون من نمط متكرر بشكل لا نهائي على مقياس متسلسل أصغر كما هو موضح في الأسفل.



في هذه المسألة، ستصنع نمطًا هندسيًا متكررًا من خلال تكرارات $f(z) = z^2$. فتأمل $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a. احسب z_1 و z_2 و z_3 و z_4 و z_5 و z_6 و z_7 حيث $z_1 = f(z_0)$ و $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b. مثّل كلاً من هذه الأعداد على المستوى المركب.

c. توقع مكان z_{100}. اشرح.

a–c انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

63. **التحويلات** هناك عمليات معينة تنطوي على أعداد مركبة تمثل تحويلات هندسية في المستوى المركب. صف التحويل المطبق على النقطة z للحصول على النقطة w في المستوى المركب لكل من العمليات التالية.

a. $w = z + (3 - 4i)$ **a–d. انظر الهامش.**

b. w هو المرافق المركب لـ z.

c. $w = i \cdot z$

d. $w = 0.25z$

64. $z = -125; \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i, -5, \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

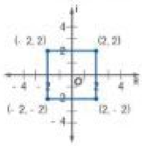
أوجد z والجذور p للنقطة z بافتراض كل مما يلي.

64. $p = 3$، أحد الجذور التكعيبية لـ $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

65. $p = 4$، أحد الجذور من الدرجة الرابعة $-1 - i$

$-4; 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$

66. **التمثيلات البيانية** يتمثل كل رأس بعدد مركب في الصورة القطبية. يوسّع المبرمج المربع بتغيير أبعاده ثم يقوم بتدوير المربع أثناء بمقدار 45° عكس اتجاه عقارب الساعة بحيث تقع الرؤوس الجديدة عند نقاط منتصف أضلاع المربع الأصلي.



$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

a. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟

b. ماذا سيحدث إذا ضربت الأعداد الممثلة للرؤوس الأصلية في مربع إجابتك التي حصلت عليها في الجزء a؟ **انظر الهامش.**

استخدم قانون الجذور المختلفة لإيجاد جميع الحلول لكل معادلة. عبّر عن الحلول بصورة متعامدة.

67. $x^3 = i$

68. $x^3 + 3 = 128$

69. $x^4 = 81i$

70. $x^5 - 1 = 1023$

71. $x^3 + 1 = i$

72. $x^4 - 2 + i = -1$

67–72. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الخطأ** تعمل نجاة وشيرين على إيجاد قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$. استخدمت نجاة نظرية دي مواڤر وتحصل على الإجابة $\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}$. تقول لها شيرين إنها لم تستكمل سوى جزء من المسألة. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

74. **الاستنتاج** افترض أن $z = a + bi$ هو أحد الجذور من الدرجة 29 للعدد 1.

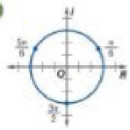
a. ما القيمة العظمى لـ a؟ **1**

b. ما القيمة العظمى لـ b؟ **$\sin\frac{14\pi}{29}$ أو حوالي 0.9985**

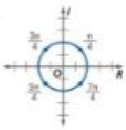
تحدٍ أوجد الجذور المعروضة على كل تمثيل بياني واكتبها في صورة قطبية. ثم حدد العدد المركب للجذور المذكورة.

75–76. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

75.



76.



77. **البرهان** بافتراض أن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ حيث $r_2 \neq 0$، برهن أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم لا تصح أبدًا. اشرح استنتاجك.

78. تقع الجذور p لعدد مركب z على مسافات متساوية حول الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل ويبلغ نصف قطرها $r^{\frac{1}{p}}$.

79. مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$، حيث إن أي z، و $z + \bar{z}$ و $z \cdot \bar{z}$ أعداد حقيقية.

78–79. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

80. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد عددين مركبين $a + bi$ بحيث يكون $a \neq 0$، $b \neq 0$ بالقيمة المطلقة $\sqrt{17}$.

الإجابات النموذجية: $4 - i, 4 + i$

81. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن مجموع الأجزاء التخيلية لعدد p مختلف من الجذور p لأي عدد حقيقي موجب يجب أن يكون صفرًا. (إرشاد: الجذور هي رؤوس زوايا مضلع منتظم.)

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

إجابات إضافية

63a. إزاحة 3 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات لأسفل

63b. انعكاس في المحور الحقيقي

63c. دوران بزاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

63d. تغيير أبعاد بمعامل 0.25

66b. يتم دوران المربع بزاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة وتغيير الأبعاد بمعامل $\frac{1}{2}$

576 | الدرس 9-5 | الأعداد المركبة ونظرية دي مواڤر

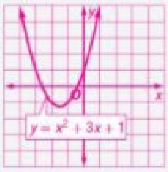
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب كتابة قيمة $(1+i)^5$. $-4-4i$

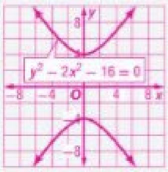
إجابات إضافية

73. تمرين: الإجابة النموذجية: قامت نجاة فقط بتحويل التعبير إلى صورة قطبية. وكان لزامًا عليها استخدام نظرية دي موافر لإيجاد القوة الأسية الخامسة.

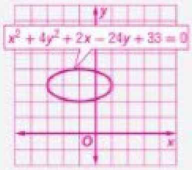
88.



89.



90.



577

مراجعة شاملة

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة. (الدرس 9-4)

82. $r = \frac{15}{1 + 4\cos\theta}$ $(x-4)^2 - \frac{y^2}{15} = 1$

83. $r = \frac{14}{2\cos\theta + 2}$ $y^2 = -14(x - 3.5)$

84. $r = \frac{-6}{\sin\theta - 2}$ $\frac{(y-2)^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة. ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة. (الدرس 9-3)

85–87. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

85. $(x-3)^2 + y^2 = 9$

86. $x^2 - y^2 = 1$

87. $x^2 + y^2 = 2y$

مثّل بيانيًا القطع المخروط الممثل بكل معادلة. 88–90. انظر الهامش.

88. $y = x^2 + 3x + 1$

89. $y^2 - 2x^2 - 16 = 0$

90. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

أوجد مركز كل قطع ناقص وبعده البؤري ورؤوسه.

91. $\frac{(x+8)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{81} = 1$ المركز: $(-8, 7)$؛ البؤرة: $(-8, 7 \pm 6\sqrt{2})$؛ الرؤوس: $(-8, 16)$، $(-8, -2)$

92. $25x^2 + 4y^2 + 150x + 24y = -161$ 92. المركز: $(-3, -3)$؛ البؤرة: $(-3, -3 \pm \sqrt{21})$؛ الرؤوس: $(-3, 2)$، $(-3, -8)$

93. $4x^2 + 9y^2 - 56x + 108y = -484$ 93. المركز: $(7, -6)$؛ البؤرة: $(7 \pm \sqrt{5}, -6)$؛ الرؤوس: $(10, -6)$، $(4, -6)$

حل كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان.

94. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$ $(4, 0, 8)$

95. $9g + 7h = -30$
$8h + 5j = 11$
$-3g + 10j = 73$ $(-1, -3, 7)$

96. $2k - n = 2$
$3p = 21$
$4k + p = 19$ $(3, 4, 7)$

97. تعداد السكان في بداية عام 2008، كان تعداد سكان العالم يبلغ 6.7 ملايين تقريبًا. إذا كان تعداد سكان العالم ينمو باستمرار بمعدل 2%، فيمكن توقع تعداد السكان المستقبلي P، بالمليارات، من خلال $P = 6.5e^{0.02t}$، حيث تمثل t الوقت بالسنوات منذ 2008.

a. وفقًا لهذا النموذج، كم سيكون تعداد سكان العالم في عام 2018؟ حوالي 7.94 مليارات

b. وضع بعض الخبراء تقديرًا بأن إنتاج الغذاء في العالم يستطيع أن يكفي تعداد سكان يبلغ 18 مليار شخص بحد أقصى. وفقًا لهذا التقدير، كم عدد السنوات المتبقية التي سيتمكن إنتاج الغذاء فيها من تغطية اتجاه النمو السكاني في العالم؟ حوالي 51 عامًا

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

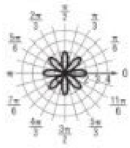
98. SAT/ACT التمثيل البياني على المستوى xy للدالة التربيعية g عبارة عن قطع مكافئ بالرأس $(-2, 3)$. إذا كانت $g(0) = 0$ فأي مما يلي يجب أن يساوي 0 أيضًا؟ D

A $g(2)$
B $g(3)$
C $g(4)$
D $g(6)$
E $g(7)$

99. أي مما يلي يعبر عن العدد المركب $20 - 21i$ في الصورة القطبية؟ F

F $29(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
G $29(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$
H $32(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
J $32(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$

100. إجابة حرة راجع التمثيل البياني الموجود على اليسار.



الإجابة النموذجية: $r = 2\cos 4\theta$

a. اذكر معادلة محتملة للدالة.
b. اذكر تناظرات التمثيل البياني.
c. اذكر أصفار الدالة في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.
d. ما القيمة الصغرى لـ r في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$؟

b–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

التدريس المتمايز BL

التوسع أوجد القيمة الدقيقة للتعبير $\sqrt{8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)}$. عبّر عن النتيجة في صورة متعامدة. $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,i$

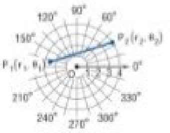
دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 9-1)

- في النظام الإحداثي القطبي، يتم تحديد موقع النقطة (r, θ) باستخدام المسافة الموجهة r والزاوية الموجهة θ.
- المسافة بين $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.



التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية (الدرس 9-2)

- الدائرة: $r = a\cos\theta$ أو $r = a\sin\theta$
- منحنى قلبي الشكل: $r = a \pm b\cos\theta$ أو $r = a \pm b\sin\theta$، $a > 0$ و $b > 0$
- الوردة: $r = a\cos n\theta$ أو $r = a\sin n\theta$، $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{Z}$
- منحنى ذو عروتين: $r^2 = a^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2\sin 2\theta$
- حلزونات أرشميدس: $r = a\theta + b$ و $\theta \geq 0$

الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات (الدرس 9-3)

- النقطة $P(r, \theta)$ لها الإحداثيات المتعامدة $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل النقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية، استخدم المعادلتين $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$، عندما تكون $x > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$، عندما تكون $x < 0$.

الصور القطبية للقطوع المخروطية (الدرس 9-4)

- تكون المعادلة القطبية للقطع المخروطي بالصورة $r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$، حسب موقع واتجاه الدليل.

الأعداد المركبة ونظرية دي موافر (الدرس 9-5)

- الصيغة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة ناتج ضرب العددين المركبين z_1 و z_2 هي $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة ناتج قسمة العددين المركبين z_1 و z_2 هي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ حيث z_2 و $r_2 \neq 0$.
- تنص نظرية دي موافر على أنه إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، فإن $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ للأعداد الصحيحة الموجبة n.

المفردات الأساسية

قيمة مطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number	نظام إحداثي قطبي polar coordinate system
مستوى أرجاند Argand plane	الإحداثيات القطبية polar coordinates
إزاحة زاوية argument	معادلة قطبية polar equation
قلبي الشكل cardioid	صورة قطبية polar form
مستوى مركب complex plane	تمثيل بياني قطبي polar graph
محور تخيلي imaginary axis	قطب pole
منحنى ذو عروتين lemniscate	جذور الوحدة من الدرجة p *pth roots of unity*
منحنى قلبي الشكل limaçon	محور حقيقي real axis
معامل modulus	منحنى الوردة rose
محور قطبي polar axis	حلزون أرشميدس spiral of Archimedes
	صيغة مثلثية trigonometric form

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من قائمة المفردات الواردة أعلاه لإكمال كل جملة.

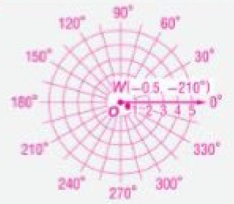
1. ________ هي مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية معطاة. **التمثيل البياني القطبي**
2. المستوى الذي له محور للمركب الحقيقي ومحور للمركب التخيلي هو ________ **مستوى مركب أو مستوى أرجاند**
3. يتم تحديد موقع نقطة في ________ باستخدام المسافة الموجهة من نقطة ثابتة والزاوية من محور ثابت. **نظام إحداثي قطبي**
4. نوع خاص من المنحنى قلبي الشكل الصدفي معادلته بالصورة $r = a + b\cos\theta$ حيث $a = b$ يُسمى ________ **قلبي الشكل**
5. ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب بالصورة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **إزاحة زاوية**
6. نقطة الأصل في النظام الإحداثي القطبي تُسمى ________ **القطب**
7. يطلق على القيمة المطلقة لعدد مركب أيضًا ________ **المعامل**
8. ________ اسم آخر للمستوى المركب. **مستوى أرجاند**
9. التمثيل البياني لمعادلة قطبية بالصورة $r^2 = a^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2\sin 2\theta$ يُسمى ________ **منحنى ذو عروتين**
10. ________ هو شعاع ابتداءً من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه لليمين. **المحور القطبي**

التقويم التكويني

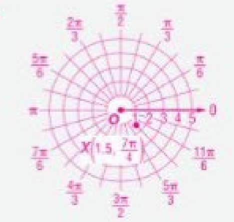
المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموقع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10. فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

إجابات إضافية

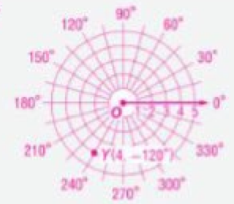
11.



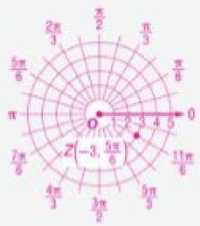
12.



13.



14.

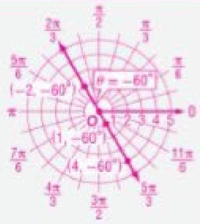


مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة. فذكر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

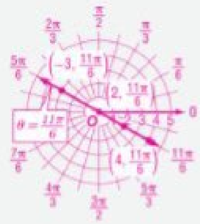
15.



16.

17.

18.



مراجعة درس بدرس

9-1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية. 11-14. انظر الهامش.

11. $W(-0.5, 210°)$
12. $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$
13. $Y(4, -120°)$
14. $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. 15-18. انظر الهامش.

15. $\theta = -60°$
16. $r = \frac{9}{2}$
17. $r = 7$
18. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط.

