الوحدة 9 المتتاليات والمتسلسلات

السابق

في **السابق**، قمت بتمثيل البيانات مستخدمًا مختلف أنواع الدوال.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- ربط المتتاليات والدوال.
- تمثيل وحساب مجموع المتسلسلة ذات الرمز سيجما.
- استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.
- تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدّين.

لماذا؟ ▲

الفرقة الموسيقية يمكن استخدام المتتاليات والمتسلسلات في توقع الأنماط. فيمكن مثلاً استخدام المتتاليات الحسابية في تحديد عدد أفراد الفرقة الموسيقية في صف معين في التشكيل الهرمي.

القراءة المسبقة استخدم النص الموجود في هذه الصفحة لتوقع تنظيم الوحدة 9.

راجع عمل الطلاب

شجّع الطلاب على بدء دراستهم للوحدة بقراءة كل درس مسبقًا. ينبغي عليهم التفكير في خلفيتهم المعرفية وعمل توقعات عن المحتوى. أعطِ وقتًا للمجموعات لمناقشة ما يقرأونه وطرح الأسئلة. أبرز سمات النص مثل عناوين الأقسام ومربعات "المفهوم الأساسي" و"ملخص المفهوم".

مشروع الوحدة

حان وقت الاستراحة!

يستخدم الطلاب ما تعلموه حول المتتاليات الحسابية لوصف وإنشاء الأنماط الموجودة في تكوينات الفرق الاستعراضية.

- اجمع، أو اطلب من الطلاب جمع، صورًا جوية لتشكيلات فرق استعراضية مختلفة. تفحص الصور مع الصف الدراسي وناقش الأنماط الموجودة. اذكر أي أنماط يمكن أن تمثل متتالية حسابية.
- اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لتصميم رسم لتشكيل فرق استعراضية يوضح متتالية حسابية. ويجب على كل مجموعة ثنائية كتابة الصيغ لتمثيل المتتاليات.
- اطلب من الطلاب مشاركة الأنماط التي صمموها وتحديد الأنماط التي تمثل متتالية حسابية للصف الدراسي. وينبغي أن يوضحوا رياضيات المتسلسلة.
- بمجرد أن يشارك الطلاب أنماطهم، ناقش أي أنماط عامة توجد بين الأنماط المتنوعة المقدمة.
- ناقش الأماكن الأخرى في الحياة اليومية التي توجد فيها أنماط تمثل متتالية حسابية.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: المتتالية الحسابية هي متتالية يكون فيها الاختلاف بين الحدود المتتالية ثابتًا.

مثال: المتتالية ... ,11 ,7 ,3 ,1− هي متتالية حسابية يساوي الفرق المشترك فيها 4.

اسأل: هل ... ,1− ,0 ,1 ,3 ,5 متتالية حسابية؟ فسّر إجابتك. لا، حيث لا يتساوي الفرق بين كل زوجين من الحدود المتتالية.

الدرس 9-1 المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما

السابق	الحالي	لماذا؟
• استخدمت الدوال في الحصول على أزواج مرتبة واستخدمت التمثيل البياني في تحليل السلوك الطرفي.	1 استكشاف عدة أنواع مختلفة من المتتاليات. 2 استخدام الرمز سيجما في تمثيل مجموع المتسلسلات وحسابها.	• قامت وفاء بتطوير موقع إلكتروني يمكن أن ينشر عليه طلاب مدرستها الثانوية صفحات التواصل الاجتماعي الخاصة بهم. وسيحصل طالب المدرسة الثانوية على صفحة مجانية إذا أحال خمسة من أصدقائه لاستخدام هذا الموقع الإلكتروني. يبدأ الموقع الإلكتروني بصفحة واحدة أنشأتها وفاء، والتي بدورها أحالت خمسًا من صديقاتها وأنشئت كل واحدة منهن صفحة خاصة بها. ثم أحالت كل واحدة من تلك الصديقات الخمس خمسة أشخاص آخرين للموقع، وقام كل منهم بإنشاء صفحة، وهكذا.

1 المتتاليات

في الرياضيات، **المتتالية** عبارة عن مجموعة من الأعداد المرتبة ترتيبًا معينًا ويُعرف كل عدد في المتتالية باسم **الحد**. تشتمل **المتتالية المنتهية**، مثل 11 ,9 ,7 ,5 ,3 ,1، على عدد منتهٍ من الحدود. وتشتمل **المتتالية اللانهائية**، مثل ... ,7 ,5 ,3 ,1، على عدد غير منتهٍ من الحدود.

كل حد في المتتالية عبارة عن دالة خاصة بموقعها. ومن ثم، فإن المتتالية اللانهائية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ويمكن كتابتها بالشكل التالي $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$ حيث تشير a_n إلى الحد النوني. وإذا كان مجال الدالة هو الأعداد الطبيعية n الأولى فقط، فستكون المتتالية منتهية.

ويوجد عدد لا نهائي من المتتاليات التي لها نفس الحدود القليلة الأولى. ولتعريف متتالية بأنها وحيدة بدرجة كافية، يجب وضع صيغة للحد النوني أو يجب تقديم معلومات أخرى. وعند تعريفها بوضوح، تُعطي **الصيغة الصريحة** الحد النوني a_n في صورة دالة n.

مثال 1 إيجاد حدود المتتاليات

a. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية ... ,17 ,12 ,7 ,2.

الحد النوني لهذه المتتالية ليس معلومًا. ومن الأنماط المحتملة هنا أن يزيد كل حد بمقدار 5 عن الحد السابق له. ومن ثم، فالإجابة النموذجية للحدود الأربعة التالية هي 22 و27 و 32 و 37.

b. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية ... ,17 ,10 ,5 ,2.

الحد النوني لهذه المتتالية ليس معلومًا. إذا طرحنا كل حد من الحد الذي يليه، فسنبدأ في رؤية النمط المحتمل.

$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ $\quad$ $a_3 - a_2 = 10 - 5 = 5$ $\quad$ $a_4 - a_3 = 17 - 10 = 7$

من الواضح أن كل حد ينتج عن جمع العدد الفردي المتسلسل التالي. ولكن، عند النظر إلى النمط، فقد يتحدد أيضًا أن كل حد يزيد بمقدار 1 عن كل مربع مثالي، أو $a_n = n^2 + 1$. وباستخدام أيٍ من النمطين، فالإجابة النموذجية للحدود الأربعة التالية هي 26 و 37 و 50 و 65.

c. أوجد الحدود الأربعة الأولى للمتتالية الناتجة عن $a_n = 2n(-1)^n$.

استخدم الصيغة الصريحة في إيجاد a_n في $n = 1$ و 2 و 3 و 4.

$a_1 = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -2$ $\quad n = 1$ $\qquad$ $a_2 = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 = 4$ $\quad n = 2$

$a_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-1)^3 = -6$ $\quad n = 3$ $\qquad$ $a_4 = 2 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 8$ $\quad n = 4$

الحدود الأربعة الأولى في المتتالية هي 2− و 4 و 6− و 8.

تمرين موجّه

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية. **1A–1B. تُقدم نماذج لبعض الإجابات.**

1A. 32, 16, 8, 4, ... $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

1B. 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ... 29, 37, 46, 56

1C. أوجد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية الناتجة عن $a_n = n^3 - 10$. **−9, −2, 17, 54**

المفردات الجديدة

متتالية sequence
حد term
متتالية منتهية finite sequence
متتالية لانهائية infinite sequence
متتالية تكرارية (ضمنية) recursive sequence
متتالية صريحة explicit sequence
متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
تقاربية converge
تباعدية diverge
متسلسلة series
متسلسلة منتهية finite series
المجموع الجزئي للحد النوني nth partial sum
متسلسلة لانهائية infinite series
الرمز سيجما sigma notation

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-1 استخدام الدوال في الحصول على أزواج مرتبة واستخدام التمثيل البياني في تحليل السلوك الطرفي.

الدرس 9-1 استكشاف الأنواع المختلفة للمتتاليات. واستخدم رمز سيجما لتمثيل وحساب مجموع المتسلسلات.

بعد الدرس 9-1 استكشاف المتتاليات الحسابية الهندسية وتحليلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا كنت ستمثل هذه العلاقة بيانيًا، فما نوع الدالة التي ستمثلها العلاقة؟ أسية
- إذا كانت كل إحالة تمثل جولة، فكم موقعًا إلكترونيًا تم إنشاؤه بعد كل جولة من الجولات الأربع الأولى؟ 1, 5, 25, 125

يمكن أيضًا تعريف المتتالية بالتكرار. تنتج المتتاليات المعرفة بالتكرار حدًا واحدًا أو أكثر من الحدود القليلة الأولى، ثم تُعرّف الحدود التالية باستخدام تلك الحدود السابقة. تُسمى الصيغة التي تعرف الحد النوني في المتتالية باسم **الصيغة التكرارية أو الصيغة الضمنية** أو علاقة التكرار.

مثال 2 المتتالية المُعرفة بالتكرار

أوجد الحد الخامس في المتتالية المُعرفة بالتكرار $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ و $a_1 = 1$، حيث $n \geq 2$.

بما أن المتتالية تُعرف بالتكرار، فيجب أولاً إيجاد جميع الحدود قبل الحد الخامس. استخدم الحد الأول المعروف، $a_1 = 2$، والصيغة التكرارية (الضمنية) لـ a_n.

$a_2 = a_{2-1} + 2(2) - 1$ $\quad n = 2$
$= a_1 + 3$ $\quad$ بسّط.
$= 2 + 3 = 5$ $\quad a_1 = 2$

$a_3 = a_{3-1} + 2(3) - 1$ $\quad n = 3$
$= a_2 + 5 = 10$ $\quad a_2 = 5$

$a_4 = a_{4-1} + 2(4) - 1$ $\quad n = 4$
$= a_3 + 7 = 17$ $\quad a_3 = 10$

$a_5 = a_{5-1} + 2(5) - 1$ $\quad n = 5$
$= a_4 + 9 = 26$ $\quad a_4 = 17$

تمرين موجّه

أوجد الحد السادس لكل متتالية حسابية.

2A. $a_1 = 3,\ a_n = (-2)a_{n-1},\ n \geq 2$ **−96** **2B.** $a_1 = 8,\ a_n = 2a_{n-1} - 7,\ n \geq 2$ **39**

نصيحة دراسية

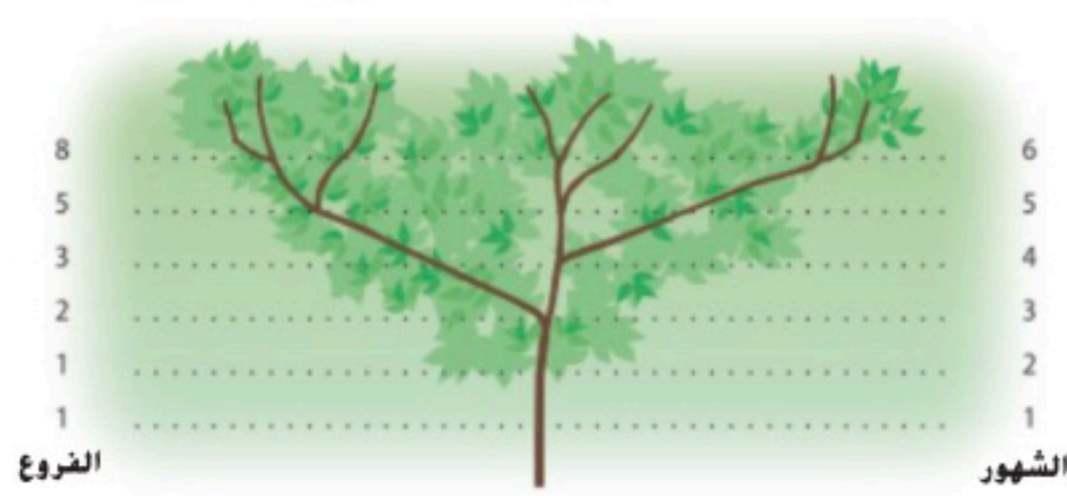
الرمز الحد المشار إليه بـ a_n يمثل الحد النوني في المتتالية. والحد المشار إليه بـ a_{n-1} يمثل الحد الواقع قبل a_n مباشرةً. يمثل الحد a_{n-2} الحد الذي يسبق a_n بحدّين.

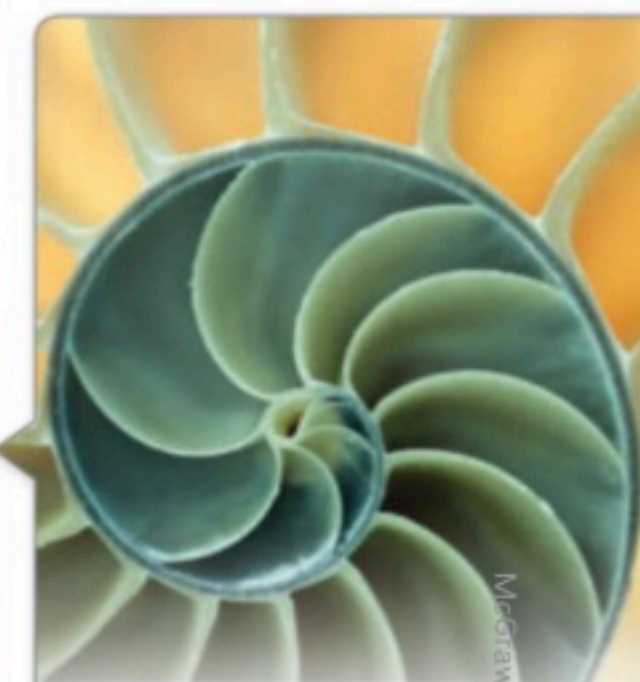
تصف **متتالية فيبوناتشي** العديد من الأنماط الموجودة في الطبيعة، وغالبًا ما تُعرف بالتكرار.

مثال 3 من الحياة اليومية متتالية فيبوناتشي

الطبيعة على فرض أنه عندما بدأ النبات في النمو، ينبغي أن ينمو الجذر أولاً لمدة شهرين ليصبح قويًا بما يكفي لحمل الفروع. نبت فرع جديد في نهاية الشهر الثاني وسينبت فرع جديد كل شهر. ثم ينمو كل فرع من الفروع الجديدة لمدة شهرين ثم ينبت فرع جديد مع كل شهر. إذا استمر هذا النمط، فكم فرعًا سيكون في النبات بعد 10 شهور؟

سيكون هناك فرع واحد فقط والجذر خلال الشهرين الأولين. وفي نهاية الشهر الثاني، سينبت فرع جديد من الجذر. وبهذا يكون الإجمالي فرعين في الشهر الثالث. سينمو الفرع الجديد لمدة شهرين قبل أن ينبت منه فرع جديد، ولكن سينبت فرع جديد في كل شهر من الفرع الأصلي.





الربط بالحياة اليومية

توجد متتالية فيبوناتشي في بتلات الزهور وقواقع البحر والعظام في يد الإنسان، وتوجد أيضًا في القطع الفنية والموسيقى والشعر والمعمار.

المصدر: *Universal Principles of Design*

- باستخدام الانحدار الأسي، ما الدالة التي تمثل العلاقة؟ $f(x) = 5^{x-1}$

1 المتتاليات

المثال 1 يوضح كيفية تحليل النمط في متتالية أو استخدام المعادلة في تمثيل المتتالية لتحديد حدودها. **المثالان 2 و 3** يوضحان كيفية استخدام قواعد المتتاليات التكرارية والصريحة لتحديد حد معين في المتتالية. **المثال 4** يوضح كيفية تحديد ما إذا كانت المتتالية تباعدية أم تقاربية.

التقويم التكويني

استخدم التدريبات الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1
a. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية ‎... ,9−, 5−, 1−, 3.‎ الإجابة النموذجية: $-13, -17, -21, -25$

b. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية ‎. 18, 15, 10, 3, ...‎ $-6, -17, -30, -45$

c. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية التي يتم الحصول عليها من العلاقة $a_n = n^3 + 1$. $2, 9, 28, 65$

2 أوجد الحد الرابع في المتتالية المُعرفة بالتكرار $a_1 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} - n + 2$، حيث $n \geq 2$. 76

المتابعة

انتهى الطلاب من استكشاف المتتاليات.

اطرح السؤال التالي:

- ما أنواع الأنماط التي يمكن تمثيلها بالنماذج رياضيًا؟ الإجابة النموذجية: الأنماط العددية التي تشتمل على عمليات بأعداد حقيقية مثل الجمع والضرب

أمثلة إضافية

3 **الطبيعة** افترض أن ساقًا تحتاج للنمو لمدة شهرين قبل أن تصبح قادرة على دعم الأفرع. وفي نهاية الشهر الثاني، نبت منها فرع جديد واستمرت في إنبات فرع جديد كل شهر. وتنمو الأفرع الجديدة بشكل متماثل. كم عدد الأفرع التي سيحتوي عليها النبات بعد 18 شهرًا إذا لم يتم إزالة أي أفرع؟ **2584 فرعًا**

4 حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

a. $a_n = -4000\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ تقاربية

b. $a_n = \frac{(-2)^n}{2}$ تباعدية

c. $a_n = \frac{(0.1)^n \cdot n}{2n-1}$ تقاربية

التركيز على محتوى الرياضيات

متتالية فيبوناتشي تعتبر متتالية فيبوناتشي متتالية شهيرة يكون فيها كل حد يساوي مجموع الحدين السابقين له. وبالتالي، فهي متتالية معرفة تكراريًا فيها $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$، وحيث $n \geq 2$.

انتبه!

الرمز يُرمز للحد الأول في المتتالية أحيانًا بالرمز a_0. وعندما يحدث ذلك، فإن مجال الدالة الذي يصف المتتالية هو مجموعة الأعداد الكلية.

يبين الجدول التالي النمط.

الشهر	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
الفروع	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1

كل حد هو مجموع الحدّين السابقين. ويمكن كتابة هذا النمط في صورة صيغة تكرارية (ضمنية) $a_0 = 1, a_1 = 1$ و $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$، حيث $n \geq 2$.

تمرين موجّه

3. **الطبيعة** كم فرعًا سيكون في نبات مثل ذلك المذكور في المثال 3 بعد مرور 15 شهرًا إذا لم تتم إزالة أية فروع؟ **610**

في السابق لقد استكشفت في درس سابق، السلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال. وتعلمت أنه عندما يقترب مجال بعض الدوال من ∞، فإن المدى يقترب من عدد وحيد يُسمى النهاية. ومثل الدالة، يمكن أن يكون للمتتالية اللانهائية نهاية. وإذا كان للمتتالية نهاية بحيث تقترب الحدود من عدد وحيد، فستوصف المتتالية بأنها **تقاربية**. وإذا لم تكن كذلك، فستوصف المتتالية بأنها **تباعدية**.

تلميح تقني

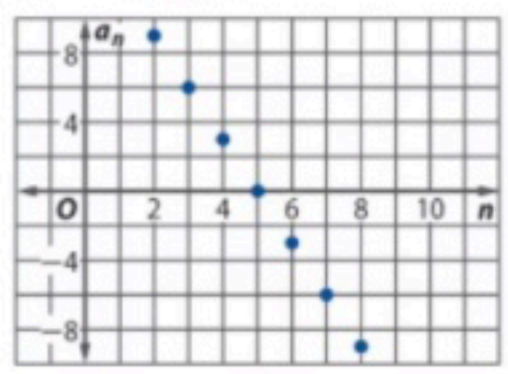
متتالية تقاربية أم تباعدية

إذا كانت الصيغة الصريحة للمتتالية معلومة، يمكنك إدخال الصيغة في قائمة =Y في حاسبة التمثيل البياني وتمثيل الدالة المرتبطة بذلك بيانيا. ويمكن أن يساعدك تحليل السلوك الطرفي في تحديد ما إذا كانت المتتالية تباعدية أم تقاربية.

مثال 4 المتتاليات التقاربية والتباعدية

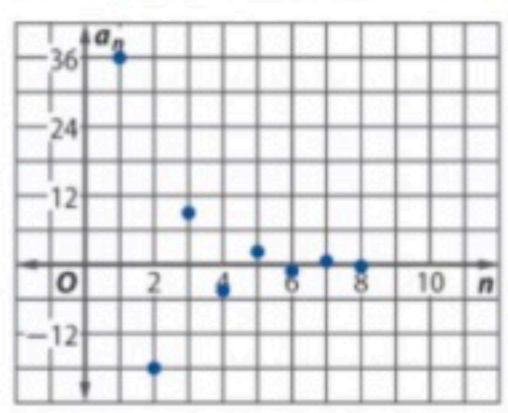
حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

a. $a_n = -3n + 12$



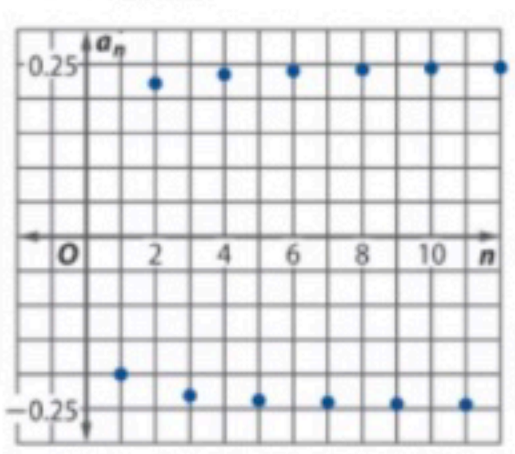
الحدود الثمانية الأولى في هذه المتتالية هي 12 و 9 و 6 و 3 و 0 و 3− و 6− و 9−. يمكنك أن ترى في التمثيل البياني الموضح يسارًا أن a_n لا تقترب من ∞. ومن ثم، فهذه المتتالية تباعدية.

b. $a_1 = 36, a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}, a \geq 2$



الحدود الثمانية الأولى في هذه المتتالية هي 36 و 18− و 9 و 4.5− و 2.25 و 1.125− و 0.5625، و 0.28125− و 0.140625. يمكنك أن ترى في التمثيل البياني الموضح يسارًا أن a_n تقترب من 0 مع زيادة n. فهذه المتتالية لها نهاية، ومن ثم فهي متتالية تقاربية.

c. $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{4n+1}$



فيما يلي الحدود الاثنا عشرة الأولى في هذه المتتالية، أو تقدير لها.

$a_1 = -0.2$ $\quad$ $a_2 \approx 0.222$

$a_3 \approx -0.231$ $\quad$ $a_4 \approx 0.235$

$a_5 \approx -0.238$ $\quad$ $a_6 = 0.24$

$a_7 \approx -0.241$ $\quad$ $a_8 \approx 0.242$

$a_9 \approx -0.243$ $\quad$ $a_{10} \approx 0.244$

$a_{11} \approx -0.244$ $\quad$ $a_{12} \approx 0.245$

يبدو أنه عندما تكون n عددًا فرديًا، فإن a_n يقترب من $-\frac{1}{4}$. وعندما يكون n عددًا زوجيًا، فإن a_n يقترب من $\frac{1}{4}$. بما أن a_n لا يقترب من قيمة معينة، فإن المتتالية بلا نهاية. ومن ثم، فالمتتالية متتالية تباعدية.

تمرين موجّه

4A. $a_n = \frac{64}{2n}$ **تقاربية**

4B. $a_1 = 9, a_n = a_{n-1} + 4$ **تباعدية**

4C. $a_n = 3(-1)^n$ **تباعدية**

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب العمل في مجموعات لوضع متتاليات متنوعة. ويذكر الطالب الأول العدد الأول في المتتالية، بينما يجمع الطالب الثاني الفرق المشترك أو يضرب في النسبة المشتركة. اقترح أن يجربوا استخدام أعداد موجبة أو سالبة وكسور موجبة وسالبة كفرق مشترك أو نسبة مشتركة. وينبغي أن يناقشوا أي المتتاليات تباعدية وأيها تقاربية.

2 المتسلسلات

المثال 5 يوضح كيفية إيجاد المجموع الجزئي لمتسلسلة. **المثال 6** يوضح كيفية استخدام رمز سيجما لإيجاد مجموع المتسلسلة.

مثال إضافي

5 **a.** أوجد المجموع الجزئي الخامس لـ $a_n = n^2 - 3$. **40**

b. S_4 of $a_n = \frac{6}{2^n}$. **$\frac{45}{8}$ أو 5.625**

2 المتسلسلة

المتسلسلة هي مجموع جميع حدود المتتالية. وكالمتتالية، يمكن أن تكون المتسلسلة منتهية أو لانهائية. **المتسلسلة المنتهية** هي مجموع جميع حدود المتتالية المنتهية. بينما **المتسلسلة اللانهائية** هي مجموع جميع حدود المتتالية اللانهائية.

	متتالية	متسلسلة
منتهية	1, 3, 5, 7, 9	1 + 3 + 5 + 7 + 9
لانهائية	1, 3, 5, 7, 9, ...	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...

يُسمى مجموع الحدود النونية الأولى في المتسلسلة بالمجموع الجزئي **النوني** ويُرمز إليه بـ S_n. ويمكن إيجاد المجموع الجزئي النوني لأي متسلسلة بحساب كل حد وصولاً إلى الحد النوني، ثم إيجاد مجموع تلك الحدود.

مثال 5 المجموع الجزئي للحد النوني

a. أوجد المجموع الجزئي الرابع لـ $a_n = (-2)^n + 3$.

أوجد الحدود الأربعة التالية.

$a_1 = (-2)^1 + 3 = 1$ $\quad n = 1$

$a_2 = (-2)^2 + 3 = 7$ $\quad n = 2$

$a_3 = (-2)^3 + 3 = -5$ $\quad n = 3$

$a_4 = (-2)^4 + 3 = 19$ $\quad n = 4$

المجموع الجزئي الرابع $S_4 = 1 + 7 + (-5) + 19 = 22$.

b. أوجد S_3 لـ $a_n = \frac{4}{10^n}$.

أوجد الحدود الثلاثة الأولى.

$a_1 = \frac{4}{10^1} = 0.4$ $\quad n = 1$

$a_2 = \frac{4}{10^2} = 0.04$ $\quad n = 2$

$a_3 = \frac{4}{10^3} = 0.004$ $\quad n = 3$

المجموع الجزئي الثالث يساوي $S_3 = 0.4 + 0.04 + 0.004 = 0.444$.

تمرين موجّه

5A. أوجد المجموع الجزئي السادس لـ $a_n = 0.5(a_{n-1})$ و $a_1 = 8$، حيث $n \geq 2$. **15.75**

5B. أوجد المجموع الجزئي السابع لـ $a_n = 3\left(\frac{1}{10}\right)^n$. **0.3333333**

بما أن المتسلسلة اللانهائية ليس لها عدد نهائي من الحدود، فقد تفترض أن المتسلسلة اللانهائية ليس لها مجموع S. وهذا صحيح بالنسبة للمتسلسلة الموضحة أدناه.

متتالية لانهائية	متسلسلة لانهائية	متتالية المجاميع الجزئية الأربعة الأولى
1, 4, 7, 10, ...	1 + 4 + 7 + 10 + ...	1, 5, 12, 22, ...

لكن بعض المتسلسلات اللانهائية لها مجاميع. وليكون للمتسلسلة اللانهائية مجموع محدد S، يجب أن تقترب المتتالية اللانهائية المرتبطة بتلك المتسلسلة من 0. ولاحظ أنه يبدو أن متتالية المجاميع الجزئة في المتسلسلة اللانهائية الموضحة أدناه تقترب من مجموع $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$.

متتالية لانهائية	متسلسلة لانهائية	متتالية المجاميع الجزئية الأربعة الأولى
0.1, 0.01, 0.001, ...	0.1 + 0.01 + 0.001 + ...	0.1, 0.11, 0.111, ...

سننظر عن كثب إلى مجاميع المتتاليات اللانهائية في الدرس 3-9.

نصيحة دراسية

المتتاليات اللانهائية التقاربية

في حين أنه ينبغي أن تقترب المتتالية اللانهائية من 0 ليكون للمتسلسلة اللانهائية المرتبطة بها مجموع، فإن هذا ليس كافيًا. فبعض المتتاليات اللانهائية تقترب من 0 وتظل المتسلسلات اللانهائية المرتبطة بها بلا مجاميع.

يتم غالبًا ترميز المتسلسلات باستخدام الحرف اليوناني الكبير سيجما Σ. ومن المعروف أن المتسلسلة المكتوبة باستخدام هذا الحرف يمكن التعبير عنها باستخدام رمز المجموع أو **الرمز سيجما**.

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

في أي متتالية ...a_1, a_2, a_3, a_4، يرمز لمجموع الحدود k الأولى بـ

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

حيث n هي مؤشر المجموع، و k هي الحد العلوي للمجموع و 1 هو الحد السفلي للمجموع.

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما $\sum_{n=1}^{k} a_n$ يُقرأ *المجموع من $n = 1$ إلى k من a إلى n.*

يشير الحد السفلي في هذا الرمز إلى موقع بدء تجميع حدود المتتالية، ويشير الحد العلوي إلى موقع انتهاء المجموع. وإذا أعطي الحد العلوي بالشكل ∞، فإن الرمز سيجما يمثل متسلسلة لانهائية.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

مثال 6 المجموع في الرمز سيجما

أوجد مجموع كل مما يلي.

a. $\sum_{n=1}^{5} (4n - 3)$

$$\sum_{n=1}^{5} (4n - 3) = [4(1) - 3] + [4(2) - 3] + [4(3) - 3] + [4(4) - 3] + [4(5) - 3]$$

$$= 1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$$

b. $\sum_{n=3}^{7} \frac{6n - 3}{2}$

$$\sum_{n=3}^{7} \frac{6n - 3}{2} = \frac{6(3) - 3}{2} + \frac{6(4) - 3}{2} + \frac{6(5) - 3}{2} + \frac{6(6) - 3}{2} + \frac{6(7) - 3}{2}$$

$$= 7.5 + 10.5 + 13.5 + 16.5 + 19.5 = 67.5$$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = \frac{7}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \ldots$$

$$= 0.7 + 0.07 + 0.007 + 0.0007 + 0.00007 + \ldots$$

$$= 0.77777\ldots = \frac{7}{9}$$

انتبه!

الاختلافات في الرمز سيجما

لا ينبغي بالضرورة أن يكون مؤشر المجموع الحرف n، بل يمكن تمثيله بأي متغير. على سبيل المثال، يمكن أيضًا كتابة المجموع في المثال 6a بالشكل التالي $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.

تمرين موجّه

6A. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n^2 - 1}{2}$ 25

6B. $\sum_{n=7}^{13} (n^3 - n^2)$ 7112

6C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$ $\frac{2}{3}$

لاحظ أنه في حين أنه غالبًا ما يكون الحد السفلي في المجموع يساوي 1، يمكن أن يبدأ المجموع بأي حد p في المتتالية طالما أن $p < k$. في المثال $6b$، يبدأ المجموع بالحد الثالث في المتتالية وينتهي بالحد السابع.

مثال إضافي

6 أوجد مجموع كل مما يلي.

a. $\sum_{n=1}^{4} (n^2 - n)$ 20

b. $\sum_{n=2}^{5} \frac{3n + 3}{n}$ $15\frac{17}{20}$ أو 15.85

c. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10^n}\right)$ $\frac{1}{3}$

إرشاد للمعلمين الجدد

رمز سيجما يطلق على رمز سيجما في بعض الأحيان رمز المجموع حيث إنه يمثل مجموعًا.

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي/الموسيقي اطلب من الطلاب استكشاف العلاقة بين الموسيقى والمتتاليات. وعلى وجه الخصوص، اطلب منهم بحث العلاقة بين النسب التناغمية والمتتاليات ثم تقديم ما اكتشفوه أمام الصف الدراسي.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التدريبات 45–1 للتحقق من مدى استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التدريب 17. بيّن أن هذه المتتالية ليست متتالية فيبوناتشي. ويجب إيجاد نمط مختلف للمتتالية.

خطأ شائع في التدريبات 45–36، قد ينسى الطلاب النظر في الحد الأدنى ويفترضون أنه يساوي 1.

إجابات إضافية

17a.

18. تباعدية
19. تقاربية
20. تباعدية
21. تقاربية
22. تباعدية
23. تباعدية
24. تباعدية
25. تقاربية
26. تقاربية
27. تقاربية

46b. تكرارية: $a_0 = 380$. $a_t = 1.035a_{t-1}, t \geq 1$. صريحة: $a_t = 380(1.035)^t$. حيث t هو عدد الأعوام بعد الإيداع الأولي

46c. صيغة صريحة؛ عند استخدام الصيغة التكرارية يتم التقريب في كل خطوة. أما في الصيغة الصريحة، فلا تحتاج إلى التقريب إلا في الخطوة الأخيرة.

التمارين

1-6. تُقدم نماذج لبعض الإجابات. 2. 48, −96, 192, −384

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية. (مثال 1)

1. $1, 8, 15, 22, \ldots$ 29, 36, 43, 50
2. $3, -6, 12, -24, \ldots$
3. $81, 27, 9, 3, \ldots$ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$
4. $1, 3, 7, 13, \ldots$ 21, 31, 43, 57
5. $-2, -15, -28, -41\ldots$ −54, −67, −80, −93
6. $1, 4, 10, 19, \ldots$ 31, 46, 64, 85

أوجد الحدود الأربعة الأولى في كل متتالية. (مثال 1)

7. $a_n = n^2 - 1$ 0, 3, 8, 15
8. $a_n = -2^n + 7$ 5, 3, −1, −9
9. $a_n = \frac{n+7}{9-n}$ $1, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{11}{5}$
10. $a_n = (-1)^{n+1} + n$ 2, 1, 4, 3

11. **تأجير السيارات** تتضمن عقود التأجير غالبًا بنودًا تُقيد عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة سنويًا من خلال فرض رسوم على كل كيلومتر يزيد عن هذا القيد. بالنسبة للسيارة الموضحة أدناه. يقتضي عقد التأجير أن عدد الكيلومترات المقطوعة سنويًا يجب ألا يزيد عن 15,000. (المثال 2)

a. اكتب المتتالية التي تصف أقصى عدد مسموح به من الكيلومترات مع نهاية كل 12 شهرًا من فترة تأجير السيارة إذا كانت المسافة المقطوعة عند بداية التأجير هي 1350 كيلومترًا.
350; 31,350; 46,350,16

b. اكتب الحدود الأربعة الأولى التي تعطي التكلفة التراكمية لإيجار شهر معين.

c. اكتب صيغة واضحة لتمثيل المتتالية في الجزء b.
$a_n = 1699 + 399n$

d. حدد إجمالي المبلغ المدفوع في نهاية فترة الإيجار. AED 16,063

11b. 2098, 2497, 2896, 3295

أوجد الحد المحدد لكل متتالية. (المثال 2)

12. الحد الرابع، $a_1 = 5$، $a_n = -3a_{n-1} + 10$، $n \geq 2$ −65
13. الحد السابع، $a_1 = 14$، $a_n = 0.5a_{n-1} + 3$، $n \geq 2$ 6.125
14. الحد الرابع، $a_1 = 0$، $a_n = 3^{a_{n-1}}$، $n \geq 2$ 27
15. الحد الثالث، $a_1 = 3$، $a_n = (a_{n-1})^2 - 5a_{n-1} + 4$، $n \geq 2$ 18

16. **الموقع الإلكتروني** حققت وفاء، الطالبة المذكورة في المثال من بداية الدرس، نجاحًا كبيرًا في توسعة انتشار موقعها الإلكتروني. فقد قام كل طالب تسلم إحالة بتطوير صفحة ويب وإحالة خمسة طلاب آخرين إلى الموقع الإلكتروني الذي تملكه وفاء. (المثال 3)

a. اذكر الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي تمثل عدد صفحات الويب الجديدة التي أنشئت من خلال الموقع الإلكتروني الذي تملكه وفاء.
1, 5, 25, 125, 625

b. على فرض أن المدرسة بها 1576 طالبًا، فبعد كم دورة من الإحالات سيكون لجميع الطلاب صفحة ويب على الموقع الإلكتروني؟ 5

17. **النحل** تأتي أنثى النحل من بيضة مخصبة (من ذكر وأنثى)، بينما يأتي ذكر النحل من بيضة غير مخصبة (من ذكر فقط). (المثال 3)

a. ارسم شجرة عائلة تبين الأجيال الثلاثة السابقة لذكر النحل (الآباء فقط). انظر الهامش.

b. حدد عدد آباء النحل في الجيل الحادي عشر السابق لذكر النحل. 144

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*. (المثال 4)

18–27. انظر الهامش.

18. $a_1 = 4, 1.5a_{n-1}, n \geq 2$
19. $a_n = \frac{5}{10^n}$
20. $a_n = -n^2 - 8n + 106$
21. $a_1 = -64, \frac{3}{4}a_{n-1}, n \geq 2$
22. $a_1 = 1, a_n = 4 - a_{n-1}, n \geq 2$
23. $a_n = n^2 - 3n + 1$
24. $a_n = \frac{n^2+4}{3+n}$
25. $a_1 = 9, a_n = \frac{a_{n-1}+3}{2}, n \geq 2$
26. $a_n = \frac{5n+6}{n}$
27. $a_n = \frac{5n}{5^n} + 1$

أوجد المجموع المحدّد لكل متتالية . (المثال 5)

28. المجموع الجزئي الخامس لـ $a_n = n(n-4)(n-3)$ 20
29. المجموع الجزئي السادس لـ $a_n = \frac{-5n+3}{n}$ −22.65
30. S_8 من $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + (18 - n), n \geq 2$ 428
31. S_4 من $a_1 = 64, a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1}, n \geq 2$ 25
32. المجموع الجزئي الحادي عشر لـ $a_1 = 4, a_n = (-1)^{n-1}(|a_{n-1}| + 3), n \geq 2$ 19
33. S_9 من $a_1 = -35, a_n = a_{n-1} + 8, n \geq 2$ −27
34. المجموع الجزئي الرابع لـ $a_1 = 3, a_n = (a_{n-1} - 2)^3, n \geq 2$ −24
35. S_4 من $a_n = \frac{(-3)^n}{10}$ 6

أوجد مجموع كل مما يلي.. (المثال 6).

36. $\sum_{n=1}^{8} (6n - 11)$ 128
37. $\sum_{n=4}^{11} (30 - 4n)$ 0
38. $\sum_{n=1}^{7} [n^2(n-5)]$ 84
39. $\sum_{n=2}^{7} (n^2 - 6n + 1)$ −17
40. $\sum_{n=8}^{15} \left(\frac{n}{4} - 7\right)$ −33
41. $\sum_{n=1}^{10} [(n-4)^2(n-5)]$ 300
42. $\sum_{n=0}^{6} [(-2)^n - 9]$ −20
43. $\sum_{n=1}^{3} 7\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}$ $\frac{70,707}{1,000,000}$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{10^n}\right)$ $\frac{5}{9}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10^n}$ $\frac{8}{9}$

46a. AED 393.30, AED 407.07, AED 421.31, AED 436.06, AED 451.32

46. **المعرفة المالية** مبلغ الإيداع الأولي لحساب مازن المصرفي قيمته 380 AED، ويحقق فائدة سنوية نسبتها 3.5%، وهذه نسبة مركبة سنويًا. B

b–c. انظر الهامش.

a. أوجد قيمة الرصيد كل عام على مدار السنوات الخمس الأولى.

b. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) وصيغة صريحة لتحديد رصيد الحساب.

c. بالنسبة لقيم n الكبيرة جدًا، أي صيغة تعطي قيمة دقيقة للرصيد؟ فسّر.

47. **الاستثمار** تستثمر هيام AED 200 كل 3 شهور. يدفع مشروعها الاستثماري نسبة مئوية 8% سنويًا. وهي فائدة مركبة فصلية. إذا دفعت هيام مع بداية كل فصل ويتم الإعلان عن الفائدة مع نهاية الفصل. فكم سيكون إجمالي قيمة الاستثمار بعد سنتين؟ **AED 1750.93**

48. **الملاهي** يبين الجدول عدد ركاب قطار الملاهي الخشبي سنويًا من عام 1998 إلى عام 2007. يمكن تقريب بيانات ركوب القطار باستخدام $a_n = -\frac{1}{20}n + 1.3$. حيث $n = 1$ تمثل عام 1998 و $n = 2$ تمثل عام 1999. وهكذا.

قطار الملاهي الخشبي			
العام	**عدد الركاب (بالمليون)**	**العام**	**عدد الركاب (بالمليون)**
1998	1.31	2003	0.99
1999	1.15	2004	0.95
2000	1.14	2005	0.89
2001	1.09	2006	0.81
2002	1.05	2007	0.82

المصدر: *Cedar Fair Entertainment Company*

a–b. انظر الهامش.

a. صمم تمثيلاً بيانيا لعدد الركاب من عام 1998 إلى عام 2007. وحدد بعدئذٍ ما إذا كانت المتتالية تبدو تقاربية أم تباعدية. هل هذا مفيد في سياق هذا الموقف؟ فسّر الاستنتاج.

b. استخدم الجدول في إيجاد إجمالي عدد الركاب من عام 1998 إلى عام 2005. واستخدم بعدئذٍ المتتالية الواضحة في إيجاد المجموع الجزئي الثامن لـ a_n. قارن بين النتائج.

c. إذا استمرت المتتالية، فأوجد قيمة a_{14}. ماذا يمثل هذا العدد؟
0.6 مليون، عدد الركاب في 2011

انسخ الجدول وأكمله.

	صيغة تكرارية	المتتالية	صيغة صريحة
49.		6, 8, 10, 12, ...	
50.	$a_1 = 15,\ a_n = a_{n-1} - 1,\ n \ge 2$		
51.		7, 21, 63, 189, ...	
52.			$a_n = 10(-2)^n$
53.			$a_n = 8n - 3$
54.	$a_1 = 2,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \ge 2$		
55.	$a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ n \ge 2$		
56.			$a_n = n^2 + 1$

49–56. انظر الهامش.

اكتب كل متسلسلة بالرمز سيجما، وستجد الحد السفلي مذكورًا.

57. $-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5;\ n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{8}(n-3)$

58. $\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{40} + \frac{1}{45};\ n = 4$ $\quad \sum_{n=4}^{9}\frac{1}{5n}$

59. $8 + 27 + 64 + \cdots + 1000;\ n = 2$ $\quad \sum_{n=2}^{10} n^3$

60. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{128};\ n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{7}\frac{1}{2^n}$

61. $-8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - 512;\ n = 3$ $\quad \sum_{n=3}^{9}(-2)^n$

62. $8\left(-\frac{1}{3}\right) + 8\left(\frac{1}{9}\right) + 8\left(-\frac{1}{27}\right) + \cdots + 8\left(-\frac{1}{243}\right);\ n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{5}8\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

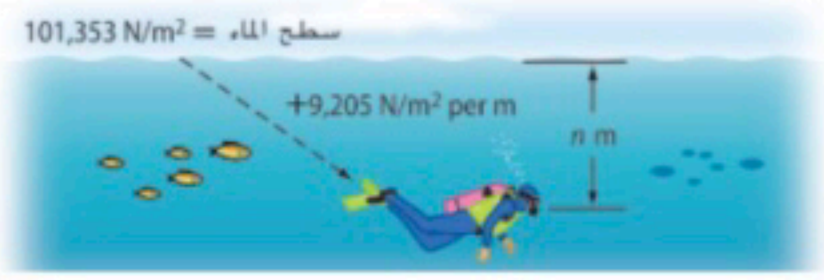
حدد هل كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*. وأوجد بعدئذٍ المجموع الجزئي الخامس للمتتالية.

63. $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ **تباعدية؛ 1**

64. $a_n = n\cos\pi$ **تباعدية؛ −15**

65. $a_n = e^{-\frac{n}{2}}\cos\pi n$ **تقاربية؛ ≈−0.4**

66. **ضغط الماء** يبلغ الضغط الواقع على جسد الإنسان على سطح البحر 101,353 نيوتن/متر مربع (N/m^2). ويزيد الضغط بمقدار $9,205\ N/m^2$ تقريبًا عن كل متر إضافي تحت سطح الماء، مثلما هو موضح.
a-b. انظر الهامش.

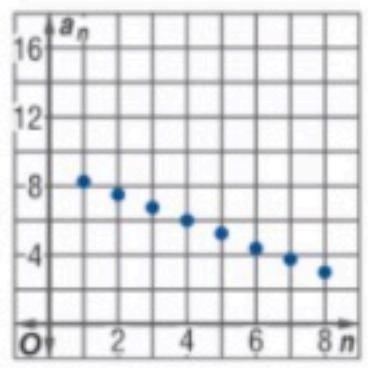


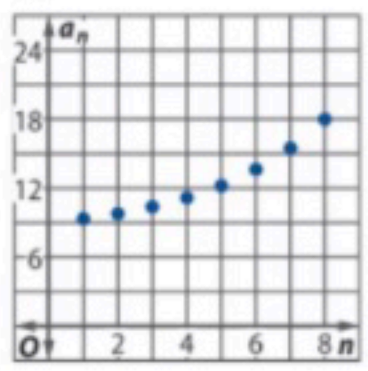
a. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لتمثيل a_n، الضغط عند n متر تحت سطح البحر. (تلميح: افترض أن $a_0 = 14.7$.)

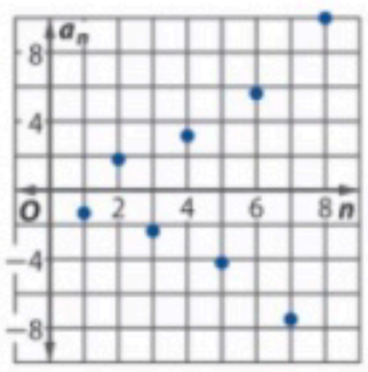
b. اكتب الحدود الثلاثة الأولى في المتتالية وصف ما تمثله.

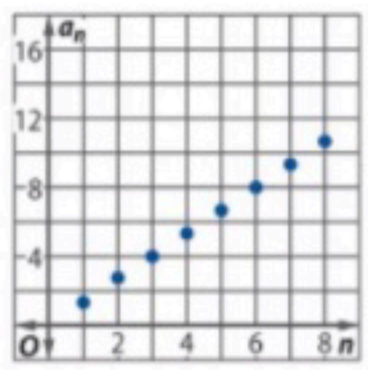
c. لا يستطيع الغطاسون الغطس لمسافة أعمق من 100 متر. اكتب صيغة واضحة تمثل a_n. واستخدم الصيغة بعدئذٍ في إيجاد ضغط الماء عند 100 متر تحت سطح الماء.
$a_n = 9{,}205n + 101{,}353$; 408,170 N/m²

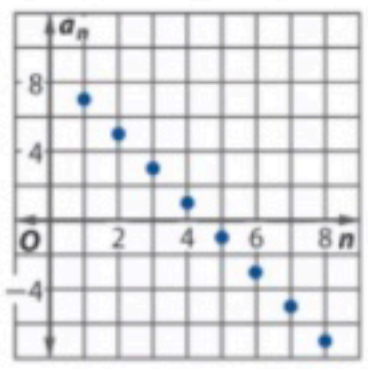
صل كل متتالية بتمثيلها البياني.

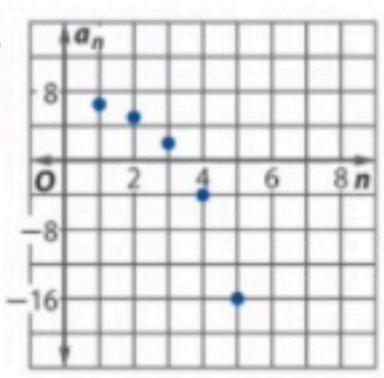
67. **b**


68. **f**


69. **c**


70. **a**


71. **e**


72. **d**


a. $a_n = \frac{4}{3}n$

b. $a_n = -\frac{3}{4}n + 9$

c. $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

d. $a_n = 8 - \frac{3}{4}(2^n)$

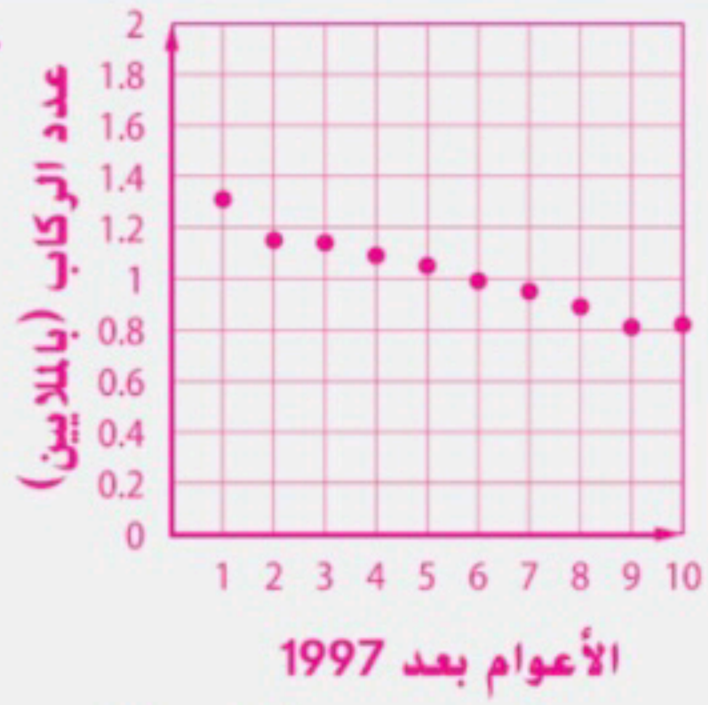
e. $a_n = 9 - 2n$

f. $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n + 8$

انتبه!

خطأ شائع في التدريبات 49–56. تأكد من أن يُدخل الطلاب معلمة n كأن يكون العدد الأصغر لا يقل عن العدد الأول في المتتالية عند كتابة الصيغة الصريحة.

إجابات إضافية

48a.


تباعدية؛ يبدو أن المتتالية تستمر في التناقص. ولا يمكنها أن تتناقص للأبد، حيث لا يمكن أن يقل عدد الركاب عن 0.

48b. 8.57 ملايين؛ 8.6 ملايين؛ وهما متساويان تقريبًا.

49. الإجابة النموذجية: $a_1 = 6$. $a_n = a_{n-1} + 2$. $n \ge 2$. $a_n = 2n + 4$

50. 15, 14, 13, 12, ...; $a_n = -n + 16$

51. الإجابة النموذجية: $a_1 = 7, a_n = 3a_{n-1}, n \ge 2; a_n = 7(3)^{n-1}$

52. $a_1 = -20, a_n = -2a_{n-1}, n \ge 2$; −20, 40, −80, 160...

53. $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 8, n \ge 2$; 5, 13, 21, 29, ...

54. 2, 8, 32, 128 ...; $a_n = 2(4^{n-1})$

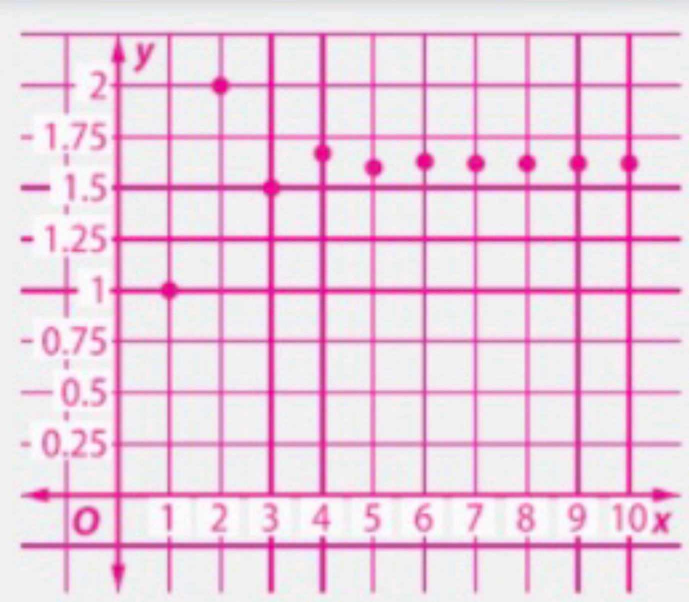
55. 3, 6, 11, 18, ...; $a_n = n^2 + 2$

56. $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2n - 1, n \ge 2$; 2, 5, 10, 17, ...

66a. $a_0 = 14.7, a_n = a_{n-1} + 0.445$

66b. 14.7, 15.145, 15.59؛ عند مستوى سطح البحر، يبلغ الضغط $101{,}353\ (N/m^2)$. تحت مستوى سطح البحر بمقدار متر واحد، يبلغ الضغط $104{,}421\ (N/m^2)$. تحت مستوى سطح البحر بمقدار مترين، يبلغ الضغط $107{,}489\ (N/m^2)$.

73a. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}$

73b.


73c. نعم؛ 1.618

73d. النسبتان متكافئتان في ثلاث منازل عشرية.

82a. 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5

82b. الإجابة النموذجية: كما هو الحال مع المتتاليات التكرارية الأخرى، تعتمد الحدود في هذه المتتالية على الحدود السابقة. إلا أن هذه المتتالية مختلفة حيث إن الحدود السابقة ليست بالضرورة الحدين اللذين يأتيان قبل الحد التالي مباشرة.

73. **النسبة الذهبية** بالنسبة لمتتالية فيبوناتشي $1, 1, 2, 3, \ldots, a_{n-2} + a_{n-1}$.

a-d. انظر الهامش.

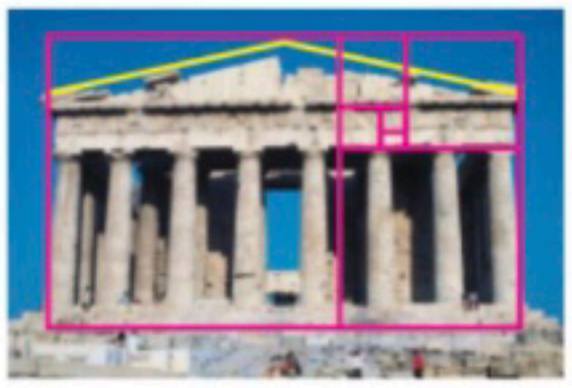
a. أوجد $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ للحد الثاني إلى الحد الحادي عشر في متتالية فيبوناتشي.

b. صمم تمثيلاً بيانيا للحدود الموجودة في الجزء a. افترض أن $n - 1$ هي الإحداثي x و $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ هي الإحداثي y.

c. اعتمادًا على التمثيل البياني الموجود في الجزء b، هل تبدو هذه المتتالية تقاربية أم لا؟ إذا كانت كذلك، فصف الحد للمنازل العشرية الثلاثة. وإذا لم تكن كذلك، ففسر السبب.

d. في مستطيل ذهبي، تبلغ نسبة الطول إلى العرض 1.61803399 تقريبًا. وهذا ما يسمى النسبة الذهبية. كيف تقارن بين حد المتتالية $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ والنسبة الذهبية؟

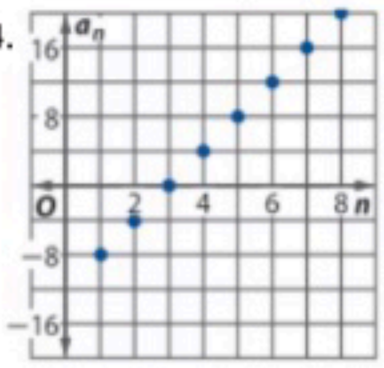
e. يشيع استخدام المستطيلات الذهبية في الفنون والمعمار. ومن أمثلة استخدام المستطيلات الذهبية في المعمار معبد بارثينون في اليونان.