19. $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$ ≈ 4.36
20. $(-3, 60°), (4, 240°)$ 1
21. $(-1, -45°), (6, 270°)$ ≈ 6.74
22. $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ ≈ 7.28

مثال 1

مثّل بيانيًا $r = 5$.

حلول $r = 5$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $(5, \theta)$ حيث θ هي أي عدد حقيقي. يتألف التمثيل البياني من كل النقاط التي تقع على مسافة 5 وحدات من القطب، ولذلك فالتمثيل البياني عبارة عن دائرة يقع مركزها عند القطب بنصف القطر 5.

9-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

23. $r = \sin 3\theta$
24. $r = 2 \cos \theta$
25. $r = 5 \cos 2\theta$
26. $r = 4 \sin 4\theta$
27. $r = 2 + 2 \cos \theta$
28. $r = 15\theta,\ \theta \geq 0$

23-28. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم التناظر في تمثيل كل معادلة بيانيًا.

29. $r = 2 - \sin \theta$
30. $r = 1 + 5 \cos \theta$
31. $r = 3 - 2 \cos \theta$
32. $r = 4 + 4 \sin \theta$
33. $r = -3 \sin \theta$
34. $r = -5 + 3 \cos \theta$

29-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مثال 2

استخدم التناظر في تمثيل $r = 4 + 3 \cos \theta$ بيانيًا.

يؤدي استبدال (r, θ) بـ $(r, -\theta)$ إلى $r = 4 + 3 \cos(-\theta)$، التي يمكن تبسيطها إلى $r = 4 + 3 \cos \theta$ لأن cosine متماثل. المعادلات متكافئة، ولذلك فالتمثيل البياني لهذه المعادلة متناظر مع محور القطب. ولهذا، يمكنك عمل جدول قيم للتوصل إلى قيم r التي تقابل θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	r
0	7
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8 + 3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	4
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8 - 3\sqrt{2}}{2}$
π	1

بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التناظر على المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.

9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

9-3 الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة بالإحداثيات المتعامدة المعطاة إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. قرّب بالتقريب إلى أقرب جزء من مئة.

35. $(-1, 5)$ $(10, 1.77.5)$ و $(10, 4.91.-5)$
36. $(3, 7)$ $(62, 4.31.-7)$ و $(62, 1.17.7)$
37. $(2a, 0), a > 0$ $(-2a, \pi)$ و $(2a, 0)$
38. $(4b, -6b), b > 0$ $(21b, 2.16.-7)$ و $(21b, 5.30.7)$

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة. 39-42. انظر الهامش.

39. $r = 5$
40. $r = -4 \sin \theta$
41. $r = 6 \sec \theta$
42. $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 3

اكتب $r = 2 \cos \theta$ بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها. ادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب كل طرف في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$r^2 = x^2 + y^2$ و $x = r \cos \theta$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من كل طرف.

في الصورة القياسية، $(x - 1)^2 + y^2 = 1$، يمكنك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة كدائرة مركزها عند $(1, 0)$ ونصف قطرها 1. كما يدعم ذلك التمثيل البياني لـ $r = 2 \cos \theta$

9-4 الصور القطبية للقطوع المخروطية

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي:

43. $r = \frac{3.5}{1 + \sin \theta}$ $e = 1$: قطع مكافئ؛ $y = 3.5$
44. $r = \frac{1.2}{1 + 0.3 \cos \theta}$ $e = 2$: قطع زائد؛ $y = -7$
45. $r = \frac{14}{1 - 2 \sin \theta}$ $e = 2$: قطع زائد؛ $y = -7$
46. $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$ $e = 1$: قطع مكافئ؛ $x = -6$

اكتب مع التمثيل البياني معادلة قطبية ودليلاً لمخروط بالخصائص المعطاة. 47-48. انظر الهامش.

47. $e = 0.5$؛ الرأسان عند $(0, -2)$ و $(0, 6)$
48. $e = 1.5$؛ الدليل: $x = 5$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة.

49. $r = \frac{16}{1 - 0.2 \sin \theta}$ $\frac{\left(y - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{25}{9}} + \frac{x^2}{\frac{8}{3}} = 1$
50. $r = \frac{5}{1 + \cos \theta}$ 50. $y^2 = -10x + 25$

مثال 4

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لـ $r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$.

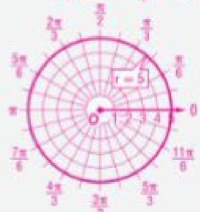
اكتب المعادلة بالصورة القياسية $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$.

$r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$	المعادلة الأصلية
$r = \frac{3.5(2)}{3.5(1 - \cos \theta)}$	حلل البسط والمقام إلى العوامل
$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$	اقسم البسط والمقام على 3.5

في هذه الصورة، يمكنك أن تعرف من المقام أن $e = 1$؛ ولهذا، فإن القطع المخروطي قطع ناقص. بالنسبة للمعادلات القطبية لهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = -d$. تعلم من البسط أن $ed = 2$. إذن $1 \cdot d = 2$ أو $d = 2$. ولهذا، فإن معادلة الدليل هي $x = -2$.

إجابات إضافية

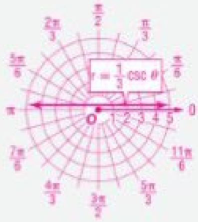
39. $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



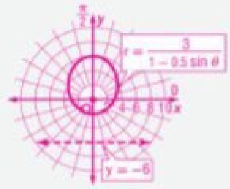
40. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$، دائرة

41. $x = 6$، مستقيم

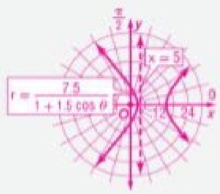
42. $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



47. $r = \frac{3}{1 - 0.5 \sin \theta}$; $y = -6$

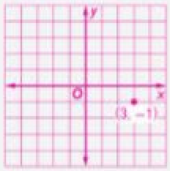


48. $r = \frac{7.5}{1 + 1.5 \cos \theta}$; $x = 5$

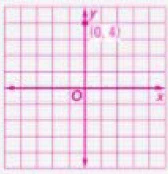


إجابات إضافية

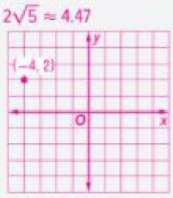
51. $\sqrt{10} \approx 3.16$



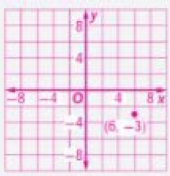
52. 4



53. $2\sqrt{5} \approx 4.47$



54. $3\sqrt{5} \approx 6.71$



55. $3.317(\cos 0.441 + i \sin 0.441)$
56. $9.434(\cos 2.129 + i \sin 2.129)$
57. $4.359(\cos 3.550 + i \sin 3.550)$
58. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

9-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

مثّل كل عدد في المستوى المركب بيانيًا، وأوجد قيمته المطلقة. **51-54. انظر الهامش.**

51. $z = 3 - i$
52. $z = 4i$
53. $z = -4 + 2i$
54. $z = 6 - 3i$

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية **55-58. انظر الهامش.**

55. $3 + \sqrt{2}i$
56. $-5 + 8i$
57. $-4 - \sqrt{3}i$
58. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه بصورة متعامدة.

59. $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$
60. $z = 5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
61. $z = -2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
62. $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

59-62. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة المتعامدة.

63. $-2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \cdot -4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ **$-4\sqrt{3} - 4i$**
64. $8(\cos 225° + i \sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$ **$3.86 - 1.04i$**
65. $5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ **$\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$**
66. $6(\cos 210° + i \sin 210°) \div 3(\cos 150° + i \sin 150°)$ **$1 + i\sqrt{3}$**

أوجد كل قوة أسية، وعبر عنها بالصورة المتعامدة.

67. $(4 - i)^3$ **$404 - 112i$**
68. $(\sqrt{2} + 3i)^4$ **$-23 - 118.79i$**

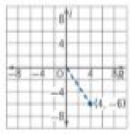
أوجد جميع جذور p المختلفة للعدد المركب.

69. الجذور التكعيبية لـ $6 - 4i$
$1.895 - 0.376i, -0.622 + 1.829i, -1.273 - 1.453i$

70. جذور الدرجة الرابعة لـ $1 + i$
$1.07 + 0.21i, -0.21 + 1.07i, -1.07 - 0.21i, 0.21 - 1.07i$

مثال 5

مثّل بيانيًا $4 - 6i$ في المستوى المركب وعبر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المعامل.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2}$ or $2\sqrt{13}$ $a = 4$ و $b = -6$

أوجد الإزاحة الزاوية.

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4$ و $b = -6$

$= -0.98$ بسّط.

صورة $4 - 6i$ القطبية هي تقريبًا $2\sqrt{13}[\cos(-0.98) + i \sin(-0.98)]$.

مثال 6

أوجد $-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية.

ثم عبّر عن ناتج الضرب بالصورة المتعامدة.

$-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ التعبير الأصلي

$= (-3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ قانون ناتج الضرب

$= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسّط.

والآن أوجد الصورة المتعامدة لناتج الضرب.

$-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

$= -15(-0.26 + i(-0.97))$ أوجد القيمة.

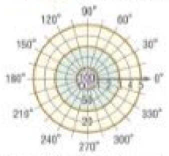
$= 3.9 + 14.5i$ خاصية التوزيع

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$
الصورة المتعامدة لناتج الضرب هي $3.9 + 14.5i$

دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

71. **ألعاب** تتألف لعبة أركيد من دحرجة كرة على ممر صاعد نحو هدف. تحدد المنطقة التي تتوقف فيها الكرة عدد النقاط المكتسبة. يوضح النموذج قيمة النقاط لكل منطقة. (الدرس 9-1)



a. إذا دحرج اللاعب الكرة في أحد الأدوار إلى النقطة (3.5, 165°)، فكم عدد النقاط التي سيحصل عليها؟ **20**

b. اذكر موقعين محتملين يحصل منهما اللاعب على 50 نقطة. **الإجابة النموذجية: (2, 0°) أو (2, 180°)**

72. **المناظر الطبيعية** تستخدم إحدى شركات المناظر الطبيعية رشاش أعشاب يمكن تعديله ويمكنه الدوران بزاوية 360° وتغطية منطقة دائرية نصف قطرها 20 مترًا. (الدرس 9-1) **انظر الهامش.**

a. مثّل بيانيًا أبعاد المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها على شبكة قطبية إذا تم ضبط الرشاش على الدوران بزاوية 360°.

b. أوجد مساحة المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها إذا تم ضبط الدوران على $-30° \le \theta \le 210°$. **حوالي $837.8\ m^2$**

73. **علم الأحياء** يمكن تمثيل النمط الموجود على صدفة قوقعة باستخدام $r = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{2}$، حيث $\theta \ge 0$ عدد ومثّل بيانيًا المنحنى الكلاسيكي الذي يمثل هذا النمط. (الدرس 9-2) **انظر الهامش.**

74. **الأراجيح** يمكن تمثيل مسار عجلة دوارة بواسطة $r = 15 \sin \theta$، حيث r بالمتر. (الدرس 9-3)

b. (12.5, 3.9)

$(3.9, \frac{\pi}{12})$

a. ما الإحداثيات القطبية للراكب الموجود عند $\theta = \frac{\pi}{12}$؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة.

b. ما الإحداثيات المتعامدة لموقع الراكب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إن لزم الأمر.

c. كم يرتفع الراكب عن الأرض إذا كان المحور القطبي يمثل الأرض؟ **حوالي 1 متر**

75. **التوجيه** يتطلب التوجيه من المشاركين أن يجدوا طريقهم عبر منطقة باستخدام خريطة طبوغرافية. بدأ أحد الموجهين من النقطة A وسار 5000 متر بزاوية 35 درجة تم قياسها في اتجاه حركة عقارب الساعة من الشرق. بدأ موجه آخر من النقطة A ويمشي 3000 متر باتجاه الغرب ثم 2000 متر باتجاه الشمال. ما المسافة بين الموجهين بالتقريب إلى أقرب متر؟ (الدرس 9-1) **8605 m**

76. **القمر الصناعي** يتضمن مدار قمر صناعي حول الأرض اختلافًا مركزيًا يبلغ 0.05. وتبلغ المسافة من رأس المسار إلى مركز الأرض 32082. اكتب معادلة قطبية يمكن استخدامها لتمثيل مسار القمر الصناعي إذا كانت الأرض تقع عند البؤرة الأقرب إلى الرأس المعطاة. (الدرس 9-4)

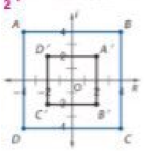
$r = \frac{33{,}868.1}{1 + 0.05 \cos \theta}$

77. **الكهرباء** تم تصميم معظم الدوائر الكهربائية في أوروبا لتعمل بقدرة 220 فولت. في الجزأين a و b، استخدم $E = I \cdot Z$، حيث يتم قياس الجهد الكهربائي E بالفولت، ويتم قياس المعاوقة Z بالأوم ويتم قياس التيار I بالأمبير. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 9-5)

a. إذا كانت شدة تيار الدائرة $2 + 5j$ أمبير، فما المعاوقة؟ **$15.2 - 37.9j$ أوم**

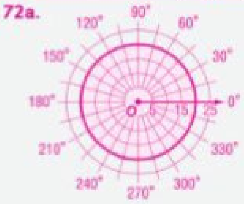
b. إذا كانت معاوقة الدائرة $3j - 1$ أوم فما التيار؟ **$21.9 + 66.0j$ أمبير**

78. **رسوم الكمبيوتر** يمكن إجراء التحويل الهندسي للأشكال باستخدام الأعداد المركبة. إذا بدأ أحد المبرمجين بالمربع $ABCD$، كما هو موضح أدناه. يمكن تمثيل كل الرؤوس بعدد مركب في صورة قطبية. ثم يمكن استخدام الضرب لتدوير المربع وتغيير أبعاده مما ينتج المربع $A'B'C'D'$. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج أن يضرب فيه كل عدد لإنتاج هذا التحويل؟ (الدرس 9-5) **$-\frac{1}{2}i$**

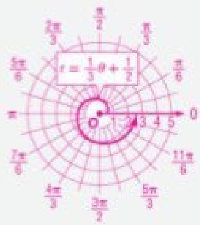


إجابات إضافية

72a.



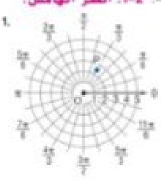
73. حلزون أرشميدس



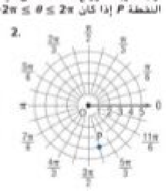
الوحدة 9 تدريب على الاختبار

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة P إذا كان $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. **1-2. انظر الهامش.**

1.



2.



مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

3. $\theta = 30°$
4. $r = 1$
5. $r = 2.5$
6. $\theta = \frac{5\pi}{3}$
7. $r = \frac{2}{3}\sin\theta$
8. $r = -\frac{1}{2}\sec\theta$
9. $r = -4\csc\theta$
10. $r = 2\cos\theta$

3-10. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا.

11. $r = 1.5 + 1.5\cos\theta$
12. $r^2 = 6.25\sin 2\theta$

11-12. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

13. رادار يعمل موظف التحكم في المرور الجوي على تعقب طائرة موقعها الحالي هو $(66, 115°)$. تحدد قيمة r بالكيلومتر.

a. ما الإحداثيات المتعامدة لموقع الطائرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر. **$(9, 59.8, -27)$**

b. إذا تم تحديد موقع طائرة ثانية عند النقطة $(50, -75)$، فما الإحداثيات القطبية للطائرة إذا كانت $r > 0$ و $0 \le \theta \le 360°$؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر وأقرب جزء من عشرة من الدرجة إن لزم الأمر. **$(90, 303.7°)$**

c. ما المسافة بين الطائرتين؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر. **156 km**

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة. ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة. **14-15. انظر الهامش.**

14. $(x-7)^2 + y^2 = 49$
15. $y = 3x^2$

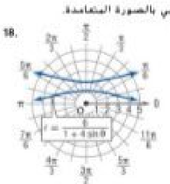
حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي.

16. $r = \frac{2}{1 - 0.4\sin\theta}$ **$e = 0.4$؛ قطع ناقص؛ $y = -5$**

17. $r = \frac{6}{2\cos\theta + 1}$ **$e = 2$؛ قطع زائد؛ $x = 3$**

اكتب معادلة كل تمثيل بياني قطبي بالصورة المتعامدة.

18.



انظر الهامش.

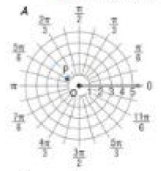
19.

$y^2 = 14(x + 3.5)$

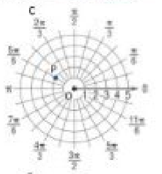
20. الكهرباء دائرة كهربائية جهدها الكهربائي E يساوي 135 فولت وشدة تيارها I تبلغ $4j - 3$ أمبير. أوجد مقاومة الدائرة Z بالأوم بالصورة المتعامدة. استخدم المعادلة $E = I \cdot Z$. **$18 + 24j$ أوم**

21. الاختيار من متعدد حدد التمثيل البياني للنقطة P ذات الإحداثيات المركبة $(-\sqrt{3}, -1)$ على المستوى الإحداثي القطبي. **D**

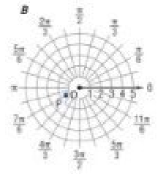
A



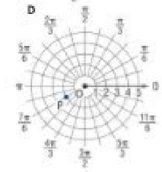
C



B



D



أوجد كل قوة أسية وعبّر عنه بصورة متعامدة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **$11,228 - 23,028i$**

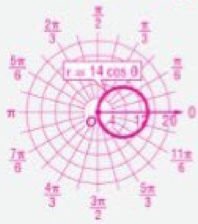
22. $(-1 + 4i)^3$ **$47 - 52i$**
23. $(-7 - 3i)^5$ **$15,939 -$**
24. $(6 + i)^4$ **$840i + 1081$**
25. $(2 - 5i)^4$ **$18,460i$**

إجابات إضافية

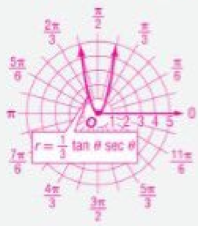
1. $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right), \left(-2.5, -\frac{2\pi}{3}\right)$

2. $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right), \left(-4, -\frac{17\pi}{12}\right)$

14. دائرة؛ $r = 14\cos\theta$



15. قطع مكافئ؛ $r = \frac{1}{3}\tan\theta\sec\theta$
$\theta \sec\theta$



18. $\frac{\left(y - \frac{8}{5}\right)^2}{\frac{4}{25}} - \frac{x^2}{\frac{12}{5}} = 1$

1 التركيز

الهدف تقريب طول قوس المنحنى.

نصيحة للتدريس

راجع مع الطلاب كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين وطول القوس للزاوية المركزية في الدائرة.

- الطول d لقطعة مستقيمة بنقطتي نهاية (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هو $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- الطول s لقوس في دائرة نصف قطرها r وزاوية مركزية θ راديان يساوي $s = r\theta$.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

في النشاطين 1 و 2، قسّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة.

اطرح السؤال التالي:

- ما نوع التمثيل البياني لــ $y = x^2$ عند تضمين جميع القيم؟ قطع مكافئ

اطلب من الطلاب العمل في على تطبيق الخطوات 1-4 في النشاط 1. ثم الإجابة عن تحليل النتائج في التمارين من 1 إلى 4.

اطرح السؤال التالي:

- ما القانون المستخدم في إيجاد المسافة بين لاحداثيات القطبية؟ المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$

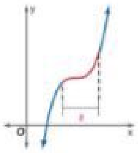
اطلب من الطلاب العمل على تطبيق الخطوات 1-4 في النشاط 2. ثم الإجابة عن تمارين تحليل النتائج من 5 إلى 7.

الوحدة 9 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
طول القوس

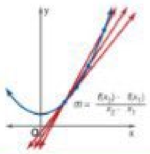
الهدف
- تقريب طول قوس المنحنى.

يمكنك التوصل إلى طول قطعة مستقيمة باستخدام قانون المسافة. يمكنك التوصل إلى طول قوس باستخدام التناسبات. في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى حساب أطوال كثيرة لا تمثلها قطع مستقيمة أو أجزاء دائرة.

كما هو مذكور، يركز حساب التفاضل والتكامل التكاملي على المساحات والأحجام والأطوال. يمكن استخدامه في التوصل إلى طول منحنى ليست لدينا معادلة قياسية تمثله، مثل منحنى تحدده دالة تربيعية أو دالة تكعيبية أو دالة قطبية. مجاميع ريمان والتكاملات المحددة، مفهومان ستتعلم المزيد عنهما في الوحدات التالية، مطلوبان لحساب الطول الدقيق لمنحنى أو طول قوس، يشار إليه بالرمز s.

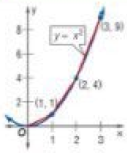


في هذا الدرس، ستتوصل إلى الطول التقريبي لقوس منحنى باستخدام عملية مشابهة للأسلوب الذي طبقته للتوصل إلى المعدل التقريبي للتغير عند نقطة معينة. تذكّر أنك في الوحدة 1 حسبت ميول المستقيمات القاطعة للتوصل إلى المعدلات التقريبية للتغير في التمثيلات البيانية عند نقاط معينة. أدى تقليل المسافة بين نقطتين على المستقيمات القاطعة إلى زيادة دقة القياسات التقريبية كما هو موضح في التمثيل البياني الذي على اليسار.



النشاط 1 تقريب طول القوس

قرِّب طول قوس التمثيل البياني $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$.



الخطوة 1 مثّل بيانيًا $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$ كما هو موضح.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا النقاط على المنحنى عند $x = 1$، 2، 3، ثم بالتوصيل بين النقاط باستخدام القطع المستقيمة كما هو موضح.

الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.
$\sqrt{2}$ وحدة، $\sqrt{10}$ وحدة، $\sqrt{26}$ وحدة

الخطوة 4 قرِّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.
9.68 وحدات

تحليل النتائج

1. هل التقريب الذي قمت به أكبر أم أقل من الطول الفعلي؟ اشرح استنتاجك.
2. قرِّب طول القوس مرة ثانية باستخدام 6 قطع مستقيمة كونتها النقاط $x = 0$ و 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، و3.0. أدرج رسمًا للتمثيل البياني مع القيمة التقريبية.
   الإجابة النموذجية: تقترب عملية التقريب من طول القوس الفعلي.
3. صف ما يحدث لتقريب طول القوس عند استخدام قطع مستقيمة أقصر.
4. بالنسبة إلى القيمتين التقريبيتين، كانت النقاط الطرفية للقطع المستقيمة على مسافات متساوية على المحور x. هل تعتقد أن هذا سينتج دائمًا القيمة التقريبية الأكثر دقة؟ اشرح استنتاجك.

1. أقل، الإجابة النموذجية: أقصر مسافة بين نقطتين هي الخط المستقيم، وهو المعطى لنا من القطع المستقيمة. بما أن التمثيل البياني يوصل بين النقطتين بمنحنى، فسيكون أطول من القياسات التي تقدمها القطع المستقيمة.
2. حوالي 9.73 وحدات

4. الإجابة النموذجية: يحدد شكل التمثيل البياني التباعد بين النقطتين الطرفيتين في القطع المستقيمة. إذا كان التمثيل البياني يحتوي مثلاً على نقطة تحول، فربما يجب أن تكون النقاط الطرفية للقطع المستقيمة أقرب لبعضها في هذا الجزء من بقية التمثيل البياني للحصول على قيمة تقريبية دقيقة.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال خطوتي التمثيل والتطبيق في التمرينين 8 و 9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 8 في تقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية تقريب طول القوس في المنحنى.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب شرح لماذا يمكن تحديد الطول الدقيق للمنحنى كله المتكون من خلال $x^2 + y^2 = 25$، بينما لا يمكن تحديد طول المنحنى كله المتكون من خلال $y = x^2 - 25$.

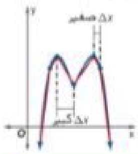
الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $x^2 + y^2 = 25$ على شكل دائرة، وهو منحنى مغلق يمكن حساب محيطه. بينما التمثيل البياني لـ $y = x^2 - 25$ على شكل قطع مكافئ، وليس منحنى مغلقًا. ويمتد المنحنى الخاص به إلى ما لا نهاية، وطوله ليس محددًا. ويمكنك إيجاد طول القوس في القطع المكافئ عند توفر فترة مغلقة.

توسيع المفهوم

وضح للطلاب أن هناك قانونًا لحساب طول القوس بدقة. بالنظر إلى وجود دالة حقيقية $f(x)$ مثل $f'(x)$ (مشتقاتها بالنسبة إلى x) مستمرة على $[a, b]$، فإنه يمكن إيجاد طول s لجزء التمثيل البياني لـ f الموجود بين $x = a$ و $x = b$ باستخدام القانون $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$، وسيدرسون المشتقات في الدرس 4-12.

لاحظ أنه في النشاط الأول، كانت النقاط الطرفية في القطع المستقيمة تقع على مسافات متساوية بينها تبلغ 0.5 وحدة على المحور x. عند استخدام أساليب متقدمة في التفاضل والتكامل للتوصل إلى طول دقيق للقوس، من الضروري أن يوجد فارق ثابت بين زوج من النقاط الطرفية على المحور x. يشار إلى هذا الفارق بالرمز Δx.

التوصل إلى قيمة تقريبية دقيقة للقوس باستخدام Δx ثابتة لإنشاء القطع المستقيمة قد لا يكون دائمًا الأسلوب الأكفأ. سيفرض شكل القوس المتباعد بين النقطتين الطرفيتين مما يعطي قيمًا مختلفة لـ Δx. إذا أظهر تمثيل بياني مثلاً زيادة أو انخفاضًا على مدى فترة طويلة لـ x، يمكن استخدام قطعة مستقيمة كبيرة للتقريب. إذا كان التمثيل البياني يشمل نقطة تحول، فمن الأفضل استخدام قطع مستقيمة صغيرة للتوصل إلى المنحنى في التمثيل البياني.

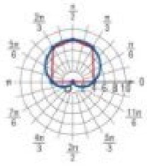


في الدرس 1-9، تعلمت كيفية حساب المسافة بين الإحداثيات القطبية. يمكن استخدام هذا القانون للتوصل إلى قيمة تقريبية لطول قوس منحنى تمثله معادلة قطبية.

5. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني متناظر مع المحور y. إذا عُرفت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تقع على أحد جانبي المحور y، فيمكن مضاعفة النتيجة لحساب القطع المستقيمة الموجودة على الجانب الآخر.

النشاط 2 تقريب طول القوس

قرِّب طول قوس التمثيل البياني $r = 4 + 4 \sin \theta$ حيث $0 \le x \le 2\pi$.



الخطوة 1 مثل بيانيًا $r = 4 + 4 \sin \theta$ حيث $0 \le x \le 2\pi$ كما هو موضح.

الخطوة 2 ارسم 6 نقاط على المنحنى عند $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$، و $\frac{3\pi}{2}$. قم بالتوصيل بين النقاط باستخدام قطع مستقيمة كما هو موضح.

الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة القطبية لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.
4 وحدات؛ 6.47 وحدات؛ 4.04 وحدات؛ 4.04 وحدات؛ 6.47 وحدات؛ 4 وحدات

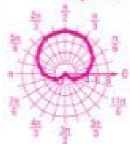
الخطوة 4 قرِّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.
29.02 وحدة

نصيحة دراسية
التمثيلات البيانية القطبية ارسم جدول قيم لكل من r و θ عند حساب طول القوس لعمل تمثيل بياني قطبي. سيساعد هذا في الحد من الأخطاء الناتجة عن الدوال التي تنتج قيم r سالبة.

تحليل النتائج

5. اشرح كيف يمكن استخدام التناظر في تقليل عدد العمليات الحسابية في الخطوة 3.
6. توصل إلى قيمة تقريبية لطول القوس باستخدام 10 قطع على الأقل. أدرج رسمًا للتمثيل البياني.
7. افترض أن n هي عدد القطع المستقيمة المستخدمة في تحديد قيمة تقريبية و $\Delta\theta$ هي الفارق الثابت في θ بين النقطتين الطرفيتين لقطعة مستقيمة. خمّن العلاقة بين n، و θ، والقيمة التقريبية لطول القوس.

6. الإجابة النموذجية: 31.02 وحدة

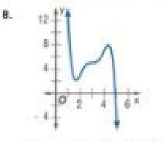


7. الإجابة النموذجية: مع زيادة n، تنخفض $\Delta\theta$. تقترب القيمة التقريبية مع الطول الفعلي للقوس.

النموذج والتطبيق

توصل إلى طول تقريبي للقوس لكل تمثيل بياني. أدرج رسمًا لتمثيلك البياني. 8-9. انظر الهامش.

8.



$y = -(x-3)^5 + 3(x-3)^3 + 5$ for $1 \le x \le 5$

9.