ابحث عن المستطيلات الذهبية واكتشف مثالين آخرين عن استخدام المستطيلات الذهبية في الفنون والمعمار. **الإجابة النموذجية: موناليزا وتاج محل**

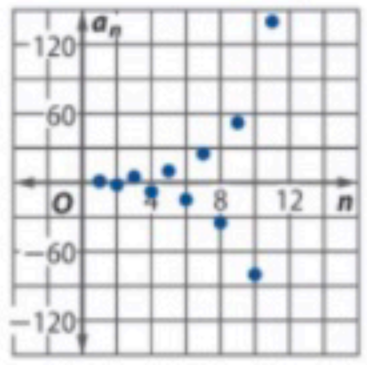
حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

74.



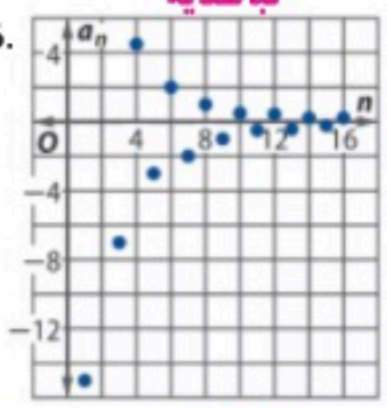
تباعدية

75.



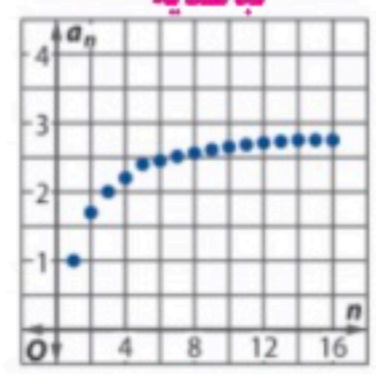
تباعدية

76.



تقاربية

77.



تقاربية

اكتب صيغة واضحة لكل متتالية تُعرف بالتكرار.

78. $a_1 = 10;\ a_n = a_{n-1} + 5$ $\quad a_n = 5n + 5$

79. $a_1 = 1.25;\ a_n = a_{n-1} - 0.5$ $\quad a_n = -0.5n + 1.75$

80. $a_1 = 128;\ a_n = 0.5a_{n-1}$ $\quad a_n = 128(0.5)^{n-1}$

81d. 0.44444; 0.4444444; 0.444444444

81. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف مجاميع المتسلسلات اللانهائية في هذه المسألة.

a. **عدديًا** احسب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية اللانهائية $a_n = \frac{4}{10^n}$. **0.4, 0.04, 0.004, 0.0004, 0.00004**

b. **بيانيا** استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل $y = \frac{4}{10^x}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

c. **لفظيًا** صف ما سيحدث لحدود متتالية مثل $n \to \infty$. **إذا كانت $n \to \infty$، فستقترب الحدود من القيمة 0.**

d. **عدديًا** أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى، والحدود السبعة والحدود التسعة في المتسلسلة.

e. **لفظيًا** صف ما سيحدث للمجاميع الجزئية S_n عندما يزيد n.

f. **لفظيًا** صف مجموع الحدود n الأولى في المتسلسلة. فسّر استنتاجك. **e-f. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

82. **تحدٍ** انظر في المتتالية التكرارية (الضمنية) أدناه.

$a_1 = 1, a_2 = 1, n \geq 3$ لـ $a_n = a_{n - a_{n-1}} + a_{n - a_{n-2}}$

a. أوجد الحدود الثمانية الأولى في المتتالية.

b. صف أوجه التشابه والاختلاف بين هذه المتتالية والمتتاليات التكرارية (الضمنية) الأخرى في هذا الدرس. **a-b. انظر الهامش.**

83. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة تكرارية (ضمنية) أو صريحة تتميز بالخصائص التالية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

a. تقاربية إلى 0

b. تقاربية إلى 3

c. تباعدية

84. **الكتابة في الرياضيات** اذكر لماذا يجب ألا تكون المتتالية اللانهائية تقاربية فقط، بل تقاربية إلى 0 حتى يكون لها مجموع. **انظر الهامش.**

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح استنتاجك.** **86-85. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

85. $\sum_{n=1}^{5} (n^2 + 3n) = \sum_{n=1}^{5} n^2 + 3\sum_{n=1}^{5} n$

86. $\sum_{n=1}^{5} 3^n = \sum_{n=3}^{7} 3^{n-2}$

87. **تحدٍ** أوجد مجموع الحدود الستين الأولى في المتتالية المذكورة أدناه. فسّر كيف حددت إجابتك. **انظر الهامش.**

$15, 17, 2, -15, -17, \ldots$،

حيث $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ لـ $n \geq 3$

راجع عمل الطلاب.

88. **الكتابة في الرياضيات** صمم مخططًا يمكن استخدامه في وصف خطوات إيجاد المجموع الجزئي الثلاثاث للمتتالية اللانهائية $a_n = 2n - 3$. ثم فسّر كيفية التعبير عن المجموع نفسه باستخدام الرمز سيجما.

84. الإجابة النموذجية: إذا تقاربت متتالية لا نهائية إلى قيمة إلى قيمة بخلاف 0، فإنه بينما يقترب عدد الحدود n من ∞، سيقترب مجموع المتسلسلة المقابلة S_n من اللانهاية السالبة أو الموجبة.

87. 0؛ يساوي مجموع كل 6 حدود متتالية 0. إذًا، فإن مجموع 60 حدًا هو 0 • 10 أو 0.

527

مراجعة شاملة

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في صورة متعامدة. **91-89. انظر الهامش.**

89. $2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$ **90.** $2.5(\cos 1 + i \sin 1)$ **91.** $5(\cos 0 + i \sin 0)$

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل المعطاة من خلال كل معادلة قطبية.

92. $r = \frac{3}{2 - 0.5 \cos \theta}$ $e = 0.25$؛ قطع ناقص؛ $x = -6$

93. $r = \frac{6}{1.2 \sin \theta + 0.3}$ $e = 4$؛ قطع زائد؛ $y = 5$

94. $r = \frac{1}{0.2 - 0.2 \sin \theta}$ $e = 1$؛ قطع مكافئ؛ $y = -5$

حدد ما إذا كانت النقاط واقعة على مستقيم واحد. واكتب نعم أو لا.

95. $(-3, -1, 4), (3, 8, 1), (5, 12, 0)$ **لا**

96. $(4, 8, 6), (0, 6, 12), (8, 10, 0)$ **نعم**

97. $(0, -4, 3), (8, -10, 5), (12, -13, 2)$ **لا**

98. $(-7, 2, -1), (-9, 3, -4), (-5, 1, 2)$ **نعم**

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

99. $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$ $\sqrt{26} \approx 5.10; (1.5, -13, 13.5)$

100. $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$ $\sqrt{249} \approx 15.78; (2.5, 4, 4)$

101. $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$ $\sqrt{373} \approx 19.31; (2.5, -2, -3)$

102. **التوقيت** يمكن تمثيل المسار الذي يتخذه طرف عقرب الساعات في ساعة حائط برسم دائرة باستخدام المعادلتين الوسيطيتين $x = 6 \sin t$ و $y = 6 \cos t$.

a. أوجد فترة لـ t مقيسة بالراديان يمكن استخدامها في وصف حركة طرف العقرب بينما يتحرك من الساعة 12 ظهرًا إلى الساعة 12 ظهر اليوم التالي. $0 \le t \le 4\pi$

b. قم بمحاكاة الحركة الموصوفة في الجزء b من خلال تمثيل المعادلة في الوضع الوسيطي بيانيا على حاسبة التمثيل البياني. **انظر الهامش.**

c. اكتب معادلة في صورة متعامدة تمثل حركة عقرب الساعات. أوجد نصف قطر الدائرة التي يقطعها عقرب الساعات إذا كان x و y مقيسين بالسنتيمترات. $x^2 + y^2 = 36$; 6 cm.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

103. $\tan \frac{\pi}{12}$ $2 - \sqrt{3}$ **104.** $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **105.** $\cos 165°$ $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

106. $\frac{10x^2 - 11x + 4}{2x^2 - 3x + 1}$ $5 - \frac{2}{2x - 1} + \frac{3}{x - 1}$

107. $\frac{1}{2x^2 + x}$ $\frac{1}{x} - \frac{2}{2x + 1}$

108. $\frac{x + 1}{x^3 + x}$ $\frac{1}{x} - \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

109. SAT/ACT الحد الأول من متتالية هو -5. وكل حد تالٍ يأتي يكون أكبر بمقدار 6 من الحد السابق له مباشرة. فما قيمة الحد رقم 104؟ **B**

A 607
B 613
C 618
D 619
E 615

110. مراجعة أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $180° < \theta < 270°$. **J**

F $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ H $-\frac{\sqrt{30}}{6}$

G $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ J $-\frac{1}{9}$

111. الحدود الأربعة الأولى للمتتالية هي 144 و 72 و 36 و 18. فما الحد العاشر في المتتالية؟ **C**

A 0 C $\frac{9}{32}$

B $\frac{9}{64}$ D $\frac{9}{16}$

112. مراجعة ما عدد المكعبات بحجم 5 سم التي يمكن دسها داخل صندوق طوله 10 سنتيمترات، وعرضه 15 سنتيمترًا، وارتفاعه 5 سنتيمترات؟ **G**

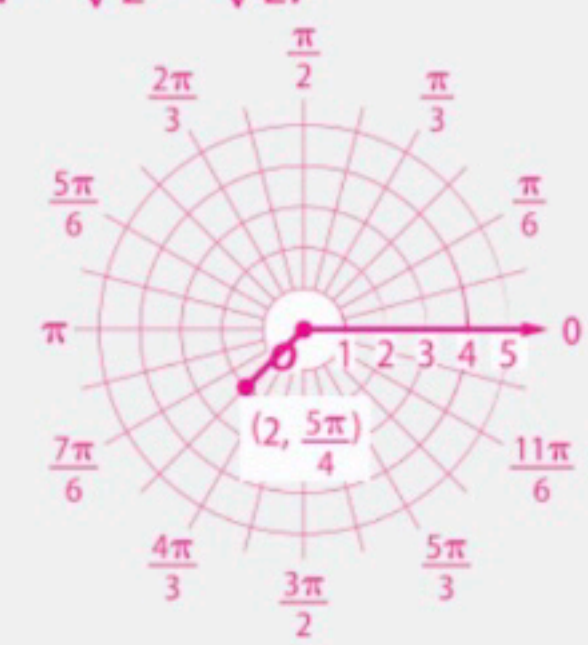
F 5
G 6
H 15
J 20

4 التقويم

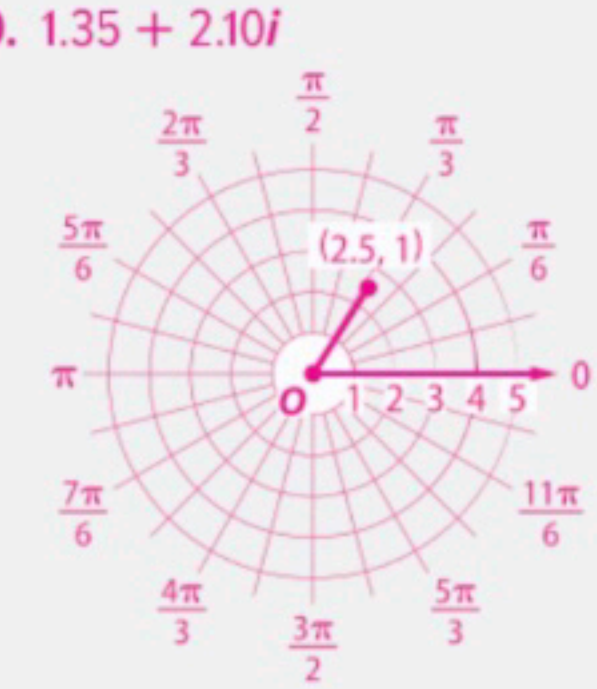
الكرة البلورية اطلب من الطلاب كتابة رأيهم فيما يتعلق بكيف سيساعدهم ما تعلّموه عن المتتاليات والمتسلسلات في الدرس القادم الذي يتناول المتتاليات الحسابية.

إجابات إضافية

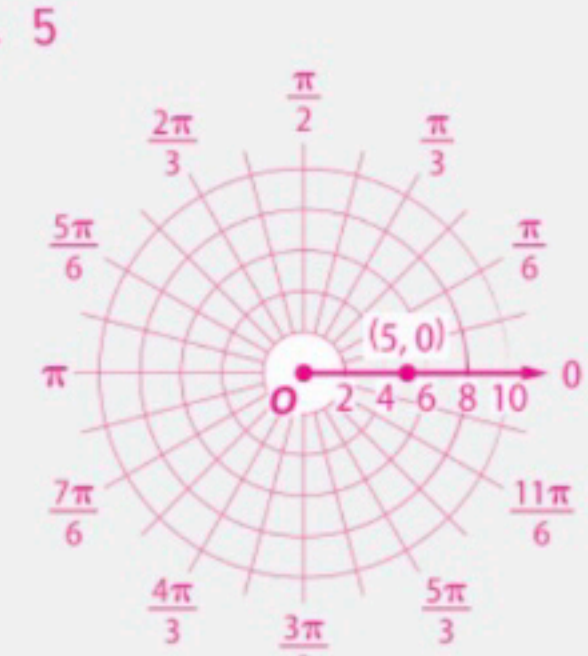
89. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$



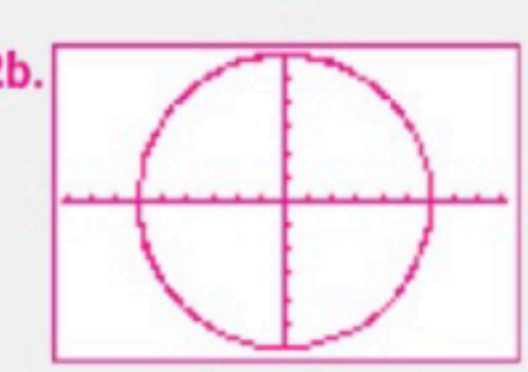
90. $1.35 + 2.10i$



91. 5



102b.



$[0, 4\pi]$ Tstep: 0.1
$[-9.1, 9.1]$ scl: 1 by $[-6, 6]$ scl: 1

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب استخدام ما تعلموه بشأن المتتاليات لكتابة كسر عشري متكرر مثل $0.\overline{51}$ في صورة كسر. ستختلف الإجابات بحسب الكسر العشري المتكرر الذي تم اختياره. الإجابة النموذجية: $0.\overline{51} = \frac{17}{33}$

الدرس 9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

:: السابق
- أوجدت حدود المتتاليات ومجاميع المتسلسلات.

:: الحالي
1. إيجاد *الحدود* النونية والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية.
2. إيجاد مجاميع الحدود n للمتسلسلات الحسابية.

:: لماذا؟
- مع اقتراب موسم العدو الريفي، قررت هناء أن تتدرب كل يوم حتى حلول اليوم الأول من السباق. وتخطط لأن تجري مسافة تبلغ كيلومترا واحدًا في اليوم الأول و 1.25 كيلومتر في اليوم الثاني و 1.5 كيلومتر في اليوم الثالث ،وهكذا. حيث إنها تهدف إلى أن تجري 100 كيلومتر إجمالاً قبل حلول اليوم الأول من السباق.

المفردات الجديدة
متتالية حسابية
arithmetic sequence
فرق مشترك
common difference
أوساط حسابية
arithmetic means
الفرق الأول first difference
الفرق الثاني
second difference
متسلسلة حسابية
arithmetic series

1 المتتاليات الحسابية

تُسمّى المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أيحدين متتاليين مقدارًا ثابتًا **بالمتتالية الحسابية**. ويُشار إلى المقدار الثابت بمصطلح **الفرق المشترك**، والذي يُرمز إليه بالرمز d. ولإيجاد الفرق المشترك لمتتالية حسابية، اطرح أي حد من الحد التالي له. ولإيجاد الحد التالي في المتتالية، اجمع الفرق المشترك مع الحد المعطى.

مثال 1 المتتاليات الحسابية

حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية الحسابية ... ,7 ,12 ,17 .

أولاً، أوجد الفرق المشترك.

$a_2 - a_1 = 12 - 17 = -5$

$a_3 - a_2 = 7 - 12 = -5$

أوجد الفرق بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقق من الفرق المشترك.

الفرق المشترك 5−. أضف 5− إلى الحد الثالث لإيجاد الحد الرابع، وما إلى ذلك.

$a_4 = 7 + (-5) = 2 \quad a_5 = 2 + (-5) = -3 \quad a_6 = -3 + (-5) = -8 \quad a_7 = -8 + (-5) = -13$

الحدود الأربعة التالية هي 2 و 3− و 8− و 13−.

تمرين موجّه

حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية حسابية.

1A. $-129, -98, -67, \ldots$ 31; −36, −5, 26, 57 **1B.** $244, 187, 130, \ldots$ −57, 73, 16, −41, −98

يتم إيجاد كل حد في المتتالية الحسابية عن طريق جمع الفرق المشترك مع الحد السابق. إذًا، $a_n = a_{n-1} + d$. ويمكنك استخدام هذه الصيغة التكرارية (الضمنية) لوضع صيغة صريحة لتكوين متتالية حسابية. تأمل المتتالية الحسابية التي بها $a_1 = 6$ و $d = 3$.

الحد الأول	a_1	a_1	6
الحد الثاني	a_2	$a_1 + d$	$6 + 1(3) = 9$
الحد الثالث	a_3	$a_1 + 2d$	$6 + 2(3) = 12$
الحد الرابع	a_4	$a_1 + 3d$	$6 + 3(3) = 15$
الحد الخامس	a_5	$a_1 + 4d$	$6 + 4(3) = 18$
الحد النوني	a_n	$a_1 + (n - 1)d$	$6 + (n - 1)3$

يؤدي النمط الناتج إلى الصيغة التالية لإيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

الشرح الحد النوني للمتتالية الحسابية التي يكون الحد الأول بها a_1، والفرق المشترك d تحدّده الصيغة $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

مثال الحد السادس عشر في المتتالية ... ,8 ,5 ,2 هو $a_{16} = 2 + (16 - 1) \cdot 3$ أو 47.

529

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-2 إيجاد حدود المتتاليات، ومجموع المتسلسلات.

الدرس 9-2 إيجاد الحدود النونية والأوساط الحسابية للمتتالية الحسابية. إيجاد مجموع n من حدود المتسلسلة الحسابية.

بعد الدرس 9-2 التعرف على المتتاليات والمتسلسلات الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الفرق بين المسافتين التي ركضتهما هناء في يومين متتاليين؟ 0.25 كيلومتر
- ما الذي يمثله 100 كيلومتر؟ العدد الإجمالي للكيلومترات التي ستركضها هناء قبل اليوم الأول للتدريب
- ما التعبير الذي يمثله عدد الكيلومترات التي تركضها هناء في اليوم رقم d؟ $1 + 0.25(d - 1)$

1 المتتاليات الحسابية

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد الفرق المشترك لمتتالية حسابية واستخدامه لإيجاد الحدود الأخرى للمتتالية. **المثالان 2 و 3** يستخدمان الصيغتان الصريحة والتكرارية لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية. **المثال 4** يوضح كيفية إيجاد الأوساط الحسابية بين حدي متتالية حسابية. **المثال 5** يوضح كيفية استخدام الفرق الثاني لتحديد ما إذا كان يمكن تمثيل المتتالية بدالة تربيعية. وإذا أمكن تمثيلها بدالة تربيعية، فيمكن استخدام نظام من ثلاث معادلات لتحديد نموذج المتتالية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية الحسابية ... ,19−, 36−, 53−.
17; −2, 15, 32, 49

2 أوجد كل من الصيغتين الصريحة والتكرارية للحد *النوني* للمتتالية الحسابية ... ,8−, 3, 14.
$a_n = 14 + (-11)(n-1)$ أو
$a_n = -11n + 25;$
$a_1 = 14, a_n = a_{n-1} - 11$

3 **a.** أوجد الحد رقم 41 للمتتالية الحسابية ... ,10−, 3−, 4, 11.
−269

b. أوجد الحد الأول في متتالية حسابية فيها $a_{44} = 229$ و $d = 8$.
−115

مثال 2 الصيغ الصريحة والتكرارية (الضمنية)

أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية الحسابية .. ,30 ,21 ,12

أولاً، أوجد الفرق المشترك.

$a_2 - a_1 = 21 - 12 = 9$ — أوجد الفرق بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من الفرق المشترك.

$a_3 - a_2 = 30 - 21 = 9$

لإيجاد الصيغة الصريحة، عوّض كما يلي: $a_1 = 12$ و $d = 9$ في صيغة إيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — *الحد النوني* للمتتالية الحسابية

$= 12 + (n-1)9$ — $a_1 = 12$ و $d = 9$

$= 12 + 9(n-1) = 9n + 3$ — بسّط.

لإيجاد الصيغة التكرارية (الضمنية)، حدّد الحد الأول a_1، ثم أشر إلى أن الحد التالي هو مجموع الحد السابق a_{n-1} و d.

$a_1 = 12,\ a_n = a_{n-1} + 9$

نصيحة دراسية
الصيغ الصريحة إذا أُعطي حد غير a_1، فستحتاج الصيغة الصريحة لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية إلى التعديل، ويمكن تنفيذ ذلك من خلال طرح عدد الحد المُعطى من n. فعلى سبيل المثال، إذا أُعطي الحد a_5، فستصبح المعادلة $a_n = a_5 + (n-5)d$. أو إذا أُعطي الحد a_0، فستكون الصيغة $a_n = a_0 + nd$.

تمرين موجّه

2. **أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد** الحد النوني للمتتالية الحسابية ... ,11 ,23 ,35.
$a_n = -12n + 47;\ a_1 = 35,\ a_n = a_{n-1} - 12$

يمكن استخدام صيغة الحد النوني لمتتالية حسابية لإيجاد حد بعينه في المتتالية.

مثال 3 الحدود *النونية*

a. **أوجد الحد الثامن والستين في المتتالية الحسابية ... ,9 ,17 ,25 .**

أولاً، أوجد الفرق المشترك.

$a_2 - a_1 = 17 - 25 = -8$ — أوجد الفرق بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من الفرق المشترك.

$a_3 - a_2 = 9 - 17 = -8$

استخدم صيغة إيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية لإيجاد a_{68}.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — *الحد النوني* للمتتالية الحسابية

$a_{68} = 25 + (68-1)(-8)$ — $n = 68$ و $a_1 = 25$ و $d = -8$

$a_{68} = -511$ — بسّط.

b. **أوجد الحد الأول في متتالية حسابية فيها $a_{25} = 139$ و $d = \frac{3}{4}$.**

عوّض كما يلي: $a_{25} = 139$ و $n = 25$ و $d = \frac{3}{4}$ في صيغة إيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية لإيجاد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — *الحد النوني* للمتتالية الحسابية

$39 = a_1 + (25-1)\frac{3}{4}$ — $n = 25$ و $a_n = 139$ و $d = \frac{3}{4}$

$a_1 = 121$ — بسّط.

نصيحة دراسية
معدّل التغير إن معدّل التغير في المتتاليات الحسابية يكون ثابتًا، ومكافئًا للفرق المشترك d.

تمرين موجّه

3A. **أوجد الحد الثامن والثلاثين في المتتالية الحسابية ... ,25 ,2− ,29−.** 970

3B. أوجد d في المتتالية الحسابية التي بها $a_1 = 75$ و $a_{38} = 56.5$. -0.5 أو $-\frac{1}{2}$

إذا كان هناك حدّان غير متتاليين معروفان في متتالية حسابية، يمكن حساب الحدود الموجودة بينهما. وتُسمّى هذه الحدود **بالأوساط الحسابية**. في المتتالية الموضّحة أدناه، الأعداد 17 و 27 و 37 هي الأوساط الحسابية بين العددين 7 و 47.

−3, 7, 17, 27, 37, 47, 57

التركيز على محتوى الرياضيات

المتتالية المتزايدة أو المتناقصة إذا كان الفرق المشترك لمتتالية حسابية موجبًا، فإن المتتالية متزايدة. وإذا كان الفرق المشترك لمتتالية حسابية سالبًا، فإن المتتالية متناقصة.

530 | الدرس 2-9 | المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

مثال إضافي

4 اكتب المتتالية الحسابية التي تحتوي على خمسة أوساط حسابية بين 6.2 و 1.6−. 6.2, 4.9, 3.6, 2.3, 1, −0.3, −1.6

نصيحة دراسية

طريقة بديلة الطريقة البديلة لإيجاد d تكون بطرح الحد الأول من الحد الأخير، ثم القسمة على العدد الكلي للحدود ناقص 1.

مثال 4 الأوساط الحسابية

اكتب متتالية حسابية بها أربعة أوساط حسابية بين 4.3 و 12.8.

ستكون المتتالية مشابهة لما يلي: 12.8 ,؟ ,؟ ,؟ ,؟ ,4.3. لاحظ أن 12.8 هو الحد السادس في المتتالية، أو a_6.

أولاً، أوجد الفرق المشترك مستخدمًا $a_6 = 12.8$ و $a_1 = 4.3$ و $n = 6$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني للمتتالية الحسابية
$12.8 = 4.3 + (6 - 1)d$	$n = 6$ و $a_1 = 4.3$ و $a_n = 12.8$
$12.8 = 4.3 + 5d$	بسّط.
$d = 1.7$	أوجد الحل من أجل d.

ثم حدّد الأوساط الحسابية باستخدام $d = 1.7$.

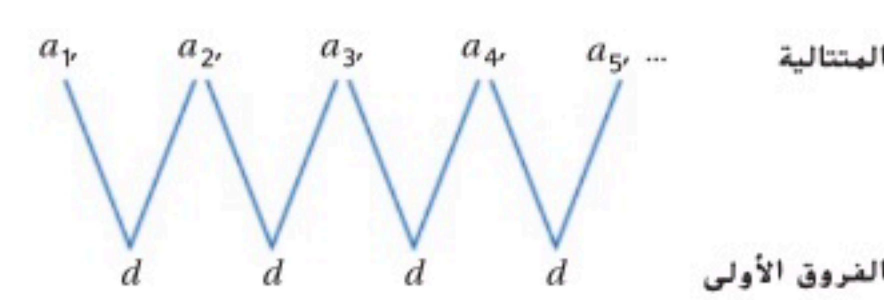
$a_2 = 4.3 + 1.7 = 6$
$a_3 = 6 + 1.7 = 7.7$
$a_4 = 7.7 + 1.7 = 9.4$
$a_5 = 9.4 + 1.7 = 11.1$

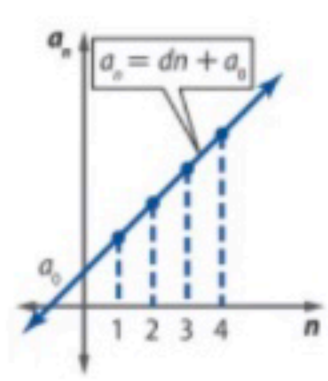
المتتالية هي 12.8 ,11.1 ,9.4 ,7.7 ,6 ,4.3.

تمرين موجّه

4. اكتب متتالية بها ستة أوساط حسابية بين 12.4 و 24.7−. 12.4, 7.1, 1.8, −3.5, −8.8, −14.1, −19.4

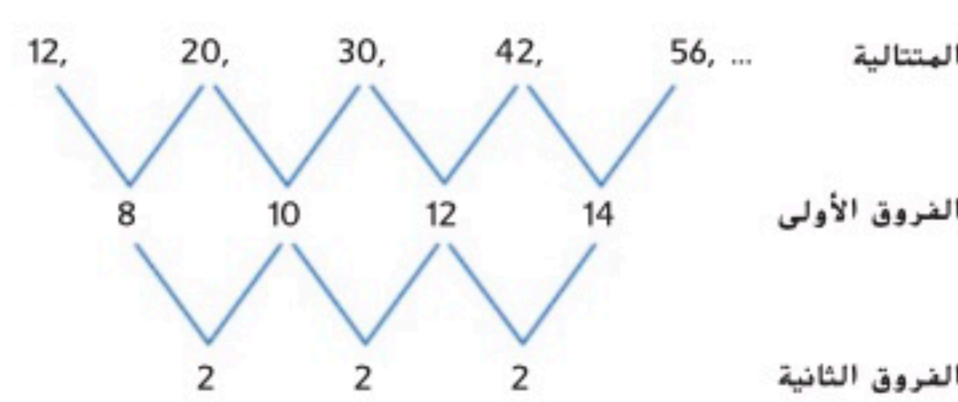
يتم إيجاد **الفروق الأولى** في المتتالية عن طريق طرح كل حد من الحد التالي له.





عندما تكون جميع الفروق الأولى متشابهة، تكون المتتالية حسابية. ويمكن تمثيل الحد النوني باستخدام دالة خطية للصيغة $a_n = dn + a_0$، كما هو موضّح.

وإذا كانت الفروق الأولى غير متشابهة، فإن المتتالية لا تكون حسابية. ومع ذلك، قد تساعد الفروق على تحديد نوع الدالة التي يمكن استخدامها لتمثيل المتتالية. ويمكن أن نُطرح الفروق الأولى المتتالية من بعضها البعض؛ لينتج عن ذلك إذًا **الفروق الثانية**.



وإذا كانت الفروق الثانية ثابتة، فيمكن تمثيل الحد النوني للمتتالية باستخدام دالة تربيعية. ويمكن إيجاد هذه الدالة عن طريق حل نظام معادلات، كما هو موضّح في المثال 5.

التدريس المتمايز AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي/الموسيقي قسّم الصف الدراسي إلى مجموعات من أربعة طلاب. اطلب من الطالب الأول تقديم عدد عشوائي ثم اطلب من الطالب الثاني تقديم عدد عشوائي ثانٍ. يوجد الطالب الثالث الفرق بين العددين الأولين، ولكن لا يذكره ويذكر العدد الثالث في المتتالية الحسابية. يذكر الطالب الرابع الفرق المشترك ويذكر العدد الرابع والخامس في المتتالية. اطلب من أفراد المجموعة تبادل الأدوار حتى يقوم كل طالب بجميع الأدوار.

مثال 5 الفروق الثانية

أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية ... ,72 ,56 ,42 ,30 ,20 ,12.

يمكن تمثيل الحد النوني بمعادلة تربيعية للصيغة $a_n = an^2 + bn + c$. عوّض بقيم عن a_n و n في المعادلة.

$12 = a(1)^2 + b(1) + c$ — $a_n = 12$ و $n = 1$

$20 = a(2)^2 + b(2) + c$ — $a_n = 20$ و $n = 2$

$30 = a(3)^2 + b(3) + c$ — $a_n = 30$ و $n = 3$

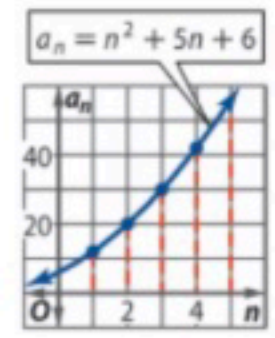
ينتج عن هذا نظام معادلات خطية بثلاثة متغيرات.

$12 = a + b + c$ — المعادلة المبسّطة الأولى

$20 = 4a + 2b + c$ — المعادلة المبسّطة الثانية

$30 = 9a + 3b + c$ — المعادلة المبسّطة الثالثة

إن إيجاد الحل من أجل a و b و c، يعطي $a = 1$، و $b = 5$ و $c = 6$. وبتعويض هذه القيم في المعادلة عن a_n، يكون نموذج المتتالية كالآتي: $a_n = n^2 + 5n + 6$، كما هو موضّح في الشكل 9.2.1.



الشكل 9.2.1

تمرين موجّه

5. أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية ... ,36 ,22 ,10 ,0 ,8− ,14−. $a_n = n^2 + 3n - 18$

نصيحة دراسية

الفروق الأعلى يحدّد عدد المتغيرات في الصيغة القياسية للمعادلة عدد المعادلات اللازمة في النظام الناتج.

إذا كان حساب الفروق الثانية لا ينتج عنه فرق ثابت، فيمكن إيجاد فروق أعلى. وهذه العملية تشبه العملية اللازمة لإيجاد معادلة تربيعية. فتعتمد الدالة التي ستمثّل المتتالية على العدد اللازم من الفروق المحسوبة قبل إيجاد فرق ثابت.

وقد لا تنتج أبدًا عن الفروق الأعلى فروق ثابتة. وفي هذه الحالة من الممكن ألا يكون هناك نموذج كثير الحدود يمكن استخدامه لوصف المتتالية.

الفروق	النموذج
الأولى	خطية
الثانية	تربيعية
الثالثة	تكعيبية
الرابعة	من الدرجة الرابعة
الخامسة	من الدرجة الخامسة

2 المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية هي المجموع المبيّن لحدود متتالية حسابية.

متسلسلة حسابية	متتالية حسابية
$-6 + (-3) + 0 + 3 + 6$	$-6, -3, 0, 3, 6$
$4.25 + 4 + 3.75 + 3.5 + 3.25$	$4.25, 4, 3.75, 3.5, 3.25$
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$	$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

لوضع صيغة لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية منتهية، ابدأ بالنظر إلى المتسلسلة S_n التي تكونت حدودها من خلال جمع مضاعفات d مع a_1. وإذا جمعنا ذلك مع المتسلسلة ذاتها مكتوبة بترتيب عكسي، سنستطيع إيجاد صيغة لحساب مجموع متسلسلة حسابية منتهية.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\ (+)\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\ \hline 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\ 2S_n &= n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

توجد حدود n في المتسلسلة، وكلها $(a_1 + a_n)$.

إذًا، $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. وعندما تكون قيمة الحد الأخير غير معروفة، لا يزال بإمكانك تحديد المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة عن طريق جمع الحد النوني لصيغة متتالية حسابية مع مجموع صيغة متسلسلة حسابية منتهية.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ — مجموع صيغة متسلسلة حسابية منتهية

$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + [a_1 + (n - 1)d]\}$ — $a_n = a_1 + (n - 1)d$، الحد النوني لصيغة متتالية حسابية

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ — بسّط.

مثال إضافي

5 أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية ... ,45 ,32 ,21 ,12 ,5 ,0. $a_n = n^2 + 2n - 3$

إرشاد للمعلمين الجدد

الفروق الثانية بطرح حد في المتتالية من الحد التالي له نحصل على الفرق الأولى للمتتالية. ويتم إيجاد الفروق الثانية بطرح الفروق الأولى الناتجة. وعندما تكون الفروق الثانية ثابتة، يمكن تمثيل المتتالية بدالة تربيعية. وعندما يكون الأمر كذلك، يمكن استخدام الحدود الثلاثة الأولى لإنشاء نظام من ثلاث معادلات لإيجاد قيم a و b و c.

2 المتسلسلات الحسابية

الأمثلة 8–6 توضح كيفية استخدام صيغة المتسلسلة الحسابية ورمز سيجما لإيجاد المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية.

532 | الدرس 9-2 | المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة حسابية منتهية

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة حسابية منتهية عدد حدودها n أو المجموع الجزئي *النوني* لمتسلسلة حسابية باستخدام واحدة من الصيغتين المتصلتين.

الصيغة 1 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

الصيغة 2 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

مثال 6 مجموع المتسلسلات الحسابية

أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية.

a. $-5 + 2 + 9 + \cdots + 317$

في هذه المتتالية، $a_1 = -5$ و $a_n = 317$، و $d = 2 - (-5)$ أو 7. استخدم صيغة الحد النوني لإيجاد عدد الحدود في المتتالية n.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني للمتتالية الحسابية

$317 = -5 + (n-1)7$ $a_n = 317$ و $a_1 = -5$ و $d = 7$

$47 = n$ بسّط.

الآن، استخدم الصيغة 1 لإيجاد مجموع المتسلسلة.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ الصيغة 1

$S_{47} = \frac{47}{2}(-5 + 317)$ $n = 47$ و $a_1 = -5$ و $a_n = 317$

$= 7332$ بسّط.

b. **المجموع الجزئي الثامن والعشرون للمتسلسلة $27 + 14 + 1 + \cdots$**

في هذه المتتالية، $a_1 = -5$ و $d = 14 - 27$ أو -13. استخدم الصيغة 2 لإيجاد المجموع الجزئي الثامن والعشرين.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ الصيغة 2

$S_{28} = \frac{28}{2}[2(27) + (28-1)(-13)]$ $d = -13$ و $a_1 = 27$ و $n = 28$

$= -4158$ بسّط.

c. $\sum_{n=6}^{28} (5n - 17)$

$$\sum_{n=6}^{28} (5n - 17) = [5(6) - 17] + [5(7) - 17] + \cdots + [5(28) - 17]$$

$$= 13 + 18 + \cdots + 123$$

الحد الأول في هذه المتسلسلة 13، والحد الأخير 123. وعدد الحدود يساوي الحد الأعلى ناقص الحد الأدنى زائد واحد، وهو $28 - 6 + 1$ أو 23. إذًا، $a_1 = 13$ و $a_n = 123$ و $n = 23$. استخدم الصيغة 1 لإيجاد مجموع المتسلسلة.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ الصيغة 1

$S_{23} = \frac{23}{2}(13 + 123)$ $n = 23$ و $a_1 = 13$ و $a_n = 123$

$= 1564$ بسّط.

تمرين موجّه

6A. $211 + 193 + 175 + \cdots + (-455)$ **−4636**

6B. المجموع الجزئي التاسع عشر للمتتالية $-19 + 23 + 65 + \cdots$ **6821**

6C. $\sum_{n=23}^{37} (2n + 3)$ **945**

6D. $\sum_{n=12}^{18} (-2n + 57)$ **189**

نصيحة دراسية

المتسلسلات الحسابية جميع المتتاليات الحسابية اللانهائية تتباعد، باستثناء تلك المتتاليات التي يكون فيها $d = 0$. وكنتيجة لذلك، يمكن فقط حساب متسلسلة حسابية منتهية أو المجموع الجزئي *النوني* لمتسلسلة حسابية لا نهائية.

مثال إضافي

6 أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية.

a. $-3 + 2 + 7 + 12 + \ldots + 157$ **2541**

b. المجموع الجزئي رقم 17 للمتسلسلة الحسابية $53 + 31 + 9 + \ldots$ **−2091**

c. $\sum_{n=10}^{32} (n + 6)$ **621**

533

للمتسلسلات الحسابية العديد من التطبيقات المفيدة في الحياة اليومية.

مثال 7 من الحياة اليومية مجموع متسلسلة حسابية

ألعاب الفيديو إحدى بطولات ألعاب الفيديو- التي يتنافس فيها اللاعبون في ألعاب متعدّدة ويجمعون عددًا إجماليًا من النقاط- تدفع مبلغًا ماليًا لأعلى 20 فائزًا ينهي البطولة. يحصل المركز الأول على AED 5000، ويحصل المركز الثاني على AED 4800، ويحصل المركز الثالث على AED 4600، وهكذا. فكم يبلغ إجمالي الجائزة المالية الممنوحة؟

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ الصيغة 2

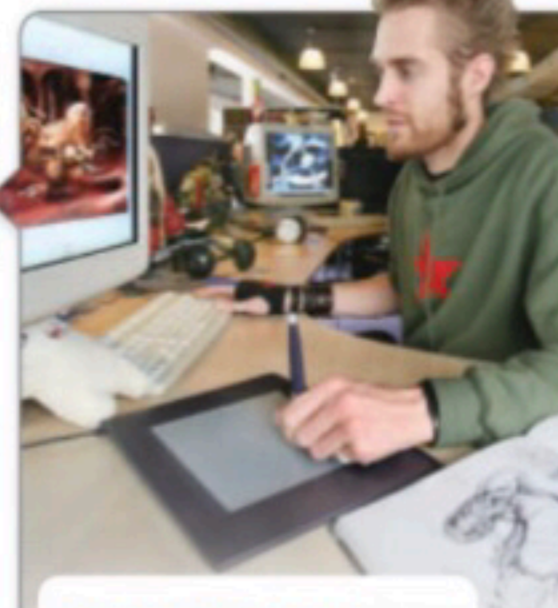
$S_{20} = \frac{20}{2}[2(5000) + (20-1)(-200)]$ $n = 20$ و $a_1 = 5000$ و $d = -200$

$= 62{,}000$ بسّط.

يبلغ إجمالي الجائزة المالية الممنوحة AED 62,000

تمرين موجّه

7. **ألعاب الفيديو** تلعب هدى لعبة فيديو، وستسجّل 50 نقطة إذا اجتازت المرحلة الأولى، وعلى كل مرحلة من المراحل التالية ستحصل على نقاط تزيد عن المرحلة التي تسبقها بـ 50 نقطة. إذًا، ستسجّل 100 نقطة لاجتياز المرحلة الثانية، و 150 نقطة لاجتياز المرحلة الثالثة، وهكذا. فما العدد الإجمالي للنقاط التي ستسجّلها هدى بعد اجتيازها للمرحلة التاسعة؟ **2250**



مهنة من الحياة اليومية

مهندس البرمجيات إن معظم مبرمجي ألعاب الفيديو يكونون مهندسي برمجيات، وهم الذين يخطّطون برامج الألعاب ويخرجونها. ومعظم المبرمجين يكونون حاصلين على درجة البكالوريوس في علم الحاسوب، أو نظم المعلومات، أو الرياضيات. كما أن بعضهم يكون حاصلاً على شهادة تقنية أو مهنية.

يمكن استخدام صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية أيضًا لإيجاد الحل من أجل قيم n.

مثال 8 من الحياة اليومية مجموع متسلسلة حسابية

البيسبول **يجمع أيوب بطاقات البيسبول منذ أعطاه والده مجموعة بها 20 بطاقة. وأثناء كل شهر، يعطيه والده عددًا من البطاقات يزيد عن الشهر السابق بـ 5 بطاقات. فكم شهرًا يحتاجه أيوب ليصل إلى 1000 بطاقة؟**

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ الصيغة 2

$1000 = \frac{n}{2}[2(20) + (n-1)5]$ $S_n = 1000$ و $a_1 = 20$ و $d = 5$

$2000 = n(5n + 35)$ اضرب كل طرف في 2، وبسّط.

$0 = 5n^2 + 35n - 2000$ وزّع واطرح 2000 من كل طرف.

$0 = n^2 + 7n - 400$ اقسم كل طرف على 5.

$n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-400)}}{2(1)}$ استخدم القانون العام.

$n \approx 16.8 \text{ and } -23.8$ بسّط.

لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا. سيصل أيوب إلى 1000 بطاقة في 17 شهرًا.

تحقق $20 + 25 + \cdots + 100 = \frac{17}{2}(20 + 100)$

$= 1020$ ✓

في سبعة عشر شهرًا، سيكون لدى أيوب 1020 بطاقة بيسبول، وهذا أكثر من 1000.

تمرين موجّه

8. **خدمة رعاية الحدائق** يدير سعيد خدمة لجزّ عشب الحدائق، ولديه حاليًا 14 عميلاً. لقد كان يحصل على عميلين جديدين في بداية كل عام من الأعوام الثلاثة الماضية. وفي كل عام، يجزّ العشب في حديقة كل عميل بمتوسّط 15 مرة. بدءًا من الآن، إذا استمر سعيد في اكتساب عميلين كل عام، وإذا كان يتقاضى AED 30 على الحديقة الواحدة، فبعد كم عام سيتقاضى مبلغ AED 51,300 إجمالاً؟ **5 yr**

أمثلة إضافية

7 **الموسيقى** حصل أحد الفنانين على حقوق امتياز لجميع أسطوانات الموسيقى الخاصة به المبيعة. ويحصل على AED 10,000 لأول 10,000 أسطوانة مبيعة. ويحصل على AED 12,500 للـ 10,000 أسطوانة الثانية و AED 15,000 للـ 10,000 أسطوانة التالية وهكذا. فكم تبلغ الأموال التي سيحصل عليها إذا بيعت 500,000 من أسطواناته؟ **AED 3,562,500**

8 **المبيعات** يبيع إبراهيم الملابس في متجر بمركز تجاري. وتبلغ عمولته على بيع بضاعة الموسم الجديدة AED 3.50 لكل قطعة ملابس بسعر AED 25 على الأقل. ويعد مدير المتجر بزيادة AED 0.05 في العمولة لكل قطعة ملابس إضافية مبيعة. بناء على ذلك، سيحصل إبراهيم عند بيعه قطعة الملابس الثانية على عمولة AED3.55. وعند بيع القطعة الثالثة، سيحصل إبراهيم على AED 3.60 وهكذا. فكم عدد قطع الملابس بسعر AED 25 أو أكثر التي يحتاج إبراهيم إلى بيعها لتصبح عمولته الإجمالية من بضاعة الموسم الجديدة AED 1000 على الأقل؟ **143 قطعة**

إجابات إضافية

1. −3; 11, 8, 5, 2
2. 13; 42, 55, 68, 81
3. −9; 90, 81, 72, 63
4. 22; −17, 5, 27, 49
5. 4; 9, 13, 17, 21
6. 17; 55, 72, 89, 106
7. −5; −19.5, −24.5, −29.5, −34.5
8. 68; 107, 175, 243, 311

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من أربعة مقسمة إلى مجموعات ثنائية. وعلى كل مجموعة ثنائية العمل معًا لإنشاء ثلاث متتاليات وتحدي المجموعة الثنائية الثانية أن يكتبوا الصيغتين الصريحة التكرارية لكل متتالية. ما أن تُحدد الصيغ، على كل مجموعة أن تختار أصعب متتاليتين وتحدي مجموعة أخرى على إيجاد الصيغتين.

التمارين

حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية حسابية. (المثال 1) 1-8. انظر الهامش.

1. 20, 17, 14, ...
2. 3, 16, 29, ...
3. 117, 108, 99, ...
4. −83, −61, −39, ...
5. −3, 1, 5, ...
6. 4, 21, 38, ...
7. −4.5, −9.5, −14.5, ...
8. −97, −29, 39, ...

9. **الفرقة الاستعراضية** تبدأ إحدى فرق الاستعراضات عرضها بتشكيل هرمي، بحيث يكون في الصف الأول عضو واحد من أعضاء الفرقة، وفي الصف الثاني 3 أعضاء، وفي الصف الثالث 5 أعضاء، وهكذا. (المثالان 1 و 2)
   a. أوجد عدد أعضاء الفرقة في الصف الثامن. **15**
   b. اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد عدد أعضاء الفرقة في الصف n.
   $a_n = 1 + 2(n - 1); a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2$

أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية حسابية. (المثال 2)

10. 2, 5, 8, ...
11. −6, 5, 16, ...
12. −9, −16, −23, ...
13. 4, 19, 34, ...
14. 25, 11, −3, ...
15. 7, −3.5, −14, ...
16. −18, 4, 26, ...
17. 1, 37, 73, ...

10-17. انظر الهامش.

أوجد القيمة المحدّدة للمتتالية الحسابية ذات الخصائص المعطاة. (المثال 3)

18. إذا كان $a_{14} = 85$ و $d = 9$. أوجد a_1. $a_1 = -32$
19. أوجد d للمتتالية ... ,−24, −31, −38. $d = -7$
20. إذا كان $a_n = 14$ و $a_1 = -36$ و $d = 5$. أوجد n. $n = 11$
21. إذا كان $a_1 = 47$ و $d = -5$. أوجد a_{12}. $a_{12} = -8$
22. إذا كان $a_{22} = 95$ و $a_1 = 11$. أوجد d. $d = 4$
23. أوجد a_6 للمتتالية ... ,84, 5, −74. $a_6 = -311$
24. إذا كان $a_n = -20$ و $a_1 = 46$ و $d = -11$. أوجد n. $n = 7$
25. إذا كان $a_{35} = -63$ و $a_1 = 39$ أوجد d. $d = -3$

26. **الإنشاء** يحتوي كل قطاع طوله 8 أمتار من سياج خشبي على 14 وتدًا. افترض أن a_n يمثّل عدد الأوتاد في n من القطاعات. (المثال 3)
   a. أوجد أول 5 حدود في المتتالية. **14, 28, 42, 56, 70**
   b. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لمتتالية الجزء a. $a_n = 14n$
   c. إذا استخدم 448 وتدًا لإحاطة الفناء الخلفي لمنزل العميل بسياج، فكم عدد أمتار السياج المستخدمة؟ **256 m**

أوجد الأوساط الحسابية المحدّدة لكل زوج من الحدود غير المتتالية. (المثال 4) 27-32. انظر الهامش.

27. 3 أوساط؛ 19 و −5
28. 5 أوساط؛ −62 و −8
29. 4 أوساط؛ 3 و 88
30. 8 أوساط؛ −5.5 و 23.75
31. 7 أوساط؛ −4.5 و 7.5
32. 10 أوساط؛ 6 و 259

أوجد نموذجًا تربيعيًا لكل متتالية. (المثال 5)

33. 12, 19, 28, 39, 52, 67, ... $a_n = n^2 + 4n + 7$
34. −11, −9, −5, 1, 9, 19, ... $a_n = n^2 - n - 11$
35. 8, 3, −6, −19, −36, −57, ... $a_n = -2n^2 + n + 9$
36. −7, −2, 9, 26, 49, 78, ... $a_n = 3n^2 - 4n - 6$
37. 6, −2, −12, −24, −38, −54, ... $a_n = -n^2 - 5n + 12$
38. −3, 1, 13, 33, 61, 97, ... $a_n = 4n^2 - 8n + 1$

أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية. (المثال 6)

39. المجموع الجزئي السادس والعشرون للمتسلسلة $3 + 15 + 27 + \cdots + 303$ **3978**
40. $-28 + (-19) + (-10) + \cdots + 242$ **3317**
41. المجموع الجزئي الثاني والأربعون للمتسلسلة $120 + 114 + 108 + \cdots$ **−126**
42. المجموع الجزئي الرابع والخمسون للمتسلسلة $213 + 205 + 197 + \cdots$ **54**
43. $-17 + 1 + 19 + \cdots + 649$ **12,008**
44. $89 + 58 + 27 + \cdots + (-562)$ **−5203**

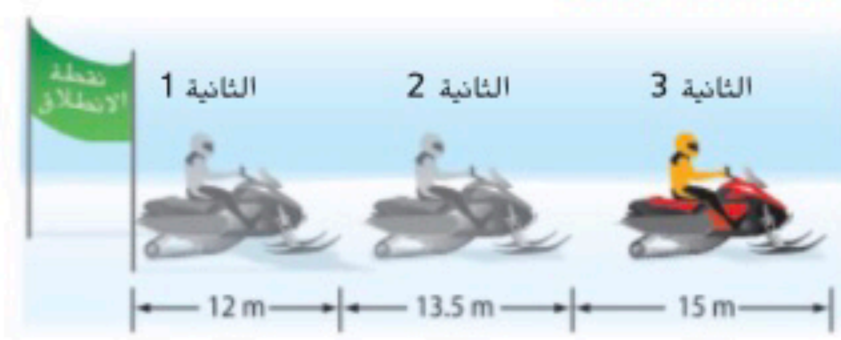
45. **الجري** راجع بداية الدرس. (المثال 6)
   a. حدّد عدد الكيلومترات التي ستجريها هناء في اليوم الثاني عشر من التدريب. **3.75 km**
   b. في أي يوم من أيام التدريب ستصل هناء إلى هدفها بأن تجري 100 كيلومتر إجمالاً؟ **اليوم الخامس والعشرون**

أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية. (المثال 6)

46. $\sum_{n=1}^{20} (3 + 2n)$ **480**
47. $\sum_{n=1}^{28} (100 - 4n)$ **1176**
48. $\sum_{n=7}^{18} (-9n - 26)$ **−1662**
49. $\sum_{n=6}^{52} (7n + 1)$ **9588**
50. $\sum_{n=7}^{42} (84 - 3n)$ **378**
51. $\sum_{n=1}^{13} [32 + 4(n - 1)]$ **728**
52. $\sum_{n=20}^{24} \left(\frac{n}{2} - 9\right)$ **10**
53. $\sum_{n=2}^{9} (-15n - 12)$ **−756**

54. **الإنشاء** يعمل طاقم من العمال على تبليط بهو أحد الفنادق بنمط الفسيفساء شبه المنحرف. وتبدأ القاعدة الأقصر لشبه المنحرف بصف به 8 بلاطات، وكل صف به بلاطتان إضافيتان وذلك حتى الصف العشرين. حدّد عدد البلاطات اللازمة لتنفيذ تصميم الفسيفساء. (المثال 7)
   540 بلاطة

55. **التزلج على الجليد** قطع أحد المتسابقين في رياضة التزلج على الجليد 12 مترًا في الثانية الأولى من السباق. فإذا قطع المتسابق 1.5 متر إضافي في كل ثانية تالية، فكم مترًا قد قطعه في 64 ثانية؟ (المثال 7) **3792 m**



3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 56 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التدريبات 27–32. إذا واجه الطلاب صعوبة في إيجاد العدد الصحيح للأوساط الحسابية، فاقترح أن يكتبوا المتتالية الأصلية مع ترك مساحة فارغة لكل وسيط حسابي في المجموعة. سيساعدهم ذلك على تخيل ما يساويه *n*.