$r = \theta$ for $0 \le \theta \le 2\pi$

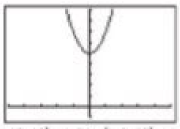
إجابات إضافية

9. الإجابة النموذجية: 20.6 وحدة

8. الإجابة النموذجية: 27.11 وحدة

الصفحة 511. (الاستعداد للوحدة 9)

1.

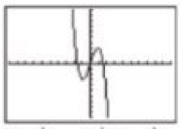


[−10, 10] scl: 2 by [−2, 18] scl: 2

زوجي: متناظر بالنسبة إلى المحور y

$$f(-x) = -2(-x)^3 + 5(-x)$$
$$= -2(-x^3) - 5x$$
$$= 2x^3 - 5x$$
$$= -f(x)$$

2.

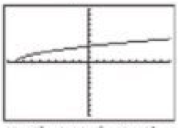


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

فردي: متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل

$$f(-x) = (-x)^2 + 10$$
$$= x^2 + 10$$
$$= f(x)$$

3.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

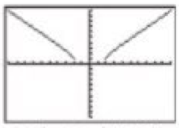
ليس أيهما

$$g(-x) = \sqrt{-x + 9}$$

التي لا تساوي $g(x)$

أو $-g(x)$

4.



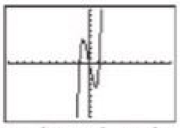
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

زوجي:

بالنسبة إلى المحور y

$$h(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 3}$$
$$= \sqrt{x^2 - 3}$$
$$= h(x)$$

5.



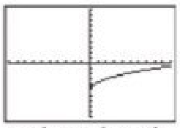
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

فردي: متناظر

بالنسبة إلى نقطة الأصل

$$g(-x) = 3(-x)^5 - 7(-x)$$
$$= 3(-x^5) + 7x$$
$$= -3x^5 + 7x$$
$$= -g(x)$$

6.



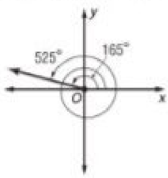
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

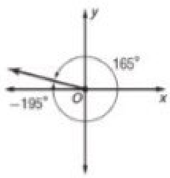
زوجي: متناظر

بالنسبة إلى المحور y

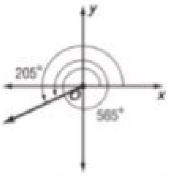
$$h(-x) = \sqrt{(-x)^2} - 5$$
$$= \sqrt{x^2} - 5$$
$$= h(x)$$

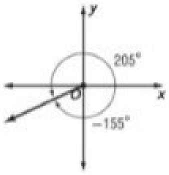
13. $165° + 360k°$; $525°$; $-195°$



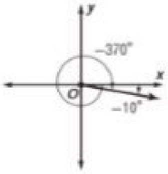


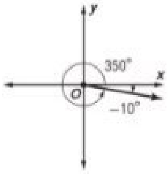
14. $205° + 360k°$; $565°$; $-155°$



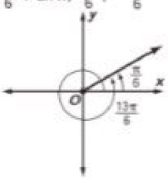


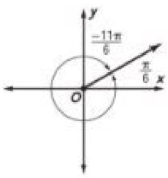
15. $-10° + 360k°$; $350°$; $-370°$



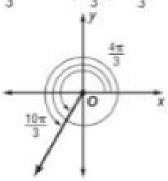


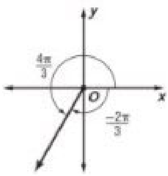
16. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$



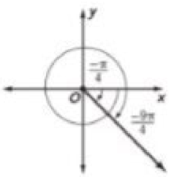


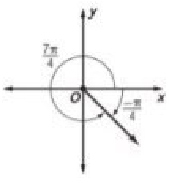
17. $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$



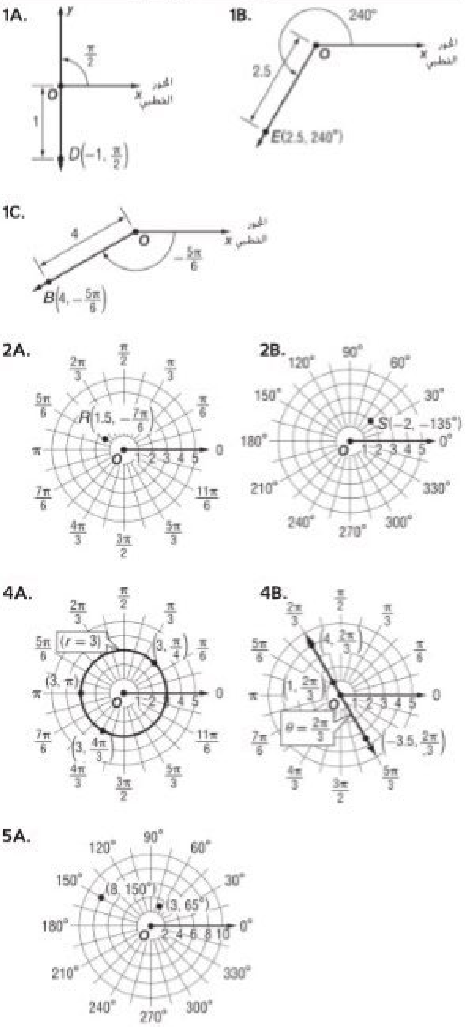


18. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$

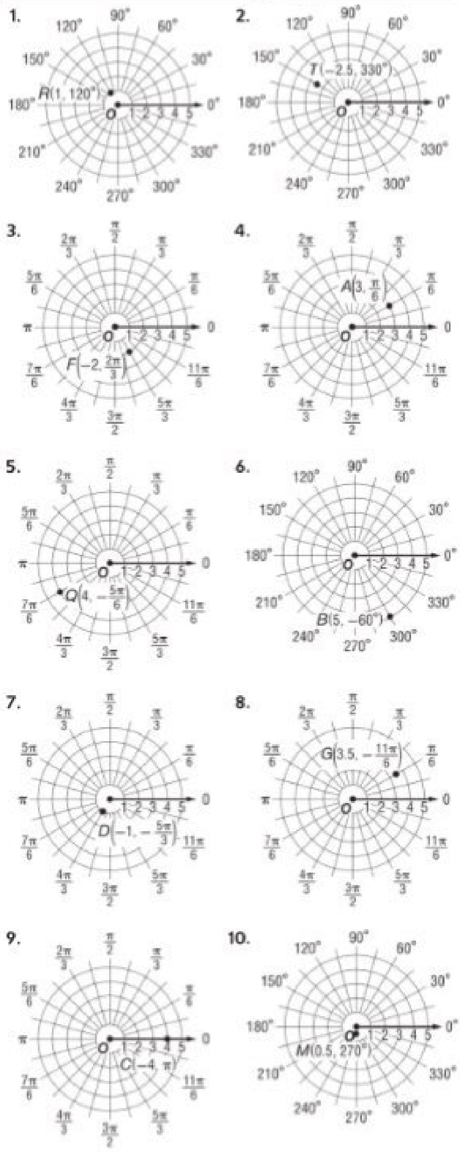




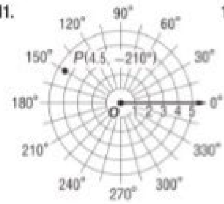
الصفحات 513–515، الدرس 9-1 (تمرين موجّه)



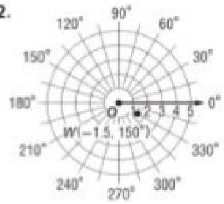
الصفحات 516–518، الدرس 9-1



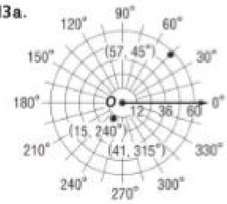
11.



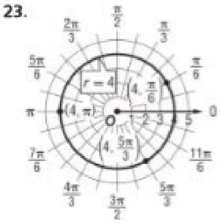
12.



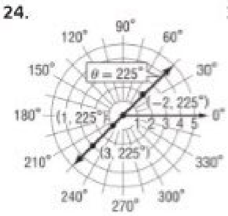
13a.



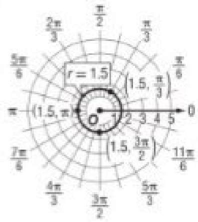
23.



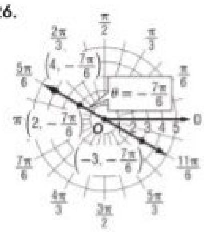
24.



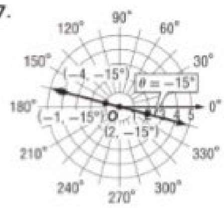
25.



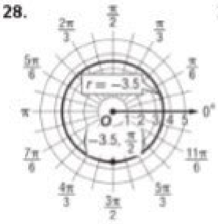
26.



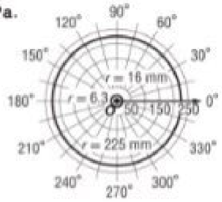
27.



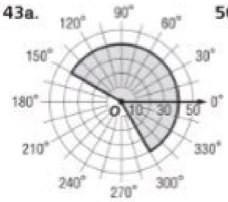
28.



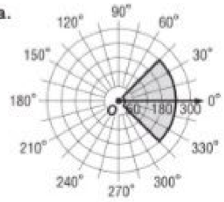
29a.



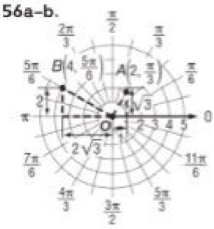
43a.



50a.



56a–b.

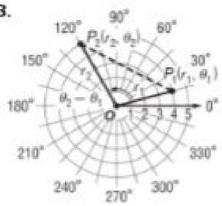


.56c تمثل أطوال الأجزاء إحداثيات x و y لكل نقطة.

.56d النقطة مع لاحداثيات القطبية (r, θ) لها الإحداثيات المتعامدة $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

.61 الإجابة النموذجية: تم حساب مجموع وناتج ضرب قيم r. وكلتا هاتان العمليتان تراكمية. ونظرًا للقيم الفردية والزوجية للدوال المثلثية، فإن $\cos(-\theta) = \cos\theta$. ولهذا، فإن ترتيب الزوايا ليس مهمًا.

63.



كون المثلث الناشئ من تقاطع نقطتين مع نقطة الأصل مثلثًا ذا ضلعين معلومين وزاوية محصورة بينهما. ومن ثم، فإنه بحسب قانون الـ Cosine،

$(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$ أو

$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

64. عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ فإن المسافة القطبية تُحوّل لأبسط صورة إلى $(P_1P_2)^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2$ أو $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2}$. وتنتج هذه العلاقة لأنه عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$، فإن قطع المستقيم الواصل بين P_1 و P_2 هو وتر المثلث قائم الزاوية المتكون باستخدام هاتين النقطتين ونقطة الأصل هي الرأس.

65. عبير؛ الإجابة النموذجية: رسمت علياء نقطةً حيث المسافة بين المحور القطبي والشعاع كانت تساوي 5 وحدات. وكان ينبغي أن تقيس 5 وحدات عبر الضلع الطرفي للزاوية.

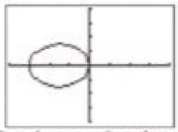
66. لم تراعِ اللاحداثيات القطبيةية ارتفاع الطائرة. ويمكن إثبات قياس الزاوية ومسافة ابتعاد الطائرة عن الرادار من الأرض، ولكن ينبغي معرفة الارتفاع لتحديد موقع الطائرة بدقة.

74. $\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 14 & -10 & 0 & 23 \\ 4 & 0 & -5 & 6 & 33 \\ 11 & -13 & 0 & 2 & -19 \\ 0 & 19 & -6 & 7 & -25 \end{array}\right]$

75. $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 5 & 18 \\ 5 & -7 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -12 & -22 \\ 8 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right]$

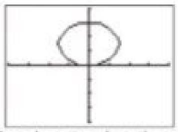
76. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -3 & 25 \\ 2 & -5 & 11 & 13 \\ -5 & 0 & 8 & 26 \\ 0 & 1 & -4 & 17 \end{array}\right]$

الصفحة 519، الاستكشاف 9-2

1. 

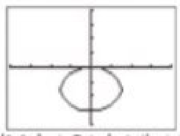
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل دائرة مركزها عند $(-1.5, 0)$ ونصف قطرها 1.5 وحدة. وهي متناظرة بالنسبة إلى المحور القطبي.

2. 

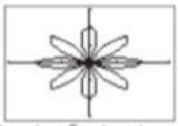
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل دائرة مركزها عند $(0, 1.5)$ ونصف قطرها 1.5 وحدة. وهي متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. 

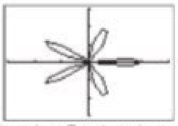
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل دائرة مركزها عند $(-1.5, 0)$ ونصف قطرها 1.5 وحدة. وهي متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

4. 

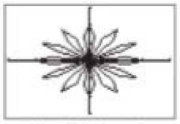
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل زهرة بها 8 أوراق ومتناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ والمحور القطبي.

5. 

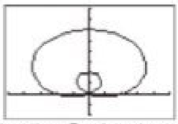
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل زهرة بها 5 أوراق ومتناظرة بالنسبة إلى المحور القطبي.

6. 

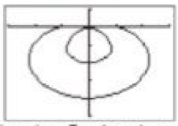
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل زهرة بها 12 ورقة ومتناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ والمحور القطبي.

7. 

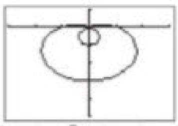
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-5, 5]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل منحنى قلبي الشكل ومتناظر بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

8. 

$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-5, 1]$ scl: 1

التمثيل البياني على شكل منحنى قلبي الشكل ومتناظر بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

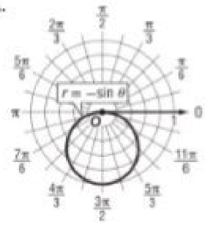
9. 

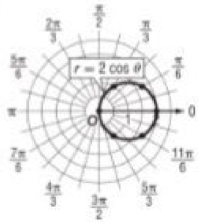
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-5, 1]$ scl: 1

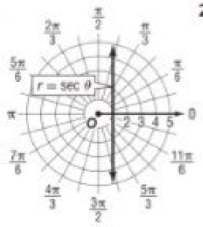
التمثيل البياني على شكل منحنى قلبي الشكل ومتناظر بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

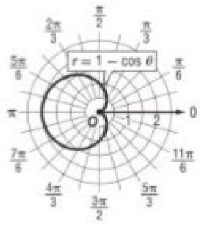
الوحدة 9 ملحق الإجابات

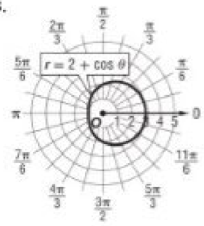
الصفحات 520–525، الدرس 9-2 (تمرين موجّه)

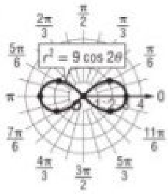
1A.