إجابات إضافية

10. $a_n = 2 + 3(n - 1); a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 3$
11. $a_n = -6 + 11(n - 1); a_1 = -6, a_n = a_{n-1} + 11$
12. $a_n = -9 + (-7)(n - 1); a_1 = -9, a_n = a_{n-1} - 7$
13. $a_n = 4 + 15(n - 1); a_1 = 4, a_n = a_{n-1} + 15$
14. $a_n = 25 + (-14)(n - 1); a_1 = 25, a_n = a_{n-1} - 14$
15. $a_n = 7 + (-10.5)(n - 1); a_1 = 7, a_n = a_{n-1} - 10.5$
16. $a_n = -18 + 22(n - 1); a_1 = -18, a_n = a_{n-1} + 22$
17. $a_n = 1 + 36(n - 1); a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 36$
27. 13, 7, 1
28. −53, −44, −35, −26, −17
29. 20, 37, 54, 71
30. −2.25, 1, 4.25, 7.5, 10.75, 14, 17.25, 20.5
31. −3, −1.5, 0, 1.5, 3, 4.5, 6
32. 29, 52, 75, 98, 121, 144, 167, 190, 213, 236

535

56. **جمع التبرعات** نظمت هداية مشيًا خيريًا نتج عنه في العام الأول مبلغ AED 3000. وتأمل أن يزيد هذا المبلغ بمقدار AED 900 كل عام على مدار الأعوام العديدة القادمة. إذا تحقّق هدفها، فكم عدد الأعوام التي سينتج فيها المشي الخيري على الأقل AED 65,000 إجمالاً؟ (المثال 8) **10 أعوام أو أكثر**

B

57. أوجد a_n إذا كان $S_n = 490$ و $a_1 = -5$ و $n = 100$. **14.8**

58. إذا كان $S_n = 51.7$ و $n = 22$ و $a_n = -11.3$. أوجد a_1. **16**

59. أوجد n لـ $-7 + (-5.5) + (-4) + \cdots$ إذا كان $S_n = -14$ و $a_n = 3.5$. **8**

60. أوجد a_1 إذا كان $S_n = 1287$ و $n = 22$ و $d = 5$. **6**

61. إذا كان $S_{26} = 1456$ و $a_1 = -19$. أوجد d. **6**

62. إذا كان $S_{12} = 174$ و $a_{12} = 39$. أوجد d. $\mathbf{\frac{49}{11}}$

اكتب كل متسلسلة حسابية بالرمز سيجما. الحد الأدنى المذكور.

63. $6 + 12 + 18 + \cdots + 66; n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{11} 6n$

64. $-1 + 0 + 1 + \cdots + 7; n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{9} (n-2)$

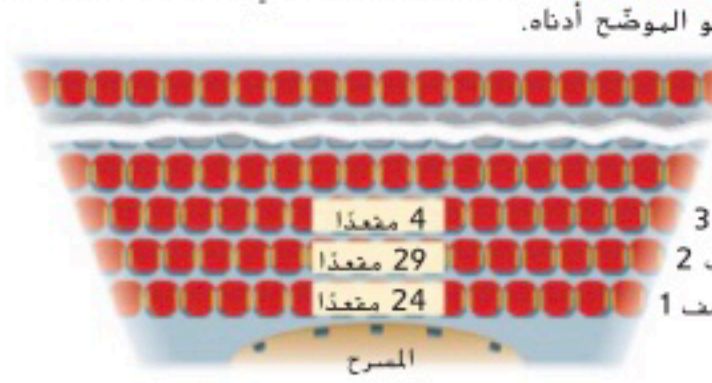
65. $17 + 21 + 25 + \cdots + 61; n = 4$ $\quad \sum_{n=4}^{15} (4n+1)$

66. $1 + 0 + (-1) + (-2) + \cdots + (-13); n = 6$ $\quad \sum_{n=6}^{20} (-n+7)$

67. $-\frac{13}{5} + \left(-\frac{12}{5}\right) + \left(-\frac{11}{5}\right) + \cdots + \left(-\frac{3}{5}\right); n = 2$ $\quad \sum_{n=2}^{12} \left(\frac{n}{5} - 3\right)$

68. $9.25 + 8.5 + 7.75 + \cdots - 2; n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{16} (-0.75n + 10)$

69. **الحفلات الموسيقية** تُرتّب مقاعد الجلوس في قاعة الحفلة الموسيقية على النحو الموضّح أدناه.



a. اكتب متسلسلة بالرمز سيجما لتمثيل عدد المقاعد الموجودة في القاعة. إذا استمر نمط ترتيب المقاعد الموضّح في أول 3 صفوف لكل صف من الصفوف التالية. **انظر الهامش.**

b. أوجد إجمالي عدد المقاعد في القاعة. **3815 مقعدًا**

c. هناك قاعة أخرى بها 32 صفًا. ويوجد في الصف الأول 18 مقعدًا. وفي كل صف من الصفوف التالية توجد 4 مقاعد إضافية. فكم عدد المقاعد الموجودة في القاعة؟ **2560 مقعدًا**

C

اكتب دالة يمكن استخدامها لتمثيل الحد *النوني* لكل متتالية.

70. 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... **خطية؛** $a_n = 3n - 1$

71. 8, 13, 20, 29, 40, 53, ... **تربيعية؛** $a_n = n^2 + 2n + 5$

72. 2, 2, 4, 8, 14, 22, ... **تربيعية؛** $a_n = n^2 - 3n + 4$

73. 5, 31, 97, 221, 421, 715, ...

73. تكعيبية؛ $a_n = 3n^3 + 2n^2 - n + 1$

74. −6, −8, −6, 6, 34, 84, ... **تكعيبية؛** $a_n = n^3 - 4n^2 + 3n - 6$

75. 0, 23, 134, 447, 1124, 2375, ... **من الدرجة الرابعة؛** $a_n = 2n^4 - n^3 - 1$

أوجد الفرق المشترك لكل مما يلي.

76. $\sum_{n=1}^{100} (6n + 2)$ **6**

77. $\sum_{n=21}^{65} \left(8 - \frac{2n}{3}\right)$ $\mathbf{-\frac{2}{3}}$

78. $a_{12} = 63, a_{19} = 7$ **−8**

79. $a_8 = -4, a_{27} = \frac{7}{3}$ $\mathbf{\frac{1}{3}}$

80. **حساب التفاضل والتكامل** يمكن تقريب المساحة الموجودة بين التمثيل البياني لدالة متصلة والمحور الأفقي x باستخدام المتتاليات. اعتبر أن $f(x) = x^2$ على الفترة [1, 3].

a. اكتب المتتالية x_n التي تتكوّن عندما تكون هناك 5 أوساط حسابية بين 1 و 3. **a–c. انظر الهامش.**

b. اكتب المتتالية y_n التي تتكوّن عندما $y_n = f(x_n)$.

c. اكتب المتتالية p_n التي يعرّفها $d \cdot y_n$.

d. تقريب المساحة من الجهة اليسرى تحدّده الصيغة $L_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$. أوجد L_6. $\mathbf{\frac{199}{27}}$

e. تقريب المساحة من الجهة اليمنى تحدّده الصيغة $R_n = \sum_{k=2}^{n+1} p_k$. أوجد R_6. $\mathbf{\frac{271}{27}}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

81. **تحليل الخطأ** أعطي كل من يوسف وناصر المتتالية الحسابية: 2, 9, 16, ... وكتب يوسف الصيغة الصريحة: $a_n = 2 + 7(n - 1)$ للمتتالية. بينما كتب ناصر الصيغة: $a_n = 7n - 5$. هل أي منهما صحيح؟ اشرح. **انظر الهامش.**

82. **مسألة غير محددة الإجابة** لقد تعلمت أن الحد النوني للمتتالية الحسابية يمكن تمثيله بدالة خطية. فهل يمكن تمثيل متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة حسابية بدالة خطية أيضًا؟ إذا كان الجواب نعم، فاذكر مثالاً. وإذا كان الجواب لا، فكيف يمكن تمثيل المتتالية؟ اشرح. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

83. **تحدٍ** برهن على أنه في متتالية حسابية، $a_n = a_k + (n - k)d$ للأعداد الصحيحة k في مجال المتتالية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة* لمتسلسلة حسابية منتهية. اشرح.**

84. إذا كنت تعرف المجموع و d، تستطيع الحل للحصول على a_1. **خطأ؛ الإجابة النموذجية: يجب أن تعرف *n* أيضًا.**

85. إذا كنت تعرف الحدّين الأول والأخير فقط، تستطيع إذًا إيجاد المجموع. **خطأ؛ الإجابة النموذجية: يجب أن تعرف *n* أيضًا.**

86. إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في المتتالية موجبة، إذًا جميع حدود المتتالية موجبة أو مجموع المتسلسلة موجب. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

87. **تحدٍ** فكّر في المتتالية الحسابية للأعداد الطبيعية الفردية.

a. أوجد S_7 و S_9. **49, 81**

b. خمّن النمط الذي ينتج عن مجاميع المتسلسلات الحسابية المتناظرة.

c. اكتب برهانًا جبريًا يثبت صحة التخمين الذي قمت به في الجزء b. **b–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

88. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا المتسلسلة الحسابية ... + 15 + 20 + 25 ليس لها مجموع. **انظر الهامش.**

إجابات إضافية

69a. الإجابة النموذجية: $\sum_{n=1}^{35} (5n + 19)$

80a. $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3$

80b. $y_n = 1, \frac{16}{9}, \frac{25}{9}, 4, \frac{49}{9}, \frac{64}{9}, 9$

80c. $p_n = \frac{1}{3}, \frac{16}{27}, \frac{25}{27}, \frac{4}{3}, \frac{49}{27}, \frac{64}{27}, 3$

مراجعة شاملة

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية. **91–89. تُقدم نماذج لبعض الإجابات.**

89. 12, 16, 20, … **24, 28, 32, 36**

90. 3, 1, −1, … **−3, −5, −7, −9**

91. 31, 24, 17, … **10, 3, −4, −11**

أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة، وعبّر عنه بالصيغة المتعامدة.

92. $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot 3\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$
$18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); 18i$

93. $3\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) \div \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
$3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right); \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v، ثم حدد ما إذا كانت u و v متعامدتين.

94. $\mathbf{u} = \langle 4, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5\rangle$ **−1، غير متعامدين**

95. $\mathbf{u} = \langle 8, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ **26؛ غير متعامدين**

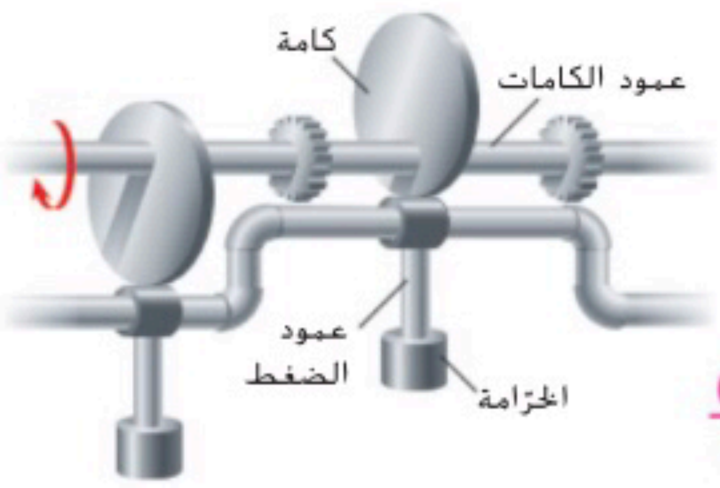
96. $\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -5\rangle$ **6؛ غير متعامدين**

أوجد قياس زاوية الاتجاه لكل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

97. −i − 3j **251.6°**

98. ⟨−9, 5⟩ **150.9°**

99. ⟨−7, 7⟩ **135°**



100. التصنيع تأخذ كامة في مكبس تخريم شكل قطع ناقص بالمعادلة $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$. يمر عمود الكامات عبر البؤرة على المحور الإيجابي.

a. قم بتمثيل نموذج بياني للكامة. **a-b. انظر الهامش.**

b. أوجد معادلة تفسر تمثيل النموذج بحيث يكون عمود الكامات عند نقطة الأصل.

c. أوجد معادلة تمثيل النموذج في الجزء b عند تدوير الكامة إلى وضع قائم.
$\frac{(x')^2}{36} + \frac{\left(-y' + 3\sqrt{5}\right)^2}{81} = 1$

101. استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \ln x$ لوصف التحول الذي نتج عنه التمثيل البياني لـ $g(x) = 3\ln(x - 1)$. ثم ارسم التمثيلين البيانيين لـ f و g. **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

102. SAT/ACT ما رقم منزلة الآحاد لـ 3^{36}؟ **B**

A 0
B 1
C 3
D 7
E 9

103. باستخدام الجدول، أي صيغة يمكن استخدامها لتحديد الحد النوني للمتتالية؟ **J**

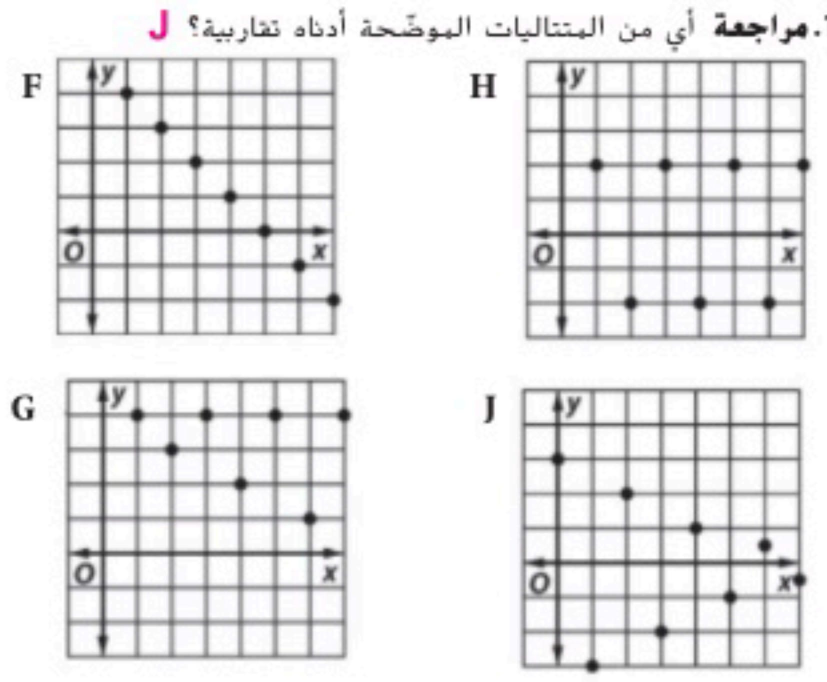
n	a_n
1	6
2	10
3	14
4	18

F $a_n = 6n$
G $a_n = n + 5$
H $a_n = 2n + 1$
J $a_n = 4n + 2$

104. مراجعة إذا كان $a_1 = 3$ و $a_2 = 5$ و $a_n = a_{n-2} + 3n$. أوجد a_{10}. **C**

A 59
B 75
C 89
D 125

105. مراجعة أي من المتتاليات الموضّحة أدناه تقاربية؟ **J**



انتبه!

تحليل الخطأ في التدريب 81. ينبغي أن يدرك الطلاب أن معادلة يوسف صحيحة. ولا تكون معادلة ناصر صحيحة إلا إذا كانت مكافئة لمعادلة يوسف ولكن في صورة مختلفة.

4 التقويم

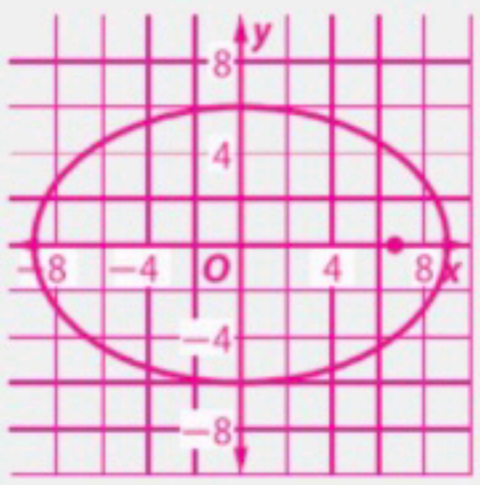
حصاد الأمس اطلب من الطلاب مشاركة كيف ساعدهم ما تعلموه في الدروس السابقة عن المتتاليات والمتسلسلات في درس اليوم عن المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

إجابات إضافية

81. كلاهما؛ الإجابة النموذجية: يمكن تبسيط صيغة ناصر إلى صيغة يوسف.

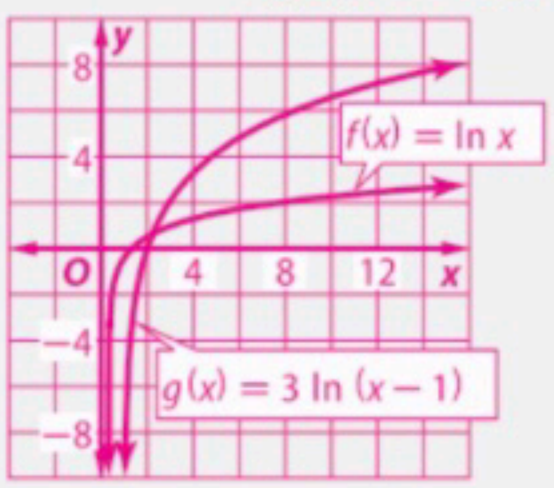
88. الإجابة النموذجية: المجموع الجزئي $-\frac{5}{2}n^2 + \frac{55}{2}n$ والذي يقترب من $-\infty$ حيث $n \to \infty$.

100a.



100b. $\frac{\left(x + 3\sqrt{5}\right)^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

101. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مزاحًا بمقدار وحدة إلى اليمين وتوسعته رأسيًا.



التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب إيجاد المتتالية الحسابية التي تكون حدودها دائمًا من مضاعفات 3 و 5 ولا تكون من مضاعفات 4 أو 6 أبدًا. الإجابة النموذجية: … ,105 ,75 ,45 ,15

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-9 إيجاد حدود المتتاليات الحسابية وأوساطها، ومجموع المتسلسلات الحسابية.

الدرس 3-9 إيجاد الحدود *النونية* والأوساط الهندسية للمتتالية الهندسية.
إيجاد ومجموع الحدود *النونية* للمتسلسلة الهندسية ومجموع المتسلسلة الهندسية اللا نهائية.

بعد الدرس 3-9 تمثيل الدوال في صورة متسلسلة لا نهائية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما العلاقة بين العوائد من عام إلى العام الذي يليه؟ تزداد بنسبة 13% كل عام.
- كيف يمكن توقع مبلغ عوائد العام التالي؟ ضرب عوائد هذا العام في 1.13.

الدرس 3-9 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

:: السابق

- أوجدت حدود المتتاليات الحسابية وأوساطها، ومجاميع المتسلسلات الحسابية.

:: الحالي

1. إيجاد الحدود *النونية* والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية.
2. إيجاد مجاميع الحدود *النونية* للمتسلسلات الهندسية، ومجاميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

:: لماذا؟

- أقيمت أول فعاليات صيفية لألعاب X في ولاية رود آيلاند عام 1995، والتي اشتملت على 27 حدثًا. ونظرًا لشعبيتها المتزايدة، افتتحت فعالياتها الشتوية في مدينة بيغ بير لاكي بكاليفورنيا عام 1997. ومع القاعدة الجماهيرية العريضة، تحظى ألعاب X السنوية حاليًا بتغطية شبكية مباشرة على مدار 24 ساعة. ومنذ عامه الافتتاحي، يشهد الحدث متوسط نمو بمعدل 13% في الإيرادات كل عام.

المفردات الجديدة

متتالية هندسية
geometric sequence
نسبة مشتركة
common ratio
أوساط هندسية
geometric means
متسلسلة هندسية
geometric series

1 المتتاليات الهندسية

تُسمّى المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدوين متتاليين فيها مقدارًا ثابتًا **بالمتتالية الهندسية**. ويُشار إلى النسبة الثابتة بمصطلح **النسبة المشتركة**، والتي يُرمز إليها بالرمز r. ولإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد تالٍ للحد الأول على الحد السابق له. وإذا أعطيت حدًا في المتتالية، تستطيع إيجاد الحد التالي بضرب الحد المعطى في النسبة المشتركة. وفي حين أن معدل التغير في المتتالية الحسابية يكون ثابتًا، يمكن لمعدل التغير في المتتالية الهندسية إما أن يزيد أو ينقص.

مثال 1 المتتاليات الهندسية

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

a. $8, -2, \frac{1}{2}, \ldots$

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = -2 \div 8 = -\frac{1}{4}$

$a_3 \div a_2 = \frac{1}{2} \div -2 = -\frac{1}{4}$

أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من النسبة المشتركة.

النسبة المشتركة هي $-\frac{1}{4}$. اضرب الحد الثالث في $-\frac{1}{4}$ لإيجاد الحد الرابع، وهكذا.

$a_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$ $\quad a_5 = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32}$ $\quad a_6 = \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{128}$

الحدود الثلاثة التالية هي $-\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{32}$ و $-\frac{1}{128}$.

b. $w + 3, 2w + 6, 4w + 12, \ldots$

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = \frac{2w + 6}{w + 3}$ $\quad a_2 = 2w + 6$ و $a_1 = w + 3$

$= \frac{2(w + 3)}{w + 3}$ $\quad$ حلّل إلى العوامل.

$= 2$ $\quad$ بسّط.

$a_3 \div a_2 = \frac{4w + 12}{2w + 6}$ $\quad a_3 = 4w + 12$ و $a_2 = 2w + 6$

$= \frac{4(w + 3)}{2(w + 3)}$ $\quad$ حلّل إلى العوامل.

$= 2$ $\quad$ بسّط.

النسبة المشتركة هي 2. اضرب الحد الثالث في 2 لإيجاد الحد الرابع، وهكذا.

$a_4 = 2(4w + 12)\ 8 = w + 24$

$a_5 = 2(8w + 24)\ \ 16 = w + 48$

$a_6 = 2(16w + 48)\ 32 = w + 96$

الحدود الثلاثة التالية هي $8w + 24$، و $16w + 48$، و $32w + 96$.

تمرين موجّه

$-\frac{1}{4}; -r + 2, \frac{r}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{r}{16} + \frac{1}{8}$

1A. $4, 11, 30.25, \ldots$ $\quad$ **1B.** $64r - 128, -16r + 32, 4r - 8, \ldots$

1A. 2.75; 83.1875; 228.765625; 629.10546875

انتبه!

نوع المتتالية تذكّر أن المتتالية إذا لم تكن حسابية، فهذا لا يعني بالضرورة أنها هندسية. اختبر العديد من الحدود من أجل النسبة المشتركة قبل أن تحدّد أنها بالفعل هندسية.

تعلمت أن المتتاليات الحسابية يمكن تعريفها بكل من الصيغتين الضمنية والصريحة، وهذا ينطبق أيضا على المتتاليات الهندسية، فيمكن التعبير عن المتتالية الهندسية بالصيغة الضمنية حيث يتم إيجاد الحد a_n عن طريق الحصول على ناتج ضرب الحد السابق له a_{n-1} و r، أو $a_n = a_{n-1}r$، كما يوضّح المثال السابق. ولوضع صيغة صريحة لمتتالية هندسية، أمعن النظر في النمط الذي شكلته المتتالية الهندسية التي بها $a_1 = 3$ و $r = 4$.

	الحد	الصيغة الموسعة	الصيغة الأسيّة	مثال
الحد الأول	a_1	a_1	a_1	3
الحد الثاني	a_2	$a_1 \cdot r$	a_1r^1	$3 \cdot 4 = 12$
الحد الثالث	a_3	$a_1 \cdot r \cdot r$	a_1r^2	$3 \cdot 4^2 = 48$
الحد الرابع	a_4	$a_1 \cdot r \cdot r \cdot r$	a_1r^3	$3 \cdot 4^3 = 192$
الحد الخامس	a_5	$a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r$	a_1r^4	$3 \cdot 4^4 = 768$
الحد النوني	a_n	$\underbrace{a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-1 \text{ عوامل}}$	a_1r^{n-1}	$3 \cdot 4^{n-1}$

المفهوم الأساسي الحد *النوني* لمتتالية هندسية

الشرح الحد *النوني* لمتتالية هندسية الحد الأول بها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r تحدّده الصيغة $a_n = a_1r^{n-1}$.

مثال الحد التاسع في المتتالية ... ,50 ,10 ,2 هو $a_9 = 2 \cdot 5^{9-1}$ أو 781,250.

مثال 2 الصيغ الصريحة والضمنية

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية الهندسية المعطاة في المثال 1a.

لإيجاد الصيغة الصريحة، عوّض كما يلي، $a_1 = 8$ و $r = -0.25$ في صيغة الحد النوني.

$a_n = a_1r^{n-1}$ — *الحد النوني للمتتالية الهندسية*

$= 8(-0.25)^{n-1}$ — $a_1 = 8$ و $r = -0.25$

لإيجاد الصيغة الضمنية، حدّد الحد الأول a_1، ثم أشِر إلى أن الحد التالي هو ناتج ضرب الحد السابق a_{n-1} و r. $a_1 = 8$، $a_n = (-0.25)a_{n-1}$

تمرين موجّه

2. اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد النوني في المتتالية ... ,312.5 ,25 ,2 .

$a_n = 2(12.5)^{n-1}; a_1 = 2, a_n = 12.5 \cdot a_{n-1}$

إيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية يبسّط بالصيغ الصريحة.

مثال 3 الحدود النونية

أوجد الحد السابع والعشرين في المتتالية الهندسية ... ,120.96 ,151.2 ,189 .

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = 151.2 \div 189 = 0.8$ — أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق

$a_3 \div a_2 = 120.96 \div 151.2 = 0.8$ — من النسبة المشتركة.

استخدم صيغة الحد النوني لمتتالية هندسية.

$a_n = a_1r^{n-1}$ — *الحد النوني للمتتالية الهندسية*

$a_{27} = 189(0.8)^{27-1}$ — $n = 27$ و $a_1 = 189$، و $r = 0.8$

$a_{27} \approx 0.57$ — بسّط.

539

- إذا كان العائد في 1997 هو AED 500,000، فكم كان العائد في 2007 إذا استمر النمط؟ AED 1,697,283.70

1 المتتاليات الهندسية

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية واستخدامها لإيجاد الحدود الأخرى في المتتالية.
الأمثلة 4–2 تستخدم الصيغتان الصريحة والتكرارية لمتتالية هندسية لإيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية.
المثال 5 يوضح كيفية إيجاد الأوساط الهندسية بين حدين غير متتاليين لمتتالية هندسية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

a. $-6, 9, -13.5, \ldots$ -1.5; $20.25, -30.375, 45.5625$

b. $243n - 729, -81n + 243, 27n - 81, \ldots$ $-\frac{1}{3}$; $-9n + 27, 3n - 9, -n + 3$

2 اكتب الصيغتين الصريحة والتكرارية لإيجاد الحد النوني في المتتالية .... ,4– ,2 ,1–.
$a_n = -1(-2)^{n-1}$.
$a_1 = -1; a_n = (-2)a_{n-1}$

3 أوجد الحد الحادي عشر للمتتالية الهندسية ,115.9 ,122– .... ,110.105– حوالي -73.05

التركيز على محتوى الرياضيات

المتتالية المتزايدة أو المتناقصة إذا كانت النسبة المشتركة لمتتالية هندسية موجبة، فيمكن أن تكون المتتالية متزايدة أو متناقصة. وإذا كانت النسبة المشتركة سالبة، فستكون المتتالية متباينة؛ أي تتبدل من السالب إلى الموجب بين الحد والحد الذي يليه.

إرشاد للمعلمين الجدد

النسبة المشتركة يمكن إيجاد النسبة المشتركة r لمتتالية أو متسلسلة هندسية بقسمة أحد الحدود على الحد السابق. وللتأكد أن هناك نسبة مشتركة، اقسم حدين متتاليين آخرين للمتتالية أو المتسلسلة.

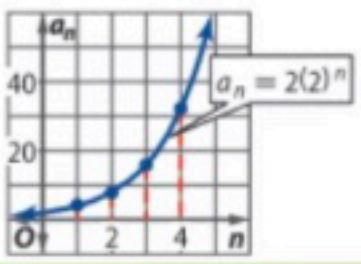
تمرين موجّه

أوجد الحد المذكور لكل متتالية هندسية، أو للمتتالية ذات الخصائص المعطاة.

3A. a_9 من أجل $4, 14, 49, \ldots$ **≈90075.02**

3B. a_{12} إذا كان $a_3 = 32$ و $r = -4$ **−8,388,608**

كما أن المتتاليات الحسابية دوال خطية مجالاتها مقيدة، فإن المتتاليات الهندسية دوال أيضًا. أمعن النظر في الدالة الأسيّة $f(x) = 2(2)^x$ والصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية $a_n = 2(2)^n$.



لاحظ أن التمثيلات البيانية لحدود المتتالية الهندسية تقع على منحنى، كما هو موضّح. ويمكن تمثيل المتتالية الهندسية بدالة أسيّة مجالها مقيد بالأعداد الطبيعية.

مثال 4 من الحياة اليومية الحد النوني لمتتالية هندسية

السيارات اشترى منصور سيارة حديثة الطراز بمبلغ AED 15,000. وفي نهاية كل عام، تنخفض قيمتها بمعدل 11%.

a. اكتب صيغة صريحة لقيمة سيارة منصور بعد n من الأعوام.

إذا كانت قيمة السيارة تنخفض بمعدل 11% في العام، فإنها تحتفظ بنسبة 11% − 100% أو 89% من قيمتها الأصلية. لاحظ أن القيمة الأصلية المعطاة تمثّل الحد a_0 وليس الحد a_1. إذا نحتاج إلى استخدام صيغة معدّلة للحد *النوني* لهذه المتتالية الهندسية.

الحد الأول	$a_1 = a_0 r$
الحد الثاني	$a_2 = a_0 r^2$
⋮	⋮
الحد *النوني*	$a_n = a_0 r^n$

استخدم هذه الصيغة المعدّلة لإيجاد صيغة صريحة لقيمة السيارة بعد n من الأعوام.

$a_n = a_0 r^n$ — *الحد النوني المعدّل للمتتالية الهندسية*

$a_n = 15{,}000(0.89)^n$ — $a_0 = 15{,}000,\ r = 0.89$

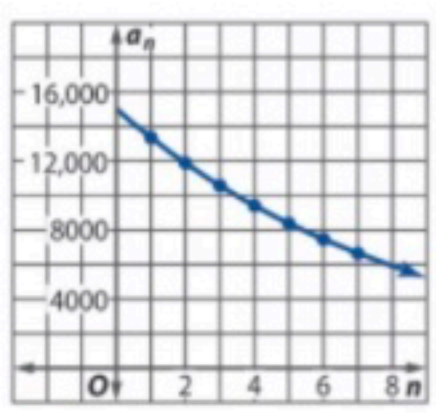
b. ما قيمة سيارة منصور في نهاية العام السابع؟

أوجد قيمة الصيغة التي أوجدتها في الجزء a من أجل n = 7.

$a_n = 15{,}000(0.89)^n$ — المعادلة الأصلية

$= 15{,}000(0.89)^7$ — $n = 7$

≈ 6634.70 — بسّط.



قيمة السيارة في بداية العام السابع تبلغ AED 6634.70 تقريبًا.

قيمة السيارة في كل عام موضّحة على هيئة نقطة على التمثيل البياني، والدالة التي تصل النقاط تمثّل اضمحلالاً أسيًا.

الربط بالحياة اليومية

يمكن أن تنخفض قيمة سيارة مشتراة حديثًا بمعدل يصل إلى 30-35% في عامها الأول، وفي كل عام بعد ذلك تستمر القيمة في الانخفاض بمعدل 7-12%، بناءً على الماركة والطراز. وبعد مدة تبلغ خمسة أعوام في المتوسط، تصبح قيمة السيارات 35% من سعر الملصق الأصلي، مما يجعل عملية شراء السيارات أمرًا مكلّفًا.

المصدر: كتاب كيلي الأزرق

تمرين موجّه

4. **الزوارق** اشترى محمود زورقًا شخصيًا بمبلغ AED 9000. افترض أنه بحلول نهاية كل عام، تنخفض قيمة الزورق بمعدل 30%.

A. اكتب صيغة صريحة لإيجاد قيمة زورق محمود بعد n من الأعوام. $a_n = 9000(0.70)^n$

B. ما قيمة زورق محمود بعد 5 أعوام؟ **AED 1512.63**

مثال إضافي

4 **العقارات** اشترى زوجان منزلاً بمبلغ AED 225,000. وفي نهاية كل عام، تزداد قيمته بمعدل 3%.

a. اكتب الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة المنزل بعد n من الأعوام. $a_n = 225{,}000(1.03)^n$

b. ما قيمة المنزل بعد العام العاشر؟ حوالي AED 302,381.19

التركيز على محتوى الرياضيات

زيادة القيمة وانخفاض القيمة لزيادة القيمة، اجمع نسبة زيادة القيمة إلى 100% بينما تزداد قيمة العنصر. لانخفاض القيمة، اطرح نسبة زيادة القيمة من 100% بينما تتناقص قيمة العنصر. وتكون النسبة الناتجة هي النسبة المشتركة.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتتاليات والمتسلسلات الهندسية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف ترتبط أنماط التغيير بسلوك الدالة؟ الإجابة النموذجية: يمكن تمثيل بعض الأنماط عدديًا باستخدام المتتاليات ثم تمثيلها باستخدام الدوال. وتعتمد الدالة المستخدمة لتمثيل المتتالية على نمط التغيير. على سبيل المثال، إن النمط الذي يمكن تمثيله بمتتالية حسابية يمكن تمثيله باستخدام دالة خطية نظرًا لأن المتتالية والدالة يظهران نفس السلوك – فكل من حدود المتتالية والتمثيل البياني للدالة يتغيران بنسبة ثابتة.

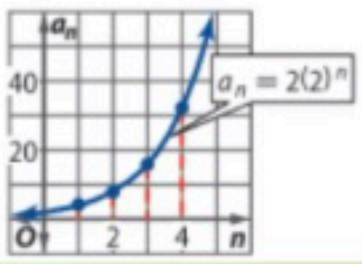
540 | الدرس 9-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

تمرين موجّه

أوجد الحد المذكور لكل متتالية هندسية، أو للمتتالية ذات الخصائص المعطاة.

3A. a_9 من أجل $4, 14, 49, \ldots$ **≈90075.02**　　**3B.** a_{12} إذا كان $a_3 = 32$ و $r = -4$ **−8,388,608**

كما أن المتتاليات الحسابية دوال خطية مجالاتها مقيدة، فإن المتتاليات الهندسية دوال أيضًا. أمعن النظر في الدالة الأسيّة $f(x) = 2(2)^x$ والصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية $a_n = 2(2)^n$.



لاحظ أن التمثيلات البيانية لحدود المتتالية الهندسية تقع على منحنى، كما هو موضّح. ويمكن تمثيل المتتالية الهندسية بدالة أسيّة مجالها مقيد بالأعداد الطبيعية.

مثال 4 من الحياة اليومية الحد النوني لمتتالية هندسية

السيارات اشترى منصور سيارة حديثة الطراز بمبلغ AED 15,000. وفي نهاية كل عام، تنخفض قيمتها بمعدل 11%.

a. اكتب صيغة صريحة لقيمة سيارة منصور بعد n من الأعوام.

إذا كانت قيمة السيارة تنخفض بمعدل 11% في العام، فإنها تحتفظ بنسبة 11% − 100% أو 89% من قيمتها الأصلية. لاحظ أن القيمة الأصلية المعطاة تمثل الحد a_0 وليس الحد a_1. إذًا نحتاج إلى استخدام صيغة معدّلة للحد *النوني* لهذه المتتالية الهندسية.

الحد الأول	$a_1 = a_0 r$
الحد الثاني	$a_2 = a_0 r^2$
⋮	⋮
الحد *النوني*	$a_n = a_0 r^n$

استخدم هذه الصيغة المعدّلة لإيجاد صيغة صريحة لقيمة السيارة بعد n من الأعوام.

$a_n = a_0 r^n$　　*الحد النوني المعدّل للمتتالية الهندسية*

$a_n = 15,000(0.89)^n$　　$a_0 = 15,000,\ r = 0.89$

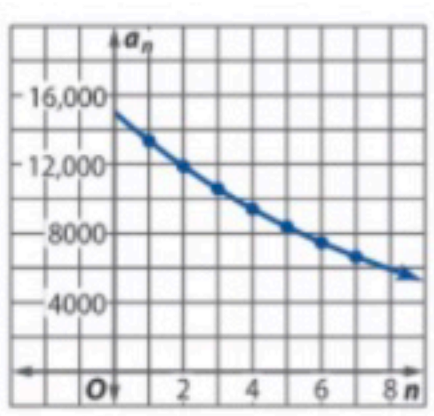
b. ما قيمة سيارة منصور في نهاية العام السابع؟

أوجد قيمة الصيغة التي أوجدتها في الجزء a من أجل n = 7.

$a_n = 15,000(0.89)^n$　　المعادلة الأصلية

$= 15,000(0.89)^7$　　$n = 7$

≈ 6634.70　　بسّط.



قيمة السيارة في بداية العام السابع تبلغ AED 6634.70 تقريبًا.

قيمة السيارة في كل عام موضّحة على هيئة نقطة على التمثيل البياني، والدالة التي تصل النقاط تمثّل اضمحلالاً أسيًا.

الربط بالحياة اليومية

يمكن أن تنخفض قيمة سيارة مشتراة حديثًا بمعدل يصل إلى 30-35% في عامها الأول، وفي كل عام بعد ذلك تستمر القيمة في الانخفاض بمعدل 7-12%، بناءً على الماركة والطراز. وبعد مدة تبلغ خمسة أعوام في المتوسط، تصبح قيمة السيارات 35% من سعر الملصق الأصلي، مما يجعل عملية شراء السيارات أمرًا مكلّفًا.

المصدر: كتاب كيلي الأزرق

تمرين موجّه

4. الزوارق اشترى محمود زورقًا شخصيًا بمبلغ AED 9000. افترض أنه بحلول نهاية كل عام، تنخفض قيمة الزورق بمعدل 30%.

A. اكتب صيغة صريحة لإيجاد قيمة زورق محمود بعد n من الأعوام. $a_n = 9000(0.70)^n$

B. ما قيمة زورق محمود بعد 5 أعوام؟ **AED 1512.63**

مثال إضافي

4 **العقارات** اشترى زوجان منزلاً بمبلغ AED 225,000. وفي نهاية كل عام، تزداد قيمته بمعدل 3%.

a. اكتب الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة المنزل بعد n من الأعوام. $a_n = 225,000(1.03)^n$

b. ما قيمة المنزل بعد العام العاشر؟ حوالي AED 302,381.19

التركيز على محتوى الرياضيات

زيادة القيمة وانخفاض القيمة لزيادة القيمة، اجمع نسبة زيادة القيمة إلى 100% بينما تزداد قيمة العنصر. لانخفاض القيمة، اطرح نسبة زيادة القيمة من 100% بينما تتناقص قيمة العنصر. وتكون النسبة الناتجة هي النسبة المشتركة.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتتاليات والمتسلسلات الهندسية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف ترتبط أنماط التغيير بسلوك الدالة؟ الإجابة النموذجية: يمكن تمثيل بعض الأنماط عدديًا باستخدام المتتاليات ثم تمثيلها باستخدام الدوال. وتعتمد الدالة المستخدمة لتمثيل المتتالية على نمط التغيير. على سبيل المثال، إن النمط الذي يمكن تمثيله بمتتالية حسابية يمكن تمثيله باستخدام دالة خطية نظرًا لأن المتتالية والدالة يظهران نفس السلوك - فكل من حدود المتتالية والتمثيل البياني للدالة يتغيران بنسبة ثابتة.

540 | الدرس 9-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

مثال إضافي

5 اكتب متتالية تحتوي على ثلاثة حدود هندسية بين 264 و 1.03125
264, 66, 16.5, 4.125, 1.03125
أو 264, −66, 16.5, −4.125, 1.03125

إرشاد للمعلمين الجدد

الحد النوني لتوليد عدة حدود متتالية سريعًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. أدخل الصيغة الصريحة للمتتالية كدالة لـ y و x باستخدام القائمة [Y=]. ثم استخدم دالة الجدول بالضغط على [2nd] [TABLE]. وسينشأ عن ذلك قائمة من الحدود بقيم مختلفة لـ x و y، وهما a_n و n على التوالي.

على غرار المتتاليات الحسابية، إذا كان هناك حدّان غير متتاليين معروفان في متتالية هندسية، يمكن حساب الحدود الموجودة بينهما، وتُسمّى هذه الحدود **بالأوساط الهندسية**.

مثال 5 الأوساط الهندسية

اكتب متتالية بها وسطان هندسيان بين 480 و 7.5−.

ستكون المتتالية مشابهة لما يلي: 480, __?__, __?__, −7.5.

لاحظ أن $a_1 = 480$، و $n = 4$، و $a_4 = -7.5$. أوجد النسبة المشتركة باستخدام الحد النوني لصيغة المتتالية الهندسية.

$a_4 = a_1r^{n-1}$	الحد النوني للمتتالية الهندسية
$-7.5 = 480r^{4-1}$	$a_4 = -7.5$، و $a_1 = 480$، و $n = 4$
$-\frac{1}{64} = r^3$	بسّط واقسم كل طرف على 480.
$-\frac{1}{4} = r$	خذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

النسبة المشتركة هي $-\frac{1}{4}$. استخدم r لإيجاد الأوساط الهندسية.

$a_2 = 480(-0.25) = -120$ $\quad$ $a_3 = -120(-0.25) = 30$

إذًا، المتتالية التي بها وسطان هندسيان بين 480 و 7.5− هي 480, −120, 30, −7.5.

تمرين موجّه

أوجد الأوساط الهندسية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

5A. 4− و 13.5؛ وسيطان 6, −9 $\quad$ **5B.** 10 و 3 ;0.016 أوساط −2, 0.4, −0.08

نصيحة دراسية

الأوساط الهندسية أحيانًا، يكون من الممكن وجود أكثر من مجموعة واحدة من الأوساط الهندسية. على سبيل المثال، الأوساط الهندسية الثلاثة بين 3 و 48 يمكن أن تكون 6 و 12 و 24 أو 6− و 12 و 24−.

2 المتسلسلات الهندسية

إن **المتسلسلة الهندسية** هي مجموع حدود المتتالية الهندسية.

متتالية هندسية	متسلسلة هندسية
$2, 4, 8, 16, 32$	$2 + 4 + 8 + 16 + 32$
$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}$	$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3}$
$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

يمكن وضع صيغة لمجموع S_n لحدود n الأولى في متسلسلة هندسية منتهية من خلال النظر إلى المتسلسلتين S_n و rS_n. ولتكوين حدود rS_n، يُضرب كل حد في المتسلسلة S_n في r. ثم تتم محاذاة هاتين المتسلسلتين حتى تجمع الحدود المتشابهة معًا. ثم نطرح rS_n من S_n.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \\ (-)\ rS_n &= \phantom{a_1 +{}} a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n \end{aligned}$$

$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$	اطرح.
$S_n(1 - r) = a_1 - a_1r^n$	حلّل إلى العوامل.
$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$	اقسم كل طرف على $r - 1$.
$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$	حلّل إلى العوامل.

إذًا، $S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$.

541

إن لم تكن قيمة n معطاة، فلا يزال إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية ممكنًا. فإذا ما نظرنا إلى الخطوة قبل الأخيرة في البرهان، يمكننا تعويض a_1r^n.

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية منتهية

$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1-r}$ اضرب.

$= \frac{a_1 - a_1r^{n-1} \cdot r}{1-r}$ حلّل r واحدًا من a_1r^n إلى العوامل

$= \frac{a_1 - a_nr}{1-r}$ $a_1r^{n-1} = a_n$، صيغة الحد النوني لمتتالية هندسية

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة هندسية منتهية

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية بها حدود n أو المجموع الجزئي *النوني* لمتسلسلة هندسية باستخدام واحدة من صيغتين متصلتين.

الصيغة 1 $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

الصيغة 2 $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1-r}$

مثال 6 مجاميع المتسلسلات الهندسية

a. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى في المتسلسلة الهندسية ... + 24.5 + 14 + 8 .

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = 14 \div 8 = 1.75$ أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية

$a_3 \div a_2 = 24.5 \div 14 = 1.75$ للتحقّق من النسبة المشتركة.

النسبة المشتركة هي 1.75. استخدم الصيغة 1 لإيجاد مجموع المتسلسلة.

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ الصيغة 1

$S_6 = 8\left(\frac{1-1.75^6}{1-1.75}\right)$ $n = 6$، $a_1 = 8$، و $r = 1.75$

$S_6 \approx 295.71$ بسّط.

مجموع الحدود الستة الأولى في المتسلسلة الهندسية هو 295.71 تقريبًا.

تحقق الحدود الثلاثة التالية في المتتالية ذات الصلة هي 42.875، و 75.03125، و 131.3046875.

$8 + 14 + 24.5 + 42.875 + 75.03125 + 131.3046875 \approx 295.71$ ✓

b. أوجد مجموع الحدود n الأولى في متسلسلة هندسية بها $a_1 = 3$، و $a_n = 768$، و $r = -2$.

استخدم الصيغة 2 لإيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية.

$S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1-r}$ الصيغة 2

$= \frac{3 - 768(-2)}{1-(-2)}$ $a_1 = 3$، و $a_n = 768$، و $r = -2$

$= 513$ بسّط.

مجموع الحدود n الأولى في المتسلسلة الهندسية هو 513.

تمرين موجّه

6A. أوجد مجموع أول 11 حدًا في المتسلسلة الهندسية ... + 85.75 + (24.5−) + 7 . $\approx 1{,}501{,}877.34$

6B. أوجد مجموع الحدود n الأولى في متسلسلة هندسية بها $a_1 = -8$، و $a_n = 131{,}072$، و $r = -4$.
104,856

نصيحة دراسية

المتسلسلات الهندسية اللانهائية مقابل المتسلسلات الهندسية المنتهية لاحظ أن المتسلسلة المعطاة في المثال 6a هي متسلسلة هندسية لانهائية. ولأنه طُلب منك إيجاد مجموع *الحدود الستة الأولى* في المتسلسلة، فأنت بالفعل توجد مجموع متسلسلة منتهية.

2 المتسلسلات الهندسية

المثالان 6 و 7 يوضحان كيفية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية باستخدام مجموع صيغة متسلسلة هندسية منتهية ورمز سيجما. **المثال 4** يوضح كيفية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

مثال إضافي

6 a. أوجد مجموع أول 11 حدًا في المتسلسلة الهندسية .... ,9 ,6−, 4 حوالي 140

b. أوجد مجموع الحدود n الأولى في متسلسلة هندسية بها $a_1 = -4$ و $a_n = -65{,}536$ و $r = 2$. $-131{,}068$

مثال إضافي

7 أوجد $\sum_{n=3}^{8} -2(-2)^{n-1}$. **168**

يمكن تمثيل المتسلسلات الهندسية أيضًا بالرمز سيجما.

مثال 7 مجموع الهندسية مع الرمز سيجما

أوجد $\sum_{n=2}^{7} 3(5)^{n-1}$.

أوجد n، و a_1، و r.

$n = 7 - 2 + 1 = 6$	الحد الأعلى ناقص الحد الأدنى زائد 1
$a_1 = 3(5)^2 - 1 = 15$	$n = 2$
$r = 5$	r هي أساس الدالة الأسيّة.

الطريقة 1 عوّض كما يلي: $n = 6$، و $a_1 = 15$، و $r = 5$ في الصيغة 1.

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$	الصيغة 1
$S_6 = 15\left(\frac{1-5^6}{1-5}\right)$	$n = 6$ و $r = 5$ و $a_1 = 15$
$S_6 = 58,590$	بسّط.

الطريقة 2 أوجد a_n.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني للمتتالية الهندسية
$= 15(5)^{6-1}$	$n = 6$ و $r = 5$ و $a_1 = 15$
$= 46,875$	بسّط.

عوّض كما يلي: $a_1 = 15$، و $a_n = 46,875$، و $r = 5$ في الصيغة 2.

$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$	الصيغة 2
$S_6 = \frac{15 - (46,875)(5)}{1-5}$	$r = 5$ و $a_n = 46,875$ و $a_1 = 15$
$S_6 = 58,590$	بسّط.

إذًا، $\sum_{n=2}^{7} 3(5)^{n-1} = 58,590$.

تمرين موجّه

7A. $\sum_{n=16}^{31} 0.5(2)^{n-1}$ **1,073,725,440**

7B. $\sum_{n=4}^{11} 120(0.5)^{n-1}$ **≈29.88**

نصيحة دراسية

المتسلسلات اللانهائية إذا كان لمتتالية المجاميع الجزئية S_n حد، إذًا يكون للمتسلسلة اللانهائية المناظرة مجموع، والحد *النوني* a_n للمتسلسلة يقترب من 0 حيث $n \to \infty$. إلا أنه إذا كان الحد *النوني* للمتسلسلة يقترب من 0، لا يكون للمتسلسلة اللانهائية مجموع بالضرورة. فعلى سبيل المثال، المتسلسلة التوافقية $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ليس لها مجموع.

تعلمت أن حساب مجاميع المتسلسلات اللانهائية قد يكون ممكنًا إذا كانت متتالية الحدود تقاربية إلى 0. لهذا السبب، لا يمكن إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية اللانهائية.

يمكن استخدام صيغة إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية لوضع صيغة لإيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. إذا كان $|r| > 1$. إذًا $|r^n|$ تزيد بدون حد حيث $n \to \infty$. إلا أنه عندما تكون $|r| < 1$، فإن r^n تقترب من 0 حيث $n \to \infty$. إذًا،

$S = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$	صيغة مجموع متسلسلة هندسية منتهية
$= a_1\left(\frac{1-0}{1-r}\right)$	r^n تقترب من 0 حيث $n \to \infty$.
$= \frac{a_1}{1-r}$	بسّط واضرب.

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

يُمكن إيجاد المجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية بها $|r| < 1$ باستخدام

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط الطبيعي اطلب من الطلاب بحث كيف يستخدم علماء البيئة والأحياء المتسلسلات الهندسية لتمثيل أعداد الكائنات المختلفة. اطلب منهم وصف كيف تساعد المتسلسلات الهندسية في توقع ما سيحدث من تغييرات في أعداد الكائنات.

تشتمل صيغة إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية على ثلاثة متغيرات: S، و a_1، و r. إذا عُرف أي متغيرين من الثلاثة، تستطيع الحل لإيجاد الثالث.

مثال 8 مجاميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية.

a. $9 + 3 + 1 + \ldots$

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = 3 \div 9 = \frac{1}{3}$ — أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من النسبة المشتركة.

$a_3 \div a_2 = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$

النسبة المشتركة هي r $\frac{1}{3}$، و $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. وهذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية لها مجموع. استخدم صيغة إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ — صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$= \frac{9}{1 - \frac{1}{3}}$ — $r = \frac{1}{3}$ و $a_1 = 9$

$= 13.5$ — بسّط.

مجموع المتسلسلة اللانهائية هو 13.5.

b. $0.25 + (-1.25) + 6.25 + \ldots$

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = -1.25 \div 0.25 = -5$ — أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من النسبة المشتركة.

$a_3 \div a_2 = 6.25 \div (-1.25) = -5$

النسبة المشتركة r هي -5، و $|-5| > 1$. إذًا، هذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية ليس لها مجموع.

c. $\sum_{n=4}^{\infty} 4(0.2)^{n-1}$

النسبة المشتركة r هي 0.2، و $|0.2| < 1$. إذًا، هذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية لها مجموع. أوجد a_1.

$a_1 = 4(0.2)^{4-1}$ — الحد الأدنى = 4

$= 0.032$ — بسّط.

استخدم صيغة إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ — صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$= \frac{0.032}{1 - 0.2}$ — $r = 0.2$ و $a_1 = 0.032$

$= 0.04$ — بسّط.

مجموع المتسلسلة اللانهائية هو 0.04.

تمرين موجّه

8A. $10 + (-5) + 2.5 + \ldots$ $\frac{20}{3}$

8B. $20 + 15 + 10 + \ldots$ لا يوجد

8C. $\sum_{n=1}^{\infty} 120(0.8)^{n-1}$ 600

نصيحة دراسية

النسبة المشتركة تذكّر أن $|r| < 1$ مكافئ لـ $-1 < r < 1$.

مثال إضافي

8 إذا أمكن، فأوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية.

a. $24 + 18 + 13.5 + \ldots$ 96

b. $0.33 + 0.66 + 1.32 + \ldots$ لا يوجد

c. $\sum_{n=2}^{\infty} 3(0.65)^{n-1}$ $\frac{39}{7}$

إجابات إضافية

1. $-2; 2, -4, 8$
2. $-\frac{3}{4}; -\frac{27}{128}, \frac{81}{512}, -\frac{243}{2048}$
3. $1.5; 1.6875, 2.53125, 3.796875$
4. $2.5; 125, 312.5, 781.25$
5. $5; 250x, 1250x, 6250x$
6. $\frac{1}{4}; x, \frac{1}{4}x, \frac{1}{16}x$
7. $3; 27x + 135, 81x + 405, 243x + 1215$
8. $-3; 243 + 27y, -729 - 81y, 2187 + 243y$

9a. الإجابة النموذجية: متتالية المحيطات هي $\pi d_1, \pi d_2, \pi d_3, \pi d_4, \pi d_5$. النسبة المشتركة هي $\frac{\pi d_2}{\pi d_1}$ أو $\frac{d_2}{d_1}$.

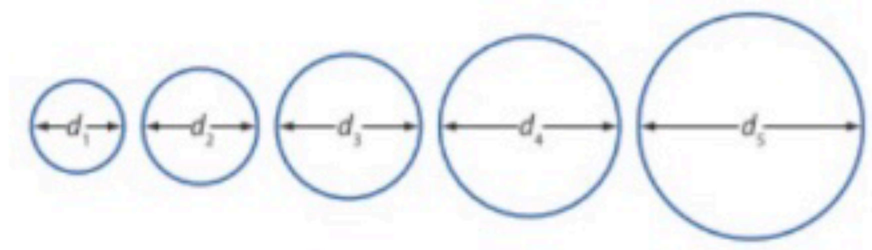
9b. الإجابة النموذجية: متتالية المساحات هي $\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2, \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2, \pi\left(\frac{d_3}{2}\right)^2, \pi\left(\frac{d_4}{2}\right)^2, \pi\left(\frac{d_5}{2}\right)^2$. النسبة المشتركة هي $\frac{\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$ أو $\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$.

التمارين

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية. (المثال 1) **8–1. انظر الهامش.**

1. $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \ldots$
2. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \ldots$
3. $0.5, 0.75, 1.125, \ldots$
4. $8, 20, 50, \ldots$
5. $2x, 10x, 50x, \ldots$
6. $64x, 16x, 4x, \ldots$
7. $x + 5, 3x + 15, 9x + 45, \ldots$
8. $-9 - y, 27 + 3y, -81 - 9y, \ldots$

9. **الهندسة** فكّر في متتالية دوائر أقطارها تشكّل المتتالية الهندسية، d_1, d_2, d_3, d_4, d_5.