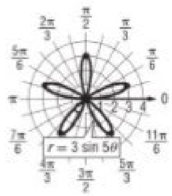
1B.


1C.


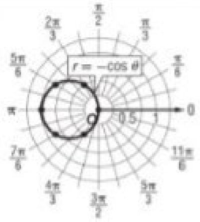
2A.


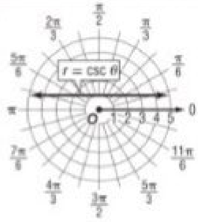
2B.


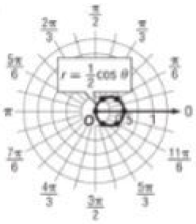
5A.


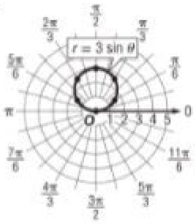
5B.


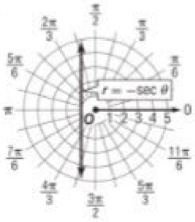
الصفحات 526–528، الدرس 9-2

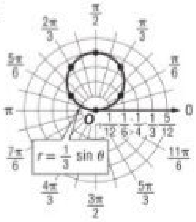
1.


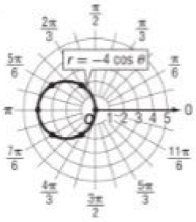
2.


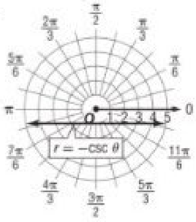
3.


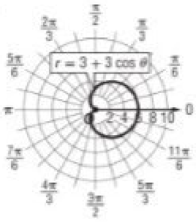
4.


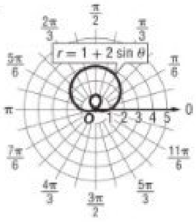
5.


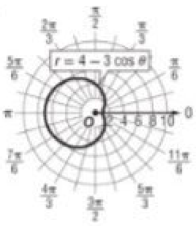
6.


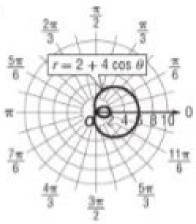
7.


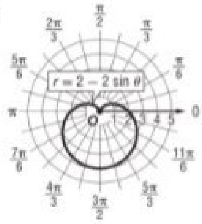
8.


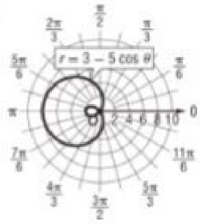
9.


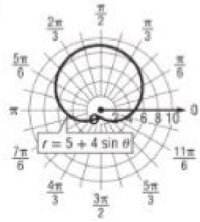
10.


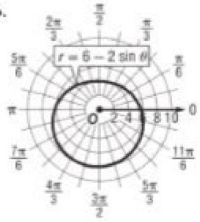
11.


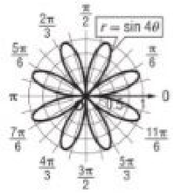
12.


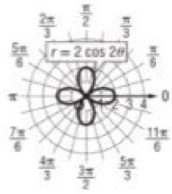
13.


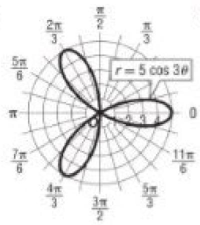
14.


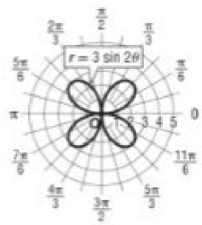
15.


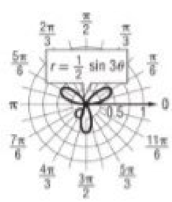
16.


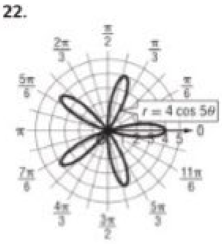
17.


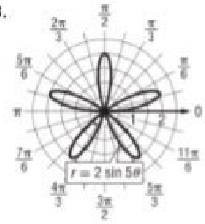
18.


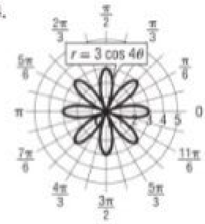
19.


20.


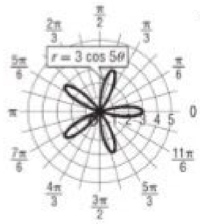
21.


22.


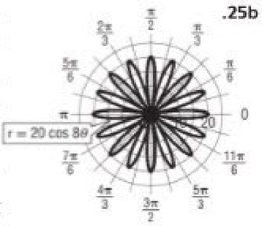
23.


24.


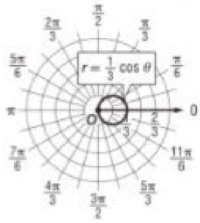
25a. متناظر بالنسبة إلى المحور القطبي؛ $|r| = 3$ عندما تكون $\theta = 0$ و $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{3\pi}{5}$ و $\frac{4\pi}{5}$ و π؛ أصفار بالنسبة إلى r عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{10}$ و $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{10}$ و $\frac{9\pi}{10}$



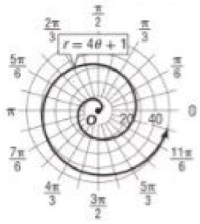
25b. متناظر بالنسبة إلى المحور القطبي والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ والقطب؛ $|r| = 20$ عندما تكون $\theta = 0$ و $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{8}$ و π؛ أصفار بالنسبة إلى r عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{16}$ و $\frac{3\pi}{16}$ و $\frac{5\pi}{16}$ و $\frac{7\pi}{16}$ و $\frac{9\pi}{16}$ و $\frac{11\pi}{16}$ و $\frac{13\pi}{16}$ و $\frac{15\pi}{16}$



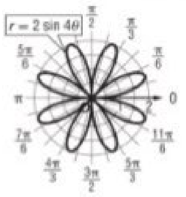
26. دائرة؛



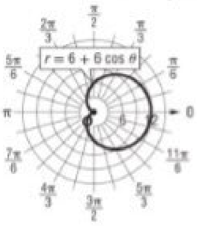
27. حلزون أرشميدس؛



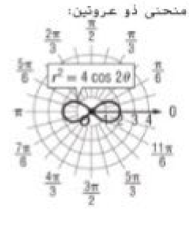
28. زهرة؛



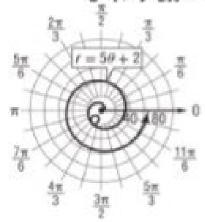
29. قلبي الشكل؛



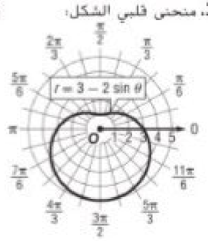
30. منحنى ذو عروتين:



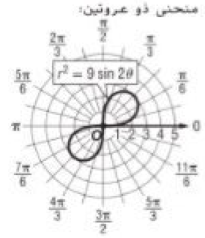
31. حلزون أرشميدس:



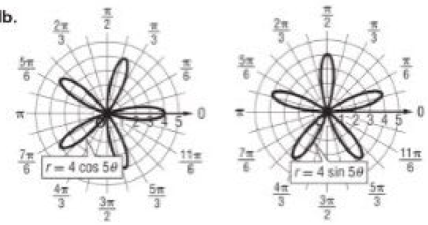
32. منحنى قلبي الشكل:



33. منحنى ذو عروتين:



41b.



42. استبدل $(r, \pi - \theta)$ بـ (r, θ).

$r = 3 + \sin\theta$
$r = 3 + \sin(\pi - \theta)$
$r = 3 + \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta$
$r = 3 + [(0)\cos\theta - (-1)\sin\theta]$
$r = 3 + \sin\theta$

نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، تكون $r = 3 + \sin\theta$ متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

43. استبدل $(-r, \theta)$ بـ (r, θ).

$r^2 = 4\sin 2\theta$
$(-r)^2 = 4\sin 2\theta$
$r^2 = 4\sin 2\theta$

نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، فإن $r^2 = 4\sin 2\theta$ تكون متناظرة بالنسبة إلى القطب.

44. استبدل $(-r, \pi - \theta)$ بـ (r, θ).

$r = 3\sin 2\theta$
$-r = 3\sin 2(\pi - \theta)$
$-r = 3\sin(2\pi - 2\theta)$
$-r = 3(\sin 2\pi\cos 2\theta - \cos 2\pi\sin 2\theta)$
$-r = 3[(0)\cos 2\theta - (1)\sin 2\theta]$
$-r = -3\sin 2\theta$
$r = 3\sin 2\theta$

نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، تكون $r = 3\sin 2\theta$ متناظرة بالنسبة للمحور القطبي.

45. استبدل $(r, \pi - \theta)$ بـ (r, θ).

$r = 5\cos 8\theta$
$r = 5\cos 8(\pi - \theta)$
$r = 5\cos(8\pi - 8\theta)$
$r = 5(\cos 8\pi\cos 8\theta + \sin 8\pi\sin 8\theta)$
$r = 5[(1)\cos 8\theta - (0)\sin 8\theta]$
$r = 5\cos 8\theta$

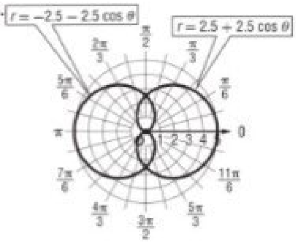
نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، تكون $r = 5\cos 8\theta$ متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

46. استبدل $(r, \pi + \theta)$ بـ (r, θ).

$r = 2\sin 4\theta$
$r = 2\sin 4(\pi + \theta)$
$r = 2\sin(4\pi + 4\theta)$
$r = 2(\sin 4\pi\cos 4\theta + \cos 4\pi\sin 4\theta)$
$r = 2[(0)\cos 4\theta + (1)\sin 4\theta)$
$r = 2\sin 4\theta$

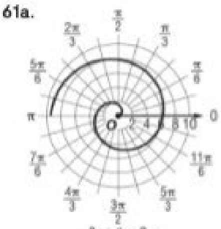
نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، تكون $r = 2\sin 4\theta$ متناظرة بالنسبة للقطب.

48b.

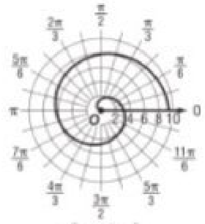


48c. الإجابة النموذجية: تشير مناطق التداخل في التمثيلين البيانيين إلى المناطق حيث سيكتشف كلا الميكروفونين الصوت. على سبيل المثال، سيلتقط الميكروفونان الأصوات التي تصل إلى 2.5 وحدة مباشرة شمال أو جنوب الميكروفونين. بالإضافة إلى ذلك، سيكتشف كل ميكروفون الصوت الذي يصل إلى 5 وحدات أمامه مباشرة.

61a.



$0 \le \theta \le 3\pi$



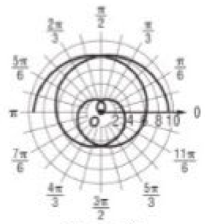
$-3\pi \le \theta \le 0$

61b. الإجابة النموذجية: المعادلة $r = \theta$ متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ عندما تكون الفترة الفاصلة لـ θ تساوي $-a \le \theta \le a$.

61c. استبدل $(-r, -\theta)$ بـ (r, θ).

$r = \theta$
$-r = -\theta$
$r = \theta$

ينتج هذا التعويض معادلة مكافئة. ومن ثم $r = \theta$ تكون متناظرة بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

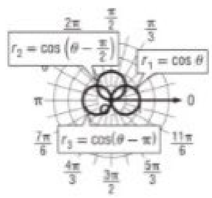


$-3\pi \le \theta \le 3\pi$

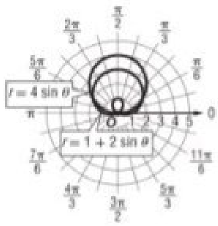
61d. الإجابة النموذجية: لن يؤثر على المنحنيات الكلاسيكية الأخرى. وتتكون جميع المنحنيات الكلاسيكية إما من دالة sine أو دالة cosine. ومن ثم، لتحقيق تمثيل بياني كامل، يتبقى تمثيلها بيانيًا فقط لجميع قيم θ داخل الفترة الخاصة بها. إن إطالة فترة θ لتضمين القيم الإضافية خارج نطاق الدورة ستؤدي إلى تكرار التمثيل البياني لنفسه. وذلك لأن حلزون أرشميدس لا يتضمن دالة مثلثية. وتؤدي القيم الإضافية لـ θ إلى إيجاد قيم مختلفة لـ r.

63.

الإجابة النموذجية: r_2 و r_3 هما تمثيلان بيانيان لـ r_1 بعد إجراء دوران حول القطب $\frac{\pi}{2}$ و π، على التوالي. التمثيل البياني لـ $r = \cos(\theta - d)$ سيكون تمثيلاً بيانيًا لـ $r = \cos \theta$ بعد إجراء دوران لـ d حول القطب.



64. $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{6}, 2\right)$



الإجابة النموذجية: يبدو أن التمثيلات البيانية تتقاطع عند $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{6}, 2\right)$. كما يبدو أن التمثيلات البيانية تتقاطع عند القطب. ومع ذلك، فإن $(0, 0)$ ليست حلاً للمعادلة $r = 1 + 2 \sin \theta$. إذًا فهي ليست حلاً للنظام.

65. لاختبار التناظر بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$، قم باستبدال $(r, \pi - \theta)$ بـ (r, θ).

$r = a + b \cos 2(\pi - \theta)$
$r = a + b \cos 2(\pi - \theta)$
$r = a + b \cos(2\pi - 2\theta)$
$r = a + b(\cos 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\pi \sin 2\theta)$
$r = a + b[(1) \cos 2\theta + (0) \sin 2\theta]$
$r = a + b \cos 2\theta$

نظرًا لأن هذا التعويض ينتج معادلة مكافئة، فإن التمثيل البياني لـ $r = a + b \cos 2\theta$ يكون متناظرًا بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

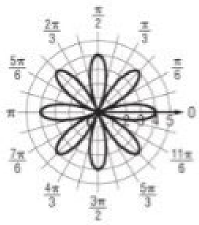
66. الاختبار التناظر بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$، استبدل $(-r, \pi - \theta)$ بـ (r, θ).