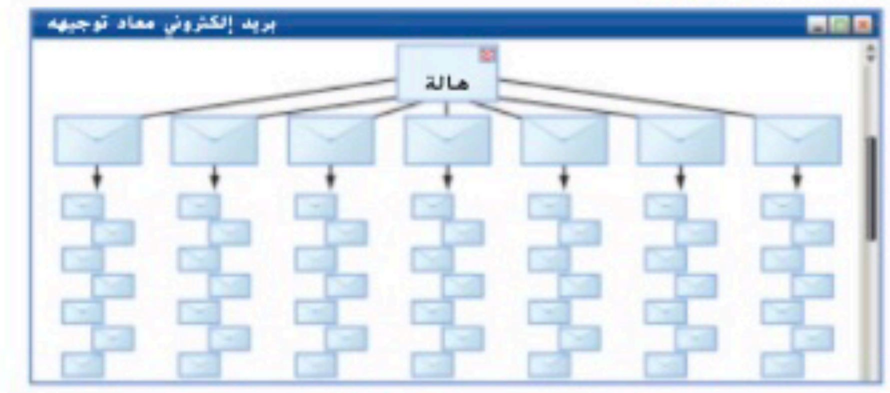
a. أوضح أن متتالية محيطات الدوائر هندسية أيضًا. حدّد r.
a–b. انظر الهامش.

b. أوضح أن متتالية مساحات الدوائر هندسية أيضًا. حدّد النسبة المشتركة.

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية هندسية. (المثال 2) **17–10. انظر الهامش.**

10. $36, 12, 4, \ldots$
11. $64, 16, 4, \ldots$
12. $-2, 10, -50, \ldots$
13. $4, -12, 36, \ldots$
14. $4, 8, 16, \ldots$
15. $20, 30, 45, \ldots$
16. $15, 5, \frac{5}{3}, \ldots$
17. $\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \ldots$

18. **البريد الإلكتروني المطلوب إعادة توجيهه** تلقّت هالة بريدًا إلكترونيًا مطلوب إعادة توجيهه إلى أشخاص آخرين. وقد أعادت توجيهه إلى 7 من صديقاتها. وكل صديقة من صديقاتها أعادت توجيهه إلى 7 من صديقاتها. (المثال 2)



a. اكتب صيغة صريحة للنمط. $a_n = 7^{n-1}$

b. كم عدد الأشخاص الذين سيتلقون البريد الإلكتروني بعد إعادة توجيهه 6 مرات؟ **16,807 أشخاص**

19. **الأحياء** ينقسم نوع معيّن من البكتيريا كل 15 دقيقة لينتج عن ذلك اثنان كاملان من البكتيريا. (المثال 2)

a. إذا كانت المستعمرة المبدئية تحتوي على عدد b_0 من البكتيريا، فاكتب معادلة تحدّد عدد البكتيريا b_t الموجودة بعد t من الساعات. $b_t = b_0 \cdot 16^t$

b. افترض أن هناك علبة بتري تحتوي على 12 من البكتيريا. استخدم المعادلة التي أوجدتها في الجزء a لتحديد عدد البكتيريا الموجودة بعد 4 ساعات. **786,432**

أوجد الحد المذكور لكل متتالية هندسية، أو للمتتالية ذات الخصائص المعطاة. (المثال 3)

20. a_9 في $60, 30, 15, \ldots$ **$\frac{15}{64}$**

21. a_4 في $\ldots 7, 14, 28,$ **56**

22. a_5 في $\ldots 3, 1, \frac{1}{3},$ **$\frac{1}{27}$**

23. a_6 في $\ldots 540, 90, 15,$ **$\frac{5}{72}$**

24. a_7 إذا كان $a_3 = 24$ و $r = 0.5$ **1.5**

25. a_6 إذا كان $a_3 = 32$ و $r = -0.5$ **−4**

26. a_6 إذا كان $a_1 = 16{,}807$ و $r = \frac{3}{7}$ **243**

27. a_8 إذا كان a_1 4096 و $r = \frac{1}{4}$ **$\frac{1}{4}$**

28. **المحاسبة** يعمل السيد محمد محاسبًا لدى شركة صغيرة. وفي 1 يناير عام 2009، اشترت الشركة أجهزة حاسب آلي وطابعات وماسحات ضوئية ومعدات تبلغ قيمتها AED 50,000. ولأن هذه المعدات تعتبر من أصول الشركة، فإن السيد محمدًا يحتاج إلى تحديد قيمة معدات الحاسب الآلي في الوقت الحاضر. ووفقًا لتقديره، فإن قيمة هذه المعدات تنخفض بمعدل 45% كل عام. فما القيمة التي ينبغي على السيد محمد تحديدها للمعدات في تقرير المحاسبة الذي سيقدمه في نهاية عام 2014؟ (المثال 4) **AED 2516.42**

29. أوجد الحد السادس في متتالية هندسية حدها الأول 9، والنسبة المشتركة بها 2. (المثال 4) **288**

30. إذا كان $r = 4$ و $a_8 = 100$، فما الحد الأول في المتتالية الهندسية؟ (المثال 4) **$\frac{25}{4096}$**

31. **ألعاب X** راجع بداية الدرس. حققت ألعاب X ما يقرب من AED 40 مليونًا في إيرادات عام 2002. فإذا استمرت في تحقيق إيرادات أكثر بنسبة 13% كل عام، فكم ستبلغ إيراداتها في عام 2020؟ (المثال 4) **≈360.97 مليون AED**

أوجد الأوساط الهندسية المحدّدة لكل زوج من الحدود غير المتتالية. (المثال 5) **33. 192, 144, 108– أو 192, 144, 108**

32. 4 و 256؛ وسيطان **16, 64**

33. 256 و 81؛ 3 أوساط

34. $\frac{4}{7}$ و 1 ;7 وسيط واحد **±2**

35. −2 و 54؛ وسيطان **6, −18**

36. 1 و 27؛ وسيطان **3, 9**

37. 48 و −750؛ وسيطان **−120, 300**

38. i و −1؛ 4 أوساط **−1, −i, 1, i**

39. t^8 و t^{-7}؛ 4 أوساط **t^5, t^2, t^{-1}, t^{-4}**

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية موصوفة مما يلي. (المثال 6)

40. الحدود الستة الأولى في $3 + 9 + 27 + \cdots$ **1092**

41. الحدود التسعة الأولى في $0.\cdots + 2 + (-1) + 5$ **85.5**

42. الحدود الثمانية الأولى في $2 + 2\sqrt{3} + 6 + \cdots$ **$80(1 + \sqrt{3})$**

43. الحدود n الأولى في $a_1 = 4, a_n = 2000, r = -3$ **1501**

44. الحدود n الأولى في $a_1 = 5, a_n = 1{,}747{,}625, r = 4$ **2,330,165**

45. الحدود n الأولى في $a_1 = 3, a_n = 46{,}875, r = -5$ **39,063**

46. الحدود n الأولى في $a_1 = -8, a_n = -256, r = 2$ **−504**

47. الحدود n الأولى في $a_1 = -36, a_n = 972, r = 7$ **1140**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 65 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع وضّح أنه إذا تبدّلت المتتالية الهندسية بين الأعداد السالبة والموجبة، فستكون النسبة المشتركة عددًا سالبًا.

إجابات إضافية

10. $a_n = 36\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $a_1 = 36$, $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$

11. $a_n = 64\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; $a_1 = 64$, $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$

12. $a_n = -2(-5)^{n-1}$; $a_1 = -2$, $a_n = -5a_{n-1}$

13. $a_n = 4(-3)^{n-1}$; $a_1 = 4$, $a_n = -3a_{n-1}$

14. $a_n = 4(2)^{n-1}$; $a_1 = 4$, $a_n = 2a_{n-1}$

15. $a_n = 20(1.5)^{n-1}$; $a_1 = 20$, $a_n = 1.5a_{n-1}$

16. $a_n = 15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $a_1 = 15$, $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$

17. $a_n = \frac{1}{32}(2)^{n-1}$; $a_1 = \frac{1}{32}$, $a_n = 2a_{n-1}$

545

أوجد المجموع في كل مما يلي. (المثال 7)

48. $\sum_{n=1}^{6} 5(2)^{n-1}$ **315**

49. $\sum_{n=1}^{5} -4(3)^{n-1}$ **−484**

50. $\sum_{n=1}^{5} (-3)^{n-1}$ **61**

51. $\sum_{n=1}^{6} 2(1.4)^{n-1}$ **32.64768**

52. $\sum_{n=1}^{6} 100\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **$\frac{1575}{8}$**

53. $\sum_{n=1}^{9} \frac{1}{27}(-3)^{n-1}$ **$\frac{4921}{27}$**

54. $\sum_{n=1}^{7} 144\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **$\frac{387}{4}$**

55. $\sum_{n=1}^{20} 3(2)^{n-1}$ **3,145,725**

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية. (المثال 8)

56. $\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \cdots$ **$\frac{1}{10}$**

57. $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{8}{7} + \cdots$ **لا يوجد**

58. $18 + (-27) + 40.5 + \cdots$ **لا يوجد**

59. $12 + (-7.2) + 4.32 + \cdots$ **7.5**

60. $\sum_{n=1}^{\infty} 6(-0.4)^{n-1}$ **$\frac{30}{7}$**

61. $\sum_{n=1}^{\infty} 40\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ **100**

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$ **$\frac{4}{5}$**

63. $\sum_{n=1}^{\infty} 35\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ **20**

64. **القفز بالحبال** يهبط القافز بالحبال لمسافة 35 مترًا قبل أن يتسبب الحبل المربوط به في ارتداده إلى الأعلى، ويرتد $\frac{2}{5}$ من المسافة بعد كل هبوط. (المثال 8)

a. أوجد الحدود الخمسة الأولى في المتتالية اللانهائية التي تمثّل المسافة العمودية التي يقطعها القافز بالحبال، وأدرج مسافة كل هبوط وارتداد كحدود منفصلة. **35, 14, 14, 5.6, 5.6**

b. ما إجمالي المسافة العمودية التي يقطعها القافز قبل أن يستقر؟ (إرشاد: أعد كتابة المتتالية اللانهائية التي أوجدتها في الجزء a في صورة متتاليتين هندسيتين لا نهائيتين.) **حوالي 82 m**

B

أوجد الكمية الناقصة للمتتالية الهندسية ذات الخصائص المعطاة.

65. أوجد a_1 إذا كان $S_{12} = 1365$ و $r = 2$. **$\frac{1}{3}$**

66. إذا كان $r = 0.5$، $a_1 = 100$، $S_6 = 196.875$. أوجد a_6. **3.125**

67. أوجد r إذا كان $a_1 = 0.12$ و $S_n = 590.52$ و $a_n = 787.32$. **−3**

68. أوجد n لـ $4.1 + 8.2 + 16.4 + \cdots$ إذا كان $S_n = 61.5$. **4**

69. إذا كان $S_n = 23.784$، $15 - 18 + 21.6 - \cdots$. أوجد a_n. **31.104**

70. إذا كان $r = -0.4$ و $S_5 = 144.32$ و $a_1 = 200$، أوجد a_5. **5.12**

71. أوجد a_1 إذا كان $S_n = 468$ و $a_n = 375$ و $r = 5$. **3**

72. إذا كان $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \cdots$ $S_n = \frac{61}{40}$، أوجد n. **3**

73. **القروض** يسدّد ماجد أقساطًا شهرية من قرض. افترض أنه بدلاً من القسط الشهري الثابت، يطلب البنك تسديد قسط أولي منخفض، يزيد كل شهر بمعدل أسي. وتمثّل مقدار القرض الإجمالي الصيغة $\sum_{n=1}^{k} 5(1.1)^{n-1}$.

a. كم يبلغ القسط الأولي الذي سيدفعه ماجد، وما معدل تزايد هذا القسط؟ **AED 5, 1.1**

b. إذا كان مجموع الأقساط التي دفعها ماجد يبلغ AED 7052 في نهاية القرض، فكم قسطًا دفعه ماجد؟ **52**

أوجد النسبة المشتركة للمتتالية الهندسية ذات الحدود المعطاة.

74. $a_3 = 12, a_6 = 187.5$ **2.5**

75. $a_2 = -6, a_7 = -192$ **2**

76. $a_4 = -28, a_6 = -1372$ **±7**

77. $a_5 = 6, a_8 = -0.048$ **−0.2**

78. **الإعلانات** إن الإعلان شفاهة يمكن أن يكون شكلاً فعالاً من أشكال التسويق، ويمكن أن يكون ضارًا جدًا. فكّر في مطعم جديد يقدم الطعام إلى 27 زبونًا في ليلة افتتاحه.

a. من بين 27 زبونًا، 25 وجدوا التجربة ممتعة، وكل زبون منهم أخبر 3 من أصدقائه خلال الشهر التالي، وكل شخص في هذه المجموعة أخبر 3 من أصدقائه خلال الشهر التالي، وهكذا على مدار 6 أشهر. فبافتراض أنه لم يسمع أحد منهم مرتين، كم شخصًا كانت له تجربة إيجابية، أو سمع تعليقات إيجابية عن المطعم؟ **9100**

b. افترض أن كلاً من الزبونين غير الراضيين أخبرا 6 من أصدقائهما خلال الشهر التالي عن تجربتهما، ثم أخبر كل شخص في هذه المجموعة 6 من أصدقائه، وهلم جرا على مدار 6 أشهر. فبافتراض أنه لم يسمع أحد منهم التعليقات مرتين، كم شخصًا كانت له تجربة سلبية، أو سمع تعليقات سلبية؟ **18,662**

اكتب الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة الهندسية اللانهائية ذات الخصائص المعطاة. **85–86. انظر الهامش.**

79. $S = 12, r = \frac{1}{2}$ **$6, 3, \frac{3}{2}$**

80. $S = -25, r = 0.2$ **$-20, -4, -\frac{4}{5}$**

81. $S = 44.8, a_1 = 56$ **56, −14, 3.5**

82. $S = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{8}{9}$ **$\frac{8}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{8}{81}$**

83. $S = -60, r = 0.4$ **−36, −14.4, −5.76**

84. $S = -126.25, a_1 = -50.5$ **−50.5, −30.3, −18.18**

85. $S = -115, a_1 = -138$

86. $S = \frac{891}{20}, r = -\frac{1}{9}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} 12\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ **$12, -3, \frac{3}{4}$**

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **$\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27}$**

89–96. انظر الهامش.

حدّد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*، ثم أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية.

89. $\frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \ldots$

90. $\frac{9}{2}, \frac{17}{4}, 4, \frac{15}{4}, \ldots$

91. $12, 24, 36, 48, \ldots$

92. $128, 96, 72, 54, \ldots$

93. $36k, 49k, 64k, 81k, \ldots$

94. $7.2y, 9.1y, 11y, 12.9y, \ldots$

95. $3\sqrt{5}, 15, 15\sqrt{5}, 75, \ldots$

96. $2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{9}, 2\sqrt{12}, \ldots$

اكتب كل متسلسلة هندسية بالرمز سيجما.

97. $3 + 12 + 48 + \cdots + 3072$ **$\sum_{n=1}^{6} 3(4)^{n-1}$**

98. $9 + 18 + 36 + \cdots + 1152$ **$\sum_{n=1}^{8} 9(2)^{n-1}$**

99. $50 + 85 + 144.5 + \cdots + 417.605$ **$\sum_{n=1}^{5} 50(1.7)^{n-1}$**

100. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cdots + 8$ **$\sum_{n=1}^{7} \frac{1}{8}(-2)^{n-1}$**

101. $0.2 - 1 + 5 - \cdots - 625$ **$\sum_{n=1}^{6} 0.2(-5)^{n-1}$**

ملاحظات لحل التمرين

تصنيف المتتاليات في التدريبات 89–96. إذا كان الفرق المشترك أو النسبة المشتركة واضحًا، ينبغي أن يستنتج الطلاب ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية على التوالي.

انتبه!

تحليل الخطأ في التدريب 105. ينبغي أن يحدد الطلاب أولاً النسبة المشتركة. وللقيام بذلك، ينبغي أن يدركا أنه لا يوجد نسبة مشتركة وبالتالي لا يمكن حساب المجموع.

إجابات إضافية

85. $-138, 27.6, -5.52$

86. $\frac{99}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{11}{18}$

89. ليست بهذا ولا ذاك، $\frac{5}{12}, \frac{6}{14}, \frac{7}{16}$

90. حسابية؛ $\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, 3$

91. حسابية؛ 60, 72, 84

92. هندسية؛ 40.5, 30.375, 22.78125

93. ليست بهذا ولا ذاك؛ $100k, 121k, 144k$

94. حسابية؛ $14.8y, 16.7y, 18.6y$

95. هندسية؛ $75\sqrt{5}, 375, 375\sqrt{5}$

96. ليست بهذا ولا ذاك؛ $2\sqrt{15}, 2\sqrt{18}, 2\sqrt{21}$

102a. $\sum_{n=1}^{5} 14(1.2)^{n-1}$

102d. لا؛ الإجابة النموذجية: سيتوقف جسم الحصان عن النمو في النهاية.

103b. $d, \frac{17}{16}d, \frac{273}{256}d, \frac{4369}{4096}d$

103c. $a_1 = d, a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} d$

105. فهد؛ الإجابة النموذجية: النسبة المشتركة أقل من 1. إذًا فالمتتالية ذات الصلة تقاربية إلى 0. إذًا فيمكن حساب مجموع المتسلسلة.

107. إذا كان $1 < |r|$، فإن $|S_n|$ تتزايد بدون نهاية. إذًا، فإن المتتالية المقابلة تباعدية، ولا يمكن حساب مجموع المتسلسلة.

108. صحيح؛ إذا كان الحدان الأولان موجبين، فيجب أن تكون النسبة المشتركة موجبة. إذًا فإن الحد الثالث، الذي يساوي الحد الثاني مضروب في النسبة المشتركة، يجب أن يكون موجبًا أيضًا.

109. خطأ؛ يجب أن تعرف أيضًا قيمة الحد الأول.

546 | الدرس 9-3 | المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

102. الخيول في كل شهر من بعض الأشهر الأولى بعد أن ولد الحصان، كان مقدار الوزن الذي يكتسبه يبلغ 120% من الوزن الذي اكتسبه في الشهر السابق. في الشهر الأول، اكتسب الحصان 14 كيلوجرامًا.

a. اكتب متسلسلة هندسية بالرمز سيجما يمكن استخدامها لتمثيل زيادة وزن الحصان في الأشهر الخمسة الأولى. **انظر الهامش.**

b. ما مقدار الوزن الذي اكتسبه الحصان تقريبًا في الشهر الرابع؟ **23.5 kg**

c. إذا كان وزن الحصان عند ولادته 70 كيلوجرامًا، فكم كان وزنه تقريبًا بعد 5 أشهر؟ **169 kg**

d. هل سيستمر نمو الحصان بهذا المعدل بشكل غير محدد؟ اشرح. **انظر الهامش.**

103. الطب يبلغ عمر النصف لدواء طوّر حديثًا وأجريت عليه أبحاث حديثة حوالي 1.5 ساعة بعد إعطائه. ويُعطى هذا الدواء لبعض المرضى بجرعات تبلغ d ملّيجرام كل 6 ساعات. **b–c. انظر الهامش.**

a. ما الكسر الذي سيتبقى من الجرعة الأولى داخل جسم المريض عند أخذ الجرعة الثانية؟ $\frac{1}{16}$

b. أوجد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية التي تمثّل مقدار الدواء داخل جسم المريض بعد الجرعات الأربعة الأولى.

c. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) يمكن استخدامها لتحديد مقدار الدواء داخل جسم المريض بعد الجرعة النونية.

104. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف حدود $\frac{1-r^n}{1-r}$.

a. بيانيًا مثّل بيانيًا $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ حيث $r = 0.2$، و 0.5، و 0.9 على التمثيل البياني ذاته.

a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

b. جدوليًا انسخ الجدول الموضح أدناه وأكمله.

n	$S_n, r = 0.2$	$S_n, r = 0.5$	$S_n, r = 0.9$
0			
4			
8			
12			
16			
20			
24			

c. تحليليًا لكل تمثيل بياني في الجزء **a**، صف قيم S_n حيث $n \to \infty$.

d. بيانيًا مثّل بيانيًا $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ حيث $r = 1.2$، و 2.5، و 4 على التمثيل البياني ذاته.

e. تحليليًا لكل تمثيل بياني في الجزء **d**، صف قيم S_n حيث $n \to \infty$. $S_n \to \infty$

f. تحليليًا خمّن ما يحدث لـ S_n حيث $S_n = \frac{1-8.6^n}{1-8.6}$. $S_n \to \infty$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

105. تحليل الخطأ يعتقد فهد أنه يمكن حساب مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية: $16 + 4 + 1 + 0.25 + \ldots$. ولكن فالح يخالفه الرأي. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

106. تحدٍ أسقطت كرة من ارتفاع 5 أمتار. عند كل ارتداد، ترتفع الكرة إلى 65% من الارتفاع الذي وصلت إليه عند الارتداد السابق.

a. قرّب إجمالي المسافة العمودية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف عن الارتداد. **حوالي 23.6 m**

b. ارتدت الكرة أول ارتداد كامل لها في ثانيتين، وهذا من اللحظة التي لمست فيها الأرض لأول مرة إلى المرة التالية التي لمست فيها الأرض. واستغرق كل ارتداد كامل أتى بعد ذلك 0.8 ضعف الارتداد السابق. قدّر الزمن الإجمالي الذي استغرقته الكرة في الارتداد. **10 s**

107. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في أن المتسلسلة الهندسية اللانهائية لن يكون لها مجموع إذا كان $|r| > 1$. **انظر الهامش.**

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح استنتاجك. 108–110. انظر الهامش.

108. إذا كان أول حدّين موجبين، إذًا يكون الحد الثالث موجبًا.

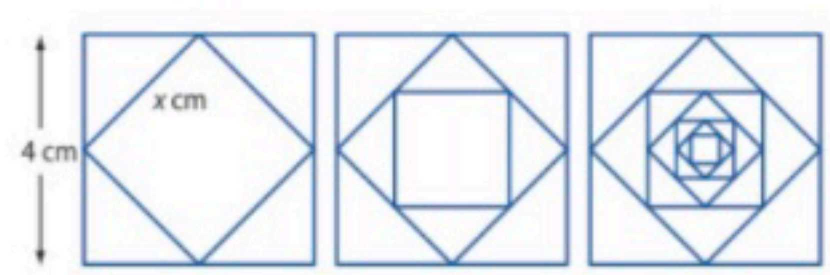
109. إذا كنت تعرف r ومجموع متسلسلة هندسية منتهية، تستطيع إيجاد الحد الأخير.

110. إذا كانت r سالبة، إذًا تكون المتتالية الهندسية تقاربية.

111. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. برّر استنتاجك.

إذا كانت جميع حدود متسلسلة هندسية لانهائية سالبة، فإذًا لها مجموع يكون عددًا سالبًا. **انظر الهامش.**

112. تحدٍ تتصل نقاط منتصف أضلاع المربع لتشكّل مربعًا جديدًا. افترض أن هذه العملية تكرر بشكل غير محدد. **b. انظر الهامش.**



a. ما محيط المربع الذي تبلغ أطوال أضلاعه x سنتيمترًا؟ $8\sqrt{2}$ **cm**

b. ما مجموع محيطات جميع المربعات؟

c. ما مجموع مساحات جميع المربعات؟ **32 cm²**

إجابات إضافية

110. خطأ؛ إذا كان $|r| < 1$، فإن المتتالية الهندسية تقاربية.

111. أحيانًا؛ إذا كان $|r| < 1$، فإن المتسلسلة لها مجموع وسيكون المجموع عددًا سالبًا. إذا كان $|r| > 1$، فإن المتتالية المقابلة تباعدية ولا يوجد للمتسلسلة مجموع.

112b. $32 + 16\sqrt{2}$ أو حوالي 54.6 cm.

547

مراجعة شاملة

أوجد المجموع في كلٍ مما يلي.

113. $\sum_{n=1}^{7}(2n+1)$ **63**

114. $\sum_{n=3}^{7}(3n+4)$ **95**

115. $\sum_{n=1}^{150}(11+2n)$ **24,300**

116. **معالم الجذب السياحية** لتثبت أن الأجسام ذات الأوزان المختلفة تسقط بنفس المعدل، أسقطت نورا جسمين لهما وزنان مختلفان من برج بيزا المائل في إيطاليا، ووصل الجسمان إلى الأرض في الوقت ذاته. عندما يتم إسقاط جسم من مبنى شاهق، يسقط الجسم لمسافة 5 أمتار في الثانية الأولى، و 15 مترًا في ثاني ثانية، و 24 مترًا في الثانية الثالثة، بغض النظر عن وزنه. إذا استمر هذا النمط، فكم مترًا سيسقطه الجسم في الثانية السادسة؟ **53 m**

117. **المنسوجات** غالبًا ما يمكن صناعة الأنماط المختلفة من الأقمشة عن طريق تعديل تمثيل بياني حسابي. ويمكن تمثيل النمط الموجود على اليسار عن طريق منحنى ذي عروتين.

a. افترض أن المصمم أراد البدء بمنحنى ذي عروتين كان عبارة عن 6 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول. فما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها؟ **$r^2 = 9\sin 2\theta$ أو $r^2 = 9\cos 2\theta$**

b. ما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها لإنشاء منحنى ذي عروتين كان عبارة عن 8 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول؟ **$r^2 = 16\sin 2\theta$ أو $r^2 = 16\cos 2\theta$**

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا على شبكة قطبية. **120–118. انظر الهامش.**

118. $\theta = -\frac{\pi}{4}$

119. $r = 1.5$

120. $\theta = -150°$

أوجد ناتج الضرب المتجهي لكل من u و v. ثم وضّح أن u × v عمودي على كل من u و v. **123–121. انظر ملحق إجابات الوحدة 9 للاطلاع على البراهين.**

121. $\mathbf{u} = \langle 1, 9, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 6, -4\rangle$ **$\langle -30, 6, 24\rangle$**

122. $\mathbf{u} = \langle -3, 8, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -5, -7\rangle$ **$\langle -46, -19, 7\rangle$**

123. $\mathbf{u} = \langle 9, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 2, 5\rangle$ **$\langle 8, -21, 18\rangle$**

أوجد الصورة المركبة ومقدار $\overline{AB}$ باستخدام نقطتي البداية والنهاية المذكورتين، ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overline{AB}$. **126–124. انظر الهامش.**

124. $A(6, 7, 9), B(18, 21, 18)$

125. $A(24, -6, 16), B(8, 12, -4)$

126. $A(3, -5, 9), B(-1, 15, -7)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

127. **SAT/ACT** في المتتالية الهندسية $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \cdots$ كل حد بعد الأول مساوٍ للحد السابق له مضروبًا في الثابت. فما قيمة الحد الثالث عشر؟ **C**

A 2^7

B 2^8

C 2^9

D 2^{10}

E 2^{11}

128. **مراجعة** يستمر نمط النقاط الموضّح أدناه إلى ما لا نهاية، بحيث تضاف نقاط إضافية في كل خطوة. **J**

ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة رقم n؟

F $2n$

G $n(n+2)$

H $n(n+1)$

J $2(n+1)$

129. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 1−، والنسبة المشتركة هي 3−. فكم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها يساوي 182؟ **A**

A 6

B 7

C 8

D 9

130. **مراجعة** بدأت نهلة في شجرة للاتصال الهاتفي لإخبار صديقاتها عن حدث ما. في الخطوة 1، اتصلت على 3 صديقات. في الخطوة 2، كل من هؤلاء الصديقات اتصلن على 3 صديقات جدد. في الخطوة 3، كل من هؤلاء الأصدقاء اتصلوا على 3 أصدقاء جدد إضافيين. بعد الخطوة 3، كم عدد الأشخاص الذين يعرفون بشأن الحدث، بما في ذلك نهلة؟ **J**

F 12

G 13

H 39

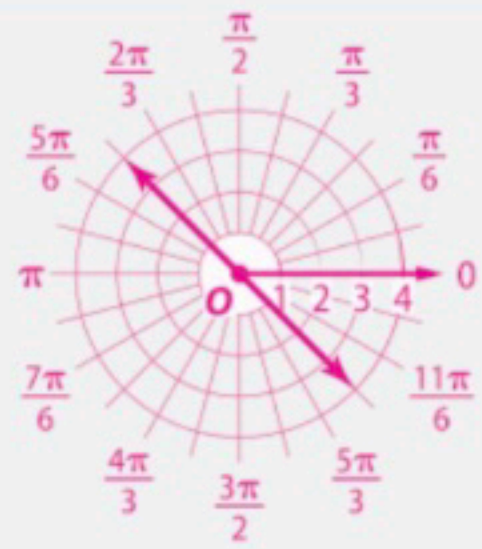
J 40

4 التقويم

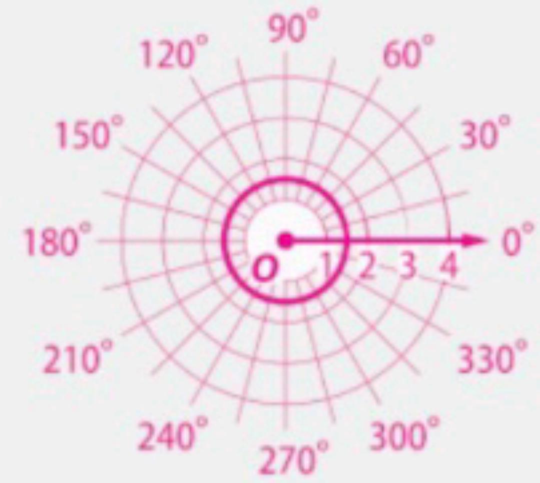
عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة كيف يعرفون ما إذا كانت المتتالية متتالية هندسية. الإجابة النموذجية: يوجد نسبة مشتركة.

إجابات إضافية

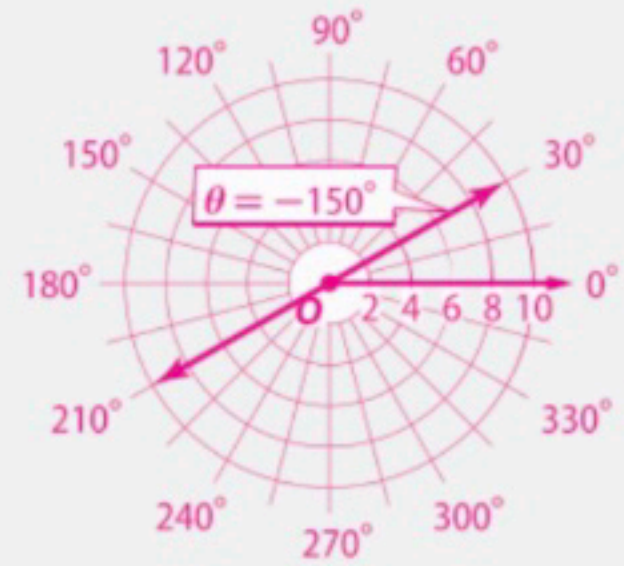
118.



119.



120.



124. $\langle 12, 14, 9\rangle; \sqrt{421}; \left\langle \frac{12\sqrt{421}}{421}, \frac{14\sqrt{421}}{421}, \frac{9\sqrt{421}}{421}\right\rangle$

125. $\langle -16, 18, -20\rangle; 14\sqrt{5}; \left\langle -\frac{8\sqrt{5}}{35}, \frac{9\sqrt{5}}{35}, -\frac{2\sqrt{5}}{7}\right\rangle$

126. $\langle -4, 20, -16\rangle; 4\sqrt{42}; \left\langle -\frac{\sqrt{42}}{42}, \frac{5\sqrt{42}}{42}, -\frac{2\sqrt{42}}{21}\right\rangle$

التدريس المتمايز BL

التوسّع $5y$ و $5xy$ و 5 و $\frac{xy}{5}$ هي حدود متعاقبة في متتالية هندسية. ما قيم x و y؟ $x = \pm\frac{1}{5}; y = 25$

التوسّع 9-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
الكسور المستمرة

:: الهدف

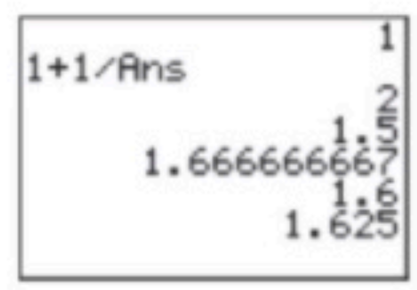
- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الكسور المستمرة.

إن تعبير الصيغة التالية يسمّى *كسرًا مستمرًا*. ويمكن استخدام الكسور المستمرة لكتابة متتاليات تقترب من الحدود.

$$a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\dots}}}$$

النشاط 1 $a = b = 1$

أوجد قيمة $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$.



الخطوة 1 على الشاشة الرئيسية، اضغط 1 و ENTER.

الخطوة 2 ثم اكتب ENTER [ANS] 2nd ÷ 1 + 1.

الخطوة 2 اضغط على ENTER أربع مرات أخرى.

> **نصيحة دراسية**
> **الذاكرة** قد تحتاج إلى مسح ذاكرة الآلة الحاسبة لإزالة أي قيمة سبق تخزينها.

تحليل النتائج

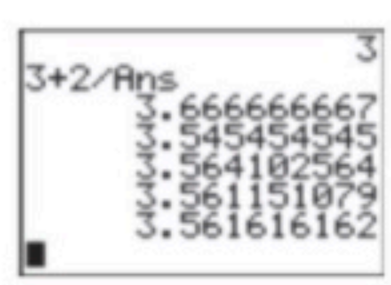
1A. اكتب التعبير الذي أوجدت قيمته لإيجاد كل من القيم التي حصلت عليها في الخطوتين 3-2.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

1B. اضغط على ENTER 20 مرة أخرى. وسجّل النتيجة لتقريب حد هذه المتتالية. يعدّ هذا العدد تقريبًا للنسبة الذهبية. **1.618033989**

1C. أوجد حل $x = 1 + \frac{1}{x}$. كيف يرتبط هذا بالنسبة الذهبية في اعتقادك؟
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

النشاط 2 $a = 3$ و $b = 2$

أوجد قيمة $3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3+\dots}}}$.



الخطوة 1 على الشاشة الرئيسية، اضغط 3 و ENTER.

الخطوة 2 ثم اكتب ENTER [ANS] 2nd ÷ 2 + 3.

الخطوة 3 اضغط على ENTER أربع مرات أخرى.

تحليل النتائج

2A. اكتب التعبير الذي أوجدت قيمته لإيجاد كل من القيم التي حصلت عليها في الخطوتين 3-2.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

2B. اضغط على ENTER 20 مرة أخرى. ما التقريب لحد هذه المتتالية؟
3.561552813

2C. **التخمين** استخدم $a = 3$ والتقريب الذي تم إيجاده في التمرين 2B لصياغة تعبير لكل من a و b. (إرشاد، أوجد الحل للحصول على المجذور، وحدّد كيف يمكن استخدام b لجعله مساويًا.) هذا هو التعبير العام لحدّ متتالية الكسر المستمر لأي من قيم a و b.
$\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$

> **نصيحة دراسية**
> **إيجاد التعابير** عند صياغة التعبير في 2C، فكّر في طرق مختلفة تمكّن b من أن يجعل التعبير مكافئًا لحد المتتالية. استخدم قيمًا مختلفة لكل من a و b لتؤكّد إجابتك.

التمارين

قرّب قيمة الكسر المستمر بالقيم المعطاة لكل من a و b.

1. $a = 4$ و $b = 3$ **4.645751311**
2. $a = 5$ و $b = 2$ **5.372281323**
3. $a = 3$ و $b = 1$ **3.302775638**

549

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الكسور المستمرة.

نصيحة للتدريس

اكتب المتتاليات التالية على اللوحة وناقش النمط.

$$7, 7+\frac{1}{7}, 7+\frac{1}{7+\frac{1}{7}}, 7+\frac{1}{7+\frac{1}{7+\frac{1}{7}}}$$

حدد الحد الخامس للمتتالية. ثم اطلب من الطلاب استخدام حاسبة لإيجاد قيمة هذا الحد.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات، واطلب من المجموعات إكمال النشاطين 1 و 2 وتحليل نتائج التمارين.

- أكد أن متتالية الكسر المستمر تقترب من عدد غير نسبي كنهاية.
- لحل $x = 1 + \frac{1}{x}$ لإيجاد قيمة x. ابدأ بضرب كل طرف في x. وبذلك تتخلص من الكسر وتتبقى المعادلة التربيعية.

تدريب اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 3.

3 التقويم

التقويم التكويني

يمكن استخدام التمارين 3–1 لتقييم ما إن كان الطلاب يستوعبون كيف ينتج عن القيم المختلفة لكل من a و b في الكسور المستمرة متتاليات بنهايات مختلفة وكيف تحدد هذه النهايات.

من العملي إلى النظري

بعد أن يكمل الطلاب تحليل نتائج التمرين 2C. اطلب منهم ذكر كيف يمكنهم استخدام هذه النتيجة لإيجاد القيمة الدقيقة للمتتالية. اطلب منهم تحديد القيمة الدقيقة للكسر المستمر، حيث $a = 8$ و $b = 1$.

عوّض عن قيم كل من a و b بالتعابير $\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ و بسّط؛ $4+\sqrt{17}$

الوحدة 9 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 9-1 إلى 9-3

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية. (الدرس 9-1)

1–5 الإجابات النموذجية معطاة.

1. 109, 97, 85, 73, ... 61, 49, 37, 25
2. 2, 6, 14, 30, ... 62, 126, 254, 510
3. 0, 1, 5, 14, ... 30, 55, 91, 140
4. −2187, 729, −243, 81, ... −27, 9, −3, 1

5. **الطبيعة** بدأت إحدى حدائق الحيوانات الأليفة مجموعة الأرانب بذكر واحد حديث الولادة وأنثى واحدة حديثة الولادة. بافتراض أن كل زوج بالغ سينتج ذكرًا واحدًا وأنثى واحدة في نسله كل شهر وذلك بعد شهرين. فكم عدد الأرانب التي ستكون موجودة بعد 6 أشهر؟ (الدرس 9-1) 16

حدّد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*. (الدرس 9-1)

6. 3, 5, 8, 12, ... تباعدية
7. $a_1 = 15, a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{3}$ تقاربية
8. 48, 24, 12, 6, ... تقاربية
9. $a_n = n^2 + 5n$ تباعدية

أوجد مجموع كل مما يلي.

10. $\sum_{n=0}^{9} \frac{n^2}{4}$ $\frac{285}{4}$

11. $\sum_{n=-5}^{0} (n^3 + 7)$ −183

12. $\sum_{n=1}^{6} (2^n - 4)$ 102

13. $\sum_{n=8}^{13} (4n - 10)$ 192

14. **الجولف** في إحدى بطولات الجولف الخيرية، يفوز كل من العشرة الأوائل بتبرع لمؤسسة خيرية من اختياره، ومقدار التبرع يتبع المتتالية الحسابية الموضّحة أدناه. فما المبلغ الإجمالي المتبرع به للمؤسسات الخيرية نتيجة لهذه البطولة؟ (الدرس 9-2) AED 13,750

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية حسابية. (الدرس 9-2)

15. −11, −15, −19, −23, ... $a_n = -11 - 4(n-1); a_1 = -11, a_n = a_{n-1} - 4$
16. −96, −84, −72, −60, ... $a_n = -96 + 12(n-1); a_1 = -96, a_n = a_{n-1} + 12$
17. 7, 10, 13, 16, ... $a_n = 7 + 3(n-1); a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 3$
18. 32, 30, 28, 26, ... $a_n = 32 - 2(n-1); a_1 = 32, a_n = a_{n-1} - 2$

19. **المجوهرات** تستضيف نسرين حفلاً للمجوهرات، وستحصل على مكافأة المضيفة بالمقدار الموضّح لكل ضيف يشتري شيئًا من المجوهرات. وستتلقى مبلغًا أكبر لكل ضيف يشتري شيئًا. (الدرس 9-2)

الضيوف الذين يشترون المجوهرات	المبلغ الذي تحصل عليه نسرين (AED)
الأول	10
الثاني	15
الثالث	20

a. ما المبلغ الذي ستحصل عليه نسرين للضيف الثاني عشر الذي يشتري؟ AED 65

b. إذا كانت تريد أن يبلغ إجمالي مكافأة المضيفة AED 100، فكم ضيف ينبغي أن يشتري؟ 5

21. $a_n = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; a_1 = 9, a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)_{n-1}$

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية هندسية. (الدرس 9-3)

20. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, ...$ $a_n = \frac{1}{2}(3)^{n-1}; a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 3a_{n-1}$

21. $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, ...$

22. 3, 18, 108, 648, ... $a_n = 3(6)^{n-1}; a_1 = 3, a_n = 6a_{n-1}$

23. −4, 20, −100, 500, ... $a_n = -4(-5)^{n-1}; a_1 = -4, a_n = -5a_{n-1}$

24. **تعداد السكان** يبلغ تعداد سكان ساندي شورز حاليًا 55,000، ويتناقص بمعدّل 3% سنويًا. (الدرس 9-3)

a. اكتب صيغة صريحة لإيجاد تعداد سكان ساندي شورز خلال العام رقم n. $a_n = 55{,}000(0.97)^{n-1}$

b. ما التعداد السكاني الذي تتوقعه لساندي شورز بعد 10 أعوام؟ 41,813 تقريبًا

c. بعد كم عام تتوقع أن يصل تعداد سكان ساندي شورز إلى 37,000؟ 14 yr تقريبًا

25. **الاختيار من متعدد** إن أمكن الأمر، أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية $12 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + ...$ (الدرس 9-3) B

A 13.5

B 16

C 18

D غير ممكن

الدروس من 9-1 إلى 9-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

550 | الوحدة 9 | اختبار نصف الوحدة

الدرس 9-4 الاستقراء الرياضي

:: السابق

- لقد وجدت الحد التالي في متتالية أو متسلسلة.

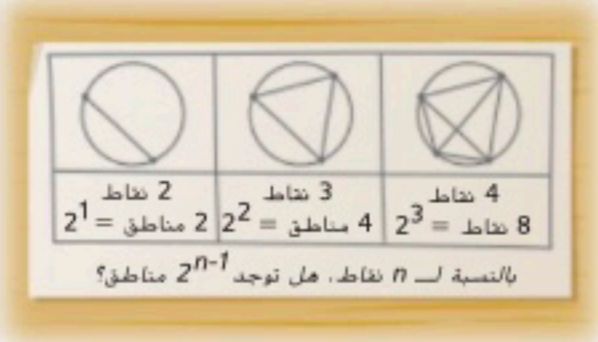
:: الحالي

1 استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة وتشتمل على عدد صحيح موجب n.

2 استخدام المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي..

:: لماذا؟

- يرسم فارس نقاطًا على دائرة ويربط كل زوج من النقاط بوتر. فيقسم الدائرة إلى مناطق. بعد رسم دوائر فيها 2 و 3 و 4 نقاط، يخمن فارس أنه عندما يكون هناك n على محيط دائرة، فإن توصيل كل زوج من النقاط سيقسم الدائرة إلى مناطق عددها 2^{n-1}. في حين قد يبدو تخمينه صحيحًا عندما $n = 2$ و 3 و 4، ولكن هل هذه الأمثلة الثلاثة كافية لإثبات صحة تخمينه؟



المفردات الجديدة

مبدأ الاستقراء الرياضي
principle of mathematical induction
خطوة المرتكز
anchor step
فرضية الاستقراء
inductive hypothesis
خطوة استقرائية
inductive step
المبدأ الممتد للاستقراء في الرياضيات
extended principle of mathematical induction

1 الاستقراء الرياضي

عند البحث عن الأنماط وإيجاد التخمينات، يغلب علينا افتراض أنه إذا كان التخمين صحيحًا في عدة حالات، فإنه سيكون صحيحًا لجميع الحالات. في الحالة المذكورة أعلاه، قد يقتنع فارس أن افتراضه صحيح بمجرد أن يثبت بأنه ينطبق على $n = 5$ لأن توصيل 5 نقاط يشكّل بالفعل 16 أو 2^4 منطقة. لكن "البرهان بالمثال" ليس طريقة صحيحة منطقيًا، لأنه لم يبين أن الافتراض صحيح مع جميع الحالات. ويمكنك في الحقيقة أن ترى أن تخمين فارس يفشل عندما تكون $n = 6$.

في حين أن المثال المضاد هو كل ما يلزمك لبرهنة خطأ التخمينات الرياضية، إلا أن برهنة صحة التخمين تتطلب طريقة أكثر تنظيمًا. وتستخدم إحدى تلك الطرق **مبدأ الاستقراء الرياضي**. تكمن الفكرة الأساسية من مبدأ الاستقراء الرياضي في أنه يمكن إثبات صحة التخمين إذا كان بإمكانك فعل ما يلي:

1. توضيح أن هناك شيئًا ينطبق على الحالة الأولى (الأساس أو **خطوة المرتكز**).
2. افتراض أن الطريقة تنطبق على أي حالة معينة (**فرضية الاستقراء**).
3. توضيح أن الطريقة تنطبق على الحالة التالية (**خطوة استقرائية**).

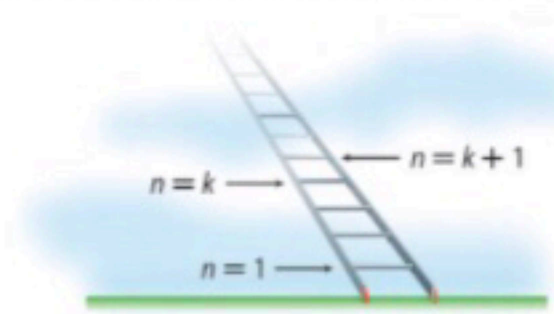
هذا المبدأ – الموضح بطريقة أكثر منهجية أدناه – أداة قوية في إثبات العديد من التخمينات عن الأعداد الصحيحة الموجبة.

المفهوم الأساسي مبدأ الاستقراء الرياضي

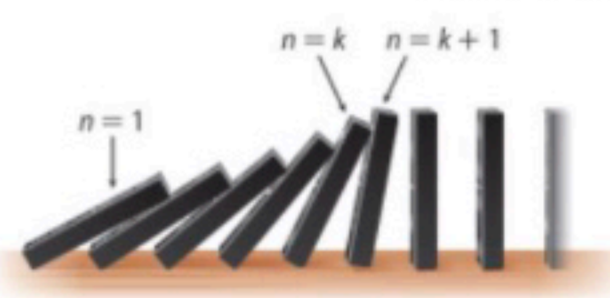
إذا كانت P_n تمثل عبارة عن عدد صحيح n، فإن P_n صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا كان، وفقط إذا كان،

- P_1 صحيح، و
- لكل عدد صحيح موجب k، إذا كان P_k صحيحًا، فإن P_{k+1} صحيح.

لتفهم السبب وراء نجاح مبدأ الاستقراء الرياضي، تخيل أن هناك سلمًا به عدد لا نهائي من الدرجات (الشكل 9.4.1). إذا استطعت ارتقاء أول درجة في السلم (خطوة المرتكز) ثم انتقلت من درجة إلى التالية (فرضية الاستقراء وخطوته)، فسيمكنك أن تصعد السلم بأكمله. وبالمثل، تخيل أن هناك خطًا لا نهائيًا من قطع الدومينو (الشكل 9.4.2) المرتبة بحيث إذا سقطت أي قطعة k، فتسقط القطعة $(k + 1)$ أيضًا (فرضية الاستقراء وخطوته). وعند دفع أول قطعة دومينو (خطوة المرتكز)، فستبدأ سلسلة من ردود الفعل تُسقط خط قطع الدومينو كله.



الشكل 9.4.1



الشكل 9.4.2

551

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-4 إيجاد الحد التالي في متتالية أو متسلسلة.

الدرس 9-4 استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة وتشتمل على عدد صحيح موجب n. استخدام المبدأ الممتد للاستقراء في الرياضيات.

بعد الدرس 9-4 استخدام المتسلسلة الهندسية لتوسعة ذوات الحدين.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما النمط الذي يعتقد فارس وجوده بين أزواج النقاط والمناطق الموجودة داخل الدائرة؟ عندما يوجد عدد n من النقاط على دائرة مرتبطة بخطوط، سيكون هناك 2^{n-1} مناطق.
- هل التخمين صحيح لـ $n = 1$؟ فسّر ذلك. نعم، عندما توضع نقطة واحدة على دائرة، فلن يوجد سوى منطقة واحدة في الدائرة و $2^{1-1} = 2^0 = 1$.
- هل يثبت ذلك أن تخمين فارس صحيح؟ لا، لا بد من إثبات صحة التخمين لجميع قيم n المحتملة ليعتبر صحيحًا.

اتبع الخطوات التالية لتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي.

الخطوة 1 تحقق من أن التخمين P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$. (خطوة المرتكز)

الخطوة 2 افترض أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k$. (فرضية الاستقراء)

الخطوة 3 استخدم هذا الافتراض في برهنة أن P_n صحيح أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$. (خطوة استقرائية)

مثال 1 برهنة صيغة الجمع

استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي $n^2 + n$. وبهذا، فإن برهنة أن $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

التخمين فلتكن P_n تمثل عبارة أن $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$.

خطوة المرتكز تحقق أن P_n صحيحة عندما $n = 1$.

$P_n: 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$	العبارة الأصلية P_n
$P_1: \quad 2 = 1^2 + 1$	عند $n = 1$، المجموع الجزئي الأول

بما أن $2 = 1^2 + 1$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيح لـ $n = 1$.

فرضية الاستقراء افترض أن P_n صحيحة عندما $n = k$.

لكتابة فرضية الاستقراء، عوّض عن n بـ k في P_n. وإذا كانت كذلك، فإن افتراض أن $P_k: 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k$ صحيحة.

الخطوة الاستقرائية استخدم فرضية الاستقراء لتثبت أن P_n صحيحة عندما $n = k + 1$.

لبرهنة أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k + 1$، ينبغي أن نبين أن $_{k+1}$ يجب أن يكون صحيحًا. ابدأ بفرضية الاستقراء ثم أضف الحد التالي، الحد $(k + 1)$ لكل طرف.

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k$	فرضية الاستقراء
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2(k + 1)$	أضف المصطلح $(k + 1)$ إلى كل طرف.
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2k + 2$	بسّط الطرف الأيمن.
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k^2 + 2k + 1) + (k + 1)$	أعد كتابة 2 بالشكل 1 + 1، ثم اجمع.
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1)$	العامل $k^2 + 2k + 1$.

العبارة الأخيرة هي نفسها العبارة P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. ويتبع ذلك أنه إذا كانت P_n صحيحةً بالنسبة لـ $n = k$، فإن P_n صحيحة أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$.

الاستنتاج لأن P_n صحيحة عندما $n = 1$ و P_k توحي بأن P_{k+1} فإن P_n صحيحة عندما $n = 2$ و $n = 3$، وهكذا. ذلك يعني أنه وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، $P_n: 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

نصيحة دراسية

تمثيل الحد التالي لتحديد الحد $(k + 1)$، عوّض بالكمية $k + 1$ عن k في التعبير الخاص بالصيغة العامة للحد التالي في المتسلسلة. في المثال 1، بما أن $2k$ تمثل الحد k، فإن $2(k + 1)$ تمثل الحد $(k + 1)$.

انتبه!

استخدام فرضية الاستقراء لبيان أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k + 1$، فإنك لن تعوّض بـ $k + 1$ عن n في كلا طرفي المعادلة P_n، حيث لن يعطيك ذلك شيئًا لتبرهن عليه. لإكمال الخطوة الاستقرائية، يجب أن تستخدم فرضية الاستقراء.

تمرين موجّه

1. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي n^2. أي أثبت أن $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

في المثال 1. لاحظ أنك لا تحاول إثبات أن P_n صحيحة عندما $n = k$. بدلاً من ذلك، فإنك تفترض أن P_n صحيحة عندما $n = k$ وتستخدم هذا الافتراض في توضيح أن P_n صحيحة بالنسبة للعدد التالي، $n = k + 1$. وإذا وصلت إلى حالة تعارض أثناء محاولتك إكمال خطوة المرتكز أو الخطوة الاستقرائية، فإن افتراضك في فرضية الاستقراء ربما يكون خاطئًا. على سبيل المثال، إذا كان هناك تعارض في خطوة المرتكز، فستعلم أنها لا تنطبق على هذه القيمة فقط. وربما تظل فرضية الاستقراء صحيحة.

1 الاستقراء الرياضي

الأمثلة 3–1 توضح كيفية استخدام الاستقراء الرياضي في إثبات صيغة مجموع وقاعدة قابلة على القسمة وعبارة متباينة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$
لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

افترض أن P_n تساوي
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}. P_k$$
صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$ لأن
$$\frac{1}{(1)(3)} = \frac{1}{3}$$
افترض أن P_k: $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
صحيحة بالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة k.
أظهر أن P_{k+1} لا بد أن تكون صحيحة.
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$
(تابع في اليسار)

إجابة إضافية (مثال إضافي)

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \; \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

هذه العبارة النهائية هي العبارة ذاتها لـ P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وتتبع القاعدة التي تشير إلى أنه إذا كانت P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = k$. إذًا P_n صحيحة أيضًا بالنسبة إلى $n = k + 1$. بما أن P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$. فإن P_k تشير إلى أن P_{k+1}. و P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 2$ و $n = 3$. وما إلى ذلك. وهذا يعني أنه، وفقًا لمبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $P_n: \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

يمكن استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة القابلية للقسمة. تذكّر أن العدد الصحيح p يقبل القسمة على عدد صحيح q إذا كان $p = qr$ لبعض الأعداد الصحيحة r.

مثال 2 برهنة قابلية القسمة

برهن أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

التخمين وخطوة المرتكز فلتكن P_n تمثل عبارة أن $3^n - 1$ تقبل القسمة على 2. P_1 تمثل عبارة أن $3^1 - 1$ تقبل القسمة على 2. P_1 صحيحة لأن $3^1 - 1$ تساوي 2، التي تقبل القسمة على 2.

فرضية الاستقراء وخطوته افترض أن $3^k - 1$ تقبل القسمة على 2. أي افترض أن $3^k - 1 = 2r$ لبعض الأعداد الصحيحة r. استخدم هذه الفرضية لبيان أن $3^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 2.

$3^k - 1 = 2r$	فرضية الاستقراء
$3^k = 2r + 1$	اجمع 1 إلى كل طرف.
$3 \cdot 3^k = 3(2r + 1)$	اضرب كل طرف في 3.
$3^{k+1} = 6r + 3$	بسّط.
$3^{k+1} - 1 = 6r + 2$	اطرح 1 من كل طرف.
$3^{k+1} - 1 = 2(3r + 1)$	العامل.

بما أن r عدد صحيح، فإن $3r + 1$ عدد صحيح و $2(3r + 1)$ تقبل القسمة على 2. وبهذا، فإن $3^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 2.

الاستنتاج لأن P_n صحيحة عندما $n = 1$ و P_k توحي بأن P_{k+1} و P_n صحيحة عندما $n = 2$ و $n = 3$، وهكذا. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، $3^n - 1$ تقبل القسمة على 2 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

تمرين موجّه

2. برهن أن $4^n - 1$ تقبل القسمة على 3 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

يمكنك أيضا برهنة عبارات عدم التساوي مستخدمًا الاستقراء الرياضي.

مثال 3 برهنة عبارات التباين

برهن أن $n < 2^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

التخمين وخطوة المرتكز فلتكن P_n تمثل عبارة $n < 2^n$. P_2 و P_1 صحيحتان، لأن $1 < 2^1$ و $2 < 2^2$ متباينتان صحيحتان. إثبات أن P_2 صحيحة يمثل خطوة المرتكز للجزء الثاني من فرضية الاستقراء الموضحة أدناه.

فرضية الاستقراء وخطوته افترض أن $k < 2^k$ صحيحة للعدد الموجب $k > 1$. استخدم كلا جزأي فرضية الاستقراء هذه في بيان أن $k + 1 < 2^{k+1}$ صحيحة.

$k < 2^k$	فرضية الاستقراء	$k > 1$
$2 \cdot k < 2 \cdot 2^k$		$k - 1 > 0$
$2k < 2^{k+1}$		$2k - k - 1 > 0$
		$2k - (k + 1) > 0$
		$2k > k + 1$
		$k + 1 < 2k$

بحسب خاصية الانتقال في المتباينة، إذا كانت $k + 1 < 2k$ و $2k < 2^{k+1}$، فإن $k + 1 < 2^{k+1}$.

الاستنتاج لأن P_n صحيحة عندما $n = 1$ و 2، و P_k توحي بأن P_{k+1} عندما $k \geq 2$ فإن Pn صحيحة عندما $n = 3$ و $n = 4$، وهكذا. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، $n < 2^n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

تمرين موجّه

3. برهن أن $2n < 3^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

نصيحة دراسية
الخطوة الاستقرائية ليست هناك طريقة "ثابتة" لإجمال الخطوة الاستقرائية للبرهنة على الاستقراء الرياضي. فلكل مسألة خصائصها المميزة التي تتطلب أسلوبًا مختلفًا في إكمال البرهان.

نصيحة دراسية
برهان المتباينات إن منهج توضيح أن الفارق بين بعض الكميات و $k + 1$ أكبر من أو أقل من صفر، بالإضافة إلى خاصية الانتقال في المتباينة، يُستخدم في العديد من براهين المتباينة في الاستقراء الرياضي.

أمثلة إضافية

2 أثبت أن $6^n - 1$ قابلة للقسمة على 5 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن $6^n - 1$ قابلة للقسمة على 5. عندما $n = 1$، فإن $6^n - 1 = 6^1 - 1 = 5$. حيث إن 5 قابلة للقسمة على 5، فإن العبارة P_1 صحيحة. افترض أن $6^k - 1$ قابلة للقسمة على 5، أو $6^k - 1 = 5r$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k والعدد الصحيح r. استخدم هذه الفرضية لتوضح أن $6^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 5.

$$6^k - 1 = 5r$$
$$6(6^k - 1) = 6(5r)$$
$$6^{k+1} - 6 = 30r$$
$$6^{k+1} - 1 = 30r + 5$$
$$6^{k+1} - 1 = 5(6r + 1)$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $6r + 1$ هو عدد صحيح و $5(6r + 1)$ يقبل القسمة على 5. إذًا، $6^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 5. بما إن P_n صحيحة لـ $n = 1$ و $n = k + 1$، فهي صحيحة لـ $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. ووفقًا لمبدأ الاستقراء الرياضي، $6^n - 1$ يقبل القسمة على 5 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

3 أثبت أن $3n < 4^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.
افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن $3n < 4^n$. حيث إن n عدد صحيح موجب. عندما $n = 1$. فإن $3(1) < 4^1$ صحيحة. فإن P_1 صحيحة. افترض أن $3k < 4^k$ صحيحة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة $k > 1$. استخدم هذه الفرضية لتبيّن أن $3(k + 1) < 4^{k+1}$ صحيحة.

$$3k < 4^k$$
$$4 \cdot 3k < 4 \cdot 4^k$$
$$12k < 4^{k+1}$$

والآن استخدم الجزء الثاني من الفرضية.

$$k > 1$$
$$k - 1 > 0$$
$$3k - 3 > 0$$
$$6k - 3k - 3 > 0$$
$$6k - 3(k + 1) > 0$$
$$6k > 3(k + 1)$$
$$3(k + 1) < 6k$$

(تابع في اليمين)

التركيز على محتوى الرياضيات

الاستدلال يجب ألا نخلط بين الاستدلال الرياضي والاستدلال الاستقرائي. فالاستدلال الرياضي أحد أشكال الاستدلال الاستنتاجي الذي يتميز بالدقة الرياضية في البراهين. بينما يستخدم الاستدلال الاستقرائي الأمثلة الفردية كأساس للتعميم.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

حيث إن k هو عدد صحيح موجب، فإن $6k < 12k$. وفقًا لخاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $3(k + 1) < 6k$ و $6k < 12k$. فإن $3(k + 1) < 12k$. وفقًا لنفس الخاصية السابقة، إذا كان $3(k + 1) < 12k$ و $12k < 4^{k+1}$. فإن $3(k + 1) < 4^{k+1}$. حيث إن P_n صحيحة لـ $n = 1$ و $n = 2$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} حيث $k > 1$. P_n صحيحة لكل من $n = 3$ و $n = 4$ وهكذا. ووفقًا لمبدأ الاستدلال الرياضي، فإن $3n < 4^n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

2 الاستقراء الرياضي الممتد

سيُطلب منك أحيانًا إثبات عبارة صحيحة لقيمة عشوائية أكبر من 1. يمكنك في هذه المواقف استخدام شكل مختلف من أشكال مبدأ الاستقراء الرياضي يُسمى **المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي**. وبدلاً من التحقق من أن P_n صحيحة عندما $n = 1$. يمكنك بدلاً من ذلك التحقق من أن P_n صحيحة عند الحالة الممكنة الأولى.

مثال 4 استخدام المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي

برهن أن $n! > 2^n$ لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 4$.

التخمين وخطوة المرتكز فلتكن P_n العبارة $n! > 2^n$. P_4 صحيحة لأن $4! > 2^4$ أو $24 > 16$ عبارة صحيحة.

فرضية الاستقراء وخطوته افترض أن $k! > 2^k$ صحيحة لعدد صحيح موجب $k \geq 4$. بيّن أن $(k+1)! > 2^{k+1}$ صحيحة. استخدم فرضية الاستقراء هذه وقيدها هو أن $k \geq 4$.

$k! > 2^k$	فرضية الاستقراء
$(k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 2^k$	اضرب كل طرف في $k + 1$.
$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k$	$(k+1) \cdot k! = (k+1)!$
$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k$	$k + 1 > 2$ صحيحة عندما $k \geq 4$، لذلك وبحسب خاصية ضرب المتباينة $(k+1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k$.
$(k+1)! > 2 \cdot 2^k$	خاصية الانتقال في المتباينة
$(k+1)! > 2^{k+1}$	بسّط.

وبهذا، $(k+1)! > 2^{k+1}$ صحيح.

الاستنتاج بما أن P_n صحيحة عند $n = 4$ و P_k تشير إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 4$، فإن P_n صحيحة عند $n = 5$، $n = 6$، وهكذا. بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، نجد أن $n! > 2^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 4$.

تمرين موجّه **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

4. برهن أن $n! > 3^n$ لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 7$.

مثال 5 من الحياة اليومية تطبيق المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي

الأموال **برهن أن جميع مضاعفات AED 10 الأكبر من AED 40 يمكن تكوينها باستخدام العملات الورقية فئة AED 20 و AED 50.**

التخمين وخطوة المرتكز P_n: يوجد مجموعة من العملات الورقية فئة AED 20 و AED 50 التي يمكن جمعها لتكوين AED $10n$ عندما $n > 4$. عندما $n = 5$، يكون التخمين في الحالة المحتملة الأولى صحيحًا لأن AED 10(5) = AED 20(0) + AED 50(1).

فرضية الاستقراء وخطوته افترض أن هناك مجموعة من العملات الورقية فئة AED 20 و/ أو AED 50 التي يمكن جمعها لتكوين AED $10k$. بيّن أن ذلك ينطوي على وجود مجموعة من العملات الورقية فئة AED 20 و/ أو AED 50 التي يمكن جمعها لتكوين AED $10(k + 1)$.

الحالة 1 تشتمل المجموعة على عملة ورقية واحدة على الأقل فئة AED 50. استبدل عملة AED 50 في المجموعة بثلاث عملات فئة AED 20 وستزيد قيمة المجموعة بمقدار AED10 لتصبح AED $10k + 10$ أو AED $10(k + 1)$. وهذا يساوي تمامًا P_{k+1}.

الحالة 2 لا تشتمل المجموعة على عملة ورقية فئة AED 50. ويجب أن تشتمل المجموعة على ثلاث عملات ورقية فئة AED 20 على الأقل، لأن قيمة المجموعة يجب أن تكون أكبر من AED 40. استبدل عملتين ورقيتين فئة AED 20 بأخرى فئة AED 50 وبهذا تزيد قيمة المجموعة بمقدار AED 10. وستصبح AED $10k + 10$ أو AED $10(k + 1)$. وهذا يساوي تمامًا P_{k+1}.

الاستنتاج في الحالتين، نجد أن P_n صحيحة عند $n = k + 1$. لأن P_n صحيحة عند $n = 5$ و P_k توحي بأن P_{k+1} عند $k \geq 5$، P_n صحيحة عند $n = 6$، $n = 7$ وهكذا. بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستقراء في الرياضيات، يُمكن تكوين جميع مضاعفات AED 10 الأكبر من AED 40 باستخدام عملات ورقية من فئتي AED 20 و AED 50.

الربط **بالحياة اليومية**

تصرف معظم ماكينات الصراف الآلي المسحوبات بالعملات الورقية بزيادات قدرها AED 10 أو AED 20. بينما يصرف عدد قليل منهم بزيادة منخفضة قدرها AED 5.

المصدر: The Economist

تمرين موجّه **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

5. الترفيه برهن أن جميع الألعاب في المعرض التي تتطلب أكثر من 7 تذاكر يمكن دفعها باستخدام قسائم بثلاث تذاكر وقسائم بخمس تذاكر المقدمة من المدرسة من أجل التبرعات بالمأكولات المعلبة.

2 المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي

المثالان 4 و 5 يوضحان كيف يمكن استخدام المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي في البراهين والتطبيقات الإضافية.

أمثلة إضافية

4 أثبت أن $n! > 5^n$ لجميع قيم الأعداد الصحيحة لـ $n \geq 12$.

افترض P_n هي العبارة التي تنص على أن $n! > 5^n$. P_{12} صحيحة، حيث إن $12! > 5^{12}$ أو $479{,}001{,}600 > 244{,}140{,}625$ صحيحة. افترض أن $k! > 5^k$ صحيحة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة $k \geq 12$. بيّن أن $(k + 1)! > 5^{k+1}$ صحيحة.

$k! > 5^k$

$(k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 5^k$

$(k+1)! > (k+1) \cdot 5^k$

$(k+1)! > (k+1) \cdot 5^k > 5 \cdot 5^k$

$(k+1)! > 5 \cdot 5^k$

$(k+1)! > 5^{k+1}$

حيث إن P_n صحيحة لـ $n = 12$ و P_k تشير إلى أن P_{k+1} حيث $k \geq 12$ و P_n صحيحة، فهي صحيحة أيضًا لـ $n = 13$ و $n = 14$ وهكذا. أي أنه وفقًا للمبدأ الممتد للاستقراء الرياضي، فإن P_n صحيحة لجميع قيم الأعداد الصحيحة لـ $n \geq 12$.

5 **القراءة** أثبت أن جميع قسائم البيتزا المجانية التي تم الفوز بها في برنامج قراءة يمكن الفوز بها في صورة قسيمة فطيرتي بيتزا و 5 فطائر بيتزا طالما كان عدد فطائر البيتزا الممنوحة أكبر من 4.

افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أنه يوجد قسائم فطيرتي وقسائم 5 فطائر بيتزا والتي تجمع إلى n حيث $n > 4$. وحيث $n = 5$. فإن الفرضية صحيحة، بما أن $2(0) + 5(1) = 5$. افترض أن هناك مجموعة من قسائم فطيرتي و/أو 5 فطائر بيتزا والتي تجمع على k. بيّن أن ذلك يشير إلى وجود مجموعة من قسائم فطيرتي بيتزا و/أو قسائم 5 فطائر بيتزا والتي تجمع على $k + 1$.

(تابع في اليسار)

إجابة إضافية (مثال إضافي)

الحالة 1: المجموعة التي تضم على الأقل قسيمة 5 فطائر بيتزا. عوّض عن قسيمة فطائر البيتزا الخمس بقسيمة فطيرتي البيتزا، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار $k + 1$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

الحالة 2: المجموعة التي لا تتضمن قسائم 5 فطائر بيتزا. يجب أن تتضمن المجموعة على الأقل ثلاثًا من قسائم فطيرتي البيتزا وذلك لأن قيمة المجموعة يجب أن تكون أكبر من 4. عوّض عن قسائم فطيرتي البيتزا بقسائم فطائر البيتزا الخمس، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار $k + 1$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

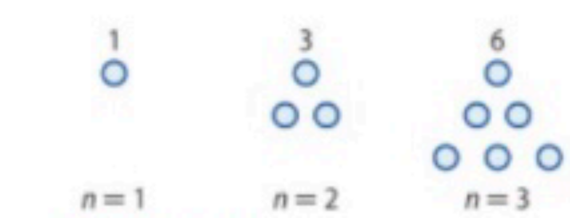
في الحالتين، نجد أن P_n صحيحة لـ $n = k + 1$. حيث إن P_n صحيحة لـ $n = 5$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} لـ $n \geq 4$. فإن P_n صحيحة لـ $n = 6$ و $n = 7$ وهكذا. أي أنه وفقًا للمبدأ الممتد للاستدلال الرياضي، فجميع طلبات فطائر البيتزا التي تزيد عن 4 يمكن تغطيتها بقسائم فطيرتي البيتزا وفطائر البيتزا الخمس.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. (المثال 1)

1–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

1. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$
2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$
4. $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$
5. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
6. $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
7. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$
10. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

11. **الأعداد المثلثية** الأعداد المثلثية هي أعداد يمكن تمثيلها بمصفوفة من النقاط على شكل مثلث، مستخدمين n نقطة على كل ضلع. وأول ثلاثة أعداد مثلثية هي 1، و 3، و 6. (مثال 1)



a. أوجد الأعداد المثلثية الخمسة التالية. **10, 15, 21, 28, 36**

b. اكتب الصيغة المتعلقة بالحد النوني في هذه المتتالية. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

c. برهن أن مجموعة الأعداد المثلثية الأولى n يمكن إيجاده باستخدام $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

12. **كسر الحواجز** قُسم الطلاب في الاجتماع التعريفي للطلاب الجدد إلى مجموعات للعب لعبة كسر الحواجز. تطلب اللعبة من كل طالب في المجموعة أن يتعامل مع كل طالب آخر في المجموعة. (مثال 1)

a. ضع صيغة لحساب إجمالي عدد التعاملات بين الطلاب في لعبة كسر الجليد إذا كانت المجموعة مكونة من n طالب. $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$

b. برهن أن الصيغة صحيحة لجميع قيم الأعداد الصحيحة الموجبة لـ n. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

c. حدد طول مدة لعبة كسر الحواجز بالدقائق لكل مجموعة من 12 طالبًا. إذا كان الوقت المخصص لكل تعامل 30 ثانية. **33 min**

برهن أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. (المثال 2)

13–16. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

13. $1 - 9^n$ تقبل القسمة على 8.
14. $4 + 6^n$ تقبل القسمة على 5.
15. $1 - 2^{3n}$ تقبل القسمة على 7.
16. $2^n - 5^n$ تقبل القسمة على 3.

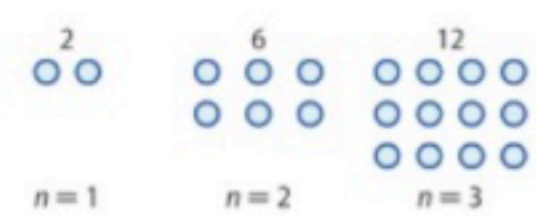
برهن أن كل متباينة صحيحة للقيم الموضحة لـ n. (المثالان 3 و 4) **17–24. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

17. $3^n \geq 3n, n \geq 1$
18. $n! > 4^n, n \geq 9$
19. $2^n > 2n, n \geq 3$
20. $9n < 3^n, n \geq 4$
21. $3n < 4^n, n \geq 1$
22. $2^n > 10n + 7, n \geq 10$
23. $2n < 1.5^n, n \geq 7$
24. $1.5^n > 10 + 0.5n, n \geq 7$

25. **رسوم البريد** برهن أن جميع رسوم البريد الأكبر من 20 فلسًا يمكن تكوينها باستخدام طوابع بقيمة 5 فلسات و 6 فلسات. (مثال 5) **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

26. **الترفيه** جميع الأنشطة في مركز الأسرة الترفيهي، مثل ألعاب الفيديو وكرة الطلاء، وسباق السيارات الصغيرة، تتطلب استخدام قطع نقدية رمزية بقيمة 25 فلسًا و50 فلسًا و 75 فلسًا وهكذا. برهن أن جميع الأنشطة التي تتكلف أكثر من AED 1.50 يمكن دفعها باستخدام القطع النقدية الرمزية بقيمة 50 فلسًا و75 فلسًا. (مثال 5) **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

27. B **الأعداد المستطيلة** الأعداد المستطيلة هي أعداد يمكن تمثيلها بمصفوفة مستطيلة الشكل لها عدد أعمدة أكبر من عدد الصفوف بواحد.



برهن أن مجموع الأعداد المستطيلة الأولى n يمكن الحصول عليه من $S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

28–33. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

28. $\sum_{a=1}^{n} (4a - 3) = n(2n - 1)$
29. $\sum_{a=1}^{n} (3a - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$
30. $\sum_{a=1}^{n} (a^2 + a) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
31. $\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{4a^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$
32. $\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{2a(a+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$
33. $\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 26 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يتجاوز الطلاب الخطوة الأولى التي تثبت أن الحالة الأولى صحيحة. ذكرهم أنه إذا لم تفلح هذه الخطوة، فإن العبارة الأصلية غير صحيحة بخلاف النظرية. وقد يتوقف البرهان عند هذه الخطوة.

555

34, 36, 37. تم تقديم إجابة نموذجية عن المثال المضاد.

برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n أو أوجد مثالاً مضادًا. **خطأ؛ $n = 3$**

34. $1 + 6 + 11 + \cdots + (5n - 4) = n(2n - 1)$

35. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2n(2n + 2)} = \frac{n}{2(2n + 2)}$

36. $n^2 - n + 5$ عدد أولي. **خطأ؛ $n = 5$**

37. $3^n + 4n + 1$ يقبل القسمة على 4. **خطأ؛ $n = 2$**

38. $4^n + 6n - 1$ يقبل القسمة على 9.

39. $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ يقبل القسمة على 5.

35, 38, 39. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

برهن أن المتباينة للقيم الصحيحة الموضحة لـ n والقيم الموضحة لـ a, b، و x.

40–42. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

40. $\left(\frac{a}{b}\right)^n > \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$, $n \ge 1$ و $< a < b$

41. $(x + 1)^n \ge nx$, $n \ge 1$ و $x \ge 1$

42. $(1 + a)^n > 1 + na$, $n \ge 2$ و $a > 0$

أوجد صيغة لمجموع S_n للحدود n الأولى في كل متتالية. ثم برهن أن هذه الصيغة صحيحة مستخدمًا الاستقراء الرياضي.

43–46. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

43. $2, 6, 10, 14, \ldots, (4n - 2)$

44. $2, 7, 12, 17, \ldots, (5n - 3)$

45. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots, -\frac{1}{2^n}$

46. $\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{60}, \ldots, \frac{1}{3n(n + 1)}$

47. **أعداد فيبوناتشي** في متتالية فيبوناتشي، ...، 1, 1, 2, 3, 5, 8 يتم إيجاد كل عنصر بعد أول عنصرين بجمع الحدّين السابقين. توجد الأعداد في متتالية فيبوناتشي في الطبيعة من حولنا. فمن أمثلة أعداد فيبوناتشي عدد القشور في الحلزونات في اتجاه عقارب الساعة وعكس اتجاه عقارب الساعة في ثمرة الأناناس. إذا كان f_n يمثل العدد الفيبوناتشي n، فبرهن أن $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

48. **الأعداد المركبة** برهن أن نظرية دي موافر لإيجاد أس العدد المركب المكتوبة في صورة قطبية تكون صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

49. **الهندسة** وفقًا للزوايا الداخلية في صيغة الجمع، فإن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في مضلع محدد عدد أضلاعه n يساوي $180(n - 2)$ درجة. استخدم الاستقراء الرياضي الممتد في برهنة هذه الصيغة لـ $n \ge 3$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

50. $(xy)^n = x^n y^n$

51. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

52. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

53. $\cos n\pi = (-1)^n$

50–53. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أن كل صيغة لمجموع الحدود الأولى n في المتسلسلة.

54–55. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

54. $S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$

55. $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

56. **تحدٍ** برهن أن $n! < n^n$ عندما تكون $n > 1$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

57. **مسألة غير محددة الإجابة** خذ العبارة التالية.

$a^n + b$ تقبل القسمة على c.

a. ضع تخمينًا لقابلية القسمة باستبدال a، و b، و c بأعداد صحيحة موجبة.

b. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن التخمين الذي توصلت إليه في الجزء a صحيح. وإذا لم يكن صحيحًا، فأوجد مثالاً مضادًا.

مثال مضاد: $n = 2$

57a. الإجابة النموذجية: التخمين: $2^n + 1$ تقبل القسمة على 3 خاطئ.

58. **التبرير** صف الخطأ في البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي الموضح أدناه. **انظر الهامش.**

التخمين وخطوة المرتكز فلتكن P_n تمثل العبارة التي تقول بأن غرفة بها n طالبًا، وجميع الطلاب لهم تاريخ ميلاد واحد. عندما $n = 1$، P_1 صحيحة بما أن كل طالب له تاريخ ميلاد واحد فقط.

فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية

افترض أنه يوجد في غرفة عدد k من الطلاب، وجميع الطلاب لهم تاريخ ميلاد واحد. افترض أن $k + 1$ طالب في الغرفة. إذا غادر طالب، فإن الطلاب k المتبقين يجب أن يكون لهم تاريخ ميلاد واحد، وفقًا لفرضية الاستقراء. ومن ثم، إذا عاد الطالب الأول وغادر آخر، فإن تلك المجموعة (واحد) المكونة من k من الطلاب يجب أن يكون لها تاريخ الميلاد نفسه. لذا، فإن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k + 1$. ومن ثم، فإن P_n صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. إذا كانت كذلك، فإن الغرفة التي فيها n من الطلاب، سيكون الطلاب جميعًا لهم تاريخ الميلاد نفسه.

59. **تحدٍ** إذا كان a_n ممثلاً بالمتتالية

$\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}, \ldots,$

أثبت أن الحد ذا الترتيب n في هذه المتسلسلة سيكون دائمًا أقل من 3.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

60. **الكتابة في الرياضيات** في خطوة فرضية الاستقراء الرياضي، تفترض أن P_n صحيحة عندما $n = k$. فسّر لماذا لا يمكنك افتراض أن P_n صحيحة عندما n. **انظر الهامش.**

إجابات إضافية

58. الإجابة النموذجية: إن خطوة الفرضية الاستقرائية ليست صحيحة عند $n = 2$. عندما يغادر كل طالب الغرفة، يتبقى طالب واحد، وبالتالي لا يوجد سوى تاريخ ميلاد واحد. ومع ذلك، لا يمكن استنتاج أن تاريخ ميلاد الطالبين متطابقان.

60. الإجابة النموذجية: k هو عدد معين يفترض أن تكون العبارة P_k صحيحة عنده. ومع ذلك لا يمكننا افتراض أن P_n صحيحة حيث إن n متغير تتغير قيمته.

مراجعة شاملة

أوجد الحد النوني المحدد لكل متتالية هندسية.

61. a_9 للمتتالية $a_1 = \frac{1}{5}$, 1, 5, ... **78,125**

62. $a_4 = 16, r = 0.5, n = 8$ **1**

63. $a_6 = 3, r = 2, n = 12$ **192**

64. **ألعاب** في إحدى الألعاب، يقول أول شخص في مجموعة اسم وحقيقة مثيرة للاهتمام عن نفسه. الشخص التالي يجب أن يكرر اسم الشخص الأول والحقيقة التي قالها عن نفسه ثم يقول المعلومات الخاصة به. كل شخص يجب أن يكرر معلومات لجميع أولئك الذين سبقوه. إذا كان هناك 20 شخصًا في مجموعة، ما عدد المرات الإجمالي التي سيتكرر فيها ذكر الأسماء والحقائق؟ **210**

مثّل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة. **65–67. انظر الهامش للاطلاع على التمثيلات البيانية.**

65. $z = 5 - 3i$ **5.83**

66. $z = -9 - 8i$ **12.04**

67. $z = 2 + 6i$ **6.32**

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة.

68. $\left(3, -\frac{5\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

69. $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ $(-\sqrt{3}, -1)$

70. $(-4, 1.4)$ $(-0.68, -3.94)$

اكتب الصورة المركبة لكل متجه.

71. تقع **w** في المستوى xz، ومقداره 2، ويكوّن زاوية °45 إلى يسار المحور z الموجب. $\langle -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2} \rangle$

72. يقع **u** في المستوى yz ومقداره 9، ويكوّن زاوية °30 إلى يمين المحور z السالب. $\left\langle 0, \frac{9}{2}, -\frac{9\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

لكل قطع، حدد الرأس والبؤرة ومحور التناظر والدليل. ثم مثّل القطع المكافئ بيانيًا. **73–75. انظر الهامش.**

73. $(x - 4)^2 = -(y + 7)$

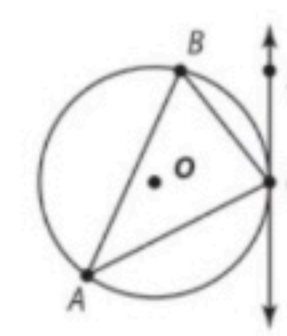
74. $6(x + 6) = (y - 4)^2$

75. $(y - 6)^2 = 4x$

76. **أعمال** ينتج مصنع تنانير وفساتين باستخدام نوع قماش واحد. تحتاج كل تنورة ساعة لقص القماش وساعة للخياطة، بينما يحتاج كل فستان إلى ساعتين للقص و 3 ساعات للخياطة. يمكن أن يعمل قسما القص والخياطة حتى 120 و 150 ساعة كل أسبوع، على التوالي. إذا كانت أرباح كل تنورة تساوي 12 AED وأرباح كل فستان تساوي 18 AED، فكم تنورةً وفستانًا ينبغي أن ينتج المصنع لتحقيق أعلى الأرباح؟ **0 فستان، 120 تنورة**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. **SAT/ACT** المثلث ABC مرسوم داخل الدائرة O. $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة O عند النقطة C. إذا كانت $m\angle BCD = 40°$، فأوجد $m\angle A$. **C**



A 60°
B 50°
C 40°
D 30°
E 25°

78. أيّ مما يلي يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n؟ **H**

F $1^n - 1$
G $2^n - 1$
H $3^n - 1$
J $4^n - 1$

79. **مراجعة** ما الحد الأول في المتتالية الحسابية؟ **B**

$\_\_\_\_, 8\frac{1}{3}, 7, 5\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}, \ldots$

A 3
B $9\frac{2}{3}$
C $10\frac{1}{3}$
D 11

80. **مراجعة** ما الحد العاشر في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... ,10, 5.6, 1.2, −3.2؟ **G**

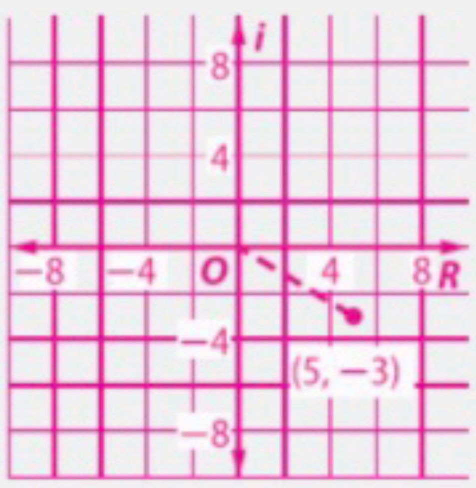
F −39.6
G −29.6
H 29.6
J 39.6

4 التقويم

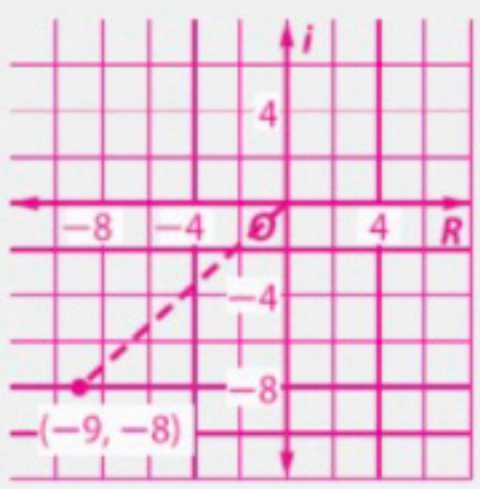
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب كتابة ملخص قصير يصف خطوات إثبات النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي.

إجابات إضافية

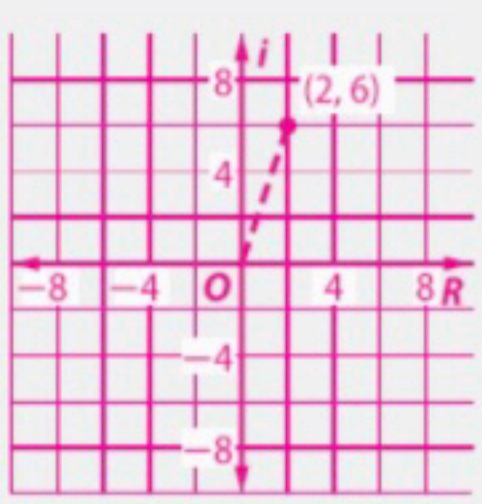
65.



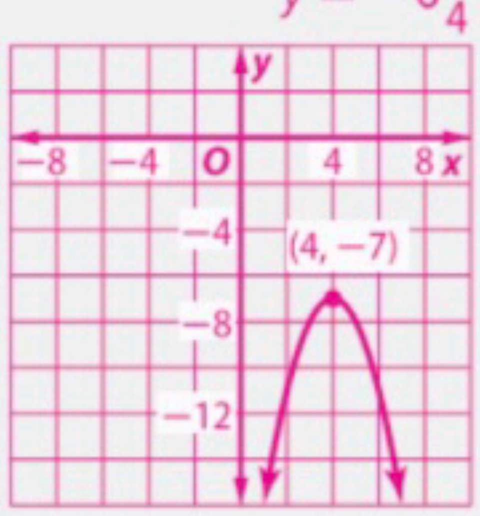
66.



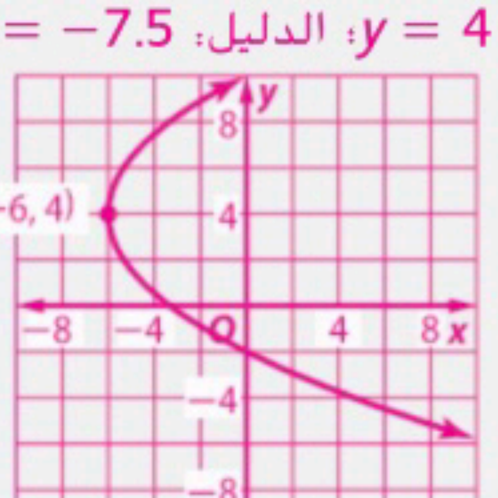
67.



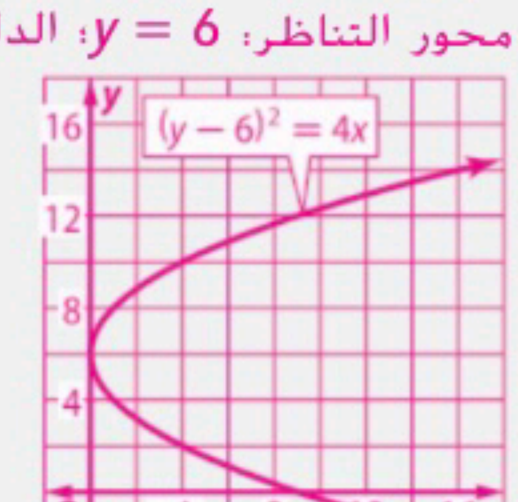
73. الرأس: (4, −7)، البؤرة: $\left(4, -7\frac{1}{4}\right)$، محور التناظر: $x = 4$، الدليل: $y = -6\frac{3}{4}$



74. الرأس: (−6, 4)، البؤرة: (−4.5, 4)، محور التناظر: $y = 4$، الدليل: $x = -7.5$



75. الرأس: (0, 6)، البؤرة: (1, 6)، محور التناظر: $y = 6$، الدليل: $x = -1$



التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب إيجاد مثال على عبارة تكون صحيحة لجمع الأعداد الصحيحة الموجبة $n \geq 2$ على أن تكون غير صحيحة عند $n = 1$. الإجابة النموذجية: $2^n > 2^{n-1} + 1$

الدرس 9-5 نظرية ذات الحدّين

∴ السابق	∴ الحالي	∴ لماذا؟
• تمثيل المتسلسلات اللا نهائية باستخدام الرمز سيجما.	1 استخدام مثلث باسكال لكتابة التعابير ذات الحدّين. 2 استخدام نظرية ذات الحدّين لكتابة وإيجاد معاملات حدود معينة في التعابير ذات الحدّين.	• افترض أن عالم أحياء يدرس أحد الأنواع المهددة بالانقراض من فصيلة الجيبون وقد اكتشف أن 80% من نسل الجيبون من الإناث و 20% من الذكور. ويتوقع العاملون في حديقة الحيوان أن قرود الجيبون في الحديقة سوف تنتج العدد n من النسل ويريدون معرفة احتمال عدم وجود ذكور ضمن النسل. ويستطيع عالم الأحياء استخدام حد من التعبير ذي الحدّين $(0.8 + 0.2)^n$ لحل هذه المسألة.

المفردات الجديدة
معاملات ذات الحدّين
binomial coefficients
مثلث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدّين
Binomial Theorem

1 مثلث باسكال
تذكر أن ذا الحدّين هو تعبير جبري يتضمن مجموع حدّين غير متشابهين. يتم إنتاج متسلسلة هامة من خلال تفكيك ذي حدّين ثم رفعه لقوة أسية من عدد صحيح. افحص هذه السلسلة الناتجة عن تفكيك $(a + b)^n$ للعديد من القيم الصحيحة غير السالبة لـ n.

$$(a+b)^0 = 1a^0b^0$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

لاحظ الأنماط التالية في تفكيكات $(a + b)^n$ أعلاه.
- في كل تفكيك $n + 1$ حد.
- الحد الأول هو a^n، والحد الأخير هو b^n.
- في الحدود المتتابعة، يتناقص أس a بمقدار 1، ويتزايد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسين في كل حد هو n.
- المعاملات – الموضحة أعلاه باللون الأحمر – تتزايد ثم تتناقص وفق نمط متماثل.

إذا استَخرجت معاملات عمليات التفكيك هذه – والتي تعرف باسم **معاملات ذات الحدّين**، وتم ترتيبها وفق مصفوفة مثلثية الشكل، فستُشكّل نموذجًا يدعى **مثلث باسكال**، والذي سمي هكذا على اسم عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال. يطلق على الصف العلوي في هذا المثلث اسم الصف الصفري لأنه يتوافق مع تفكيك ذي الحدّين لـ $(a + b)^0$.

الصف الصفري 1
الصف الأول 1 1
الصف الثاني 1 2 1
الصف الثالث 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

لاحظ أن الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف هي 1. ويتشكل كل عدد آخر عن طريق إضافة العددين الموجودين مباشرة فوق هذا العدد في الصف السابق. يمكن تمديد مثلث باسكال إلى ما لا نهاية باستخدام العلاقة التكرارية (الضمنية) لدرجة أنه يمكن استخدام المعامل في الصف ذو الترتيب $(n - 1)$ لتحديد المعامل في الصف ذي الترتيب n.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-5 تمثيل متسلسلة لا نهائية باستخدام رمز سيجما.

الدرس 9-5 استخدام مثلث باسكال لكتابة التعابير ذات الحدين.
استخدام نظرية ذات الحدين لكتابة وإيجاد معاملات الحدود المعينة في التعابير ذات الحدين.

بعد الدرس 9-5 تمثيل الدوال في صورة متسلسلة لا نهائية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة
كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:
- كيف ستبدو ذات الحدين إذا كان عدد النسل 10؟ $(0.8 + 0.2)^{10}$
- لعدد 10 من النسل، كم يبلغ العدد المحتمل للذكور والعدد المحتمل للإناث؟ ذكران و 8 إناث

من خلال تفكيك مثلث باسكال واستخدام الأنماط التي لوحظت في عمليات التفكيك الخمس الأولى لـ $(a+b)^n$، يمكنك تفكيك ذي حدّين مرفوع إلى أي قوة أسية قوامها عدد كلي.

مثال 1 قوة مجموع ذي الحدّين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذي حدّين مما يلي.

a. $(a+b)^7$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a+b)^7$. واحذف المعاملات. لأن القوة الأسية تساوي 7، يجب أن تحتوي هذه المتسلسلة على 1 + 7 أو 8 حدود. استخدم نمط تزايد الأسس أو تناقصها لاستكمال المتسلسلة.

أسس a تتناقص من 7 إلى 0.
أسس b تتزايد من 0 إلى 7.

$$a^7b^0 + a^6b^1 + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + a^1b^6 + a^0b^7$$

الخطوة 2 استخدم الأعداد في الصف السابع من مثلث باسكال كمعاملاتٍ للحدود. لإيجاد هذه الأعداد، فكك مثلث باسكال إلى الصف السابع.

الصف السادس: 1 6 15 20 15 6 1

الصف السابع: 1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^7 = \mathbf{1}a^7b^0 + \mathbf{7}a^6b^1 + \mathbf{21}a^5b^2 + \mathbf{35}a^4b^3 + \mathbf{35}a^3b^4 + \mathbf{21}a^2b^5 + \mathbf{7}a^1b^6 + \mathbf{1}a^0b^7$$

بسّط.

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

b. $(3x+2)^4$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a+b)^4$. واحذف المعاملات وعوض a بـ $3x$ و b بـ 2. تحتوي هذه المتسلسلة على 1 + 4 أو 5 حدود.

أسس $3x$ تتناقص من 4 إلى 0.
أسس 2 تتزايد من 0 إلى 4.

$$(3x)^4(2)^0 + (3x)^3(2)^1 + (3x)^2(2)^2 + (3x)^1(2)^3 + (3x)^0(2)^4$$

الخطوة 2 الأعداد في الصف الرابع من مثلث باسكال هي 1 و 4 و 6 و 4 و 1. استخدم هذه الأعداد كمعاملاتٍ لحدود المتسلسلة، ثم بسّط.

$$(3x+2)^4 = \mathbf{1}(3x)^4(2)^0 + \mathbf{4}(3x)^3(2)^1 + \mathbf{6}(3x)^2(2)^2 + \mathbf{4}(3x)^1(2)^3 + \mathbf{1}(3x)^0(2)^4$$
$$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$

تمرين موجّه

1A. $(a+b)^8$

1B. $(2x+3y)^5$ $32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$

1A. $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

لتفكيك طرح ذي حدّين، أعد كتابة التعبير في صورة مجموع ذي حدّين.

مثال 2 قوة طرح ذي الحدّين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك $(x-4y)^5$.

لأن $(x-4y)^5 = [x+(-4y)]^5$. اكتب متسلسلة لـ $(a+b)^5$. مع التعويض عن a باستخدام x وعن b باستخدام $-4y$. استخدم أعداد الصف الخامس من مثلث باسكال، 1 و 5 و 10 و 10 و 5 و 1 كمعاملات ذات الحدّين. ثم بسّط.

$$(x-4y)^5 = \mathbf{1}x^5(-4y)^0 + \mathbf{5}x^4(-4y)^1 + \mathbf{10}x^3(-4y)^2 + \mathbf{10}x^2(-4y)^3 + \mathbf{5}x^1(-4y)^4 + \mathbf{1}x^0(-4y)^5$$
$$= x^5 - 20x^4y + 160x^3y^2 - 640x^2y^3 + 1280xy^4 - 1024y^5$$

تمرين موجّه

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذي حدّين مما يلي.

2A. $(2x-7)^3$ $8x^3 - 84x^2 + 294x - 343$

2B. $(2x-3y)^4$ $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

نصيحة دراسية

إيجاد الصف الصحيح دائمًا ما يكون العدد الثاني في أي صف من مثلث باسكال هو ذاته القوة الأسية لذات الحدّين. على سبيل المثال، العدد الثاني في الصف السابع من مثلث باسكال هو 7.

نصيحة دراسية

تبديل العلامات لاحظ أنه عند تفكيك قوة أسية لطرح ذات حدين، تتبدل علامات حدود المتسلسلة.

559

- كيف يتم تفكيك ذات حدين؟ ضرب ذات الحدين في نفسها بعدد المرات المعين.

1 مثلث باسكال

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية استخدام الأنماط الموجودة في مثلث باسكال لتفكيك ذات حدين مرفوعة لأي أس عدد كلي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

a. $(a+b)^6$ $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b. $(3x+2)^5$ $243x^5 + 810x^4 + 1080x^3 + 720x^2 + 240x + 32$

2 استخدم مثلث باسكال لتوسيع $(x-2y)^6$. $x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6$

التركيز على محتوى الرياضيات

مثلث باسكال يوجد العديد من الأنماط الإضافية في مثلث باسكال. لاحظ أن الأقطار على الحافتين اليمنى واليسرى تتكون من الرقم 1. والأقطار المجاورة لها من أعداد طبيعية. والأقطار الداخلية من أعداد مثلثية.

2 نظرية ذات الحدين

المثالان 3 و 4 يوضحان كيفية إيجاد معاملات ذات الحدين باستخدام صيغة معاملات ذات الحدين. **المثال 5** يوضح كيفية استخدام معاملات ذات الحدين لإيجاد الاحتمال. **المثال 6** يوضح كيفية استخدام نظرية ذات الحدين لتفكيك حدين. **المثال 7** يوضح كيفية كتابة تفكيك ذات حدين باستخدام رمز سيجما.

مثال إضافي

3 أوجد معامل الحد الرابع في توسيع $(a - b)^{10}$. 120

إرشاد للمعلمين الجدد

معاملات ذات الحدين لـ $_nC_r$، فإن n هي أس ذات الحدين و r أقل بمقدار 1 عن عدد الحد.

التركيز على محتوى الرياضيات

التوافيق ينطوي استخدام نظرية ذات الحدين لإيجاد معاملات تفكيك ذات حدين على التوافيق. وتتضمن التوافيق إيجاد عدد الطرق k التي يمكن اختيار العناصر منها من بين مجموعة من n من العناصر. وبالتالي، فإن $_nC_k = \binom{n}{k}$ تُقرأ في بعض الأحيان "n اختار k" ويطلق عليها دالة اختيار n و k.

---

2 نظرية ذات الحدّين

بينما من الممكن تفكيك أي ذات حدّين باستخدام مثلث باسكال، تؤدي الطريقة التكرارية لحساب معاملات ذات الحدّين إلى جعل تفكيكات $(a + b)^n$ للقيم الكبيرة n مستهلكة للوقت. وقد تم وضع صيغة واضحة لحساب كل معامل من معاملات ذات الحدّين من خلال النظر إلى $(a + b)^n$ باعتباره ناتج ضرب عوامل n التي يساهم فيها كل عامل بالرمز a أو b في كل ناتج ضرب في عملية التفكيك.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\,(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{عوامل } n} = \ldots + \underbrace{a^{n-r}b^r}_{} + \ldots$$

إذا كان هناك عدد r من الحرف b، فسيكون هناك عدد $(n - r)$ من الحرف a.

فكّر في $(a + b)^3$. هناك ثلاث طرق لاختيار a 1 و b 2 من كل عامل من العوامل الثلاثة لتكوين ناتج الضرب ab^2. و 3 هو معامل ذات الحدّين للحد ab^2 في التعبير.

$$(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + ab^2 + \ldots$$
$$(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + ab^2 + \ldots$$
$$(a + b)(a + b)(a + b) = \ldots + ab^2 + \ldots$$

3 طرق

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

لأن العوامل التي لا تساهم بحرف b سوف تساهم افتراضيًا بحرف a. فيمكن ببساطة النظر إلى عدد طرق تكوين ناتج الضرب $a^{n-r}b^r$ على أنه عدد طرق اختيار عوامل r التي تساهم بحرف b في ناتج الضرب من بين عوامل n المتوفرة. هذا هو التوفيق المحدد بالعلاقة $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$. ويكتب كذلك بالصورة $\binom{n}{r}$.

قراءة في الرياضيات

توافيق الرمزان $_nC_r$ و $\binom{n}{r}$ يمكن قراءتهما على توفيق أشياء عددها n يؤخذ منها r في كل مرة.

المفهوم الأساسي صيغة معاملات ذات الحدّين $(a + b)^n$

الشرح معامل ذات الحدّين للحد $a^{n-r}b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ محدد بالعلاقة $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

مثال

$$(a+b)^3 = {}_3C_0a^3b^0 + {}_3C_1a^2b^1 + {}_3C_2a^1b^2 + {}_3C_3a^0b^3$$
$$= \frac{3!}{(3-0)!\,0!}a^3 + \frac{3!}{(3-1)!\,1!}a^2b + \frac{3!}{(3-2)!\,2!}ab^2 + \frac{3!}{(3-3)!\,3!}b^3$$
$$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

في المثال أعلاه. لاحظ أنه بالنسبة إلى الحد الأول $r = 0$. وبالنسبة إلى الحد الثاني $r = 1$. وبالنسبة إلى الحد الثالث $r = 2$. وهكذا. بشكل عام. لإيجاد معامل ذات الحدّين للحد رقم k في تعبير بالصورة $(a + b)^n$. استخدم الصيغة $_nC_r$ وافترض أن $r = k - 1$.

مثال 3 إيجاد معاملات ذات الحدّين

أوجد معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$.

لإيجاد معامل الحد الخامس. أوجد قيمة $_nC_r$ حيث $n = 7$ و $r = 5 - 1$ أو 4.

$$_7C_4 = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} \qquad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{7!}{3!\,4!} \qquad \text{اطرح.}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3!\,\cancel{4!}} \qquad \text{أعد كتابة } 7! \text{ بالصورة } 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! \text{ واقسم المضروبات المشتركة.}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \qquad \text{بسّط.}$$

معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو 35.

التحقق من المثال 1a. تعلم أن الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو $35a^3b^4$. ✓

تمرين موجّه

أوجد قياسات الزوايا في كل مثلث.

3A. $(x + y)^9$, الحد السادس 126

3B. $(a - b)^{13}$, الحد الثالث 78

560 | الدرس 9-5 | نظرية ذات الحدّين

أمثلة إضافية

4 أوجد معامل الحد x^7y في تفكيك $(3x-4y)^8$. $-69,984$

5 **الألعاب** أثناء دور اللاعب في إحدى الألعاب اللوحية، يجب أن يدير اللاعب قرصًا دوارًا. وتتمثل الألوان الأربعة المحتملة التي يمكن للقرص الدوار الوقوف عليها في الأخضر أو الأزرق أو الأحمر أو الأصفر. فإذا كان احتمال جميع الألوان الأربعة متساويًا. فما احتمال أن يتوقف على الأخضر 5 مرات من 10 مرات تدوير؟ حوالي 5.84%

مثال 4 معاملات ذات الحدّين بخلاف 1

أوجد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x-3y)^9$.

من أجل أن تكون $(4x-3y)^9$ بالصورة $(a+b)^n$. افترض أن $a = 4x$ و $b = -3y$. معامل الحد الذي يحتوي على $a^{n-r}b^r$ في تفكيك $(a+b)^n$ محدد بالعلاقة ${}_nC_r$. إذًا. لإيجاد معامل ذات الحدّين للحد الذي يحتوي على a^7b^2 في تفكيك $(a+b)^9$. أوجد قيمة ${}_nC_r$ حيث $n = 9$ و $r = 2$.

$${}_9C_2 = \frac{9!}{(9-2)!\,2!} \qquad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{9!}{7!\,2!} \qquad \text{اطرح.}$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\,2!} \qquad \text{أعد كتابة } 9! \text{ بالصورة } 9 \cdot 8 \cdot 7! \text{ واقسم المضروبات المشتركة.}$$

$$= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \qquad \text{بسّط.}$$

إذًا. معامل ذات الحدّين للحد a^7b^2 في $(a+b)^9$ هو 36. ضع $4x$ مكان a وضع $-3y$ مكان b لإيجاد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك ذات الحدّين الأصلية.

$$36a^7b^2 = 36(4x)^7(-3y)^2 \qquad a = 4x \text{ و } b = -3y$$

$$= 5,308,416x^7y^2 \qquad \text{بسّط.}$$

إذًا. معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x-3y)^9$ هو 5,308,416.

تمرين موجّه

أوجد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك ذات حدّين.

4A. $(2x-3y)^8, x^3y^5$ الحد $-108,864$

4B. $(2p+1)^{15}$, 11 الحد 96,096

يمكنك استخدام معاملات تعابير ذات الحدّين لحل مسائل من الحياة اليومية التي يكون فيها فقط مخرجات من حدث. والمسائل التي يمكن حلها باستخدام تفكيك ذات الحدّين يُطلق عليها *تجارب ذات حدّين*. وتوجد هذه التجارب فقط إذا كانت: (1) التجربة تتكون من عدد n من المحاولات المتطابقة (2) كل محاولة ينتج عنها *واحد* من مخرجين (3) المحاولات مستقلة.

بالنسبة إلى العدد n من المحاولات المستقلة لتجربة ما. إذا كانت احتمال النجاح p واحتمال الإخفاق $q = 1 - p$. فإن الحد ${}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ في التفكيك $(p+q)^n$ يعطي احتمال x من النجاحات في عدد n من المحاولات.

الربط بالحياة اليومية

استقبال الضربات هو أي وقت يواجه فيه لاعب المضرب رامي الكرة إلا عندما يقوم اللاعب بما يلي "(أولاً) ضربة تضحية أو التضحية بإحراز هدف أو (ثانيًا) الفوز بالقاعدة الأولى في أربع كرات أو (ثالثًا) الاصطدام بكرة الرامي أو (رابعًا) الفوز بالقاعدة الأولى بسبب التدخل أو الاعتراض".

المصدر: Major League Baseball

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام معاملات ذات الحدّين

كرة القاعدة احتمال تصدي عيسى لضربة في حالة استقبال الضربات هو $\frac{1}{5}$. فما احتمال تصدي عيسى لـ 4 ضربات بالضبط خلال استقبال الـ 10 ضربات التالية؟

النجاح في هذا الموقف هو تصدي عيسى لضربة. إذًا $p = \frac{1}{5}$ و $q = 1 - \frac{1}{5}$ أو $\frac{4}{5}$. كل استقبال يمثل محاولة. إذًا $n = 10$. نريد إيجاد احتمال نجاح عيسى 4 مرات في 10 محاولات. إذًا افترض أن $x = 4$. لإيجاد هذا الاحتمال. أوجد قيمة الحد ${}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ في تفكيك $(p+q)^n$.

$${}_nC_x\, p^x q^{n-x} = {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^{10-4} \qquad p = \frac{1}{5}, q = \frac{4}{5}, n = 10, \text{ و } x = 4$$

$$= \frac{10!}{(10-4)!\,4!}\left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \qquad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$\approx 0.088 \qquad \text{استخدم الحاسبة.}$$

إذًا. احتمال تصدي عيسى لأربع ضربات خلال استقبال 10 ضربات تالية تساوي حوالي 0.088 أو 8.8%.

تمرين موجّه

5. إلقاء قطع النقد المعدنية تم رمي قطعة نقد معدنية سليمة ومتوازنة 8 مرات. أوجد احتمال كل ناتج.

A. 3 صور بالضبط $\frac{7}{32}$ أو نحو 21.88%

B. 6 أوجه كتابة بالضبط $\frac{7}{64}$ أو نحو 10.94%

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون أصحاب النمط السمعي/الموسيقي اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لكتابة قصيدة أو كلمات نشيد إيقاعي يصف نظرية ذات الحدّين. وينبغي أن يتضمن النشيد عدة أنماط تحدث في النظرية.

تقودنا صيغة إيجاد معاملات تفكيك ذات حدّين إلى نظرية عن تفكيك القوى الأسيّة لذات الحدّين تُسمى **نظرية ذات الحدّين**.

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدّين

لأي عدد صحيح موجب n، تفكيك $(a+b)^n$ يُعطى بالعلاقة

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n,$$

حيث $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

ستثبت نظرية ذات الحدّين في التمرين 75.

تلميح تقني

التوافيق لإيجاد قيمة ${}_{10}C_4$ باستخدام الحاسبة، أدخل 10 وحدد nCr من القائمة MATH ▸ PRB ثم أدخل 4.