$(-r, \pi - \theta)$ for (r, θ).
$r = a \sin 2(\pi - \theta)$
$r = a \sin(2\pi - 2\theta)$
$r = a(\sin 2\pi \cos 2\theta - \cos 2\pi \sin 2\theta)$
$r = a[(0) \cos 2\theta - (1) \sin 2\theta]$
$r = -a \sin 2\theta$
$-r = a \sin 2\theta$

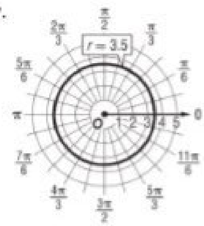
نظرًا لأن التعويض ينتج معادلة مكافئة، يكون التمثيل البياني لـ $r = a \sin 2\theta$ متناظرًا بالنسبة إلى المحور القطبي.

67. الإجابة النموذجية: تحدد قيمة a قطر الدائرة. وإذا كان $a > 0$، فسيقع التمثيل البياني في الربع I و IV في المستوى مع اشتمال المحور القطبي على قطر الدائرة. إذا كانت $a < 0$، فسيقع التمثيل البياني في الربع II وIII في المستوى مع اشتمال المحور القطبي على قطر الدائرة.

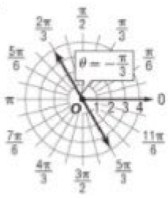
68. الإجابة النموذجية: $r = 4 \cos 4\theta$



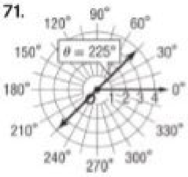
69.



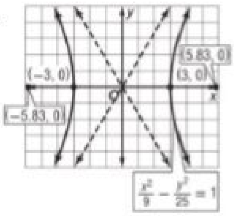
70.



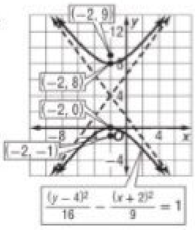
71.



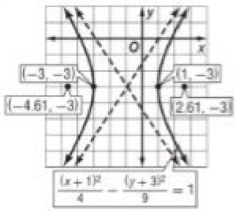
79.



80.



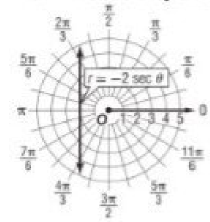
81.

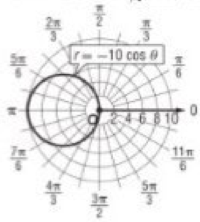


الصفحات 535–537، الدرس 9-3

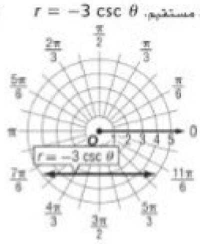
26. مستقيم: $r = -2 \sec \theta$

27. دائرة: $r = -10 \cos \theta$

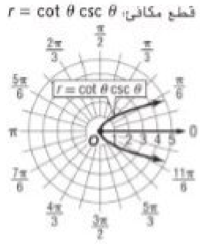




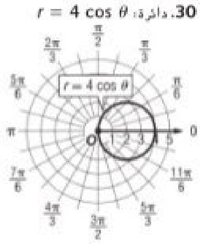
28. مستقيم: $r = -3 \csc \theta$



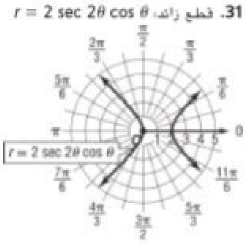
29. قطع مكافئ: $r = \cot \theta \csc \theta$



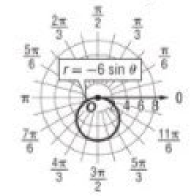
30. دائرة: $r = 4 \cos \theta$



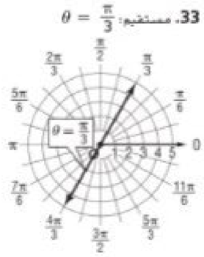
31. قطع زائد: $r = 2 \sec 2\theta \cos \theta$



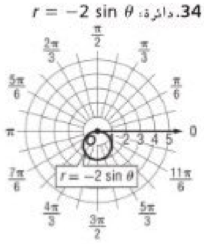
32. دائرة: $r = -6 \sin \theta$



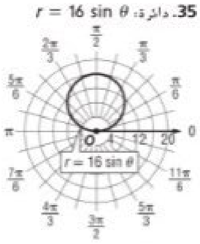
33. مستقيم: $\theta = \frac{\pi}{3}$



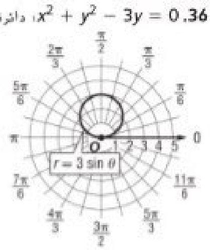
34. دائرة: $r = -2 \sin \theta$



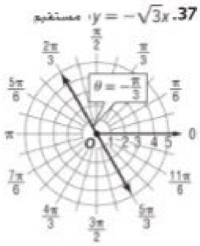
35. دائرة: $r = 16 \sin \theta$



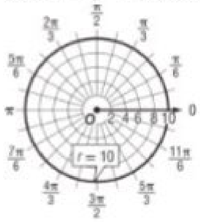
36. دائرة: $x^2 + y^2 - 3y = 0$



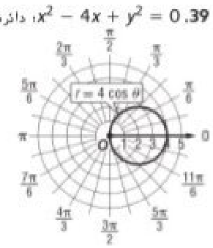
37. مستقيم: $y = -\sqrt{3}x$



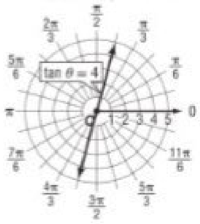
38. $x^2 + y^2 = 100$، دائرة



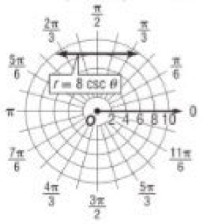
39. $x^2 - 4x + y^2 = 0$، دائرة



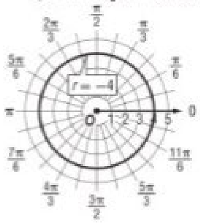
40. $y = 4x$، مستقيم



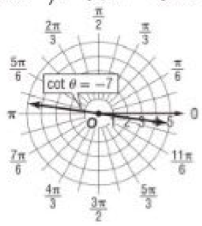
41. $y = 8$، مستقيم



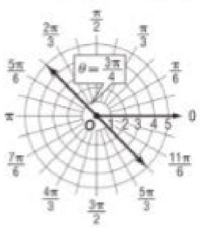
42. $x2 + y2 = 16$، دائرة



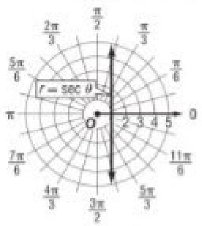
43. $x = -7y$ أو $-\frac{1}{7}x = y$، مستقيم



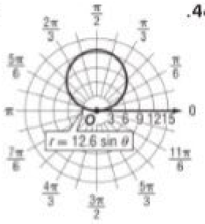
44. $y = -x$ ، مستقيم



45. $x = 1$، مستقيم

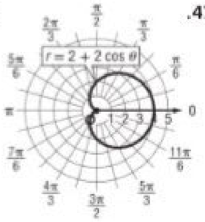


46a.



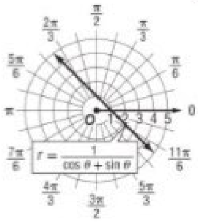
46c. $(0, 6.3)$. الإجابة النموذجية: شعر الأشخاص في حدود نصف قطر يبلغ 6.3 كيلومترات من المركز السطحي للزلزال بآثار هذا الزلزال.

47a.



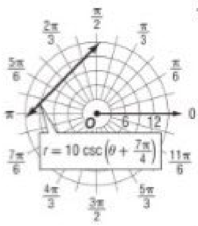
47b. لا: الإجابة النموذجية: تقع النقطة المعروفة على المحور x السالب، خلف مكبر الصوت مباشرةً. ويشير النمط القطبي إلى أن مكبر الصوت لم يلتقط أي صوت من هذا الاتجاه.

48.



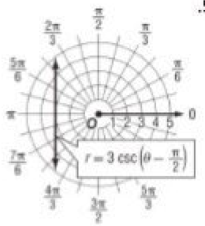
$x + y = 1$ أو $y = 1 - x$، مستقيم

49.



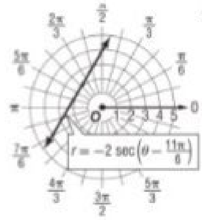
$\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10$ أو
$y = x + 10\sqrt{2}$، مستقيم

50.



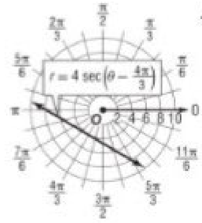
$x = -3$، مستقيم

.51



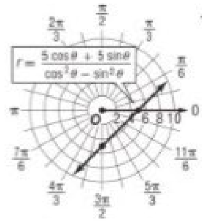
$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-2$ أو
$y=\sqrt{3}x+4$، مستقيم

.52



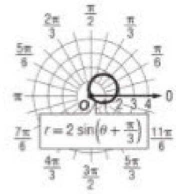
$-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=4$ أو
$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ، مستقيم

.53



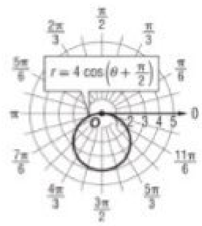
$x-y=5$ أو $y=x-5$،
مستقيم

.54



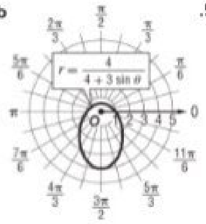
$x^2+y^2-\sqrt{3}x-y=0$ أو
$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$
1: دائرة

.55



$x^2+y^2+4y=0$
أو $x^2+(y+2)^2=4$، دائرة

.56a

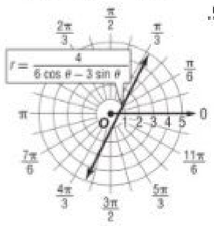


.56b تبلغ أدنى مسافة من الأرض 5714 كيلو مترًا تقريبًا. وتبلغ أقصى مسافة من الأرض 40,000 كيلومتر.

.56c لا؛ الإجابة النموذجية: للقمر الصناعي الثاني لاحداثيات القطبية $(3.35, -1.11)$. بالنسبة لقيمة θ هذه، ستكون إحداثيات القمر الصناعي الأول $(3.05, -1.11)$. وسيكون القمران الصناعيان على بُعد 3000 كيلومتر عن بعضهما.

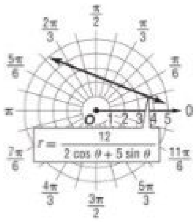
.57

مستقيم؛ $r=\frac{4}{6\cos\theta-3\sin\theta}$



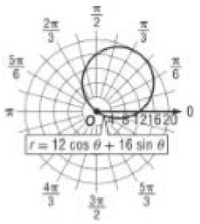
.58

مستقيم؛ $r=\frac{12}{2\cos\theta+5\sin\theta}$



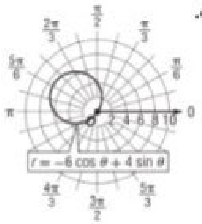
.59

دائرة؛ $r=12\cos\theta+16\sin\theta$

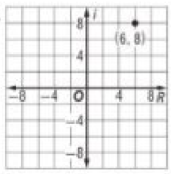


الوحدة 9 ملحق الإجابات

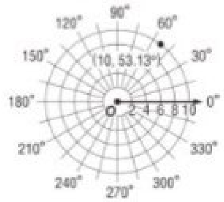
.60 دائرة، $r = -6\cos\theta + 4\sin\theta$



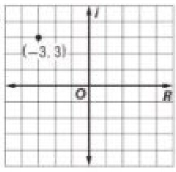
67a.



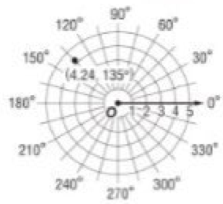
67b. (10, 53.13°)



67c.



.67d (4.24, 135°)



.67e $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$؛ عندما يكون a موجبًا؛ $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + 180°$، عندما يكون a سالبًا.

.68 عيسى؛ الإجابة النموذجية: استخدم عيسى التعويضات الصحيحة، وإجابة علي هي دالة sine، وهي دالة غير مطابقة للدائرة الممثلة بالدالة القطبية الأصلية.

.70 $\theta = \sin^{-1}\frac{y}{r}$، عندما تكون قيمة x موجبة؛ $\theta = \pi - \sin^{-1}\frac{y}{r}$ أو $\theta = 180° - \sin^{-1}\frac{y}{r}$، عندما تكون قيمة x سالبة؛

$\theta = \cos^{-1}\frac{x}{r}$، عندما تكون قيمة y موجبة؛ $\theta = 2\pi - \cos^{-1}\frac{x}{r}$ أو $\theta = 360° - \cos^{-1}\frac{x}{r}$ عندما تكون قيمة y سالبة.

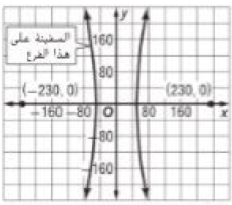
.71 الإجابة النموذجية: من الأسهل عمل التمثيل البياني بالصورة القطبية للمعادلات المتعامدة التي ليست دوال، مثل المعادلات الممثلة بقطع ناقص أو دوائر. بينما من الأسهل عمل التمثيل البياني بالشكل المتعامد للمعادلات التي تمثل دوال، مثل الدوال الخطية.

72.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r\sin\theta \\ \frac{x}{\cos\theta} &= r & \frac{y}{\sin\theta} &= r \\ x \cdot \frac{1}{\cos\theta} &= r & y \cdot \frac{1}{\sin\theta} &= r \\ x\sec\theta &= r & y\csc\theta &= r \end{aligned}$$

.74 الإجابة النموذجية: عند معرفة زاوية θ مع اللاحداثيات القطبيةية، من الضروري معرفة موقع المحور القطبي. وفي حين أن المحور القطبي يكون عادةً مستقيمًا أفقيًا مرسومًا نحو اليمين أو الشرق، فإنه يمكن رسمه في أي اتجاه. ومن ثم فإن الزاوية 135° المرسومة بالنسبة إلى المحور القطبي يمكن أن تتجه في أي اتجاه إذا لم يكن المحور القطبي محددًا. ويمكن أن يؤدي ذلك إلى خطأ إذا كان ينبغي تحويل اللاحداثيات القطبيةية إلى إحداثيات متعامدة، وتم الاعتماد على محور قطبي خطأ. وبما أن الاتجاهات الربعية محددة بالنسبة إلى الاتجاهين الشمالي والجنوبي، فإنها ستكون مفهومة عمومًا. فعلى سبيل المثال، فإن الزاوية 45° باتجاه الشمال الغربي ستكون في الاتجاه نفسه دائمًا.