مثال 6 إيجاد مفكوك ذوات حدّين باستخدام نظرية ذات الحدّين

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

a. $(3x-y)^4$

طبّق نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(a+b)^4$. حيث $a = 3x$ و $b = -y$.

$$\begin{aligned}(3x-y)^4 &= {}_4C_0\,(3x)^4(-y)^0 + {}_4C_1\,(3x)^3(-y)^1 + {}_4C_2\,(3x)^2(-y)^2 + \\ &\quad {}_4C_3\,(3x)^1(-y)^3 + {}_4C_4\,(3x)^0(-y)^4 \\ &= 1(81x^4)(1) + 4(27x^3)(-y) + 6(9x^2)(y^2) + 4(3x)(-y^3) + 1(1)(y^4) \\ &= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4\end{aligned}$$

b. $(2p+q^2)^5$

طبّق نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(a+b)^5$. حيث $a = 2p$ و $b = q^2$.

$$\begin{aligned}(2p+q^2)^5 &= {}_5C_0\,(2p)^5(q^2)^0 + {}_5C_1\,(2p)^4(q^2)^1 + {}_5C_2\,(2p)^3(q^2)^2 + {}_5C_3\,(2p)^2(q^2)^3 + {}_5C_4\,(2p)^1(q^2)^4 + \\ &\quad {}_5C_5\,(2p)^0(q^2)^5 \\ &= 1(32p^5)(1) + 5(16p^4)(q^2) + 10(8p^3)(q^4) + 10(4p^2)(q^6) + 5(2p)(q^8) + 1(1)(q^{10}) \\ &= 32p^5 + 80p^4q^2 + 80p^3q^4 + 40p^2q^6 + 10pq^8 + q^{10}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

6A. $(5m+4)^3$ $125m^3 + 300m^2 + 240m + 64$

6B. $(8x^2-2y)^6$ $262{,}144x^{12} - 393{,}216x^{10}y + 245{,}760x^8y^2 - 81{,}920x^6y^3 + 15{,}360x^4y^4 - 1536x^2y^5 + 64y^6$

لأن تفكيك ذات الحدّين هو مجموع، كثيرًا ما تتم كتابة نظرية ذات الحدّين باستخدام الرمز سيجما. بالإضافة إلى ذلك، الرمز ${}_nC_r$ يُستبدل عادة بـ $\binom{n}{r}$.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال 7 كتابة تفكيك ذات حدّين باستخدام الرمز سيجما

مثّل تفكيك $(5x-7y)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما.

طبّق نظرية ذات الحدّين لتمثيل تفكيك $(a+b)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما، حيث $a = 5x$ و $b = -7y$.

$$(5x-7y)^{20} = \sum_{r=0}^{20} \binom{20}{r} (5x)^{20-r}(-7y)^r$$

تمرين موجّه

7. مثّل تفكيك $(3a+12b)^{30}$ باستخدام الرمز سيجما. $\sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} (3a)^{30-r}(12b)^r$

أمثلة إضافية

6 استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

a. $(2t+3u)^3$ $8t^3 + 36t^2u + 54tu^2 + 27u^3$

b. $(a-2b^2)^4$ $a^4 - 8a^3b^2 + 24a^2b^4 - 32ab^6 + 16b^8$

7 مثّل تفكيك $(3x-5y)^{17}$ مستخدمًا رمز سيجما.

$$\sum_{r=0}^{17} \binom{17}{r} (3x)^{17-r}(-5y)^r$$

إجابات إضافية

1. $16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$
2. $n^5 + 5n^4m + 10n^3m^2 + 10n^2m^3 + 5nm^4 + m^5$
3. $64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3$
4. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
5. $2187x^7 + 10{,}206x^6y + 20{,}412x^5y^2 + 22{,}680x^4y^3 + 15{,}120x^3y^4 + 6048x^2y^5 + 1344xy^6 + 128y^7$
6. $n^6 - 24n^5 + 240n^4 - 1280n^3 + 3840n^2 - 6144n + 4096$
7. $81c^4 - 108c^3d + 54c^2d^2 - 12cd^3 + d^4$
8. $m^5 - 5m^4a + 10m^3a^2 - 10m^2a^3 + 5ma^4 - a^5$
9. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
10. $81p^4 - 216p^3q + 216p^2q^2 - 96pq^3 + 16q^4$
11. 3360
12. 114,688
13. 262,440
14. −101,376
15. 56
16. 1,088,640
17. −126
18. 924
19. 280
20. 5670
21. 1,088,640
22. 145,152
23. $\frac{35}{27}$
24. $-\frac{63}{8}$
25. 21,504
26. 95,681,250

562 | الدرس 5-9 | نظرية ذات الحدّين

التمارين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين. (المثالان 1 و 2) **10–1. انظر الهامش.**

1. $(2+x)^4$
2. $(n+m)^5$
3. $(4a-b)^3$
4. $(x+y)^6$
5. $(3x+2y)^7$
6. $(n-4)^6$
7. $(3c-d)^4$
8. $(m-a)^5$
9. $(a-b)^3$
10. $(3p-2q)^4$

26–11. انظر الهامش.

أوجد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك. (المثالان 3 و4)

11. $(x-2)^{10}$, الحد الخامس
12. $(4m+1)^8$, الحد الثالث
13. $(x+3y)^{10}$, الحد الثامن
14. $(2c-d)^{12}$, الحد السادس
15. $(a+b)^8$, الحد الرابع
16. $(2a+3b)^{10}$, الحد الخامس
17. $(x-y)^9$, الحد السادس
18. $(x+y)^{12}$, الحد السابع
19. $(x+2)^7$, الحد الرابع
20. $(a-3)^8$, الحد الخامس
21. $(2a+3b)^{10}$, a^6b^4 حد
22. $(2x+3y)^9$, x^6y^3 حد
23. $\left(x+\frac{1}{3}\right)^7$, الحد الرابع
24. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^{10}$, الحد السادس
25. $(x+4y)^7$, x^2y^5 حد
26. $(3x+5y)^{10}$, x^6y^4 حد

27. **الاختبار** تخضع نجلاء لاختبار به قسم يحتوي على 16 من أسئلة صواب أم خطأ. (المثال 3)
   a. كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 12 إجابة "خطأ" صحيحة؟ **1820**
   b. كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 8 إجابة "صواب" صحيحة؟ **12,870**

28. **الأعمال** احتمال تحقيق مندوب مبيعات لصفقة بيع هي $\frac{1}{5}$. مندوب المبيعات لديه 12 موعدًا هذا الأسبوع. (المثال 5)
   a. أوجد احتمال عدم تحقيق مندوب المبيعات لأي صفقات هذا الأسبوع. **6.87%**
   b. ما احتمال تحقيق مندوب المبيعات 3 صفقات بالضبط هذا الأسبوع؟ **23.62%**
   c. أوجد احتمال تحقيق مندوب المبيعات 10 صفقات هذا الأسبوع. **0.0004%**

29. **الأحياء** ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن العاملين بحديقة الحيوان يتوقعون ولادة 30 من نسل الجيبون هذا العام. (مثال 5)
   a. ما احتمال عدم وجود ذكور ضمن نسل الجيبون هذا العام؟ **0.12%**
   b. أوجد احتمال وجود ذكرين بالضبط ضمن نسل الجيبون هذا العام. **3.37%**
   c. ما احتمال عدم وجود 23 من الإناث ضمن نسل الجيبون هذا العام؟ **15.38%**

30. **البولينج** تحرز نجاة متوسط ضربتين في كل 10 إطارات. فما احتمال إحراز نجاة 4 ضربات بالضبط في الإطارات العشرة التالية؟ (المثال 5) **8.81%**

لوحة نقاط البولينغ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	الإجمالي
نجاة	7 / 20	x 39	5 4 48	9 / 66	8 / 86	x 113	x 130	7 0 137	x 156	8 1 165	165
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	الإجمالي

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين. (المثال 6) **38–31. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

31. $(4t+3)^5$
32. $(8-5y)^3$
33. $(2m-n)^6$
34. $(9h+2j)^4$
35. $(3p+q)^7$
36. $(a^2-2b)^8$
37. $(7c^2+3d)^5$
38. $(2w-4x^3)^7$

مثّل تفكيك كل تعبير باستخدام الرمز سيجما. (المثال 7) **44–39. انظر الهامش.**

39. $(2q+3)^{15}$
40. $(m-8n)^{25}$
41. $(11x+y)^{31}$
42. $(4a+7b)^{19}$
43. $\left(3f-\frac{3}{4}g\right)^{22}$
44. $\left(\frac{1}{2}s-5t\right)^{36}$

45. **ألعاب الكمبيوتر** في لعبة كمبيوتر، عند فتح صندوق كنز، سيكون بداخله قطع ذهبية أو أحجار. احتمال وجود قطع ذهبية هي $\frac{5}{6}$. B
   a. يتم فتح صندوق الكنز 15 مرة في كل لعبة. في لعبة، بكم طريقة يمكن فتح الصندوق والعثور على قطع ذهبية 9 مرات بالضبط؟ **5005**
   b. ما احتمال عثور لاعب على قطع ذهبية أكثر من 12 مرة؟ **53.22%**

46. **التواصل المجتمعي** في أحد بنوك الطعام، يجري استقبال الأغذية المعلبة وتوزيعها على المحتاجين في المجتمع. يتحقق متطوعون من جودة الطعام قبل توزيعه. واحتمال توزيع غذاء معلب على المحتاجين بعد استلامه في بنك الطعام هي $\frac{4}{5}$.
   a. يتحقق كل متطوع من جودة 30 علبة أغذية كل ساعة. في ساعة واحدة، بكم طريقة يمكن التحقق من جودة غذاء معلب والتبرع به 23 مرة بالضبط؟ **2,035,800**
   b. ما احتمال أن يقوم متطوع يتحقق من جودة المعلبات بالتخلص منها أقل من 4 مرات؟ **12.27%**

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط كل تعبير مما يلي. **50–47. انظر الهامش.**

47. $(2d+\sqrt{5})^4$
48. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^5$
49. $\left(4s+\frac{1}{2}t\right)^5$
50. $\left(\frac{1}{y}-3z\right)^6$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-44 للتحقّق من مدى استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع للتمارين 31-38. قد يرتكب الطلاب بعض الأخطاء في حالة عدم كتابة جميع العوامل قبل القيام بالحسابات. شجع الطلاب على كتابة جميع العوامل.

إجابات إضافية

39. $\sum_{r=0}^{15}\binom{15}{r}(2q)^{15-r}(3)^r$

40. $\sum_{r=0}^{25}\binom{25}{r}(m)^{25-r}(-8n)^r$

41. $\sum_{r=0}^{31}\binom{31}{r}(11x)^{31-r}(y)^r$

42. $\sum_{r=0}^{19}\binom{19}{r}(4a)^{19-r}(7b)^r$

43. $\sum_{r=0}^{22}\binom{22}{r}(3f)^{22-r}\left(-\frac{3}{4}g\right)^r$

44. $\sum_{r=0}^{36}\binom{36}{r}\left(\frac{1}{2}s\right)^{36-r}(-5t)^r$

47. $16d^4+32\sqrt{5}d^3+120d^2+40\sqrt{5}d+25$

48. $a^2\sqrt{a}-5a^2\sqrt{b}+10a\sqrt{ab}-10ab\sqrt{b}+5\sqrt{a}b^2-b^2\sqrt{b}$

49. $1024s^5+640s^4t+160s^3t^2+20s^2t^3+\frac{5}{4}st^4+\frac{1}{32}t^5$

50. $\frac{1}{y^6}-\frac{18z}{y^5}+\frac{135z^2}{y^4}-\frac{540z^3}{y^3}+\frac{1215z^4}{y^2}-\frac{1458z^5}{y}+729z^6$

أوجد قياس الزوايا في كل مثلث.

51. $(k-\sqrt{5})^9$، الحد الخامس **3150**

52. $(\sqrt{2}+2c)^{10}$، الحد الأوسط **$32,256\sqrt{2}$**

53. $\left(\frac{1}{4}p+q\right)^{11}$، الحد السابع **$\frac{231}{512}$**

54. $\left(\sqrt{h}-3\sqrt{j}\right)^{11}$، الحد السادس **$-112,266$**

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط كل قوة أسيّة لعدد مركب.

55. $(i+2)^4$ **$-7+24i$**

56. $(i-3)^3$ **$-18+26i$**

57. $(1-4i)^5$ **$1121-404i$**

58. $(2+\sqrt{7}i)^4$ **$-103-24\sqrt{7}i$**

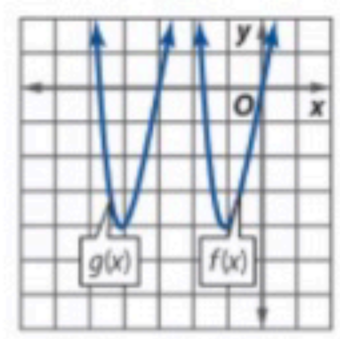
59. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{1}{2}\right)^3$ **$\frac{5+\sqrt{2}i}{8}$**

60. $(\sqrt{-16}i+3)^5$ **-1**

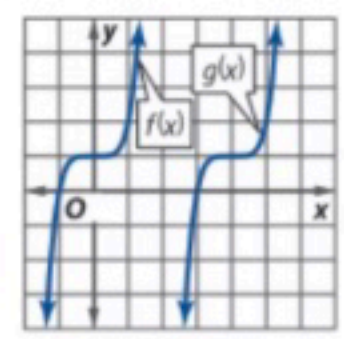
C

التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)$. استخدم نظرية ذات الحدّين لإيجاد الدالة كثيرة الحدود لـ $g(x)$ بالصورة القياسية. **61–64. انظر الهامش.**

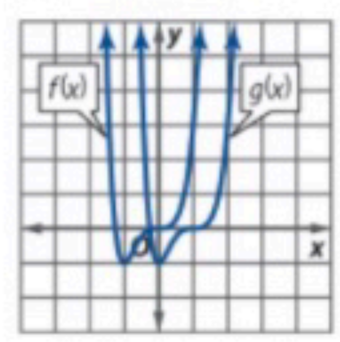
61. $f(x)=x^4+5x$
$g(x)=f(x+3)$



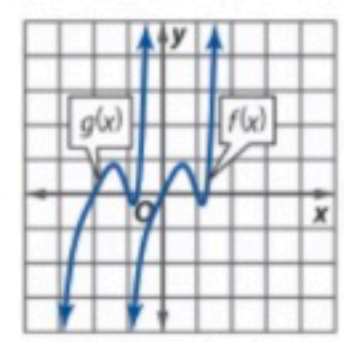
62. $f(x)=x^5+1$
$g(x)=f(x-4)$



63. $f(x)=x^6+2x^3$
$g(x)=f(x-1)$



64. $f(x)=x^7-3x^4+2x$
$g(x)=f(x+2)$



65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم نظرية ذات الحدّين لاستكشاف ناتج قسمة فرق $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لدوال القوة الأسيّة.

a. **تحليليًا** استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x)=x^3$ و $f(x)=x^4$ و $f(x)=x^5$ و $f(x)=x^6$ و $f(x)=x^7$. استخدم النمط لتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x)=x^n$.

b. **جدوليًا** أوجد قيمة كل تعبير في الجزء **a** حيث $h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ وسجل النتائج في جدول. ماذا تلاحظ؟

c. **بيانيًا** مثّل بيانيًا مجموعة الدوال الناتجة من الجزء **b** حيث $f(x)=x^3$ على المستوى الإحداثي ذاته. ماذا تلاحظ؟

a–c انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

d. **تحليليًا** بينما تقترب h من 0. اكتب تعبير ناتج قسمة فرق $f(x)=x^n$، حيث n عدد صحيح موجب. **nx^{n-1}**

66. في تفكيك $(ax+b)^5$ المعامل العددي للحد الثاني هو 400 والمعامل العددي للحد الثالث هو 2000. أوجد قيمتي a و b.

$a=2$ و $b=5$

67. **البحث** بالرغم من أن مثلث باسكال يُنسب إلى بليز باسكال، لكن قام غيره من علماء الرياضيات بتطبيق معرفتهم بالمثلثات قبل باسكال بمئات الأعوام. استخدم الإنترنت أو غيره من المصادر للبحث على الأقل عن شخص واحد استخدم خواص المثلثات قبل مولد باسكال. ثم صف الأنماط الأخرى الموجودة في مثلث باسكال وليست مذكورة في هذا الدرس.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. **تحليل الخطأ** تحاول نبيلة وميسون إيجاد الحد السادس من تفكيك $(x+y)^{14}$. تقول نبيلة إن معامل الحد هو 3003. وتعتقد ميسون أنه 2002. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

ميسون، أوجدت نبيلة قيمة ${}_nC_r$ حيث $r=6$ وليس حيث $r=6-1$ أو 5.

69. **تحدٍ** صف إستراتيجية تستخدم فيها نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(x+y+z)^n$. ثم اكتب وبسّط تفكيكًا للتعبير.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

70. **البرهان** مجاميع المعاملات في الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال موضحة أدناه.

الصف 0	1	$=2^0$
الصف 1	$1+1$	$=2^1$
الصف 2	$1+2+1$	$=2^2$
الصف 3	$1+3+3+1$	$=2^3$
الصف 4	$1+4+6+4+1$	$=2^4$
الصف 5	$1+5+10+10+5+1$	$=2^5$

أثبت أن مجموع المعاملات في الصف رقم n من مثلث باسكال هو 2^n. (*تلميح*: اكتب 2^n بالصورة $(1+1)^n$. ثم استخدم نظرية ذات الحدّين للتفكيك.)

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

71. **الكتابة في الرياضيات** صف كيفية إيجاد الأعداد في كل صف من مثلث باسكال. ثم اكتب بعض الجمل لوصف وجه الاختلاف بين تفكيك $(a+b)^{n-1}$ و $(a-b)^n$ وبين تفكيك $(a+b)^n$. **انظر الهامش.**

72. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

في حالة رفع ذات حدّين إلى القوة 5، يكون للحدّين الأوسطين من التفكيك المعاملات ذاتها.

أحيانًا؛ الحدان الأوسطان لهما المعامل ذاته فقط إذا كانت معاملات كل حد في ذات الحدّين متساوية.

73. **تحدٍ** اشرح كيفية إيجاد حدٍ في تفكيك $\left(\frac{1}{2v}+6v^7\right)^8$ لا يحتوي على المتغير v. ثم أوجد الحد.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

74. **البرهان** استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات نظرية ذات الحدّين.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

إجابات إضافية

61. $g(x)=x^4+12x^3+54x^2+113x+96$

62. $g(x)=x^5-20x^4+160x^3-640x^2+1280x-1023$

63. $g(x)=x^6-6x^5+15x^4-18x^3+9x^2-1$

64. $g(x)=x^7+14x^6+84x^5+277x^4+536x^3+600x^2+354x+84$

مراجعة شاملة

برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n أو أوجد مثالاً مضادًا.

75. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ **الإجابة النموذجية: $n = 3$**

76. $10^{2n-1} + 1$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

77. **علم الأنساب** في كتاب الجذور، تتبع المؤلف أليكس هايلي تاريخ عائلته لعدة أجيال. إذا كان بإمكانك تتبع تاريخ عائلتك 15 جيلاً في الماضي، ابتداء من والديك، فكم عدد من ستجد من أسلافك؟ **65,534**

78. افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(5, -12)$ ونقطة نهايته $E(8, -17)$. اكتب $\overrightarrow{DE}$ على هيئة توفيق خطي للمتجهين i و j **$3i - 5j$**

اكتب كل معادلة بالصورة القياسية، وحدد القطع المخروطي المرتبط بها.

79. $x^2 + y^2 - 16x + 10y + 64 = 0$ **$(x-8)^2 + (y+5)^2 = 25$، دائرة**

80. $y^2 + 16x - 10y + 57 = 0$ **$(y-5)^2 = -16(x+2)$، قطع مكافئ**

81. $x^2 + y^2 + 2x + 24y + 141 = 0$ **$(x+1)^2 + (y+12)^2 = 4$، دائرة**

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

82. $\frac{5x^2 - 14}{(x^2-2)^2}$ **$\frac{5}{x^2-2} - \frac{4}{(x^2-2)^2}$**

83. $\frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 22}{x^2 - 8x + 15}$ **$x + \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-5}$**

84. $\frac{3x}{(x-3)^2}$ **$\frac{3}{x-3} + \frac{9}{(x-3)^2}$**

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

85. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \end{array}\right]$ **لا**

86. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **نعم**

87. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **نعم**

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية.

88. $\tan 195°$ **$2 - \sqrt{3}$**

89. $\csc \frac{5\pi}{12}$ **$\sqrt{6} - \sqrt{2}$**

90. $\sin \frac{\pi}{12}$ **$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$**

91. **المدخرات** أودع والد ميساء 30 AED في حساب بنكي لها. ثم نسيا أمر المال ولم يقوما بعمليات إيداع أو سحب. ويوضح الجدول رصيد الحساب لعدة أعوام.

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات. **انظر الهامش.**

b. أوجد دالة أسيّة لتمثيل للبيانات. **$y = 30(1.065)^x$**

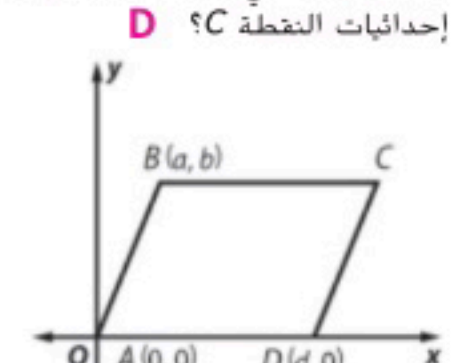
c. استخدم الدالة لتوقع رصيد الحساب خلال 41 عامًا. **$\approx$ AED 396.70**

الزمن المنقضي (أعوام)	الرصيد (AED)
0	30.00
5	41.10
10	56.31
15	77.16
20	105.71
25	144.83
30	198.43

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

92. **SAT/ACT** في الشكل أدناه، $ABCD$ هو متوازي أضلاع. ما إحداثيات النقطة C؟ **D**

A $(d + a, y)$
B $(d - a, b)$
C $(d + x, b)$
D $(d + a, b)$
E $(d + b, a)$



93. **مراجعة** ما قيمة $\frac{12!}{8!\,4!}$؟ **F**

F 495
G 500
H 660
J 710

94. تجري الأنسة موزة اختبارًا قصيرًا من أربعة أسئلة للاختيار من متعدد. ويمكن الإجابة عن كل سؤال باختيار A أو B أو C أو D. بكم طريقة يمكن لطالب الإجابة عن الأسئلة باستخدام كل إجابة A أو B أو C أو D مرة واحدة؟ **C**

A 20
B 22
C 24
D 26

95. مراجعة أي تعبير يكافئ $(2X - 2)^4$؟ **H**

F $16x^4 + 64x^3 - 96x^2 - 64x + 16$
G $16x^4 - 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$
H $16x^4 - 64x^3 + 96x^2 - 64x + 16$
J $16x^4 + 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$

ملاحظات لحل التمرين

الإنترنت يتطلب التمرين 67 استخدام الإنترنت أو مواد مرجعية أخرى.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 68. ينبغي أن يدرك الطلاب أن المعامل هو $_{14}C_5 = 2002$. ويجب أن يتذكر الطلاب أن $r = n - 1$، حيث n عدد الحد. وقد حسبت نبيلة $_{14}C_6$.

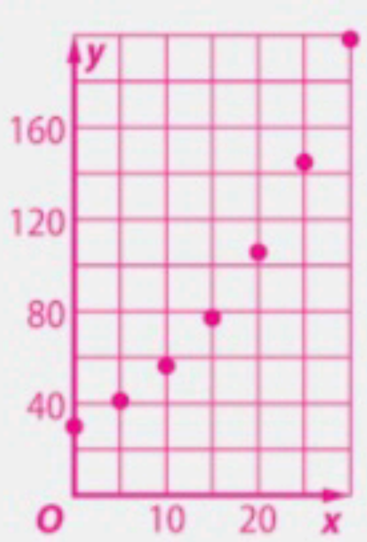
4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة الصفوف الأربعة الأولى لمثلث باسكال لتفكيك ذات الحدين $(x + y)^n$.

إجابات إضافية

71. الإجابة النموذجية: يساوي العدد الأول والأخير من كل صف 1. ويتكون كل عدد آخر بجمع العددين الموجودين أعلى هذا العدد في الصف السابق. ويشتمل تفكيك $(a + b)^{n-1}$ على n من الحدود ويشتمل تفكيك $(a + b)^n$ على $n + 1$ من الحدود. وتكون معاملات حدود تفكيك $(a + b)^n$ جميعها موجبة، بينما يكون كل معامل آخر في تفكيك $(a - b)^n$ سالبًا.

91a.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6-9 إيجاد الحد *النوني* لتعبير متسلسلة لا نهائية باستخدام رمز سيجما.

الدرس 6-9 استخدام متسلسلة القوة لتمثيل دالة نسبية.
استخدام تمثيلات متسلسلة القوة لتقريب قيم الدوال المتسامية

بعد الدرس 6-9 تمثيل الدوال كمتسلسلة لاستخدامها في المعادلات التفاضلية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما أنواع الدوال التي تمثل الأمواج الصوتية؟ مثلثية
- لماذا يجب تمثيل مقطوعة موسيقية مخزنة بمتسلسلة؟ الإجابة النموذجية: لأن المقطوعة بأكملها هي مجموع أجزائها

الدرس 6-9 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

.. السابق

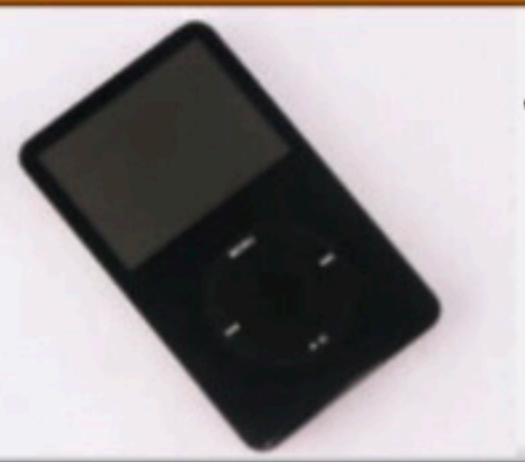
- وجدت الحد *النوني* لمتسلسلة لانهائية باستخدام رمز سيجما.

.. الحالي

1. استخدام متسلسلة قوة أسيّة لتمثيل دالة نسبية.
2. استخدام تمثيلات متسلسلة القوة الأسيّة لتقريب قيم الدوال المتسامية.

.. لماذا؟

- قام فنان أولاً بعزف الموسيقى التي تستمع إليها على مشغل صوتي رقمي. ثم تم تحليل الشكل الموجي لكل صوت في الأداء إلى الأجزاء المكونة له وتخزينه رقميًا. ثم تم استرجاع هذه الأجزاء ودمجها معًا لإعادة إنتاج كل مقطع صوتي أصلي من الأداء. ويعتبر التحليل لكل متسلسلة خاصة عنصرًا أساسيًا في هذه العملية.



المفردات الجديدة

متسلسلة القوة
power series
متسلسلة أسيّة
exponential series
صيغة أويلر
Euler's Formula

1 متسلسلة القوة

قبل ذلك في هذه الوحدة، رأيت كيف يمكن التعبير عن متسلسلات الأعداد في صورة دوال. وفي هذا الدرس، سترى أن بعض الدوال يمكن تحليلها إلى متسلسلات لانهائية من دوال المركبات.

تعلمت أن مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots, a_1 = 1$$

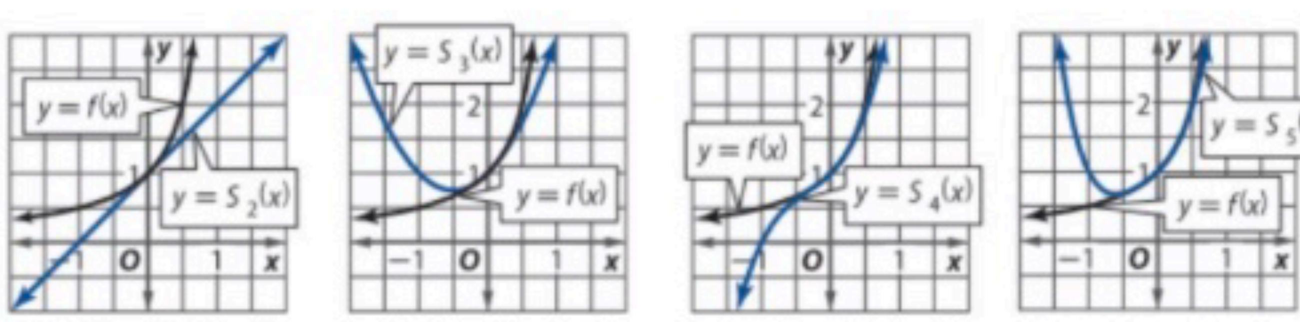
ذات النسبة المشتركة r، تقترب من المجموع $\frac{a_1}{1-r}$ إذا كان $|r| < 1$. بالتعويض عن r باستخدام x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$ ، حيث $|x| < 1$

ويترتب على ذلك أنه يمكن التعبير عن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ في صورة متسلسلة لانهائية. أي أن،

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ أو $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ حيث $|x| < 1$.

وتوضح الأشكال أدناه التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{1-x}$ والمجاميع الجزئية من الثاني إلى الخامس $S_n(x)$ للمتسلسلة:
$S_2(x) = 1 + x, S_3(x) = 1 + x + x^2, S_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ و $S_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.



لاحظ أنه بينما تزداد قيمة n، يبدو أن التمثيل البياني لـ $S_n(x)$ يقترب أكثر فأكثر من التمثيل البياني لـ $f(x)$ في الفترة $(-1, 1)$ أو $|x| < 1$. ولاحظ أيضًا أن كل مجموع من المجاميع الجزئية للمتسلسلة هو دالة كثيرة الحدود. إذًا يمكن النظر إلى المتسلسلة باعتبارها كثيرة حدود لانهائية. والمتسلسلة اللانهائية من هذا النوع تُسمى **متسلسلة القوة**.

المفهوم الأساسي متسلسلة القوة

في المتسلسلة اللانهائية التي في الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

يمكن أن تساوي x و a_n أي قيم نظرًا لأن $n = 0, 1, 2, \ldots$. وتُسمى متسلسلة قوة في x.

إذا عرفت تمثيل متسلسلة القوة لدالة واحدة، فيمكنك استخدامه لإيجاد تمثيلات متسلسلة القوة للدوال الأخرى ذات الصلة.

مثال 1 تمثيل متسلسلة القوة للدالة النسبية

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة $g(x) = \frac{1}{3-x}$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

لإيجاد التحويل الذي يربط $f(x)$ بـ $g(x)$، استخدم التعويض بـ u. عوض بـ u عن x في f. ساوِ بين الدالتين وأوجد الحل بإيجاد قيمة u كما هو مبين.

$$g(x) = f(u)$$
$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-u}$$
$$1 - u = 3 - x$$
$$-u = 2 - x$$
$$u = x - 2$$

إذًا، $g(x) = f(x-2)$. بالتعويض عن x باستخدام $x - 2$ في $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ حيث $|x| < 1$ ينتج

$$f(x-2) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \text{ حيث } |x-2| < 1.$$

إذًا، يمكن تمثيل $g(x) = \frac{1}{3-x}$ بواسطة متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$.

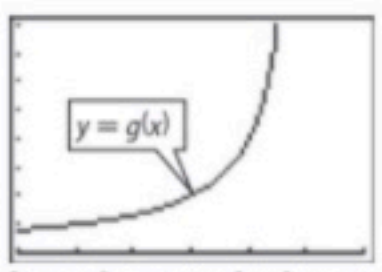
وتتقارب هذه المتسلسلة حيث $|x - 2| < 1$، بما يكافئ $-1 < x - 2 < 1$ أو $1 < x < 3$.

الحل الجزئي السادس $S_6(x)$ لهذه المتسلسلة هو

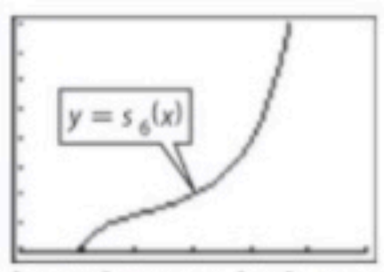
$$1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4 + (x-2)^5 \text{ أو } \sum_{n=0}^{5} (x-2)^n.$$

يتم توضيح التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{3-x}$ و $S_6(x) = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4 + (x-2)^5$

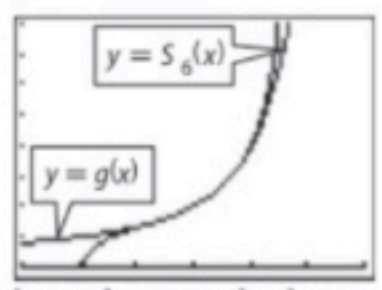
لاحظ أنه في الفترة $(1, 3)$، يقترب التمثيل البياني لـ $S_6(x)$ من التمثيل البياني لـ $g(x)$.



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5



[0.5, 3.5] scl: 0.5 by [0, 4] scl: 0.5

تمرين موجّه

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة لـ $g(x)$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة. **1A–B. انظر الهامش.**

1A. $g(x) = \frac{1}{1-2x}$

1B. $g(x) = \frac{2}{1-x}$

في حساب التفاضل والتكامل، كثيرًا ما تكون تمثيلات الدالة الأسيّة أسهل استخدامًا في الحسابات من التمثيلات الأخرى للدوال عند تحديد الدوال التي يُطلق عليها *المشتقات والتكاملات*. ويمكن الاطلاع على تطبيق فعلي من خلال استعراض تمثيلات متسلسلة القوة للدوال المتسامية مثل $f(x) = e^x$ و $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$.

قراءة في الرياضيات

عدد أويلر قام عالم الرياضيات السويدي ليونارد أويلر بنشر كتاب طور فيه هذا العدد غير النسبي الذي يُسمى e، عدد أويلر.

نصيحة دراسية

تحديد e تقدم المتسلسلة الأسية طريقة أخرى لتحديد e. عندما يكون $x = 1$، $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ أو $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

1 متسلسلة القوة

المثال 1 يوضح كيف يمكن تمثيل الدالة النسبية بمتسلسلة القوة.

التقويم التكويني

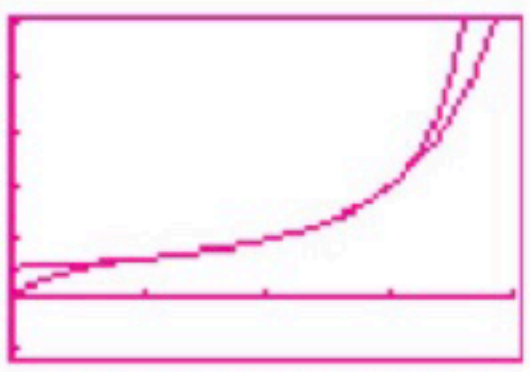
استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوى $g(x) = \frac{1}{4-x}$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوى.

$g(x) = \frac{1}{4-x} = \sum (x-3)^n$

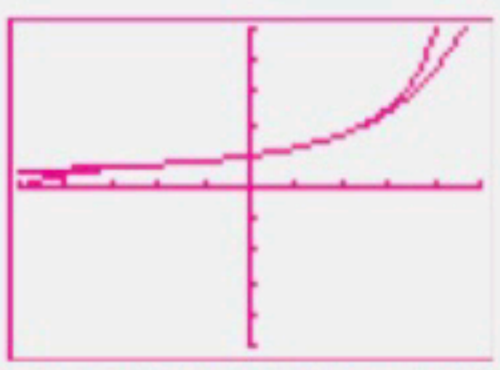
حيث $2 < x < 4$



[2, 4] scl: 0.5 by [−1, 5] scl: 1

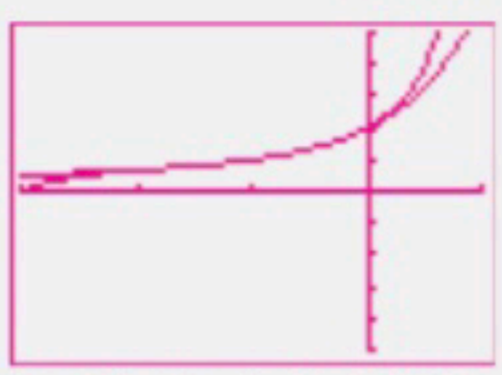
إجابات إضافية (تمرين موجّه)

1A. $g(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ حيث $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$



[−0.5, 0.5] scl: 0.1 by [−5, 5] scl: 1

1B. $g(x) = \frac{2}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} [0.5(1+x)]^n$ حيث $-3 < x < 1$



[−3, 1] scl: 0.1 by [−5, 5] scl: 1

2 الدوال المتسامية في صورة متسلسلة القوة

المثالان 2 و 3 يوضحان كيفية استخدام متسلسلة القوى لتمثيل الدوال الأسية والمثلثية. **المثال 4** يوضح كيفية استخدام صيغة أويلر لكتابة الصورة الأسية لعدد مركب. **المثال 5** يوضح كيفية كتابة اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب في نظام الأعداد المركبة.

2 الدوال المتسامية في صورة متسلسلة قوة

الدوال المتسامية في صورة متسلسلة قوة في السابق، تعلمت أنه يتم الحصول على العدد المتسامي e من خلال $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. إذًا، $e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$. ويمكننا استخدام هذا التعريف ونظرية ذات الحدّين لاشتقاق تمثيل متسلسلة قوة لــ $f(x) = e^x$.

قراءة في الرياضيات

عدد أويلر قام عالم الرياضيات السويدي ليونارد أويلر بنشر كتاب طور فيه هذا العدد غير النسبي الذي يُسمى e، عدد أويلر.

إذا افترضنا أن $u = \frac{1}{n}$ و $k = nx$. فإن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ تصبح $(1+u)^k$. وبتطبيق نظرية ذات الحدّين.

$$\begin{aligned}(1+u)^k &= {}_kC_0\,(1)^k u^0 + {}_kC_1\,(1)^{k-1}u + {}_kC_2\,(1)^{k-2}u^2 + {}_kC_3\,(1)^{k-3}u^3 + \cdots\\ &= \frac{k!}{(k-0)!\,0!}(1) + \frac{k!}{(k-1)!\,1!}(1)u + \frac{k!}{(k-2)!\,2!}(1)u^2 + \frac{k!}{(k-3)!\,3!}(1)u^3 + \cdots\\ &= 1 + \frac{k(k-1)!}{(k-1)!}u + \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!\,2!}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!\,3!}u^3 + \cdots\\ &= 1 + ku + \frac{k(k-1)}{2!}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}u^3 + \cdots\end{aligned}$$

والآن استبدل u بـــ $\frac{1}{n}$ واستبدل k بـــ nx وأوجد الحد بينما تقترب n من اللانهائية. استخدم الحقيقة أنه بينما تقترب n من اللانهائية، تستمر قيمة $\frac{1}{n}$ في التضاؤل. إذًا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} &= 1 + (nx)\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots\\ &= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\end{aligned}$$

كثيرًا ما تُسمى هذه المتسلسلة **المتسلسلة الأسيّة**.

المفهوم الأساسي المتسلسلة الأسيّة

متسلسلة القوة الأسيّة التي تمثل e^x تُسمى المتسلسلة الأسيّة وهي مقدمة بالعلاقة

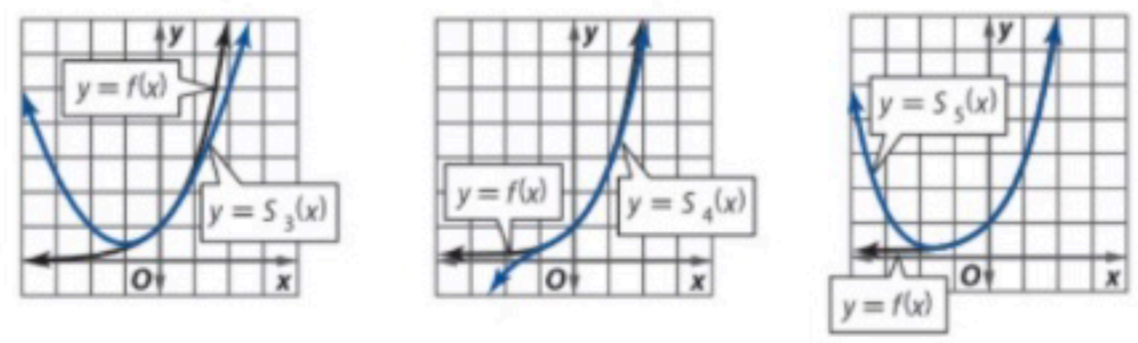
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

وهي مقاربة لجميع x.

نصيحة دراسية

تحديد e تقدم المتسلسلة الأسية طريقة أخرى لتحديد e. عندما $x = 1$، يكون e^1، $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}$ أو $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

تم أدناه عرض التمثيل البياني لــ $f(x) = e^x$ والمجاميع الجزئية $S_3(x)$، و $S_4(x)$ و $S_5(x)$ للمتسلسلة الأسيّة.



يمكنك من التمثيلات البيانية أن ترى أن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الأسيّة تقترب من التمثيل البياني لــ $f(x) = e^x$ بفترة متزايدة التوسع من المجال للقيم المتزايدة لــ n.

لاحظ أن الحسابات المتضمنة في المتسلسلة الأسيّة أبسط نسبيًا؛ عمليات الضرب (للقوى والمضروبات) والقسمة والجمع. ولذلك، تُستخدم المتسلسلة الأسيّة في الحاسبات وبرامج الكمبيوتر لإيجاد قيمة e^x بالدرجات المطلوبة من الدقة.

مثال 2 المتسلسلة الأسيّة

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب قيمة $e^{1.5}$. قرب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad e^x \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{1.5} \approx 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} + \frac{1.5^4}{4!} \qquad x = 1.5$$

$$\approx 4.398 \qquad \text{بسّط.}$$

التحقق تُظهر حاسبة، باستخدام المجموع الجزئي للمتسلسلة الأسيّة التي بها عددًا كبيرًا من الحدود، تقريبًا للعدد 4.48 لـ $e^{1.5}$. إذًا، فإن التقريب لـ 4.398 يكون منطقيًا. ✓

تمرين موجّه

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

2A. $e^{-0.75}$ حوالي 0.474 **2B.** $e^{0.25}$ حوالي 1.284

يكون للدوال المتسامية الأخرى تمثيلات المتسلسلات الأسيّة أيضًا. وتستخدم الحاسبات وأجهزة الكمبيوتر **المتسلسلات الأسيّة** لتقريب قيم دوال **cosine** و **sine**.

المفهوم الأساسي متسلسلة القوة لكل من Cosine و Sine

يمكن الحصول على تمثيلات المتسلسلات الأسيّة لكل من $\cos x$ و $\sin x$ من خلال

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

وهي مقاربة لجميع x.

باستبدال x بأي قيمة قياس زاوية بالراديان وإجراء الحسابات، يمكن إيجاد القيم التقريبية لدوال **cosine** و **sine** بأي درجة منشودة من الدقة.

مثال 3 المتسلسلة المثلثية

a. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine لتقريب قيمة $\cos\frac{\pi}{7}$ قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \qquad \cos x \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} \approx 1 - \frac{(0.449)^2}{2!} + \frac{(0.449)^4}{4!} - \frac{(0.449)^6}{6!} + \frac{(0.449)^8}{8!} \qquad x = \frac{\pi}{7} \text{ أو حوالي } 0.449$$

$$\approx 0.901 \qquad \text{بسّط.}$$

التحقق تُظهر حاسبة، باستخدام المجموع الجزئي للمتسلسلة القوة لـ cosine بها عددًا كبيرًا من الحدود، تقريبًا للعدد 0.901، مقربًا إلى أقرب ثلاث منازل عشرية، لـ $\cos\frac{\pi}{7}$. إذًا، فإن التقريب لـ 0.901 يكون منطقيًا. ✓

انتبه!

إيجاد قيمة e^x يقدم المموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة فقط تقريبات صحيحة منطقيًا لـ e^x من أجل x في $[-1.5, 2.5]$. وتكون المجاميع الجزئية التالية، مثل المجموع الجزئي السادس والسابع، أكثر دقة للفترات الأوسع لقيم x.

الربط بتاريخ الرياضيات

مادهافا السنغماري
(1340–1425)
عالم رياضيات هندي ولد بالقرب من كوتشين. وقد اكتشف مادهافا المتسلسلة المكافئة لتوسيعات $\sin x$ و $\cos x$ و $\arctan x$ في عام 1400 تقريبًا، أي قبل 200 عام من اكتشافها في أوروبا.

أمثلة إضافية

2 استخدم المجموع الجزئي الخامس متسلسلة القوى لتقريب $e^{1.25}$ إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. 3.458

3 **a.** استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوى لـ cosine لتقريب قيمة $\cos\frac{\pi}{4}$. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. 0.707

b. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوى لـ sine لتقريب قيمة $\sin\frac{\pi}{12}$. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. 0.259

التركيز على محتوى الرياضيات

متسلسلة القوى في بعض الفترات المحددة، يمكن تمثيل الدوال النسبية كمتسلسلة قوة مثل أن يتطابق التمثيلان البيانيان لدالتين في فترة.

الدوال المتسامية يمكن استخدام صيغ تمثيل الدوال الأسية والمثلثية في صورة متسلسلة قوى لتحويل هذا النوع من الدوال إلى متسلسلات قوة.

صيغة أويلر يمكن استخدام صيغة أويلر لكتابة عدد مركب في الصورة الأسية.

b. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـــ sine لتقريب قيمة $\sin \frac{\pi}{5}$ إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$ $\sin x \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\sin \frac{\pi}{5} \approx 0.628 - \frac{(0.628)^3}{3!} + \frac{(0.628)^5}{5!} - \frac{(0.628)^7}{7!} + \frac{(0.628)}{9!}$$ $x = \frac{\pi}{5}$ أو حوالي 0.628

$$\approx 0.588$$ بسّط.

التحقق باستخدام حاسبة، $\sin \frac{\pi}{5} \approx 0.588$. إذًا، تقريب 0.588 مقبول. ✓

نصيحة دراسية

المجموع الجزئي الخامس بينما توفر المجاميع الجزئية الإضافية تقريبًا أفضل، عادة ما يتسم المجموع الجزئي بالدقة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

تمرين موجّه

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـــ cosine أو sine لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

3A. $\sin \frac{\pi}{11}$ **0.282**

3B. $\cos \frac{2\pi}{17}$ **0.932**

ربما لاحظتَ أوجه التشابه في تمثيلات المتسلسلة الأسيّة لـــ $f(x) = e^x$ وتمثيلات المتسلسلة القوة لـــ $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$. ويتم اشتقاق علاقة من خلال التعويض عن x باستخدام $i\theta$ في المتسلسلة الأسيّة، حيث i هي الوحدة التخيلية و θ مقياس زاوية بالراديان.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots$$ $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$ $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + \left(i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$ جمع الحدود الحقيقية والتخيلية.

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$ خاصية التوزيع

$$= \cos \theta + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$ $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$ $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots$

هذه العلاقة تُسمى **صيغة أويلر**.

المفهوم الأساسي صيغة أويلر

لأي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

من المفترض أن تتعرف على الطرف الأيمن من هذه المعادلة كجزء من الصورة القطبية لعدد مركب. وبتطبيق صيغة أويلر على الصورة القطبية لعدد مركب ينتج ما يلي.

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$ الصورة القطبية لعدد مركب

$$= re^{i\theta}$$ صيغة أويلر

إذًا، تمنحنا صيغة أويلر طريقة للتعبير عن عدد مركب بالصورة الأسيّة.

المفهوم الأساسي الصورة الأسيّة لعدد مركب

الصورة الأسيّة لعدد مركب $a + bi$ مقدمة بالعلاقة

$$a + bi = re^{i\theta},$$

حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ إذا كان $a > 0$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ إذا كان $a < 0$.

إرشاد للمعلمين الجدد

قياس راديان عند التعويض في متسلسلة القوى لـــ sine و cosine، ينبغي استخدام وحدة الراديان لقياس الزاوية.

أمثلة إضافية

4 اكتب $1 + i$ في الصورة الأسية. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

5 أوجد قيمة $\ln(-2)$ في نظام الأعداد المركبة. $\approx 0.693 + i\pi$

مثال 4 كتابة عدد مركب بالصورة الأسّية

اكتب $-\sqrt{3} + i$ في الصورة الأسّية.

اكتب الصورة القطبية لـ $-\sqrt{3} + i$. في هذا التعبير، $a = -\sqrt{3}$ و $b = 1$ و $a < 0$. أوجد r.

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{4} = 2 \qquad \text{بسّط.}$$

الآن أوجد θ.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi \text{ حيث } a < 0$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \qquad \text{بسّط.}$$

إذًا، لأن $a + bi = re^{i\theta}$، فإن الصيغة الأسيّة لـ $-\sqrt{3} + i$ هي $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

تمرين موجّه

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسّية.

4A. $1 + \sqrt{3}i$ $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

4B. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

من دراستك للوغاريتمات، تعلم أنه لا يمكن لعدد حقيقي أن يكون لوغاريتم عدد سالب. ويمكن استخدام صيغة أويلر لتوضيح أن اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب لا يتواجد في نظام العدد *المركب*.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{صيغة أويلر}$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi \qquad \text{افترض أن } \theta = \pi.$$

$$e^{i\pi} = -1 + i(0) \qquad \sin\pi = 0 \text{ و } \cos\pi = -1$$

$$e^{i\pi} = -1 \qquad \text{بسّط.}$$

$$\ln e^{i\pi} = \ln(-1) \qquad \text{احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.}$$

$$i\pi = \ln(-1) \qquad \text{خاصية القوى للوغاريتمات}$$

تشير هذه النتيجة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي لـ -1 موجود وهو العدد المركب $i\pi$. ويمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي لأي عدد سالب $-k$، حيث $k > 0$.

$$\ln(-k) = \ln[(-1)k] \qquad -k = (-1)k$$

$$= \ln(-1) + \ln k \qquad \text{خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات}$$

$$= i\pi + \ln k \qquad \ln(-1) = i\pi$$

$$= \ln k + i\pi \qquad \text{اكتب بالصورة } a + bi.$$

مثال 5 اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب

أوجد قيمة $\ln(-5)$ في نظام الأعداد المركبة.

$$\ln(-5) = \ln 5 + i\pi \qquad \ln(-k) = \ln k + i\pi$$

$$\approx 1.609 + i\pi \qquad \text{استخدم الحاسبة لحساب } \ln 5.$$

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

5A. $\ln(-8)$ $\approx 2.08 + i\pi$

5B. $\ln(-6.24)$ $\approx 1.83 + i\pi$

تلميح تقني

الأعداد المركبة يمكنك استخدام حاسبتك لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب بالتغيير من REAL إلى $a + bi$ تحت MODE.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 34-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع إذا واجه الطلاب صعوبة في إيجاد معكوس ظل الزاوية في التمارين 28-21، ذكرهم بجمع π إلى $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ حيث $x < 0$.

إرشاد للمعلمين الجدد

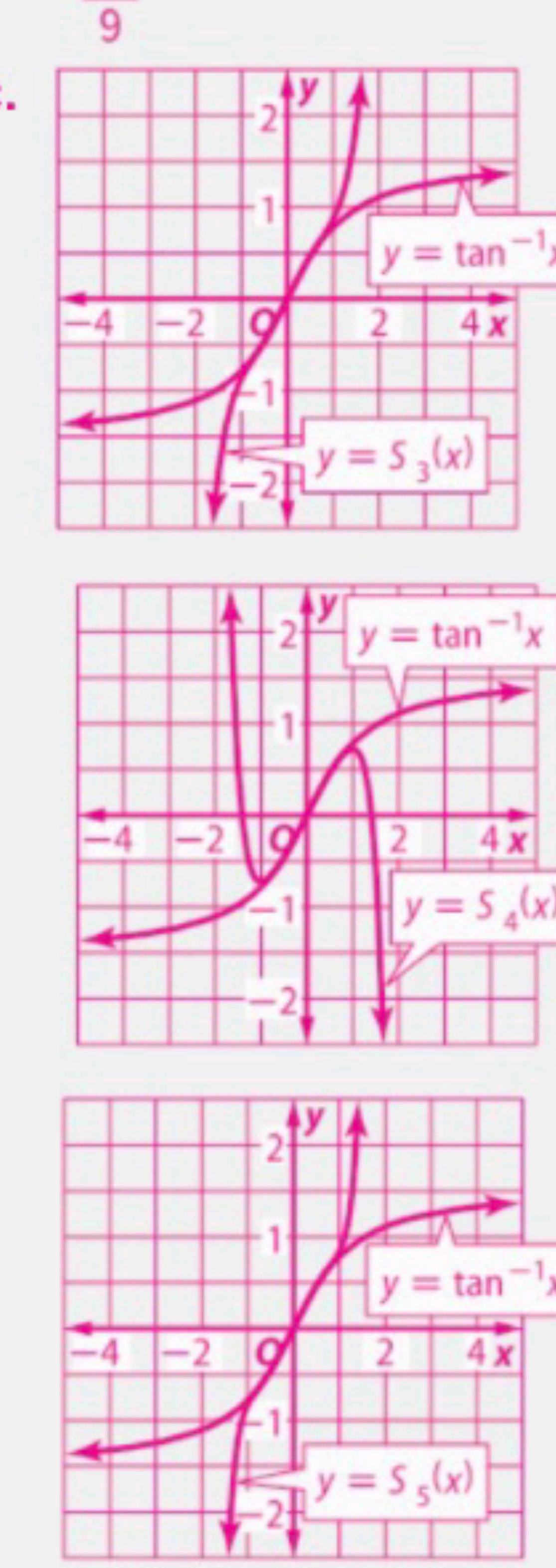
للتمرين 55. ذكّر الطلاب أن الزوايا التي تختلف بمقدار 2π هي نفس الزوايا على دائرة الوحدة.

إجابات إضافية

47. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4kqx - x^4 + 2x^2 - 1}{4kqx}\right)^n$

51a. $\tan^{-1}x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$

51c.



التمارين

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة لـ $g(x)$.

بيّن فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ ومجموعها الجزئي السادس لمتسلسلة القوة. (المثال 1) **6–1. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

1. $g(x) = \frac{4}{1-x}$
2. $g(x) = \frac{3}{1-2x}$
3. $g(x) = \frac{2}{1-x^2}$
4. $g(x) = \frac{3}{2-x}$
5. $g(x) = \frac{2}{5-3x}$
6. $g(x) = \frac{4}{3-2x^2}$

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة أسيّة لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. (المثال 2)

7. $e^{0.5}$ **1.648**
8. $e^{-0.25}$ **0.779**
9. $e^{-2.5}$ **0.648**
10. $e^{0.8}$ **2.222**
11. $e^{-0.3}$ **0.741**
12. $e^{3.5}$ **24.023**

13. **النظام البيئي** يمكن تمثيل كثافة أعداد P بلح البحر المخطط في كل متر مربع من أعالي نهر المسيسبي بـ $P = 3.5e^{0.08t}$. حيث تقاس t بالأسبوع. استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقدير كثافة أعداد بلح البحر المخطط بعد 4 أسابيع و 12 أسبوعًا وعام. (مثال 2)
4.8 من بلح البحر/m^2، 1.9 من بلح البحر/m^2، 134.0 من بلح البحر/m^2

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة أسيّة لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. (مثال 3)

14. $\sin\frac{\pi}{9}$ **0.342**
15. $\cos\frac{2\pi}{13}$ **0.886**
16. $\sin\frac{5\pi}{13}$ **0.935**
17. $\cos\frac{3\pi}{10}$ **0.588**
18. $\cos\frac{2\pi}{9}$ **0.766**
19. $\sin\frac{3\pi}{19}$ **0.476**

20. **مدينة الملاهي** توجد لعبة في مدينة ملاهٍ على شكل بندول عملاق يتأرجح فيه الركاب ذهابًا وإيابًا في قوس بزاوية 240° إلى ارتفاع أقصى يبلغ 41 مترًا. ويدعم البندول برجًا طوله 26 مترًا. ويهبط البندول أسفل مستوى سطح الأرض في حفرة عند التأرجح أسفل البرج. استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine أو sine لتقريب طول البندول. (مثال 3) **31 m**

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسيّة. (مثال 4)

21. $\sqrt{3} + i$ **$2e^{i\frac{\pi}{6}}$**
22. $\sqrt{3} - i$ **$2e^{i\frac{11\pi}{6}}$**
23. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ **$2e^{i\frac{7\pi}{4}}$**
24. $-\sqrt{3} - i$ **$2e^{i\frac{7\pi}{6}}$**
25. $1 - \sqrt{3}i$ **$2e^{i\frac{5\pi}{3}}$**
26. $-1 + \sqrt{3}i$ **$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$**
27. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ **$2e^{i\frac{3\pi}{4}}$**
28. $-1 - \sqrt{3}i$ **$2e^{i\frac{4\pi}{3}}$**

أوجد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة. (مثال 5)

29. $\ln(-6)$ **$\approx 1.792 + i\pi$**
30. $\ln(-3.5)$ **$\approx 1.253 + i\pi$**
31. $\ln(-2.45)$ **$\approx 0.896 + i\pi$**
32. $\ln(-7)$ **$\approx 1.946 + i\pi$**
33. $\ln(-4.36)$ **$\approx 1.472 + i\pi$**
34. $\ln(-9.12)$ **$\approx 2.210 + i\pi$**

35. **متسلسلة القوة** استخدم تمثيلات متسلسلة القوة لـ $\sin x$ و $\cos x$ للإجابة عن كل سؤال مما يلي.
   a. مثّل بيانيًا $f(x) = \sin x$ والمجموع الجزئي الثالث لمتسلسلة القوة التي تمثل $\sin x$. وكرر العملية مع المجموع الجزئي الرابع والخامس. صف فترة التقارب لكل منها.
   b. كرر الجزء a مع $f(x) = \cos x$ و المجموع الجزئي الثالث والرابع والخامس لمتسلسلة القوة التي تمثل $\cos x$. صف فترة التقارب لكل منها. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
   c. صف تغير فترة التقارب مع تزايد n. ثم خمّن العلاقة بين كل دالة مثلثية ومتسلسلة القوة المرتبطة بها حيث $n \to \infty$.
   انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

حل لإيجاد قيمة z عبر الأعداد المركبة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. **36. $\approx 0.916 + i\pi$**

36. $2e^z + 5 = 0$
37. $e^{2z} + 12 = 0$ **$\approx 1.243 + \frac{i\pi}{2}$**
38. $4e^{2z} + 7 = 6$ **$\approx -0.693 + \frac{i\pi}{2}$**
39. $3(e^z - 1) + 5 = -2$ **$\approx 0.288 + i\pi$**
40. $e^{2z} - e^z = 2$ **$i\pi$ or ≈ 0.693**
41. $10e^{2z} + 17e^z = -3$ **$\approx 0.406 + i\pi, \approx -1.609 + i\pi$**

42. **الاقتصاد** القيمة الإجمالية للاستثمار يبلغ P من الدراهم مركّب بشكل مستمر مع نسبة مرابحة سنوية r خلال t من الأعوام هو Pe^{rt}. استخدم الحدود الخمسة الأولى من متسلسلة أسيّة لتقدير قيمة استثمار يبلغ AED 10,000 مركّب بشكل مستمر مع نسبة مرابحة سنوية 25.5% لمدة 5 أعوام. **AED13,001.66**

43. **الخطأ النسبي** *الخطأ النسبي* هو الخطأ المطلق في تقدير كمية مقسومة على قيمتها الحقيقية. الخطأ النسبي في تقريب a للكمية b موضح بالعلاقة $\frac{|b-a|}{b}$. أوجد الخطأ النسبي في تقريب $e^{2.1}$ باستخدام حدّين وثلاثة وستة حدود من المتسلسلة الأسيّة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

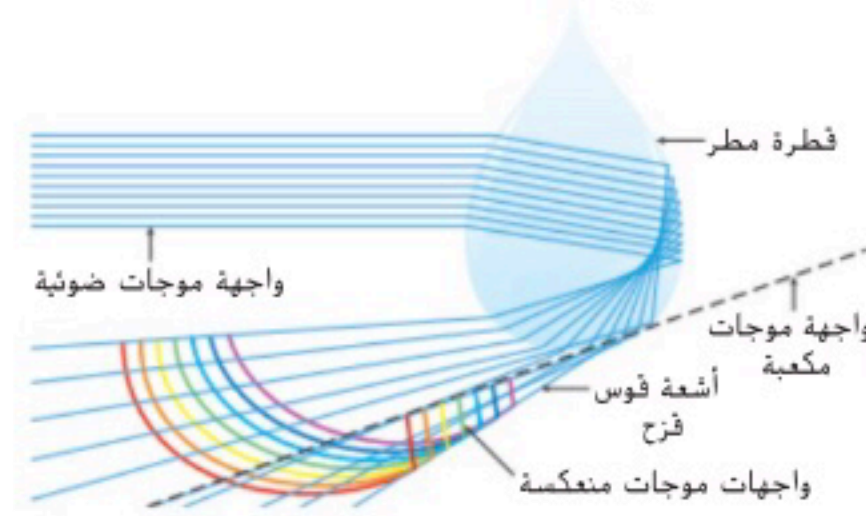
قرّب قيمة كل تعبير باستخدام الحدود الأربعة الأولى من متسلسلة القوة لـ sine و cosine. ثم أوجد القيمة المتوقعة للكل.

44–45. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

44. $\sin^2 \frac{1}{2} + \cos^2 \frac{1}{2}$

45. $\sec^2 1 - \tan^2 1$

46. قوس قزح *معادلة إيري*، تُستخدم في الفيزياء لتمثيل حيود الضوء. يمكن استخدامها أيضًا لتفسير كيفية تحويل واجهة موجات ضوئية إلى واجهة موجات منحنية في تكوين قوس قزح.

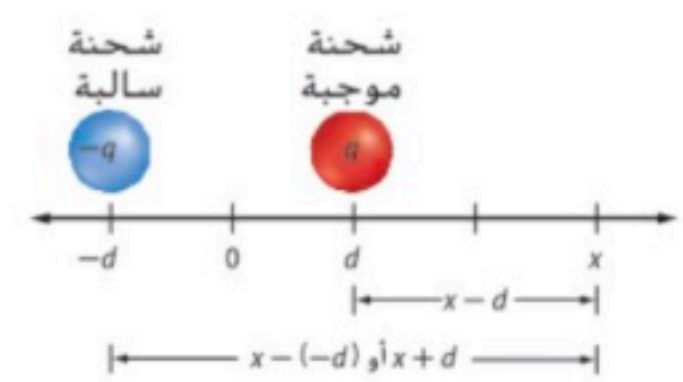


يمكن تمثيل هذه المعادلة باستخدام متسلسلة القوة الأسيّة الموضحة أدناه.

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots [(3k-1) \cdot (3k)]}$$

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة لإيجاد *f(3)* مع تقريب كل قيمة إلى أقرب جزء من مئة. **≈11.42**

47. الكهرباء عندما تكون الشحنة الكهربائية مصحوبة بشحنة أخرى مساوية ومعاكسة في الجوار، مثل هذا الجسم يُسمى *القطب الثنائي الكهربائي*. ويتكون من الشحنة q عند النقطة $x = d$ والشحنة $-q$ عند $x = -d$، كما هو موضح أدناه.



على طول المحور x، تكون قوة المجال الكهربائي عند x هي مجموع المجالات الكهربائية من كل من الشحنتين. ويوضح هذا بالعلاقة $E(x)$ $E(x) = \frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{kq}{(x+d)^2}$. أوجد متسلسلة قوة أسيّة تمثل $E(x)$ إذا علمت أن k ثابت وأن $d = 1$. **انظر الهامش.**

48. الصوت *متسلسلة فورييه* تمثل دالة دورية زمنية $f(t)$ كمجموع لموجات sine و cosine بترددات تبدأ عند 0 وتتزايد بمضاعفات عدد صحيح. وتمثل المتسلسلة أدناه موجة صوتية من البيانات الرقمية الصادرة من قرص مدمج إلى مشغّل أقراص مدمجة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

$$f(t) = 0.7 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \cos 270.6nt + \frac{1}{2n-1} \sin 270.6nt \right)$$

مثّل بيانيًا المتسلسلة حيث $n = 4$. ثم حلل التمثيل البياني.

المتطابقات استخدم تمثيلات متسلسلة القوة من هذا الدرس للتحقق من كل متطابقة مثلثية. 49-50. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

49. $\sin(-x) = -\sin x$ **50.** $\cos(-x) = \cos x$

51. التقريبات المتسلسلة اللانهائية لدالة معكوس ظل الزاوية $f(x) = \tan^{-1} x$، مقدمة بالعلاقة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

على الرغم من ذلك، هذه المتسلسلة صالحة فقط لقيم x في الفترة $(-1, 1)$.

a. اكتب الحدود الخمسة الأولى من تمثيل المتسلسلة اللانهائية لـ $f(x) = \tan^{-1} x$. **انظر الهامش.**

b. استخدم الحدود الخمسة الأولى من تمثيل المتسلسلة لتقريب $\tan^{-1} 0.1$. **0.0997**

c. في المستوى الإحداثي ذاته، مثّل بيانيًا $f(x) = \tan^{-1} x$ والمجموع الجزئي الثالث من متسلسلة القوة التي تمثل $f(x) = \tan^{-1} x$. في مستوى إحداثي آخر، مثّل بيانيًا $f(x)$ والمجموع الجزئي الرابع. ثم مثّل بيانيًا $f(x)$ والمجموع الجزئي الخامس. **انظر الهامش.**

d. صف ما يحدث في الفترة $(-1, 1)$ وفي المنطقتين $x \geq 1$ أو $x \leq -1$. **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. الكتابة في الرياضيات صف تأثير استخدام حدود إضافية في متسلسلة التقريب لـ e^x على الناتج.

الإجابة النموذجية: بشكل عام، يؤدي استخدام الحدود الإضافية إلى الحصول على تقريب أقرب إلى القيمة الفعلية لـ e^x.

53. التبرير استخدم متسلسلة القوة لـ sine لشرح أنه بالنسبة إلى قيم x في الفترة $[-0.1, 0.1]$، التقريب الدقيق لـ $\sin x$ هو x.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

54. تحدٍ أثبت أن $2 \sin \theta \cos \theta = \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}$

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

55. التبرير لأي قيم α و β تكون $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$؟ اشرح.

إذا كان α و β يختلفان بمضاعف عدد مركب مقداره 2π، فإن الأعداد المركبة الممثلة بواسطة $e^{i\alpha}$ و $e^{i\beta}$ ستكون متماثلة.

البرهان أثبت أنه لجميع الأعداد الحقيقية x، العبارات التالية صحيحة.

56-57. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

56. $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ **57.** $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

58. تحدٍ دوال sine و cosine الزائدية تماثل الدوال المثلثية. تمامًا كما تشكّل النقاط $(\cos x, \sin x)$ دائرة وحدة، تشكّل النقاط $(\cosh t, \sinh t)$ النصف الأيمن من قطع زائد متساوي الأضلاع. والقطع الزائد متساوي الأضلاع يحتوي على خطوط مقاربة متعامدة. ودوال sine (sinh) و cosine (cosh) الزائدية معرفة أدناه. أوجد تمثيلات متسلسلة القوة لهذه الدوال.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

إجابة إضافية

51d. بينما يتزايد n، يزداد شبه التمثيلات البيانية للمجاميع الجزئية بالتمثيل البياني لـ $f(x) = \tan^{-1} x$ في الفترة $(-1, 1)$. وخارج الفترة $(-1, 1)$، يتسبب السلوك الطرفي لتقريبات كثيرات الحدود في تباعد التمثيل البياني للمجاميع الجزئية عن التمثيل البياني لـ $f(x) = \tan^{-1} x$.

573

مراجعة شاملة

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي. **59–61. انظر الهامش.**

59. $(3m+\sqrt{2})^4$

60. $\left(\frac{1}{2}n+2\right)^5$

61. $(p^2+q)^8$

62. أثبت أن $4+7+10+\cdots+(3n+1)=\frac{n(3n+5)}{2}$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

أوجد كل قوة، وعبّر عنها بالصورة المتعامدة.

63. $(-2+2i)^3$ $\mathbf{16+16i}$

64. $(1+\sqrt{3}i)^4$ $\mathbf{-8-8\sqrt{3}i}$

65. $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{-2}$ $\mathbf{-\frac{1}{4}i}$

66. إذا علمت أن $t=\langle -9, -3, c\rangle$، $u=\langle 8, -4, 3\rangle$، $v=\langle 2, 5, -6\rangle$. وأن حجم متوازي السطوح بحواف متجاورة t و u و v هو 93 وحدة مكعبة، فأوجد c. **7 أو 3.125**

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

67. $x-8y=-7$ **(9, 2)**
$2x+5y=28$

68. $4x+7y=22$ **(2, 2)**
$-9x+11y=4$

69. $w+2x+3y=18$ **(7, 1, 3)**
$4w-8x+7y=41$
$-w+9x-2y=-4$

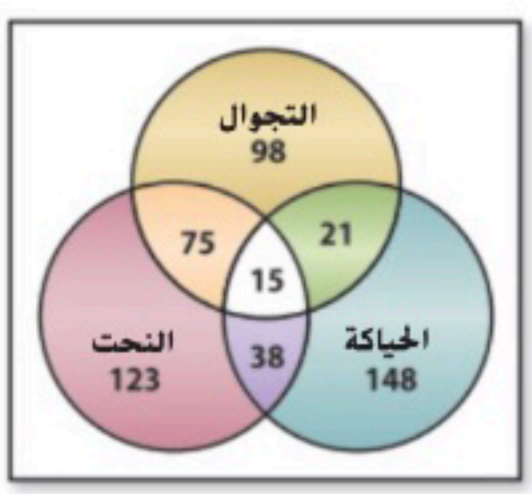
حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

70. $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 7 & -6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ -7 & 1\end{bmatrix}$ **لا**

71. $A=\begin{bmatrix}-11 & -5\\ 9 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -9 & -11\end{bmatrix}$ **نعم**

72. $A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ -2 & 8\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -5\end{bmatrix}$ **لا**

73. **مؤتمر** ترعى جامعة أحد المؤتمرات لعدد 680 من النساء. ويوضح مخطط فن عدد المشاركات في ثلاثة من الأنشطة المقدمة. افترض اختيار الحاضرات عشوائيًا لاستطلاع رأي. **54.41%**



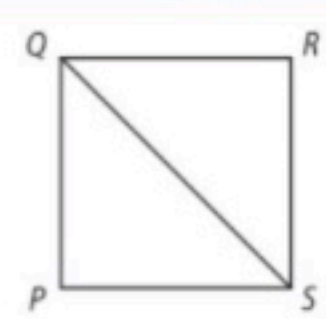
a. ما احتمال مشاركة إحدى من وقع عليهن الاختيار في التجوال أو النحت؟

b. صف مجموعة من المشاركات بحيث يكون احتمال اختيارهن تقريبًا 0.39

الإجابة النموذجية: المشاركات في التجوال أو الحياكة وليس النحت

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

74. **SAT/ACT** $PQRS$ هو مربع. ما نسبة طول القطر $\overline{QS}$ إلى طول الضلع $\overline{RS}$؟ **B**



A 2

B $\sqrt{2}$

C 1

D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E $\frac{\sqrt{3}}{2}$

75. **مراجعة** ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots$؟ **F**

F $\frac{2}{3}$

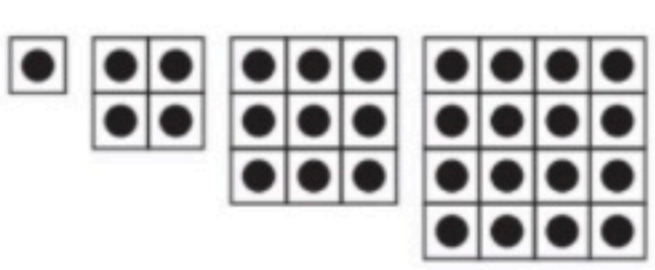
G 1

H $1\frac{1}{3}$

J $1\frac{2}{3}$

a, e. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

76. **إجابة حرة** فكر في نمط النقاط الموضح.



a. ارسم الشكل التالي في هذه المتتالية.

b. اكتب المتتالية، بدءًا من 1 والتي تمثل عدد النقاط الواجب إضافتها لكل شكل في المتتالية للحصول على عدد النقاط في الشكل التالي. **... ,7 ,5 ,3 ,1**

c. اكتب تعبير الحد رقم n للمتتالية الموضحة بالجزء b. $\mathbf{2n-1}$

d. أوجد تعبير عدد النقاط في الشكل رقم n في المتتالية الأصلية. $\mathbf{n^2}$

e. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن مجموع المتتالية المذكورة في الجزء b يساوي التعبير المذكور في الجزء d.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب كتابة قواعد كتابة قيمة اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب في نظام الأعداد المركبة. $\ln(-k)=i\pi+\ln k$

إجابات إضافية

59. $81m^4+108\sqrt{2}m^3+108m^2+24\sqrt{2}m+4$

60. $\frac{1}{32}n^5+\frac{5}{8}n^4+5n^3+20n^2+40n+32$

61. $p^{16}+8p^{14}q+28p^{12}q^2+56p^{10}q^3+70p^8q^4+56p^6q^5+28p^4q^6+8p^2q^7+q^8$

1 التركيز

الهدف ترتيب وعرض البيانات باستخدام ورق البيانات لاكتشاف الأنماط والتحول عن الأنماط.

نصيحة للتدريس

ذكّر الطلاب أنه يمكنهم تعبئة الصيغة تلقائيًا لأسفل، لجميع الخلايا المجاورة التي تسري عليها، بالنقر مرتين على مقبض التعبئة للخلية الأولى التي تحتوي على الصيغة. على سبيل المثال، في النشاط 1، لنسخ الصيغة في الخلية C3 إلى الخلية C9، يمكن للطلاب تحديد الخلية C3 والنقر مرتين على مقبض التعبئة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الصف الدراسي إلى مجموعات ثنائية. واعمل مع الصف الدراسي على إتمام النشاط 1. ثم اطلب منهم التعاون مع زملائهم لإكمال التمارين 5-1.

إجابة إضافية

1. تحسب صيغة متوسط معدل التغيير الميل بين أزوج القيم المتتالية. التغيير في الوزن مقسومًا على التغيير في عدد الأيام بعد الولادة. $N = N_0(1+r)^t$. حيث N هي المقدار الجديد و N_0 هي المقدار الأصلي و t هي الوقت. بالحل بإيجاد قيمة r.

$$N = N_0(1+r)^t$$
$$\frac{N}{N_0} = (1+r)^t$$
$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{t}} = 1 + r$$
$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = r$$

في ورقة البيانات، $\frac{N}{N_0}$ هي B3/B2 و $\frac{1}{t}$ = 1/(A3-A2)

التوسع 9-6 مختبر ورقة البيانات
اكتشاف الأنماط في البيانات

الهدف

- ترتيب وعرض البيانات باستخدام ورق البيانات لاكتشاف الأنماط والتحول عن الأنماط.

في الوحدة 9، تعلمت كيفية اكتشاف الأنماط في المتتالية ووصفها باستخدام الدوال.

الأنماط في متتالية البيانات	الأنماط في التمثيل البياني لمتتالية البيانات	نوع المتتالية	الدوال التي تصف المتتالية
الفروق المشتركة الأولى	البيانات في النمط الخطي	حسابية	خطية
نسبة مشتركة	البيانات في النمط الأسي	هندسية	أسيّة

في هذا المختبر، ستستخدم ورق البيانات لترتيب وعرض البيانات الثنائية من أجل البحث عن هذه الأنماط.

النشاط 1 اكتشاف الأنماط

الخراف تبلغ كتلة أحد الخراف 1.45 كيلوجرام عند الميلاد. ويوضح الجدول كتلة الخراف في الأيام الـ 70 الأولى من نموها. استخدم ورق البيانات لإيجاد نمط البيانات.

عدد الأيام بعد الميلاد	70	60	50	40	30	20	10
الكتلة (kg)	8.63	6.81	5.22	4.1	3.17	2.46	1.91

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورق البيانات.

الخطوة 2 لتحديد إذا كنت متتالية الكتلة حسابية أم لا، أدخل الصيغة في العمود التالي لإيجاد متوسط معدل التغيير اليومي في كتلة الخروف.

الخطوة 3 لتحديد إذا كنت المتتالية هندسية أم لا، أدخل الصيغة الموضحة في العمود التالي لإيجاد متوسط معدل التغيير في كتلة الخروف يوميًا.

◇	A	B	C	D
1	عدد الأيام بعد الميلاد	الكتلة (kg)	متوسط معدل التغيير	متوسط نسبة التغيير
2	0	1.45		
3	10	1.91	=(B3-B2)/(A3-A2)	=(B3/B2)^(1/(A3-A2))-1
4	20	2.46		
5	30	3.17		
6	40	4.1		
7	50	5.22		
8	60	6.81		
9	70	8.63		

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

تحليل النتائج

1. فسر الصيغ المستخدمة في ورق البيانات. **انظر الهامش.**
2. صف أي أنماط تراها في البيانات. ما نوع المتتالية التي تقرّب البيانات؟ فسر ذلك.
3. استخدم أداة المخطط لإنشاء مخطط انتشار للبيانات. هل يدعم هذا التمثيل البياني إجابتك على التمرين 2؟ فسر ذلك. **انظر الهامش.**
4. اكتب معادلة تقرب كتلة الخراف y بعد x أيام $y = 1.45(1.026)^x$
5. استخدم معادلتك لتوقع كتلة الخراف بعد 25 يومًا من الميلاد و365 يومًا من الميلاد. هل هذه التوقعات منطقية؟ فسر ذلك؟

574A

2. يبدو أن هناك نمطًا في متوسط معدل التغيير بين كل زوجين من البيانات المتتالية. وتجتمع هذه القيم على متوسط نسبة مشتركة تبلغ 0.026. ويقترح ذلك أن متتالية قيم الكتلة هندسية.

5. 25 يومًا؛ 2.75 kg≈؛ 365 يومًا، 16,988.49 kg≈؛ التوقع الأول منطقي حيث يقع هذا الوزن بين قيم البيانات الفعلية وهي 2.46 kg بعد 20 يومًا من الميلاد و 3.17 kg بعد 30 يومًا من الميلاد. بينما يكون توقع وزن الخروف بمقدار 16,988.49 kg بعد 356 يومًا أو عام من الميلاد فليس منطقيًا.

3.

وزن الخروف

تدريب اطلب من الطلاب إكمال النشاط 2 والتمارين 9-6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 10 و 11 لتقييم قدرة كل طالب على استخدام ورق البيانات لاكتشاف الأنماط والتحول عن الأنماط في البيانات.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه حول استخدام ورق البيانات لاكتشاف الأنماط في البيانات.

إجابات إضافية

8. انظر الهامش السفلي

9. 12 مسألة، 108 دقيقة؛ 20 مسألة، 180 دقيقة؛ التوقع الأول منطقي، حيث يقع هذا الزمن بين قيم البيانات الفعلية والتي تساوي 95 min لـ 10 مسائل و140 min لـ 15 مسألة. والتوقع الثاني منطقي أيضًا، حيث لا يقع هذا الزمن بعد قيم البيانات الفعلية لـ 140 min لـ 15 مسألة بمقدار كبير.

يمكنك أيضًا استخدام ورق البيانات لاكتشاف وتحليل التحول عن الأنماط.

النشاط 2 اكتشاف التحول في الأنماط

واجب منزلي سجل عمر عدد مسائل التفاضل والتكامل والوقت الذي استغرقه في حلها لمدة ثماني ليال. ابحث عن النمط في البيانات وأي تحول عن هذا النمط.

عدد المسائل	15	10	9	8	6	5	3	0
الوقت (min)	140	95	82	72	70	44	27	0

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورق البيانات.

الخطوة 2 أدخل الصيغ في الأعمدة المجاورة لاكتشاف إن كانت المتتالية حسابية أم هندسية. ثم انسخ هذه الصيغ في الخلايا أدناه.

الخطوة 3 ابحث عن الأنماط. لاحظ أن جميع معدلات التغيير تتجمع حول 9 ما عدا اثنين.

◇	A	B	C
1	عدد المسائل	الوقت (min)	متوسط معدل التغيير
2	0	0	
3	3	27	9.00
4	5	44	8.50
5	6	70	26.00
6	8	72	1.00
7	9	81	9.00
8	10	89	8.00
9	15	136	9.40

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

نصيحة دراسية

متسلسلة البيانات لاستكشاف المتسلسلة في البيانات، استخدم أداة Auto Sum. وللنشاط 2، أدخل =B2 في الخلية D2 و =SUM(B2,B3) في الخلية D3. انسخ الصيغة الثانية في الخلايا المتبقية في العمود لإنشاء متتالية المجاميع الجزئية.

تحليل النتائج

6. أين يقع التحول في النمط؟ **في 6 مسائل**

7. اكتب صيغة ورق البيانات التي يمكنها تمثيل هذه البيانات إذا تم إزالة قيمة البيانات. **A2*9**

8. أنشئ مخطط انتشار بين البيانات الفعلية ونموذج هذه البيانات. هل يدعم هذا التمثيل البياني إجابتك على التمرين 7؟ فسّر ذلك.

9. استخدم الصيغة من التمرين 7 لتوقع كم سيستغرق عمر من الوقت لإكمال 12 مسألة و20 مسألة؟ هل هذه التوقعات منطقية؟ فسّر ذلك. **9-8. انظر الهامش.**

التمارين

استخدم ورق البيانات لترتيب وتحديد النمط أو التحول في النمط في كل مجموعة بيانات. ثم استخدم حاسبة لكتابة معادلة لتمثيل البيانات.

10. **الإنترنت** يوضح الجدول عدد المرات التي تمت فيها قراءة الصفحة الأساسية لمدونة شهيرة (عدد مرات زيارتها) كل شهر.

الشهر	20	15	12	10	8	6	4	2
عدد مرات الزيارة	4017	1405	732	479	368	266	171	83

10. متتالية هندسية؛ الإجابة النموذجية: $y = 59(1.235)^x$

11. **الكلية** يوضح الجدول النتائج المركبة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي ACT ومتوسط الدرجات (GPA) لعدد 20 طالبًا بعد الفصل الدراسي الأول لهم في الكلية. (*تلميح*: استخدم أولاً أداة الفرز تصاعديًا لترتيب البيانات.)

درجة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي	25	21	20	22	15	16	27
متوسط درجات الكلية	3.1	3.4	3.2	3.6	2.7	2.9	3.9
درجة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي	17	28	29	19	23	18	26
متوسط درجات الكلية	3.0	3.9	4.0	2.6	3.6	3.1	4.0

11. متتالية حسابية؛ بتحول عند درجة الاختبار التجريبي للقبول الجامعي 19؛ الإجابة النموذجية: $y = 0.09x + 1.4$

8.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 10-1، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

9 دليل الدراسة والمراجعة

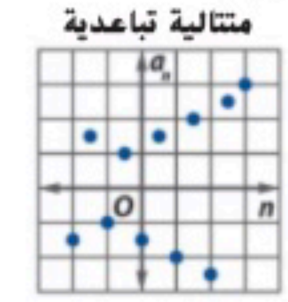
ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

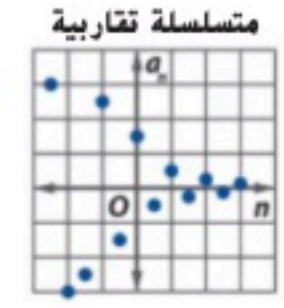
المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما (الدرس 1-9)

- *المتتالية المنتهية* هي متتالية لها عدد محدد من الحدود. و*المتتالية اللا نهائية* لها عدد لا نهائي من الحدود.
- يقال على المتتالية التي لها حد *تقاربية*. ويقال على المتتالية التي ليس لها حد *تباعدية*.

متتالية تباعدية



متسلسلة تقاربية



- *المتسلسلة* هي مجموع كافة الحدود في متتالية.

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k$$

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدرس 2-9)

- الحد *النوني* للمتتالية الحسابية التي يكون الحد الأول بها a_1 ويمكن الحصول على الفرق المشترك d من خلال $a_n = a_1 + (n - 1)d$.
- يمكن الحصول على مجموع متسلسلة حسابية منتهية من خلال $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدرس 3-9)

- الحد *النوني* لمتتالية هندسية الحد الأول بها هو a_1 ويمكنك الحصول على النسبة المشتركة r من خلال $a_n = a_1 r^{n-1}$.
- يمكن الحصل على مجموع أول n حد لمتسلسلة هندسية من خلال $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$.
- يمكن الحصول على مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية من خلال $S = \frac{a_1}{1-r}$ حيث $|r| < 1$.

الاستقراء الرياضي (الدرس 4-9)

- إذا كانت P_n عبارة بشأن عدد صحيح موجب n، إذًا P_n صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n فقط إذا كانت P_1 صحيحة، ولكل عدد صحيح موجب k. إذا كانت P_k صحيحة، إذًا P_{k+1} صحيحة.

نظرية ذات الحدّين (الدرس 5-9)

- يمكن تفكيك التعبير $(a + b)^n$ باستخدام الصف رقم n من مثلث باسكال لتحديد معاملات كل حد.
- معامل ذات الحدّين للحد $a^{n-r}b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ موضح بالعلاقة ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$.

الدوال في صورة متسلسلة لانهائية (الدرس 6-9)

- متسلسلة القوة في x هي متسلسلة لا نهائية بالصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- تنص صيغة أويلر على أنه لأي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

المفردات الأساسية

خطوة المرتكز anchor step
أوساط حسابية arithmetic means
متتالية حسابية rithmetic sequence
متسلسلة حسابية rithmetic series
معاملات ذات الحدّين binomial coefficients
نظرية ذات الحدّين Binomial Theorem
فرق مشترك common difference
نسبة مشتركة common ratio
تقاربية converge
تباعدية diverge
صيغة أويلر Euler's Formula
متسلسلة أسيّة exponential series
متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
متتالية منتهية finite sequence
متسلسلة منتهية finite series
الفرق الأول first difference
أوساط هندسية geometric means
متتالية هندسية geometric sequence
متسلسلة هندسية geometric series
فرضية الاستقراء inductive hypothesis
خطوة استقرائية inductive step
متتالية لا نهائية infinite sequence
متسلسلة لا نهائية infinite series
المجموع الجزئي النوني nth partial sum
متسلسلة قوة power series
صيغة تكرارية (ضمنية) recursive formula
الفرق الثاني second difference
متتالية sequence
متسلسلة series
الرمز سيجما sigma notation
حد term

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صواب أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. في الاستقراء الرياضي، افتراض أن أحد التخمينات صحيح لأي حالة خاصة يُسمى فرضية الاستقراء. **صواب**
2. المتتالية التي يكون بها عدد محدد من الحدود تسمى متتالية لا نهائية. **خطأ؛ متتالية منتهية**
3. المتتالية a_n المعرفة كدالة لـ n تعرّف تكراريًا. **خطأ؛ صريحة**
4. خطوة إثبات أن أحد الأشياء يصلح للحالة الأولى تُسمى الخطوة الاستقرائية في الاستقراء الرياضي. **خطأ؛ خطوة المرتكز**
5. المتتاليات المعرفة صراحة تقدم الحدود القليلة الأولى ثم تعرف الحدود التي تتبع ذلك باستخدم الحدود السابقة. **خطأ، تكراريًا**
6. مجموع الحدود n الأولى من متتالية لا نهائية تسمى متسلسلة منتهية. **صواب**
7. الفرق بين حدود متتالية حسابية يسمى النسبة المشتركة. **خطأ؛ الفرق المشترك**
8. المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. **صواب**
9. إذا لم يكن للمتتالية حد، يقال عليها تقاربية. **خطأ؛ تباعدية**
10. نظرية ذات الحدّين هي متتالية تكرارية (ضمنية) تصف العديد من الأنماط الموجودة في الطبيعة. **خطأ؛ متتالية فيبوناتشي**

9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

9-1 المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما

أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية.

11. 1, 9, 17, 25, ... **33, 41, 49, 57**

12. −1, 2, 7, 14, ... **23, 34, 47, 62**

أوجد المجموع المشار إليه لكل متتالية.

13. المجموع الجزئي الرابع لـ $a_n = 2n - 10$ **−20**

14. S_7 لـ $a_n = -n^3$ **−784**

أوجد مجموع كل مما يلي.

15. $\sum_{n=2}^{9} \frac{4n-6}{3}$ **$42\frac{2}{3}$**

16. $\sum_{n=1}^{6} 7n - 4$ **123**

مثال 1 **11–12. الإجابات النموذجية معطاة.**

أوجد مجموع $\sum_{n=1}^{4} n^2 - 5$.

أوجد قيم a_n حيث $n = 1$ و 2 و 3 و 4.

$a_1 = (1)^2 - 5 = -4$ $n = 1$

$a_2 = (2)^2 - 5 = -1$ $n = 2$

$a_3 = (3)^2 - 5 = 4$ $n = 3$

$a_4 = (4)^2 - 5 = 11$ $n = 4$

إذًا، $\sum_{n=1}^{4} n^2 - 5 = -4 + (-1) + 4 + 11$ أو 10.

9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

اكتب صيغة صريحة وصيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد رقم n لكل متتالية حسابية.

17. $a_n = -6 + 5(n-1)$; $a_1 = -6$, $a_n = a_{n-1} + 5$

17. −6, −1, 4, ...

18. 23, 15, 7, ...

18. $a_n = 23 - 8(n-1)$; $a_1 = 23$, $a_n = a_{n-1} - 8$

أوجد مجموع كل مما يلي.

19. المجوع الجزئي رقم 50 لـ $55 + 62 + 69 + ... + 398$ **11,325**

20. المجموع الجزئي رقم 37 لـ $9 + 3 + (-3) + ...$ **−3663**

أوجد مجموع كل مما يلي.

21. $\sum_{n=24}^{35} -3n - 11$ **−1194**

22. $\sum_{n=8}^{27} 4n + 14$ **1680**

مثال 2

أوجد المجموع الجزئي رقم 43 للمتسلسلة الحسابية $104 + 100 + 96 + ...$.

استخدم المجموع الثاني لصيغة متسلسلة حسابية منتهية.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ مجموع صيغة متسلسلة حسابية منتهية.

$S_{43} = \frac{43}{2}[2(104) + (43-1)(-4)]$ $a_1 = 104$ و $n = 43$ و $d = -4$

$= 860$ بسّط.

المجموع الجزئي رقم 43 هو 860 $S_{43} = 860$.

26. $a_n = 162\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $a_1 = 162$, $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)a_{n-1}$

9-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

23. 5, 7.5, 11.25, ... **1.5; 16.875, 25.3125, 37.96875**

24. $3 + a, -12 - 4a, 48 + 16a, ...$
$-4; -192 - 64a, 768 + 256a, -3072 - 1024a$

اكتب صيغة صريحة وصيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد رقم n لكل متتالية هندسية.

25. 10, −20, 40, ...

26. 162, 54, 18, ...

25. $a_n = 10(-2)^{n-1}$; $a_1 = 10$, $a_n = (-2)a_{n-1}$

أوجد مجموع كل مما يلي.

27. الحدود السبعة الأولى لـ $80 + 32 + \frac{64}{5} + ...$ **133.11**

28. $a_1 = 11, a_n = 360,448, r = 8$ **411,939**

مثال 3

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية لـ $27, -9, 3, ...$.

أولاً، أوجد النسبة المشتركة.

$a_2 \div a_1 = -9 \div 27 = -\frac{1}{3}$ أوجد النسبة بين زوجين من الحدود المتتالية للتحقّق من النسبة المشتركة.

$a_3 \div a_2 = 3 \div -9 = -\frac{1}{3}$

النسبة المشتركة هي $-\frac{1}{3}$. اضرب الحد الثالث في $-\frac{1}{3}$ لإيجاد الحد الرابع، وهكذا.

$a_4 = 3 \cdot -\frac{1}{3} = -1$ $a_5 = -1 \cdot -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$a_6 = \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$

الحدود الثلاثة التالية هي 1− و $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{9}$.

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

9-4 الاستقراء الرياضي

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

29–35. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

29. $6^n - 9$ يقبل القسمة على 3.

30. $7^n - 5$ يقبل القسمة على 2.

31. $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

32. $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$

33. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

أثبت كل متباينة لقيم n الموضحة.

34. $4^n \geq 4n$، لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n

35. $6^n > 5n$، لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n

مثال 4

أثبت أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

التخمين وخطوة المرتكز افترض أن P_n هي عبارة تنص على أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4. عند $n = 1, 5^n - 1 = 5^1 - 1$ أو 4. حيث إن 4 تقبل القسمة على 4، فالعبارة P_1 صحيحة.

فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية
افترض أن $5^k - 1$ تقبل القسمة على 4. وبذلك، افترض أن $5^k - 1 = 4r$ لبعض الأعداد الصحيحة r. استخدم هذه الفرضية الاستقرائية لإثبات أن $5^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 4.

$5^k - 1 = 4r$	فرضية الاستقراء
$5^k = 4r + 1$	اجمع 1 إلى كل طرف.
$5 \cdot 5^k = 5(4r + 1)$	اضرب كل طرف في 5.
$5^{k+1} = 20r + 5$	بسّط.
$5^{k+1} - 1 = 20r + 4$	اطرح 1 من كل طرف.
$5^{k+1} - 1 = 4(5r + 1)$	حلل إلى العوامل.

حيث إن r عدد صحيح، إذًا $5r + 1$ عدد صحيح و $4(5r + 1)$ يقبل القسمة على 4. إذًا، $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4.

الاستنتاج حيث إن P_n صحيحة عندما $n = 1$ و P_k توحي بأن P_{k+1} و P_n صحيحة عندما $n = 2$ و $n = 3$، وهكذا. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، $5^n - 1$ تقبل القسمة على 4 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

41. $16{,}384m^7 + 86{,}016m^6n + 193{,}536m^5n^2 + 241{,}920m^4n^3 + 181{,}440m^3n^4 + 81{,}648m^2n^5 + 20{,}412mn^6 + 2187n^7$

9-5 نظرية ذات الحدّين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

36. $(4x + 6)^5$ **$1024x^5 + 7680x^4 + 23{,}040x^3 + 34{,}560x^2 + 25{,}920x + 7776$**

37. $(m - 5n)^6$ **$m^6 - 30m^5n + 375m^4n^2 - 2500m^3n^3 + 9375m^2n^4 - 18{,}750mn^5 + 15{,}625n^6$**

أوجد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

38. $(6x - 3y)^{10}$، الحد x^4y^6 **198,404,640**

39. $(2y + 3)^{13}$، الحد 8^{th} **240,185,088**

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

40. $(2p^2 - 7)^4$ **$16p^8 - 224p^6 + 1176p^4 - 2744p^2 + 2401$**

41. $(4m + 3n)^7$

مثال 5

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(3x + 10)^5$.

طبّق نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(a + b)^5$، حيث $a = 3x$ و $b = 10$.

$$\begin{aligned}(3x + 10)^5 &= {}_5C_0(3x)^5(10)^0 + {}_5C_1(3x)^4(10)^1 + {}_5C_2(3x)^3(10)^2 + \\ &\quad {}_5C_3(3x)^2(10)^3 + {}_5C_4(3x)^1(10)^4 + {}_5C_5(3x)^0(10)^5 \\ &= 1(243x^5)(1) + 5(81x^4)(10) + 10(27x^3)(100) + \\ &\quad 10(9x^2)(1000) + 5(3x)(10{,}000) + 1(1)(100{,}000) \\ &= 243x^5 + 4050x^4 + 27{,}000x^3 + 90{,}000x^2 + \\ &\quad 150{,}000x + 100{,}000\end{aligned}$$

577

الوحدة 9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

6-9 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لـ $g(x)$. وضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة. **42–43. انظر الهامش.**

42. $g(x) = \frac{1}{1-5x}$

43. $g(x) = \frac{3}{1-2x}$

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

44. $e^{\frac{1}{4}}$ **1.284**

45. $e^{-1.5}$ **0.273**

أوجد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

46. $\ln(-4)$ **$1.386 + i\pi$**

47. $\ln(-7.15)$ **$1.967 + i\pi$**

مثال 6

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لـ $g(x) = \frac{4}{1-x}$. وضح فترة تقارب المتسلسلة.

متسلسلة هندسية تتقارب إلى $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$ حيث $|x| < 1$.

عوض عن x باستخدام $\frac{x+3}{4}$ حيث $g(x)$ هي تحويل لـ $f(x)$

و، $g(x) = f\left(\frac{x+3}{4}\right)$. النتيجة هي $f\left(\frac{x+3}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$ حيث $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$.

إذًا، $g(x) = \frac{4}{1-x}$ يمكن تمثيلها بواسطة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$. هذه المتسلسلة تقاربية حيث $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$. بما يكافئ $-1 < \frac{x+3}{4} < 1$ أو $-7 < x < 1$.

التطبيقات وحل المسائل

48. **البيع بالتجزئة** وضعت سلسلة متاجر القهوة خطة أعمال تتضمن افتتاح 6 متاجر جديدة سنويًا بمختلف أنحاء البلاد. فإذا كان هناك 480 متجرًا في 1 يناير 2012، فكم سيكون عدد المتاجر الموجودة في نهاية عام 2018؟ (الدرس 1-9) **522**

49. **التمثيل** يقدم فريق مها للدراما عرض إلقاء؟ وفي أحد العروض، يوجد ثلاثة ممثلين في الصف الأمامي وممثلين إضافيين في كل صف خلف الصف الأول. (الدرس 2-9)
    a. كم عدد الممثلين في الصف الرابع؟ **9**
    b. إذا كان هناك ثمانية صفوف، فكم عدد الأعضاء الإضافيين في فريق الدراما؟ **80**

50. **الزراعة** تتزايد أعداد قطيع من البقر كما هو موضح على مدار أربعة أعوام. (الدرس 3-9)

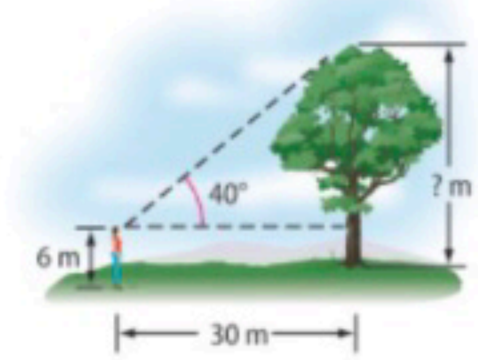
العام	4	3	2	1
التعداد	61	56	51	47

    a. اكتب الصيغة الصريحة لإيجاد أعداد القطيع بعد n أعوام. افترض أن المتتالية الموضحة أعلاه هندسية. **$a_n = 47(1.09)^{n-1}$**
    b. كم ستكون أعداد القطيع بعد 7 أعوام؟ **78**
    c. كم عدد الأعوام المستغرقة لتتجاوز أعداد القطيع 85؟ **8 yr تقريبًا**

51. **نظرية الأعداد** فكر في العبارة $0.\overline{9} = 1$. (الدرس 4-9) **a–b. انظر الهامش.**
    a. أثبت أن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ لأي عدد صحيح موجب n.
    b. استخدم استيعابك للحدود والعبارة التي أثبتها في الجزء a لشرح سبب صحة $0.\overline{9} = 1$.

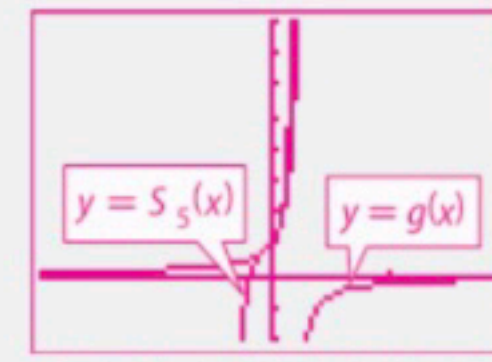
52. **كرة السلة** عادة ما تسجل منى 4 من كل 6 محاولات للرميات الحرة. ما احتمال تسجيلها 5 من 6 في محاولاتها التالية للرميات الحرة؟ (الدرس 5-9) **0.263 أو 26.3%**

53. **الارتفاع** تقدر منال ارتفاع شجرة. وتقف على مسافة 30 مترًا من القاعدة وتقدر زاوية نظرها إلى قمة الشجرة عند 40°. فإذا استخدمت المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ cosine و sine مع التقريب لأقرب ثلاث منازل عشرية لحساب ارتفاع الشجرة، فما تقدير منال؟ (الدرس 6-9) **31.173 m**



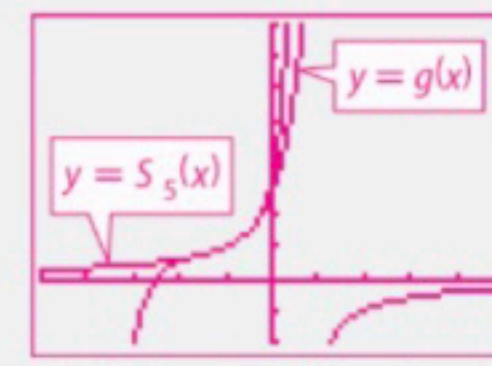
إجابات إضافية

42. $\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n;\ -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

43. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x+2}{3}\right)^n;\ -\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$



[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

51a. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$. حيث إن $0.9 = \frac{10^1 - 1}{10^1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة لـ $n = 1$.

افترض أن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} = \frac{10^k - 1}{10^k}$ صحيحة لعدد صحيح موجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} = \frac{10^k - 1}{10^k}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^k - 1}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10}{10}\left(\frac{10^k - 1}{10^k}\right) + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^{k+1} - 10}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^{k+1} - 1}{10^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. حيث إن P_n صحيحة لـ $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1}، P_n صحيحة لـ $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. أي أنه وفقًا لمبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

9-6 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لــ $g(x)$. وضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لــ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

42–43. انظر الهامش.

42. $g(x) = \frac{1}{1-5x}$

43. $g(x) = \frac{3}{1-2x}$

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

44. $e^{\frac{1}{4}}$ **1.284**

45. $e^{-1.5}$ **0.273**

أوجد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

46. $\ln(-4)$ **$1.386 + i\pi$**

47. $\ln(-7.15)$ **$1.967 + i\pi$**

مثال 6

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لــ $g(x) = \frac{4}{1-x}$. وضح فترة تقارب المتسلسلة.

متسلسلة هندسية تتقارب إلى $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}$ حيث $|x| < 1$.

عوض عن x باستخدام $\frac{x+3}{4}$ حيث $g(x)$ هي تحويل لــ $f(x)$

و، $g(x) = f\left(\frac{x+3}{4}\right)$. النتيجة هي $f\left(\frac{x+3}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$ حيث

$\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$.

إذًا، $g(x) = \frac{4}{1-x}$ يمكن تمثيلها بواسطة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{4}\right)^n$. هذه المتسلسلة تقاربية حيث $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1$. بما يكافئ $-1 < \frac{x+3}{4} < 1$ أو $-7 < x < 1$.

التطبيقات وحل المسائل

48. **البيع بالتجزئة** وضعت سلسلة متاجر القهوة خطة أعمال تتضمن افتتاح 6 متاجر جديدة سنويًا بمختلف أنحاء البلاد. فإذا كان هناك 480 متجرًا في 1 يناير 2012، فكم سيكون عدد المتاجر الموجودة في نهاية عام 2018؟ (الدرس 9-1) **522**

49. **التمثيل** يقدم فريق مهما للدراما عرض إلقاء؛ وفي أحد العروض، يوجد ثلاثة ممثلين في الصف الأمامي وممثلين إضافيين في كل صف خلف الصف الأول. (الدرس 9-2)
    a. كم عدد الممثلين في الصف الرابع؟ **9**
    b. إذا كان هناك ثمانية صفوف، فكم عدد الأعضاء الإضافيين في فريق الدراما؟ **80**

50. **الزراعة** تتزايد أعداد قطيع من البقر كما هو موضح على مدار أربعة أعوام. (الدرس 9-3)

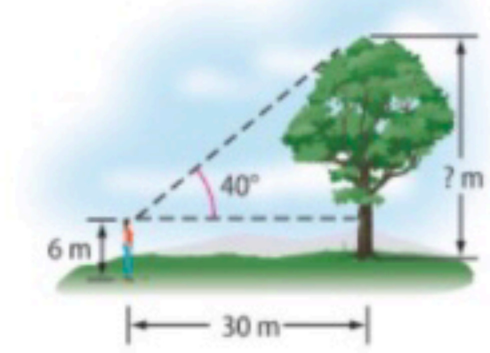
العام	4	3	2	1
التعداد	61	56	51	47

a. اكتب الصيغة الصريحة لإيجاد أعداد القطيع بعد n أعوام. افترض أن المتتالية الموضحة أعلاه هندسية. **$a_n = 47(1.09)^{n-1}$**
b. كم ستكون أعداد القطيع بعد 7 أعوام؟ **78**
c. كم عدد الأعوام المستغرقة لتتجاوز أعداد القطيع 85؟ **8 yr تقريبًا**

51. **نظرية الأعداد** فكر في العبارة $0.\overline{9} = 1$. (الدرس 9-4) **a–b. انظر الهامش.**
    a. أثبت أن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ لأي عدد صحيح موجب n.
    b. استخدم استيعابك للحدود والعبارة التي أثبتها في الجزء a لشرح سبب صحة $0.\overline{9} = 1$.

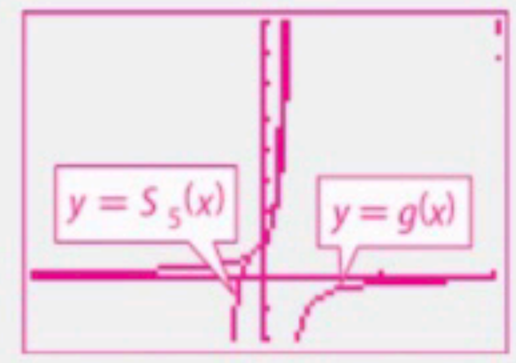
52. **كرة السلة** عادة ما تسجل منى 4 من كل 6 محاولات للرميات الحرة. ما احتمال تسجيلها 5 من 6 في محاولاتها التالية للرميات الحرة؟ (الدرس 9-5) **0.263 أو 26.3%**

53. **الارتفاع** تقدر منال ارتفاع شجرة. وتقف على مسافة 30 مترًا من القاعدة وتقدر زاوية نظرها إلى قمة الشجرة عند 40°. فإذا استخدمت المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لــ cosine و sine مع التقريب لأقرب ثلاث منازل عشرية لحساب ارتفاع الشجرة، فما تقدير منال؟ (الدرس 9-6) **31.173 m**



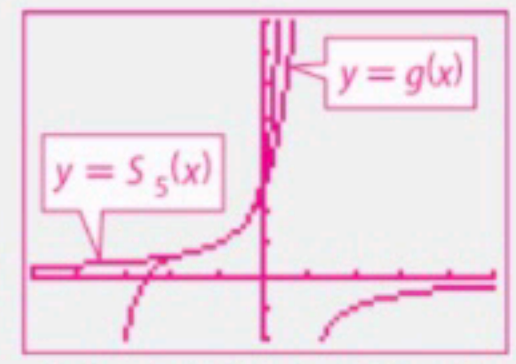
جابات إضافية

42. $\sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n;\ -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x+2}{3}\right)^n;\ -\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$



[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

51. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$. حيث إن $0.9 = \frac{10^1 - 1}{10^1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة لــ $n = 1$.

افترض أن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} = \frac{10^k - 1}{10^k}$ صحيحة لعدد صحيح موجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} = \frac{10^k - 1}{10^k}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^k - 1}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10}{10}\left(\frac{10^k - 1}{10^k}\right) + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^{k+1} - 10}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+1}}$$

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{10^{k+1} - 1}{10^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. حيث إن P_n صحيحة لــ $n = 1$ وتشير P_k إلى أن P_{k+1}، P_n صحيحة لــ $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. أي أنه وفقًا لمبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

الوحدة 9 تدريب على الاختبار

أوجد الحد المحدّد لكل متتالية حسابية.

1. الحد التاسع $a_n = \frac{n^3}{n+3}$ $\frac{243}{4}$
2. الحد السادس $a_1 = 156, a_n = \frac{a_{n-1} - 4}{2}$ 1

أوجد المجموع المشار إليه لكل متسلسلة.

3. المجموع الجزئي الخامس لـ $a_n = 3^n + 4$ 383
4. S_8 لـ $-2, 3, 8, 13, \ldots$ 124

أوجد الأوساط الحسابية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

5. 3 أوساط؛ 10− و 2− $-8, -6, -4$
6. 4 أوساط؛ 4− و 56 $8, 20, 32, 44$

7. **التدريب** بينما تتدرب ليلى لخوض سباق ركض ودي لمسافة 5 كيلومترات، قامت بالتدريب على ركض 1 كيلومتر أثناء الأسبوع الأول ثم قامت بزيادة 0.5 كيلومتر كل أسبوع لكل تدريب بحيث تتمكن من التدرب على ركض 5 كيلومترات في الأسبوع السابق للسباق. وإذا كانت ليلى تتدرب ثلاث مرات أسبوعيًا، فكم عدد الكيلومترات التي ركضتها في التدريب؟ **81 mi**

8. **الألعاب النارية** إذا كانت هناك زيادة ثابتة في عدد الحضور لمشاهدة عرض الألعاب النارية، فكم كان الحضور كل عام من عام 2003 إلى 2007؟ **انظر الهامش.**


يوليو 2008 الأربعاء

عرض النجاح

يزداد عدد الحضور في عرض الألعاب النارية السنوي من 12.000 في 2002 إلى 13.121 في 2008.