84b.

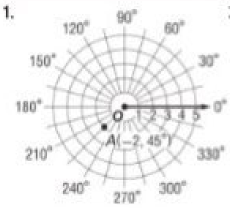


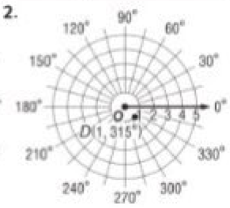
86. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

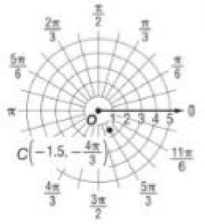
87. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$

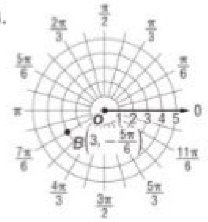
88. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

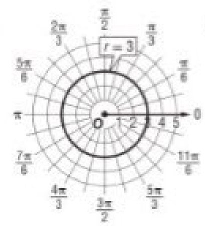
الصفحة 538، اختبار نصف الوحدة

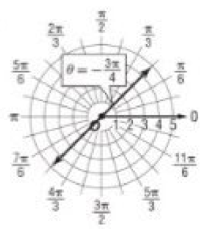
1.


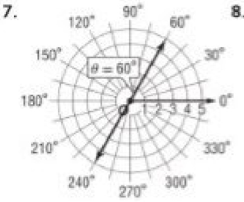
2.


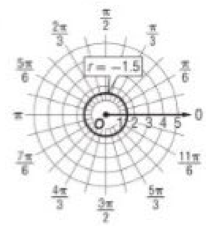
3.


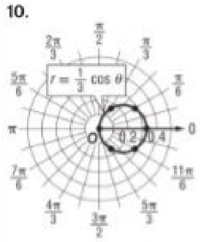
4.


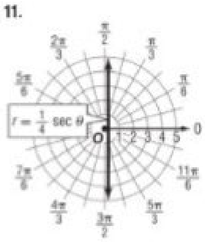
5.


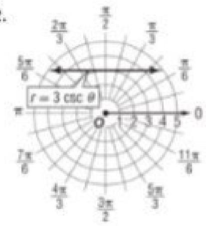
6.


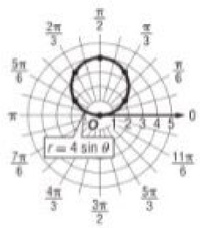
7.


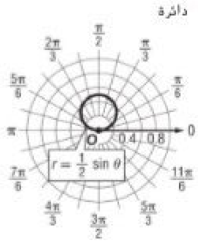
8.


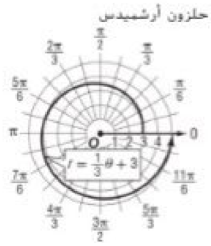
10.


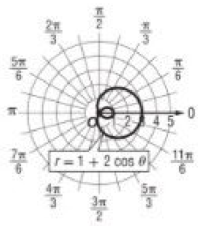
11.


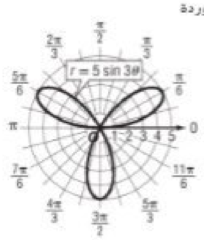
12.


13.


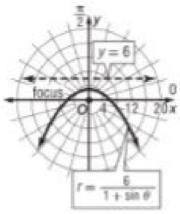
15 دائرة


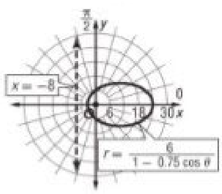
16. حلزون أرشميدس


17. منحنى قلبي الشكل


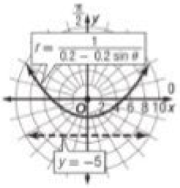
18 وردة


الصفحات 544-546: الدرس 9-4

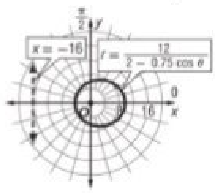
10. $r = \frac{6}{1 + \sin\theta}$


11. $r = \frac{6}{1 - 0.75\cos\theta}$


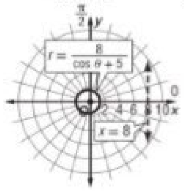
35. $e = 1$، قطع مكافئ، $y = -5$



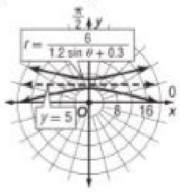
34. $e = \frac{3}{8}$، قطع ناقص، $x = -16$



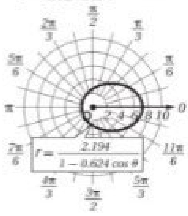
37. $e = \frac{1}{5}$، قطع ناقص، $x = 8$



36. $e = 4$، قطع زائد، $y = 5$



38a. الإجابة النموذجية: $r = \frac{2.194}{1 - 0.624 \cos\theta}$

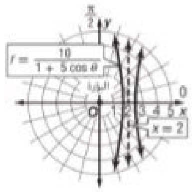


39. $b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = a^2 - (ae)^2$
$b^2 = a^2 - a^2e^2$
$b^2 = a^2(1 - e^2)$
$b = a\sqrt{1 - e^2}$

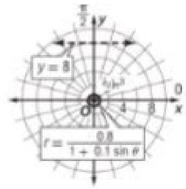
40. $b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = (ae)^2 - a^2$
$b^2 = a^2e^2 - a^2$
$b^2 = a^2(e^2 - 1)$
$b = a\sqrt{e^2 - 1}$

41. $PF = ePQ$
$c - a = e[a - (c - d)]$
$c - a = e(a - c + d)$
$ae - a = e(a - ae + d)$
$ae - a = ae - ae^2 + de$
$-a = -ae^2 + de$
$ae^2 - a = de$
$\frac{ae^2 - a}{e} = d$
$\frac{a(e^2 - 1)}{e} = d$

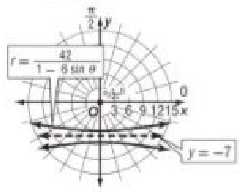
12. $r = \frac{10}{1 + 5 \cos\theta}$



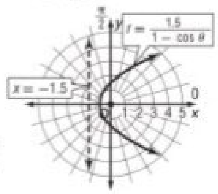
13. $r = \frac{0.8}{1 + 0.1 \sin\theta}$



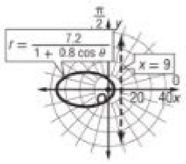
14. $r = \frac{42}{1 - 6 \sin\theta}$



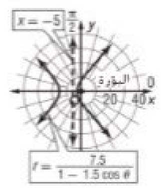
15. $r = \frac{1.5}{1 - \cos\theta}$



16. $r = \frac{7.2}{1 + 0.8 \cos\theta}$



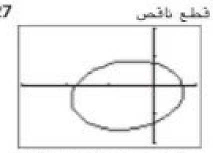
17. $r = \frac{7.5}{1 - 1.5 \cos\theta}$



27. قطع مكافئ

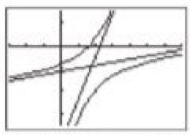
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-14, 6]$ scl: 2 by $[-14, 6]$ scl: 2

26. قطع ناقص



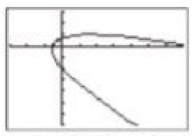
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 1]$ scl: 1 by $[-2, 2]$ scl: 1

29. قطع زائد



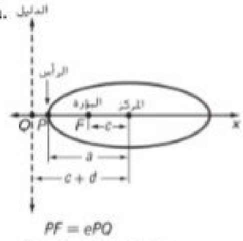
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 7]$ scl: 1 by $[-7, 3]$ scl: 1

28. قطع مكافئ



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-6, 14]$ scl: 2 by $[-14, 6]$ scl: 2

46a.



$$PF = ePQ$$
$$a - c = e(c + d - a)$$
$$a - ae = e(ae + d - a)$$
$$a - ae = ae^2 + de - ae$$
$$ae^2 + de = a$$
$$de = a - ae^2$$
$$de = a(1 - e^2)$$

إذًا، عند تعويض $de = a(1 - e^2)$ في $r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}$ تصبح المعادلة $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$

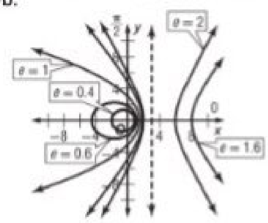
6b4. الإجابة النموذجية: المسافة من الحضيض (الشمسي) إلى مركز القطع الناقص تساوي a. المسافة من الشمس إلى مركز القطع الناقص تساوي c. إذًا، مسافة الحضيض تساوي $a - c$. ويساوي الاختلاف المركزي للقطع الناقص $e = \frac{c}{a}$. لذا، فإن $c = ea$ ويمكن كتابة مسافة الحضيض بالصورة $a - ea$ أو $a(1 - e)$. وتساوي مسافة الأوج (أبعد نقطة عن الشمس) $a + c$. والتي يمكن التعبير عنها بالصورة $a + ea$ أو $a(1 + e)$.

46c.

الكوكب	مسافة الحضيض	مسافة الأوج
الأرض	0.983	1.017
المشتري	4.953	5.453
المريخ	1.382	1.666
عطارد	0.307	0.467
نبتون	29.789	30.331
زحل	9.005	10.073
أورانوس	18.279	20.081
الزهرة	0.718	0.728

49a. الإجابة النموذجية: $r = \frac{1.2}{1 + 0.4\cos\theta}$، قطع ناقص؛ $r = \frac{1.8}{1 + 0.6\cos\theta}$، قطع ناقص؛ $r = \frac{3}{1 + \cos\theta}$ قطع مكافئ؛ $r = \frac{4.8}{1 + 1.6\cos\theta}$ قطع زائد؛ $r = \frac{6}{1 + 2\cos\theta}$، قطع زائد

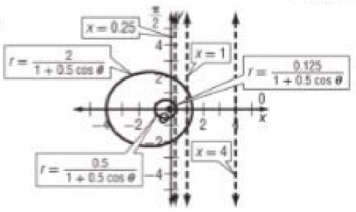
49b.



49c. الإجابة النموذجية: سيكون القطع الناقص ذو الاختلاف المركزي الأصغر أكثر استدارة من القطع الناقص ذي الاختلاف المركزي الأكبر. وحيث إن e يقترب من 1. ينفتح القطع الناقص أكثر باتجاه اليسار. مقتربًا من القطع المكافئ الذي به $e = 1$. وبالنسبة للقيم حيث $e > 1$. يقترب القطع الزائد ذو الاختلاف المركزي الأكبر من الخطوط المقاربة له بسرعة أكبر كثيرًا من القطع الزائد ذي الاختلاف المركزي الأصغر. وأيضًا بينما يقترب e من 1. يتحرك أحد أفرع القطع الزائد مسافة أبعد كثيرًا من الخطوط المقاربة له. وهو ما يجعله يقترب من القطع المكافئ الذي به $e = 1$.

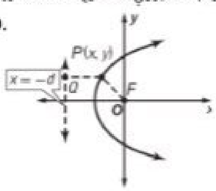
49d. الإجابة النموذجية: $r = \frac{0.125}{1 + 0.5\cos\theta}$؛ $r = \frac{0.5}{1 + 0.5\cos\theta}$؛ $r = \frac{2}{1 + 0.5\cos\theta}$

49e.



49f. الإجابة النموذجية، حيث إن قيمة الدليل تزيد من 0.25 إلى 4. فإن المسافات بين الرؤوس والبُعد البؤري للقطوع الناقصة تزيد.

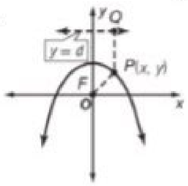
50.



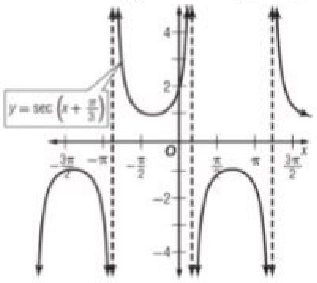
العبارات (المبررات)

1. $PF = ePQ$ (تعريف القطع المخروطي)
2. $\sqrt{x^2 + y^2} = e[x - (-d)]$ ($PF = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $PQ = x - (-d)$)
3. $\sqrt{x^2 + y^2} = e(d + x$ ($x - (-d) = x + d$ أو $d + x$)
4. $r = e(d + r\cos\theta)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $x = r\cos\theta$)
5. $r = ed + er\cos\theta$ (خاصية التوزيع)
6. $r - er\cos\theta = ed$ (بعزل حدود r.)
7. $r(1 - e\cos\theta) = ed$ (بالتحليل إلى العوامل.)
8. $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (بالحل لإيجاد r.)

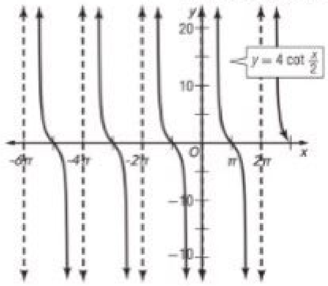
51.



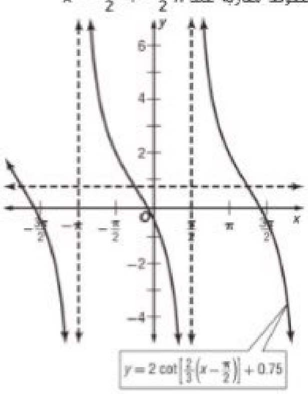
71. خطوط مقاربة عند $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$



72. خطوط مقاربة عند $x = 2\pi n$



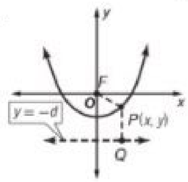
73. خطوط مقاربة عند $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}n$



العبارات (المبررات)

1. $PF = ePQ$ (تعريف القطع المخروطي)
2. $\sqrt{x^2+y^2} = e(d-y)$ $\left(PF = \sqrt{x^2+y^2}\right.$ و $\left.PQ = d - y\right)$
3. $r = e(d - r\sin\theta)$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ و $y = r\sin\theta$
4. $r = ed - er\sin\theta$ (خاصية التوزيع)
5. $r + er\sin\theta = ed$ (بعزل الحدود r.)
6. $r(1 + e\sin\theta) = ed$ (بالتحليل إلى العوامل.)
7. $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ (بالحل لإيجاد r.)

52.



العبارات (المبررات)

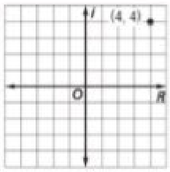
1. $PF = ePQ$ (تعريف القطع المخروطي)
2. $\sqrt{x^2+y^2} = e[y-(-d)]$ $(PF = \sqrt{x^2+y^2}$ و $PQ = y - (-d))$
3. $\sqrt{x^2+y^2} = e(d+y)$ $(y-(-d) = y + d$ أو $d + y)$
4. $r = e(d + r\sin\theta)$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ و $y = r\sin\theta$
5. $r = ed + er\sin\theta$ (خاصية التوزيع)
6. $r - er\sin\theta = ed$ (بعزل حدود r.)
7. $r(1 - e\sin\theta) = ed$ (بالتحليل إلى العوامل)
8. $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$ (بالحل لإيجاد r.)

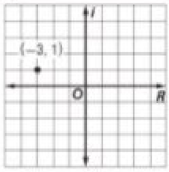
35. الإجابة النموذجية: يمكن تعريف القطع المخروطي بأنه شكل يتم تكوينه عند تقاطع مستوى مع مخروط أيمن ثنائي الرؤوس، أو عندما يكون المحل الهندسي للنقاط نسبة ثابتة، مثل المسافة من النقطة إلى البؤرة والمسافة من النقطة إلى الدليل

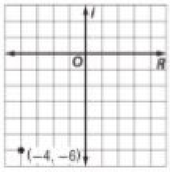
57. افترض أن $P = (r, \theta)$ هي نقطة على المخروط. إذًا، تكون المسافة من P إلى البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ هي $|r|$. وبدلالة θ وحسب المخروط، فإن

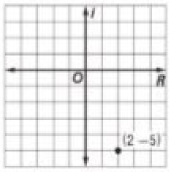
$$|r| = \left|\frac{ed}{1 + e\cos\theta}\right|, |r| = \left|\frac{ed}{1 - e\cos\theta}\right|, |r| = \left|\frac{ed}{1 + e\sin\theta}\right|$$

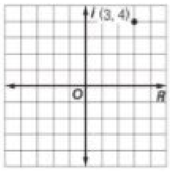
أو $|r| = \left|\frac{ed}{1 - e\sin\theta}\right|$.

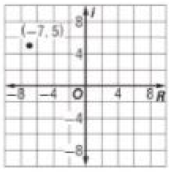
1.


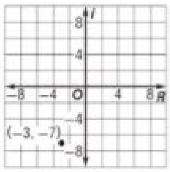
2.


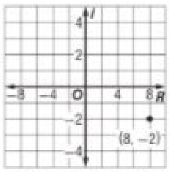
3.


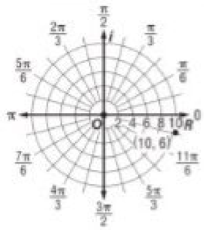
4.


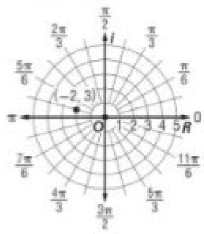
5.


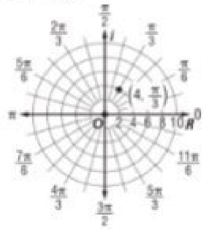
6.


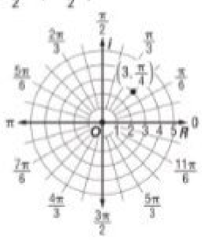
7.


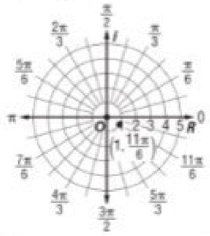
8.


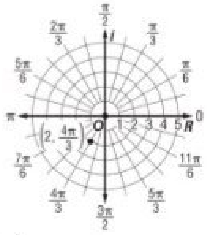
18. $9.60 - 2.79i$


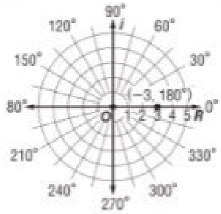
19. $-1.98 + 0.28i$


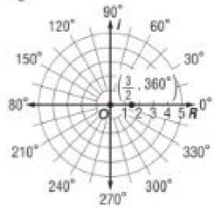
20. $2 + 2\sqrt{3}i$


21. $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$


22. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$


23. $-1 - \sqrt{3}i$


24. 3


25. $\frac{3}{2}$


56. $(1 - i)(4 + 4i) = 8$; $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) \cdot 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 8$

57. $(3 + i)(3 - i) = 10$; $\sqrt{10}(\cos 0.3218 + i \sin 0.3218) \cdot \sqrt{10}[\cos(-0.3218) + i \sin(-0.3218)] = 10$

58. $(3 - i)(4 + i) = 13 - i$; $\sqrt{10}[\cos(-0.3218) + i \sin(-0.3218)] \cdot \sqrt{17}(\cos 0.2450 + i \sin 0.2450) \approx 13 - i$

59. $(-6 + 5i)(2 - 3i) = 3 + 28i$; $\sqrt{61}(\cos 2.4469 + i \sin 2.4469) \cdot \sqrt{13}[\cos(-0.9828) + i \sin(-0.9828)] \approx 3 + 28i$

60. $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i) \approx -0.586 + 3.414i$; $\sqrt{6}(\cos 0.9553 + i \sin 0.9553) \cdot \sqrt{2}(\cos 0.7854 + i \sin 0.7854) \approx -0.586 + 3.414i$

$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)]$

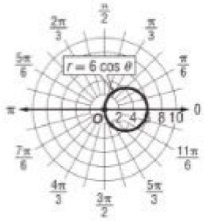
$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

78. دائمًا، الإجابة النموذجية: الجذور p للعدد المركب لها جميعًا معاملات واحدة تتحدد من $r^{\frac{1}{p}}$، التي تمثل نصف قطر الدائرة التي تقع عليها الجذور. ويمكن إيجاد الفرضيات في كل جذر متتابع بتكرار جمع $\frac{2\pi}{p}$. ومن ثم، تصبح الجذور على مسافات متباعدة حول الدائرة.

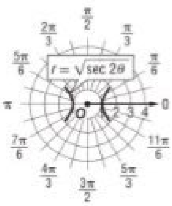
79. دائمًا، الإجابة النموذجية: إذا كانت $z = a + bi$ و $\bar{z}w = a - bi$، فإن $z + \bar{z} = a + bi + a - bi$ أو $2a$ و $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$ أو $a^2 + b^2$.

81. الإجابة النموذجية: بما أنه يجب أن يكون أحد الجذور عددًا حقيقيًا موجبًا، فستوجد رأس للمضلع على المحور الحقيقي الموجب ويكون المضلع متناظرًا حول المحور الحقيقي. ويعني هذا أن الجذور المركبة غير الحقيقية توجد في الأزواج المترافقة. وبما أن الجزء التخيلي لمجموع المترافقين المركبين يساوي 0، فإن الجزء التخيلي لمجموع جميع الجذور يجب أن يساوي 0.

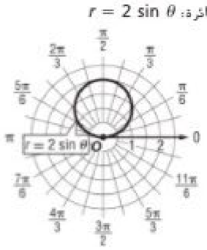
85. دائرة: $r = 6 \cos \theta$



86. قطع زائد: $r^2 = \sec 2\theta$



87. دائرة: $r = 2 \sin \theta$



100b. الإجابة النموذجية: الدالة متناظرة بالنسبة إلى المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ والمحور القطبي والقطب.

100c. الإجابة النموذجية: يشتمل التمثيل البياني على أصفار عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{8}$، $\frac{3\pi}{8}$، $\frac{5\pi}{8}$، $\frac{7\pi}{8}$، $\frac{9\pi}{8}$، $\frac{11\pi}{9}$، $\frac{13\pi}{9}$، $\frac{15\pi}{9}$، $\frac{17\pi}{9}$.

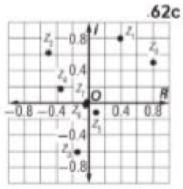
100d. الإجابة النموذجية: القيمة الصغرى لـ r هي -2، ويحدث هذا عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{5\pi}{4}$، $\frac{7\pi}{4}$.

61. $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}i) \approx 6.464 + 3.196i$;
$\sqrt{13}[\cos(-0.5880) + i \sin(-0.5880)] \cdot 2(\cos 1.0472 + i \sin 1.0472) \approx 6.464 + 3.196i$

62a. $z_1 = 0.39 + 0.8i$; $z_2 \approx -0.49 + 0.62i$; $z_3 \approx -0.14 - 0.61i$; $z_4 \approx -0.35 + 0.17i$, $z_5 \approx 0.09 - 0.12i$, $z_6 \approx -0.006 - 0.022i$, $z_7 \approx -0.0004 + 0.0003i$

62b. الإجابة النموذجية: z_{100} ستقع قريبًا جدًا من نقطة الأصل. ومع كل تكرار لـ $f(z) = z^2$، ستقترب نقاط التكرار من نقطة الأصل.

62c.



67. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i$

68. $5, -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i, -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

69. $2.77 + 1.15i, -1.15 + 2.77i, -2.77 - 1.15i, 1.15 - 2.77i$

70. $4, 1.24 + 3.80i, -3.24 + 2.35i, -3.24 - 2.35i, 1.24 - 3.80i$

71. $0.79 + 0.79i, -1.08 + 0.29i, 0.29 - 1.08i$

72. $0.21 + 1.07i, -1.07 + 0.21i, -0.21 - 1.07i, 1.07 - 0.21i$

75. $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right), 3\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right), 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right); 27i$

76. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right), 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right); -16$

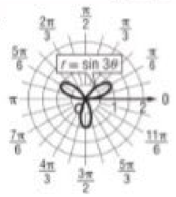
77. المعطيات: $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$:
برهن أن:

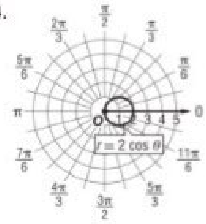
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

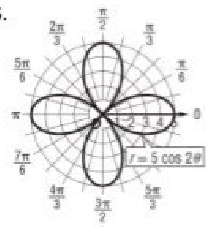
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \cos \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2}\right)$

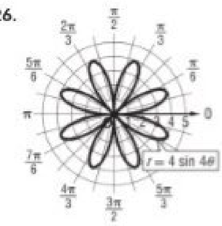
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2}\right)$

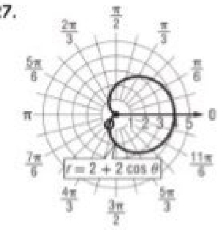
$= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$

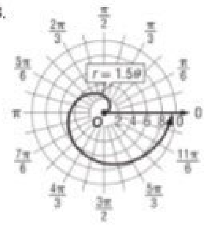
23.


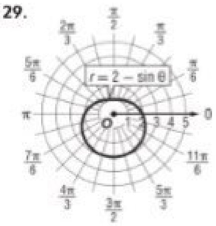
24.


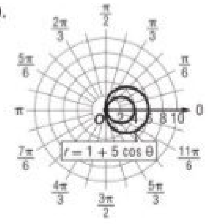
25.


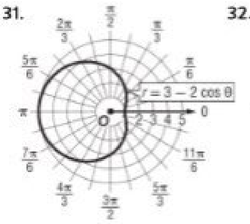
26.


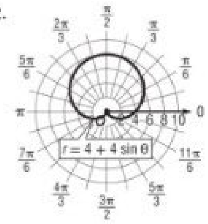
27.


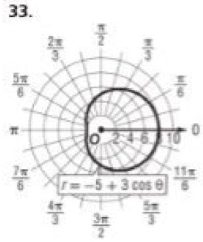
28.


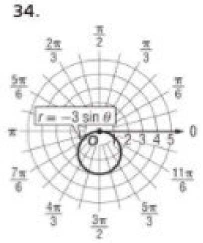
29.


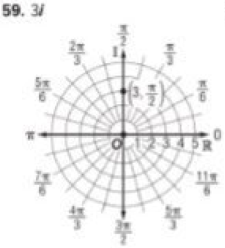
30.


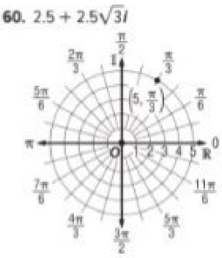
31.


32.


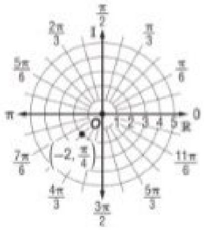
33.


34.


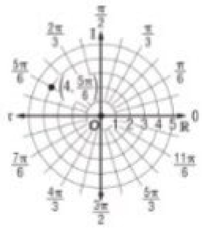
59. $3i$


60. $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$


61. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

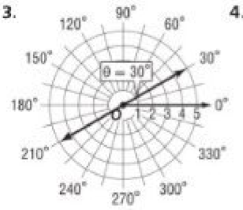


62. $-2\sqrt{3}+2i$

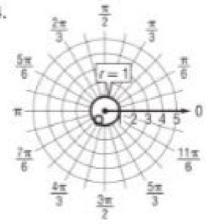


الصفحة 563. تدريب على الاختبار

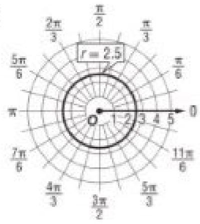
3.



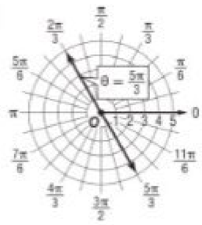
4.



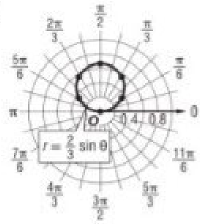
5.



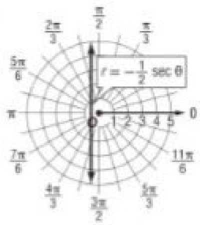
6.



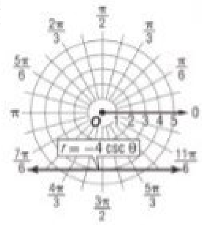
7.



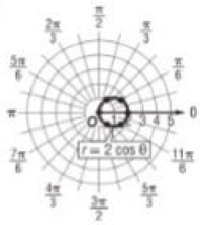
8.



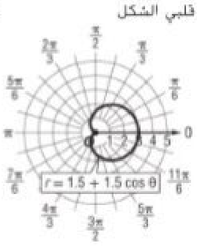
9.



10.



11. قلبي الشكل



12. منحنى ذو عروتين