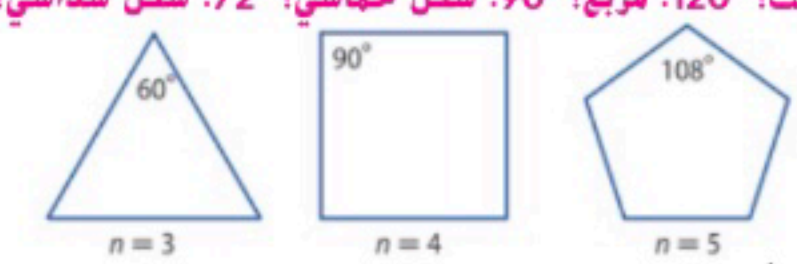
إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية.

9. $\frac{4}{10}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \ldots$ **لا يوجد**
10. $\sum_{n=3}^{\infty} -2(0.6)^{n-1}$ -1.8

11b. $a_n = 180 - \frac{180(n-2)}{n}, n \geq 3$

11. **الهندسة** قياس كل زاوية داخلية a من مضلع منتظم أضلاعه n هو $a_n = \frac{180(n-2)}{n}$ حيث $n \geq 3$.

a. مثلث: °120؛ مربع: °90؛ شكل خماسي: °72؛ شكل سداسي: °60



a. أوجد قياس زاوية داخلية لمثلث ومربع وشكل خماسي وشكل سداسي منتظم.
b. اكتب صيغة عامة لقياس زاوية داخلية لمضلع منتظم أضلاعه n.
c. حدد ما إذا كانت المتتالية تقاربية أو تباعدية؛ هل يبدو هذا منطقيًا في سياق الموقف؟ اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أثبت كل متباينة لقيم n الموضحة.

12. $n! > 5^n, n \geq 12$
13. $4n < 7^n, n \geq 1$
14. $3^n > n + 8, n \geq 3$
15. $3n < \left(\frac{5}{2}\right)^n, n \geq 2$

12–15. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

16. $(2x + 3y)^4$
17. $(x - 6)^7$

16–17. انظر الهامش.

18. **الاختيار من متعدد** إحصاءات تسجيل علي في كرة السلة موضحة أدناه. بناء على الإحصاءات، ما احتمال تسجيله هدفًا بنقطتين أو ثلاث في 3 من رمياته السبع التالية؟ **C**

محاولات التسجيل	رميات بنقطتين	رميات بثلاث نقاط
20	11	3

A 0.10 %
B 0.24 %
C 9.72 %
D 23.88 %

20. $243a^5 + 405a^4b^3 + 270a^3b^6 + 90a^2b^9 + 15ab^{12} + b^{15}$

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط كل تعبير مما يلي.

19. $(x - 4y)^4$
20. $(3a + b^3)^5$

$x^4 - 16x^3y + 96x^2y^2 - 256xy^3 + 256y^4$

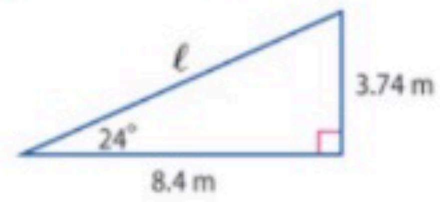
استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة قوة لـ $g(x)$.

21–22. انظر الهامش.

وضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

21. $g(x) = \frac{3}{1-x}$
22. $g(x) = \frac{2}{1-4x}$

23. **التزلج** ميل منحدر تزلج على الألواح هو °24. استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ cosine و sine مع التقريب لأقرب ثلاث منازل عشرية لإيجاد طول المنحدر. **9.195 ft**



اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسيّة.

24. $-\sqrt{3} - i$ $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$
25. $1 - \sqrt{3}i$ $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

إجابات إضافية

51b. $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$

$\frac{10^n - 1}{10^n}$ و $\frac{10^n - 1}{10^n} = \frac{9}{10^n} + \ldots$

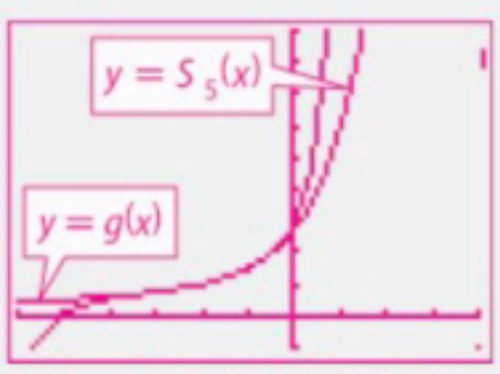
أو $1 - \frac{1}{10^n}$ = $\frac{10^n}{10^n} - \frac{1}{10^n}$. للقيم الأكبر والأكبر لـ تكون n، تكون قيمة $\frac{1}{10^n}$ كسرًا أصغر مقتربًا من 0. وبالتالي، بينما يتجه n إلى اللا نهائية، فإن $1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0$ أو 1. إذًا، بينما يقترب n من اللا نهائية، $1 = 0.\overline{9}$.

8. 2003: 12,187; 2004: 12,374; 2005: 12,561; 2006: 12,748; 2007: 12,935

16. $16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$

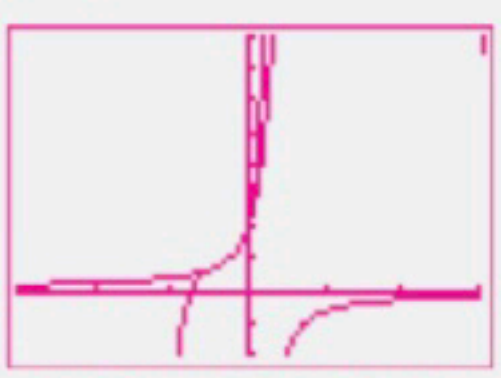
17. $x^7 - 42x^6 + 756x^5 - 7560x^4 + 45360x^3 - 163296x^2 + 326592x - 279936$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n; -5 < x < 1$



[−6, 4] scl: 1 by [−1, 9] scl: 1

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4x+1}{2}\right)^n; -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$



[−3, 3] scl: 1 by [−1, 9] scl: 1

1 التركيز

الهدف وضع رمز لتقريب مساحة منطقة محصورة بأحد المنحنيات ومحور x.

نصيحة للتدريس

اطلب من الطلاب فحص المجموع التالي.

$$\sum_{x=1}^{3} -x^2 + 5x$$

ناقش كيفية إيجاد قيمة هذا الجمع. ما قيمته؟ 16

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات. واطلب من المجموعات العمل معًا لإكمال التمرينين 1 و 3 وتحليل التمارين 1-5.

- أكدّ أنه لا يوجد سوى حد عرض واحد في مجموع ريمان حيث إن عرض جميع المستطيلات واحدًا ويمكن استبعاده من المجموع.
- ذكّر الطلاب أنه كلما زاد عدد المستطيلات، زادت دقة تقريب إجمالي المساحة تحت المنحنى.

الوحدة 9

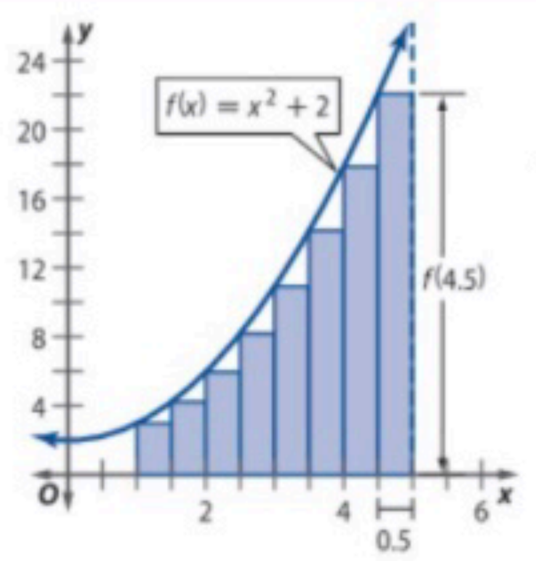
الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

مجموع ريمان

الهدف

- وضع رمز لتقريب مساحة منطقة محصورة بأحد المنحنيات ومحور x.

تعلمت تقريب المساحة بين أحد المنحنيات ومحور x. وقسمت المساحة إلى مستطيلات وأوجدت مساحة كل مستطيل وحسبت مجموع المساحات. في حساب التفاضل والتكامل، يتم تخصيص رمز خاص لهذه العملية ويتم إخضاعها لمزيد من الدراسة في محاولة لحساب المساحات بدقة. وسوف نحلل مكونات هذه العملية للوصول لاستيعاب أفضل للرمز.



يمكن تقريب المساحة A للمنطقة الموضحة أعلاه كما يلي.

$$A = 0.5 \cdot f(1) + 0.5 \cdot f(1.5) + 0.5 \cdot f(2.0) + 0.5 \cdot f(2.5) + 0.5 \cdot f(3.0) + 0.5 \cdot f(3.5) + 0.5 \cdot f(4.0) + 0.5 \cdot f(4.5)$$

لاحظ أنه يمكن تحليل العرض إلى العوامل.

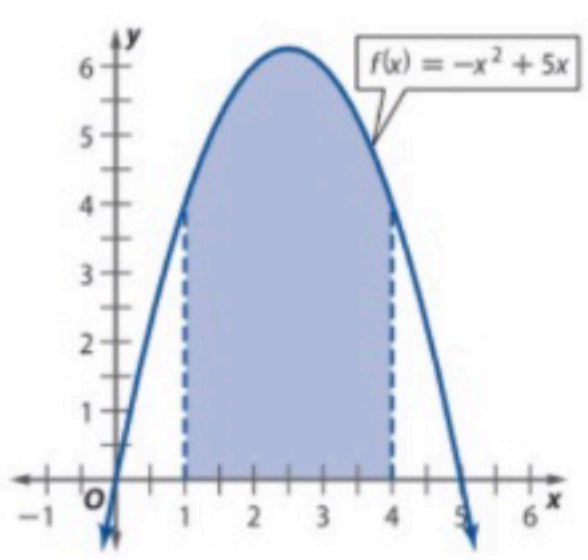
$$A = \underbrace{0.5}_{\text{العرض}} \cdot \underbrace{[f(1) + f(1.5) + f(2.0) + f(2.5) + f(3.0) + f(3.5) + f(4.0) + f(4.5)]}_{\text{مجموع الارتفاعات}}$$

هذا التقريب يساوي ناتج ضرب عرض المستطيلات في مجموع الارتفاعات. وسوف نفحص المكونين بشكل منفصل.

المكون الأول المستخدم لتقريب مساحة منطقة هو عرض المستطيلات. عرض المستطيلات، بالرمز Δx، هو الفرق بين النقطتين الطرفيتين اليسرى واليمنى لمستطيل، مثل $2 - 2.5$ أو 0.5. بشكل عام، لا توجد في المعطيات أي إحداثيات x للمستطيلات. بدلاً عن ذلك، لدينا *الحد السفلي* a *والحد العلوي* b للفترة $[a, b]$ وعدد المستطيلات n.

النشاط 1 إيجاد قيمة Δx

أوجد Δx إذا أردنا تقريب المساحة بين التمثيل البياني لـ $f(x) = -x^2 + 5x$ ومحور x في الفترة [1, 4] باستخدام 6 و 12 و 24 مستطيلاً.



الخطوة 1 أوجد الطول الكلي للفترة من خلال حساب $b - a$. **3 وحدات**

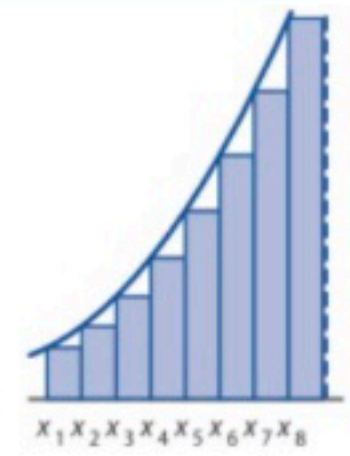
الخطوة 2 اقسم إجابة الخطوة 1 على 6. **0.5 وحدة**

الخطوة 3 كرر الخطوة 2 مع 12 و 24 مستطيلاً. **12 مستطيلاً، 0.25 وحدة؛ 24 مستطيلاً، 0.125 وحدة**

تحليل النتائج

1. عندما يزداد عدد المستطيلات، ماذا يحدث مع Δx؟ كيف يؤثر هذا على تقريب المساحة؟
2. أوجد Δx إذا أردنا تقريب المساحة بين أحد المنحنيات ومحور x في الفترة $[a, b]$ باستخدام n من المستطيلات. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
3. عندما يقترب n من ∞، ما الذي يحدث مع Δx؟ **الإجابة النموذجية: Δx يقترب من 0.**

1. الإجابة النموذجية: Δx تتناقص. عندما تصبح Δx أصغر، سوف تقدم المستطيلات تقريبًا أدق لمساحة المنطقة.



الشكل CAP.1.9

4. الإجابة النموذجية: سيتم إيجاد قيمة $f(x)$ من أجل 12 من قيم x. سوف تتناقص الفترة بين كل قيمة من قيم x وسوف يكون هناك 0.25 وحدة فقط تفصل كل قيمة من قيم x

المكون الثاني المطلوب لتقريب مساحة منطقة هو مجموع ارتفاعات المستطيلات. ويشبه مجموع الارتفاعات مجموع متسلسلة. بالنسبة إلى المثال الوارد في النشاط 1. هذا المجموع هو

$$f(1) + f(1.5) + f(2.0) + f(2.5) + f(3.0) + f(3.5) + f(4.0) + f(4.5).$$

حيث إن هناك 8 مستطيلات. يتم إيجاد قيمة $f(x)$ لعدد 8 من قيم x. ويمكن كتابة هذه المتسلسلة بالصورة

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8),$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_8$ هي إحداثيات x المستخدمة لإيجاد ارتفاعات المستطيلات، كما هو موضح بالشكل. يمكننا تمثيل هذه المتسلسلة باستخدام الرمز سيجما بالصورة $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)$. على سبيل المثال، يمكن كتابة مجموع الارتفاعات لـ $f(x)$ بالصورة *الموسعة* كما يلي

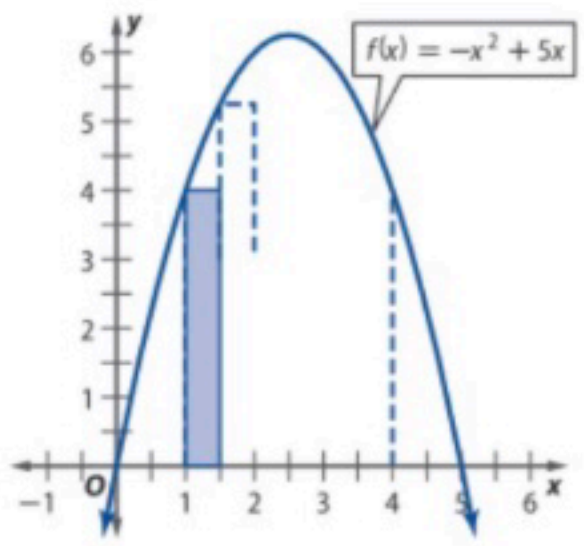
$$\sum_{i=1}^{8} f(x_i) = \underbrace{f(1)}_{x_1} + \underbrace{f(1.5)}_{x_2} + \underbrace{f(2.0)}_{x_3} + \underbrace{f(2.5)}_{x_4} + \underbrace{f(3.0)}_{x_5} + \underbrace{f(3.5)}_{x_6} + \underbrace{f(4.0)}_{x_7} + \underbrace{f(4.5)}_{x_8}$$

بشكل عام، مجموع ارتفاعات العدد n من المستطيلات يمكن وصفه بالصورة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

لديك الآن مكونان لتقريب مساحة منطقة باستخدام n من المستطيلات. يمكننا ضرب العرض في تعبير مجموع الارتفاعات للوصول إلى الرمز $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$. هذا التعبير يُسمى *مجموع ريمان*.

النشاط 2 تقريب المساحة أسفل المنحنى

قرب المساحة بين التمثيل البياني لـ $f(x) = -x^2 + 5x$ ومحور x في الفترة $[1, 4]$ مستخدمًا 6 مستطيلات. وافترض أن النقطة الطرفية اليسرى لكل مستطيل تمثل الارتفاع.



الخطوة 1 افترض أن $a = 1$ و $b = 4$ و $n = 6$. احسب Δx.

0.5 وحدة

الخطوة 2 اكتب التقريب برمز سيجما. وعوض بالقيمة الواردة في الخطوة 1 عن Δx و افترض أن $n = 6$.

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) \cdot 0.5$$

الخطوة 3 اكتب التعبير بالصورة الموسعة.

$$0.5\,[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)]$$

الخطوة 4 أوجد كل قيمة لـ x. x_1 ستبدأ عند 1. ويمكن إيجاد كل قيمة تالية من قيم x عن طريق إضافة Δx إلى كل قيمة سابقة. على سبيل المثال، $x_2 = 1 + 0.5, x_3 = x_2 + 0.5$ وهكذا.

$$x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2.0, x_4 = 2.5, x_5 = 3.0, x_6 = 3.5$$

الخطوة 5 احسب مساحة المستطيلات.

16.38 وحدة^2

نصيحة دراسية

الرمز عند الحاجة إلى إيجاد قيمة المجموع، ربما يكون من الأسهل تمثيل تقريب مساحة منطقة مثل $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$.

تحليل النتائج

4. إذا زادت n إلى 12، فما التغيير الناتج على التعبير بالصورة الموسعة؟ وماذا سيحدث لقيم x الواردة في الخطوة 4؟

5. عندما تقترب n من ∞. ماذا سيحدث لهذه الحسابات؟

5. الإجابة النموذجية: Δx تقترب من 0، وعدد الحدود يقترب من ∞، والمساحة تقترب من 16.5.

النموذج والتطبيق

إذا علمتَ n وفترة $[a, b]$، فأوجد Δx. ثم اكتب التقريب لإيجاد المساحة بين التمثيل البياني لـ $f(x) = -x^2 + 10x$ والمحور x بالرمز سيجما. احسب المساحة. وافترض أن النقطة الطرفية اليسرى لكل مستطيل تمثل الارتفاع.

6. $n = 4; [1, 2]$ 7. $n = 10; [6, 10]$ 8. $n = 24; [3, 9]$

6. $\sum_{i=1}^{4} f(x_i) \cdot 0.25$; ≈ 11.78 وحدة^2

7. $\sum_{i=1}^{10} f(x_i) \cdot 0.4$; 63.36 وحدة^2

8. $\sum_{i=1}^{24} f(x_i) \cdot 0.25$; ≈ 127.44 وحدة^2

تدريب اطلب من الطلاب إكمال تمريني التمثيل والتطبيق في التمارين 8-6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم تمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 8 لتقييم ما إن كان بإمكان الطلاب استخدام مجموع ريمان لحساب تقريب المساحة تحت المنحنى بفترات معينة.

من العملي إلى النظري

اطرح السؤال التالي:

ما السبب في أنه ولكن تقترب n من ∞. يقترب Δx من 0 بينما يقترب الحساب من ∞؟ الإجابة النموذجية: يقترب Δx من 0 نظرًا لأنه مع تزايد عدد المستطيلات، يقل العرض مقتربًا من 0. ويقترب الحساب من ∞ نظرًا لأنه يتزايد الحد الأعلى نحو ∞، بينما سيقترب العرض فقط من صفر.

توسيع المفهوم

اطرح السؤال التالي:

ما العلاقة بين مجموع ريمان ومفهوم التكامل الذي يعتبر أساس التفاضل والتكامل؟ كلتاهما طريقتين لإيجاد المساحة تحت منحنى.

الوحدة 9

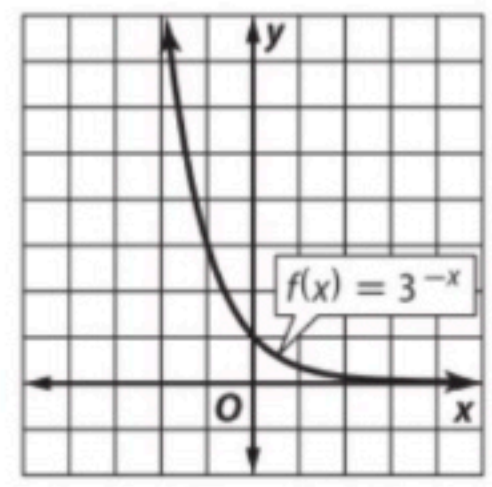
.3 عند $x \to \infty$، تكون $f(x) \to 0$؛ عند $x \to -\infty$، تكون $f(x) \to 0$.

x	−10,000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	$-4 \cdot 10^{-4}$	−0.004	غير معرّفة	0.004	$4 \cdot 10^{-4}$

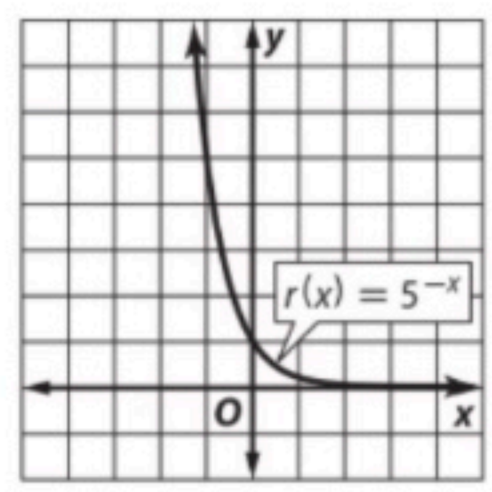
.4 عند $x \to \infty$، تكون $f(x) \to \infty$؛ عند $x \to -\infty$، تكون $f(x) \to \infty$.

x	−10,000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	$2 \cdot 10^{7}$	$2 \cdot 10^{5}$	−0.2	$2 \cdot 10^{5}$	$2 \cdot 10^{7}$

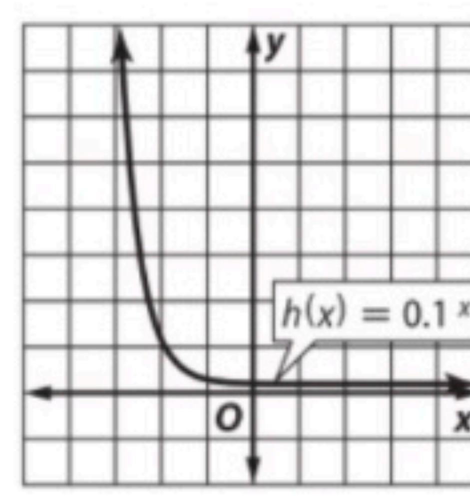
.5 $D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ التقاطع مع المحور y: 1؛ الخط المقارب: المحور x؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$؛ متناقصة عند $(-\infty, \infty)$



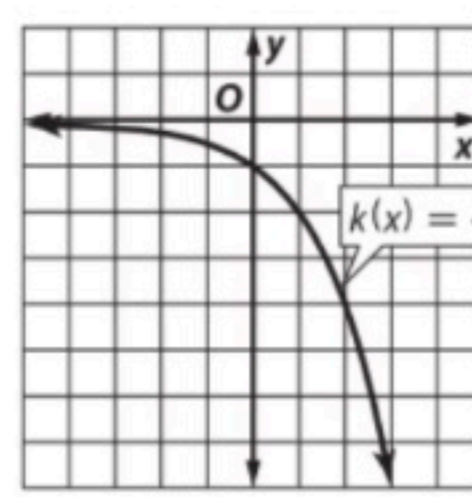
.6 $D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ التقاطع مع المحور y: 1؛ الخط المقارب: المحور x؛ $\lim_{x \to -\infty} r(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} r(x) = 0$؛ متناقصة عند $(-\infty, \infty)$



.7 $D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ التقاطع مع المحور y: 0.01؛ الخط المقارب: المحور x؛ $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$; $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$؛ متناقصة عند $(-\infty, \infty)$

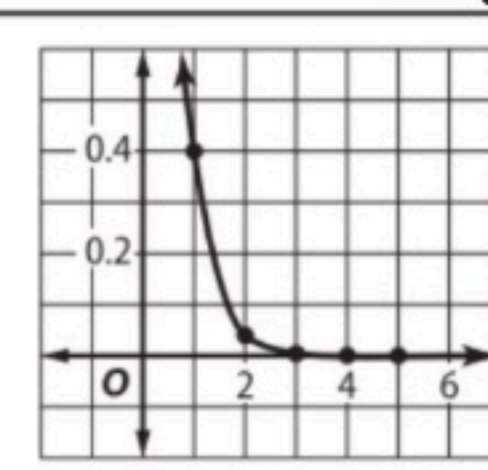


.8 $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$؛ التقاطع مع المحور y: −1؛ الخط المقارب: المحور x؛ $\lim_{x \to -\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} k(x) = -\infty$؛ متناقصة عند $(-\infty, \infty)$



الدرس 9-1

.81b



.81e الإجابة النموذجية: يقترب المجموع من $\frac{4}{9}$.

.81f الإجابة النموذجية: المجموع يساوي الكسر العشري ...0.44، حيث العدد الذي يلي العددين 4 بعد فاصلة الكسر العشري هو n. يوجد بمجموع الحدود الخمسة الأولى العدد أربعة خمس مرات، ويوجد بمجموع الحدود السبعة الأولى العدد أربعة سبع مرات، ويوجد بمجموع الحدود التسعة الأولى العدد أربعة تسع مرات.

.83a الإجابة النموذجية: $a_n = \frac{1}{n}$

.83b الإجابة النموذجية: $a_n = \frac{1}{n} + 3$

.83c الإجابة النموذجية: $a_n = 2n$

.85 صحيحة؛ الطرف الأيسر يساوي $4 + 10 + 18 + 28 + 40$ أو 100. الطرف الأيمن يساوي $3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 4 + 9 + 16 + 25)$ أو 100.

.86 صحيحة؛ الطرف الأيسر يساوي $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$ أو 363. الطرف الأيمن يساوي $3^{3-2} + 3^{4-2} + 3^{5-2} + 3^{6-2} + 3^{7-2}$ أو 363.

الدرس 9-2

.82 نعم؛ الإجابة النموذجية: تأمل المتتالية ... ,a_1, a_2, a_3. إذا كان الفرق المشترك للمتتالية يساوي 0، فإنه يُمكن تمثيل المجاميع الجزئية S_n للمتسلسلات المتناظرة باستخدام الدالة الخطية بالصيغة $S_n = a_1 n$. كذلك، يُمكن تمثيل المجاميع الجزئية باستخدام الدالة الربعية بالصيغة

$S_n = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$، حيث d هو الفرق المشترك للمتتالية الأصلية.

.83 الإجابة النموذجية: نعرف جميعًا أن $a_n = a_1 + (n - 1)d$. بسّط $a_k = a_1 + (k - 1)d$. حل المعادلة الثانية لإيجاد قيمة a_1 والتعويض في المحاصيل الأولى:

$$\begin{aligned} a_n &= a_k - (k - 1)d + (n - 1)d \\ &= a_k - kd + d + nd - d \\ &= a_k + nd - kd \\ &= a_k + (n - k)d \end{aligned}$$

.86 خطأ؛ الإجابة النموذجية: إذا كان الفرق المشترك سالبًا، فإنه من المُمكن أن تكون الحدود الثلاثة الأولى موجبة والحدود المتبقية سالبة. إذًا، قد يكون المجموع سالبًا.

.87b الإجابة النموذجية: مجموع عدد n من الحدود الأولى لمتتالية من الأعداد الطبيعية الفردية يساوي n^2.

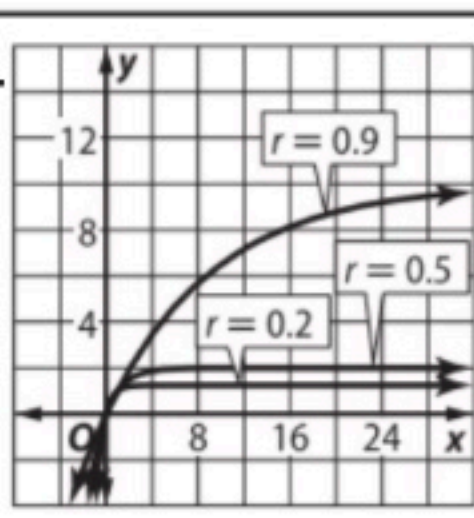
.87c افترض أن $a_n = 2n - 1$. الحد الأول لمتتالية الأعداد الطبيعية الفردية يساوي 1. إذًا، $a_1 = 1$. إذًا، عند استخدام صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية، يكون ما يلي صحيحًا.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)] \\ &= \frac{n}{2}(2n) = n^2 \end{aligned}$$

الدرس 9-3

104a.

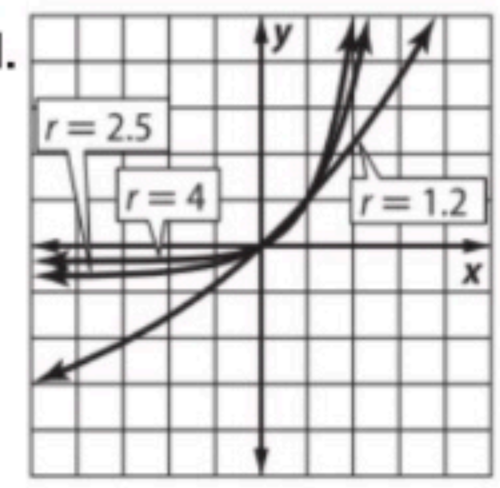


104b.

n	$r = 0.2$	$r = 0.5$	$r = 0.9$
0	0	0	0
4	1.248	1.875	3.439
8	1.25	1.9922	5.6953
12	1.25	1.9995	7.1757
16	1.25	2	8.147
20	1.25	2	8.7842
24	1.25	2	9.2023

104c. $S_n \to 1.25$ عند $r = 0.2$؛ $S_n \to 2$ عند $r = 0.5$؛ $S_n \to 10$ عند $r = 0.9$

104d.



121. $\langle -30, 6, 24\rangle \cdot \langle 1, 9, -1\rangle = -30(1) + 6(9) + 24(-1) = 0$

$\langle -30, 6, 24\rangle \cdot \langle -2, 6, -4\rangle = -30(-2) + 6(6) + 24(-4) = 0$

122. $\langle -46, -19, 7\rangle \cdot \langle -3, 8, 2\rangle = -46(-3) + (-19)8 + 7(2)$ or 0

$\langle -46, -19, 7\rangle \cdot \langle 1, -5, -7\rangle = -46(1) + (-19)(-5) + 7(-7)$ or 0

123. $\langle 8, -21, 18\rangle \cdot \langle 9, 0, -4\rangle = 8(9) + (-21)0 + 18(-4) = 0$

$\langle 8, -21, 18\rangle \cdot \langle -6, 2, 5\rangle = 8(-6) + (-21)2 + 18(5) = 0$

التوسع 9-3

1A. $1 + \frac{1}{1} = 2;\ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1.5;\ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} \approx 1.67;$

$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1.6;\ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = 1.625$

1C. $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ مماثل للنسبة الذهبية

2A. $3 + \frac{2}{3} \approx 3.666666667;\ 3 + \frac{2}{3+\frac{2}{3}} \approx 3.545454545;$

$3 + \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3}}} \approx 3.564102564;\ 3 + \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3}}}} \approx 3.561151079;$

$3 + \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3}}}}} \approx 3.561616162$

الدرس 9-4 (تمرين موجّه)

1. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. بما أن $1^2 = 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

فرضية الاستقراء	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$
اجمع الحد $(k+1)$ إلى الطرفين.	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = k^2 + [2(k+1)-1]$
بسّط الطرف الأيمن.	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = k^2 + 2k + 1$
حلل عوامل $k^2 + 2k + 1$.	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

2. افترض أن P_n هي العبارة $4^n - 1$ وتقبل القسمة على 3. P_1 هي العبارة $4^1 - 1$ وتقبل القسمة على 3. P_1 صحيحة لأن $4^1 - 1$ تساوي 3، وتقبل القسمة على 3. افترض أن P_k صحيحة، حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن $4^k - 1 = 3r$ لبعض الأعداد الصحيحة r يشير إلى أن $4^{k+1} - 1$ تقبل القسمة على 3.

فرضية الاستقراء	$4^k - 1 = 3r$
اجمع 1 إلى كل طرف.	$4^k = 3r + 1$
اضرب الطرفين في 4.	$4 \cdot 4^k = 4(3r + 1)$
بسّط.	$4^{k+1} = 12r + 4$
اطرح 1 من الطرفين.	$4^{k+1} - 1 = 12r + 3$
حلل إلى عوامل.	$4^{k+1} - 1 = 3(4r + 1)$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $4r + 1$ هو عدد صحيح و $3(4r + 1)$ يقبل القسمة على 3. لذلك، $4^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 3. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $4n - 1$ تقبل القسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

3. افترض أن P_n هي العبارة $2n < 3^n$. P_1 و P_2 صحيحة. بما أن $2(1) < 3^1$ و $2(2) < 3^2$ عبارتان صحيحتان. افترض أن P_k صحيحة، وأن $2k < 3^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k > 1$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى توضيح أن $2k < 3^k$ تشير إلى أن $2(k+1) < 3^{k+1}$.
استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$k > 1$	$2k < 3^k$
$k - 1 > 0$	$3 \cdot 2k < 3 \cdot 2^k$
$2k - 2 > 0$	$6k < 3^{k+1}$
$4k - 2k - 2 > 0$	
$4k - 2(k+1) > 0$	
$4k > 2(k+1)$	
$2(k+1) < 4k$	

بما أن k هو عدد صحيح موجب، فإن $4k < 6k$. وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2(k+1) < 4k$ و $4k < 6k$، فإن $2(k+1) < 6k$. وفق نفس الخاصية السابقة، إذا كان $2(k+1) < 6k$ و $6k < 3^{k+1}$، فإن $2(k+1) < 3^{k+1}$. بما أن P_n صحيحة عند n يساوي 1 و 2 ويشير P_k إلى أن P_{k+1} حيث $k > 1$، فإن P_n عبارة صحيحة عند $n = 3$، و $n = 4$، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2n < 3^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

4. افترض أن P_n هي العبارة $n! > 3^n$. P_7 هي عبارة صحيحة، وذلك لأن $7! > 3^7$ هي عبارة صحيحة. افترض أن $k! > 3^k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب $k \geq 7$. أثبت أن $(k + 1)! > 3^{k + 1}$ صحيحة. واستخدم فرضية الاستقراء وقيودها التي تنص على أن $k \geq 7$.

$k! > 3^k$	فرضية الاستقراء
$(k + 1) \cdot k! > (k + 1) \cdot 3^k$	اضرب الطرفين في $k + 1$.
$(k + 1)! > (k + 1) \cdot 3^k$	$(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$
$(k + 1)! > (k + 1) \cdot 3^k > 3 \cdot 3^k$	$k + 1 > 3$ هي عبارة صحيحة عند $k \geq 7$ ؛ إذا، وفق خاصية الضرب في المتباينة، نجد أن $(k+1) \cdot 3^k > 3 \cdot 3^k$.
$(k + 1)! > 3 \cdot 3^k$	خاصية التعدي في المتباينة
$(k + 1)! > 3^{k + 1}$	بسّط.

بما أن P_n صحيحة عند $n = 7$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 7$، فإن P_n صحيحة عند $n = 8$، و $n = 9$. وما إلى ذلك، بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $n! < 3^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة في $n \geq 7$.

5. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن هناك مجموعة من قسائم عبارة عن ثلاث تذاكر وخمس تذاكر مضافة إلى n حيث $n > 7$.
عند $n = 8$، يكون التخمين صحيحًا لأن $3(1) + 5(1) = 8$. افترض أن هناك مجموعة قسائم عبارة عن ثلاث تذاكر و/أو خمس تذاكر مضافة إلى k. أثبت أن هذا يشير إلى أن هناك مجموعة قسائم عبارة عن ثلاث تذاكر و/أو خمس تذاكر مضافة إلى $k + 1$.

الحالة 1 المجموعة التي تضم على الأقل قسيمة بخمس تذاكر. عوّض عن قسيمة التذاكر الخمس بقسيمة التذاكر الثلاث، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار $k + 1$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

الحالة 2 المجموعة التي لا تتضمن قسائم التذاكر الخمس. يجب أن تتضمن المجموعة على الأقل ثلاث قسائم من التذاكر الخمس، وذلك لأن قيمة المجموعة يجب أن تكون أكبر من 7. عوّض عن القسائم الثلاث ذات التذاكر الثلاث بالقسائم ذات التذاكر الخمس، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار $k + 1$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

في الحالتين، نجد أن P_n صحيحة عند $n = k + 1$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 8$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $n > 7$، فإن P_n صحيحة عند $n = 9$، و $n = 10$. وما إلى ذلك، بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، يُمكن تكوين كل التذاكر الأكبر من 7 باستخدام القسائم ذات التذاكر الثلاث والقسائم ذات التذاكر الخمس.

الدرس 4-9

1. افترض أن P_n هي العبارة $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$. بما أن $3 = 1(1 + 2)$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) = k(k + 2)$ هي العدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) = k(k + 2)$$
$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] = k(k + 2) + [2(k + 1) + 1]$$
$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] = k^2 + 4k + 3$$
$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] = (k + 1)(k + 3)$$
$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] = (k + 1)[(k + 1) + 2]$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك، بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

2. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$. بما أن $1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n هي عبارة صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$ عبارة صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}.
فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك، بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

3. افترض أن P_n هي العبارة $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$. بما أن $2 = 2(2^1 - 1)$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2(2^k - 1)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2(2^k - 1)$$
$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$$
$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2$$
$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

4. افترض أن P_n هي العبارة $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$. بما أن $3 = 2(1)^2 + 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) = 2k^2 + k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) = 2k^2 + k$$
$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] = 2k^2 + k + [4(k + 1) - 1]$$
$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] = 2k^2 + 5k + 3$$
$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] = (2k + 3)(k + 1)$$
$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] = 2(k + 1)^2 + (k + 1)$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

5. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$. بما أن $1 = \frac{1 \cdot [3(1) - 1]}{2}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{k(3k - 1)}{2} + [3(k + 1) - 2]$$
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{k(3k - 1) + 2(3k + 1)}{2}$$
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2}$$
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{(k + 1)[3(k + 1) - 1]}{2}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$ و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

6. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$. بما أن $1 = \frac{(1)^2[(1) + 1]^2}{4}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2 + 4(k + 1)^3}{4}$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2[k^2 + 4(k + 1)]}{4}$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2[(k + 1) + 1]^2}{4}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

7. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. بما أن $2^1 - 1 = 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = 2^k - 1 + 2^{(k+1)-1}$$

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = 2(2^k) - 1$$

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = 2^{k+1} - 1$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

8. افترض أن $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$. بما أن $1^2 = \frac{(1)[2(1)-1][2(1)+1]}{3}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2(k+1)-1]^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{[k(2k-1) + 3(2k+1)](2k+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(2k^2 + 5k + 3)(2k+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

9. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. بما أن $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{2}{2 \cdot 2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

10. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. بما أن $\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1+1}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n=1$. افترض أن $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ عبارة صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{(k+1)}{[(k+1)+1]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

11c. افترض أن P_n هو العبارة $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. وبما أن $1=\frac{(1)[(1)+1][(1)+2]}{6}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n=1$. افترض أن $1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{6}$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

12b. فترض أن P_n هي العبارة $0+1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. بما أن $0=\frac{(1)[(1)-1]}{2}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n=1$.
افترض أن $0+1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$0+1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$$

$$0+1+2+3+\cdots+(k-1)+[(k+1)-1]=\frac{k(k-1)}{2}+[(k+1)-1]$$

$$0+1+2+3+\cdots+(k-1)+[(k+1)-1]=\frac{k(k-1)+2k}{2}$$

$$0+1+2+3+\cdots+(k-1)+[(k+1)-1]=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + [(k+1)-1] = \frac{(k+1)[(k+1)-1]}{2}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

13. افترض أن P_n هي العبارة $9^n - 1$ وتقبل القسمة على 8. P_1 هي العبارة $9^1 - 1$ وتقبل القسمة على 8. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $9^1 - 1$ تساوي 8، وتقبل القسمة على 8. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $9^k - 1 = 8r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $9^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 8.

$$\begin{aligned}
9^k - 1 &= 8r\\
9^k &= 8r + 1\\
9 \cdot 9^k &= 9(8r+1)\\
9^{k+1} &= 72r + 9\\
9^{k+1} - 1 &= 72r + 8\\
9^{k+1} - 1 &= 8(9r+1)
\end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $9r + 1$ هو عدد صحيح و $8(9r+1)$ يقبل القسمة على 8. لذلك، $9^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 8. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $9^n - 1$ تقبل القسمة على 8 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

14. افترض أن P_n هي العبارة $6^n + 4$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي العبارة $6^1 + 4$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $6^1 + 4$ تساوي 10، وتقبل القسمة على 5. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $6^k + 4 = 5r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $6^{k+1} - 1$ يقبل القسمة 5.

$$\begin{aligned}
6^k + 4 &= 5r\\
6^k &= 5r - 4\\
6 \cdot 6^k &= 6(5r-4)\\
6^{k+1} &= 30r - 24\\
6^{k+1} + 4 &= 30r - 20\\
6^{k+1} + 4 &= 5(6r-4)
\end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $6r - 4$ هو عدد صحيح و $5(6r-4)$ يقبل القسمة على 5. لذلك، $6^{k+1} + 4$ يقبل القسمة على 5. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $6^n + 4$ تقبل القسمة على 5 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

15. افترض أن P_n هي العبارة $2^{3n} - 1$ وتقبل القسمة على 7. P_1 صحيحة لأن $2^{3(1)} - 1$ يساوي 7، وهو ما يقبل القسمة على 7. وافترض أن P_k صحيحة، حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^{3k} - 1 = 7r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r تشير إلى أن $2^{3(k+1)} - 1$ تقبل القسمة على 7.

$$\begin{aligned}
2^{3k} - 1 &= 7r\\
2^{3k} &= 7r + 1\\
2^3 \cdot 2^{3k} &= 2^3(7r+1)\\
2^{3(k+1)} &= 56r + 8\\
2^{3(k+1)} - 1 &= 56r + 7\\
2^{3(k+1)} - 1 &= 7(8r+1)
\end{aligned}$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $8r + 1$ عدد صحيح أيضًا و $7(8r+1)$ يقبل القسمة على 7. لذلك، $2^{3(k+1)} - 1$ يقبل القسمة على 7. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n عبارتان صحيحتان عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2^{3n} - 1$ تقبل القسمة على 7 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

16. افترض أن P_n هي العبارة $2^n - 5^n$ وتقبل القسمة على 3. P_1 صحيحة لأن $2^1 - 5^1$ يساوي 3، وهو ما يقبل القسمة على 7. وافترض أن P_k صحيحة، حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $5^k - 2^k = 3r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r، تشير إلى أن $5^{k+1} - 2^{k+1}$ تقبل القسمة على 3.

$$\begin{aligned}
5^k - 2^k &= 3r\\
5^k &= 2^k + 3r\\
5 \cdot 5^k &= (2+3)(2^k + 3r)\\
5^{k+1} &= 2^{k+1} + 3(2^k) + 15r\\
5^{k+1} - 2^{k+1} &= 3(2^k) + 15r\\
5^{k+1} - 2^{k+1} &= 3(2^k + 5r)
\end{aligned}$$

بما أن r و k هما عددان صحيحان، فإن $2^k + 5r$ عدد صحيح، و $3(2^k + 5r)$ يقبل القسمة على 3. لذلك $5^{k+1} - 2^{k+1}$ يقبل القسمة على 3. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$ وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $5^n - 2^n$ تقبل القسمة على 5 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

17. افترض أن P_n هي العبارة $3^n \ge 3n$. P_1 صحيحة، حيث $3^1 \ge 3(1)$ هي متباينة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $3^k \ge 3k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \ge 1$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3^k \ge 3k$ يشير إلى أن $3^{k+1} \ge 3(k+1)$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{aligned}
k &\ge 1\\
6k &\ge 6
\end{aligned}$$

إذا كان $6k \ge 6$ و $6 \ge 3$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $6k \ge 3$.

$$\begin{aligned}
6k &\ge 3\\
3k + 6k &\ge 3k + 3\\
9k &\ge 3(k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^k &\ge 3k\\
3 \cdot 3^k &\ge 3 \cdot 3k\\
3^{k+1} &\ge 9k
\end{aligned}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $3^{k+1} \ge 9k$ و $9k \ge 3(k+1)$، فإن $3^{k+1} \ge 3(k+1)$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \ge 1$. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3^n \ge 3n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

18. افترض أن P_n هي العبارة $n! > 4^n$. P_9 صحيحة، نظرًا لأن $9! > 4^9$ هي متباينة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $k! > 4^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \ge 9$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $k! > 4^k$ يشير إلى أن $(k+1)! \ge 4^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$\begin{aligned}
k &\ge 9\\
k + 1 &\ge 10
\end{aligned}$$

إذا كان $k + 1 \ge 10$ و $10 \ge 4$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k + 1 \ge 4$.

$$\begin{aligned}
k + 1 &\ge 4\\
(k+1) \cdot 4^k &\ge 4 \cdot 4^k\\
(k+1) \cdot 4^k &\ge 4^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k! &> 4^k\\
(k+1) \cdot k! &> (k+1) \cdot 4^k\\
(k+1)! &> (k+1) \cdot 4^k
\end{aligned}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $(k+1)! > (k+1) \cdot 4^k$ و $(k+1) \cdot 4^k \geq 4^{k+1}$، فإن $(k+1)! > 4^{k+1}$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 9$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 9$، فإن P_n صحيحة عند $n = 10$، و $n = 11$، وما إلى ذلك، بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $n! > 4^n$، بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة في $n \geq 9$.

19. افترض أن P_n هي العبارة $2^n > 2n$. P_1 صحيحة، حيث $2^3 \geq 2(3)$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $2^k > 2k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 3$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^k > 2k$ يشير إلى أن $2^{k+1} > 2(k+1)$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$k \geq 3$$
$$2k \geq 6$$

إذا كان $2k \geq 6$ و $6 \geq 2$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $2k \geq 2$.

$$2k \geq 2$$
$$2k + 2k \geq 2k + 2$$
$$4k \geq 2(k+1)$$

$$2^k > 2k$$
$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot 2k$$
$$2^{k+1} > 4k$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2^{k+1} > 4k$ و $4k \geq 2(k+1)$، فإن $2^{k+1} > 2(k+1)$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 3$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 3$، فإن P_n صحيحة عند $n = 4$، و $n = 5$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $2^n > 2n$ صحيحة بالنسبة لقيم لأعداد الصحيحة في $n \geq 3$.

20. افترض أن P_n هي العبارة $9n < 3^n$. P_4 صحيحة، نظرًا لأن $9(4) < 3^4$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $9k < 3^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 4$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $9k < 3^k$ يشير إلى أن $9(k+1) < 3^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$k \geq 4$$
$$4 \leq k$$
$$18 \cdot 4 \leq 18 \cdot k$$
$$72 \leq 18k$$

إذا كان $9 \leq 72$ و $72 \leq 18k$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $9 \leq 18k$.

$$9 \leq 18k$$
$$9k + 9 \leq 9k + 18k$$
$$9(k+1) \leq 27k$$

$$9k < 3^k$$
$$3 \cdot 9k < 3 \cdot 3^k$$
$$27k < 3^{k+1}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $9(k+1) \leq 27k$ و $27k < 3^{k+1}$، فإن $9(k+1) < 3^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 4$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 4$، فإن P_n صحيحة عند $n = 5$، و $n = 6$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $9n < 3^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 4$.

21. افترض أن P_n هي العبارة $3n < 4^n$. P_1 صحيحة، نظرًا لأن $3(1) < 4^1$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $3k < 4^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 1$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3k < 4^k$ يشير إلى أن $3(k+1) < 4^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$k \geq 1$$
$$3k \geq 3$$
$$3k - 3 \geq 0$$
$$6k - 3k - 3 \geq 0$$
$$6k - 3(k+1) \geq 0$$
$$6k \geq 3(k+1)$$
$$3(k+1) \leq 6k$$

بما أن k عدد صحيح موجب، فإن $6k \leq 12k$.
إذا كان $3(k+1) \leq 6k$ و $6k \leq 12k$،
فإن $3(k+1) \leq 12k$.

$$3k < 4^k$$
$$4 \cdot 3k < 4 \cdot 4^k$$
$$12k < 4^{k+1}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $3(k+1) \leq 12k$ و $12k < 4^{k+1}$، فإن $3(k+1) < 4^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 1$، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $3n < 4^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 1$.

22. افترض أن P_n هي العبارة $2^n > 10n + 7$. P_{10} صحيحة، حيث $2^{10} > 10(10) + 7$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $2^k > 10k + 7$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا عند $k \geq 10$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^k > 10k + 7$ يشير إلى أن $2^{k+1} > 10(k+1) + 7$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$k \geq 10$$
$$k - 10 \geq 0$$
$$11k - 10k - 10 \geq 0$$
$$11k - 10(k+1) \geq 0$$
$$11k \geq 10(k+1)$$

$$2^k > 10k + 7$$
$$2 \cdot 2^k > 2(10k + 7)$$
$$2^{k+1} > 20k + 14$$

بما أن k عدد صحيح موجب، فإن $20k + 7 \geq 11k$. إذا كان $20k + 7 \geq 11k$ و $11k \geq 10(k+1)$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $20k + 7 \geq 10(k+1)$.

$$20k + 7 \geq 10(k+1)$$
$$20k + 7 + 7 \geq 10(k+1) + 7$$
$$20k + 14 \geq 10(k+1) + 7$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2^{k+1} > 20k + 14$ و $20k + 14 \geq 10(k+1) + 7$، فإن $2^{k+1} > 10(k+1) + 7$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 10$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 10$، فإن P_n صحيحة عند $n = 11$، و $n = 12$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، $2^n > 10n + 7$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة في $n \geq 10$.

23. افترض أن P_n هي العبارة $2n < 1.5^n$. P_7 صحيحة، نظرًا لأن $2(7) < 1.5^7$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $2k < 1.5^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 7$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2k < 1.5^k$ يشير إلى أن $2(k+1) < 1.5^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$k \geq 7$$

إذا كان $k \geq 7$ و $7 \geq 2$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k \geq 2$.

$$k \geq 2$$
$$2 \leq k$$
$$2k + 2 \leq 2k + k$$
$$2(k+1) \leq 3k$$

$$2k < 1.5^k$$
$$1.5 \cdot 2k < 1.5 \cdot 1.5^k$$
$$3k < 1.5^{k+1}$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $2(k+1) \leq 3k$ و $3k < 1.5^{k+1}$، فإن $2(k+1) < 1.5^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 7$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 7$، فإن P_n صحيحة عند $n = 8$، و $n = 9$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $2n < 1.5^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة $n \geq 7$.

24. افترض أن P_n هي العبارة $1.5^n > 10 + 0.5n$. P_7 صحيحة، حيث $1.5^7 > 10 + 0.5(7)$ هي متباينة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث إن $1.5^k > 10 + 0.5k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 7$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $1.5^k > 10 + 0.5k$ يشير إلى أن $1.5^{k+1} > 10 + 0.5(k+1)$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$k \geq 7$

إذا كان $k \geq 7$ و $7 \geq -18$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k \geq -18$.

$$k \geq -18$$
$$0.25k \geq -4.5$$
$$0.75k \geq 0.5k - 4.5$$
$$5 + 0.75k \geq 0.5k + 0.5$$
$$5 + 0.75k \geq 0.5(k + 1)$$
$$15 + 0.75k \geq 10 + 0.5(k + 1)$$

$$1.5^k > 10 + 0.5k$$
$$1.5 \cdot 1.5^k > 1.5 \cdot (10 + 0.5k)$$
$$1.5^{k+1} > 15 + 0.75k$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $1.5^{k+1} > 15 + 0.75k$ و $15 + 0.75k \geq 10 + 0.5(k + 1)$. فإن $1.5^{k+1} > 10 + 0.5(k + 1)$. بما إن P_n صحيحة عند $n = 7$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 7$، فإن P_n صحيحة عند $n = 8$، و $n = 9$ ، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $1.5^n > 10 + 0.5n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة في $n \geq 7$.

25. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن هناك مجموعة من الطوابع البريدية من فئتي AED 0.05 و AED 0.06 مضافة إلى AED $0.01n$ عند $n > 20$. عند $n = 21$، يكون التخمين صحيحًا لأن AED $0.01(21)$ = AED $0.05(3)$ + AED $0.06(1)$. افترض أن هناك مجموعة من الطوابع البريدية من فئتي AED 0.05 و/أو AED 0.06 مضافة إلى AED $0.01k$ عند $k > 20$. أثبت أن هذا يشير إلى وجود مجموعة من الطوابع البريدية من فئتي AED 0.05 و/أو AED 0.06 مضافة إلى AED $0.01(k + 1)$.

الحالة 1 المجموعة التي تتضمن على الأقل طابعًا واحدًا من فئة AED 0.05. عوّض عنها بالطابع فئة AED 0.06، وبذلك ستزداد قيمة المجموعة إلى AED $0.01k + 0.01$ أو AED$0.01(k + 1)$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

الحالة 2 المجموعة التي لا تتضمن طوابع من فئة AED 0.05. يجب أن تتضمن المجموعة على أقل أربع طوابع من فئة AED 0.06، نظرًا لأ نه يجب أن تزيد قيمة المجموعة عن AED 0.02. وعوّض عن أربعة من الطوابع فئة AED 0.06 بخمسة طوابع فئة AED 0.05 ، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار AED 0.01، حتى تصبح AED $0.01k$ + AED 0.01 أو AED $0.01(k + 1)$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

في الحالتين، نجد أن P_n صحيحة عند $n = k + 1$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 21$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k > 20$، فإن P_n صحيحة عند $n = 22$، و $n = 23$ ، وما إلى ذلك. بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، يُمكن تكوين كل الطوابع الأكبر من AED 0.20 باستخدام طوابع من فئتي AED 0.05 و AED 0.06 فقط.

26. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أن هناك مجموعة من العملات المعدنية فئتي 50 فلسًا و 75 فلسًا مضافة إلى AED $0.25n$ عند $n > 6$. عند $n = 7$، يكون التخمين صحيحًا لأن AED $0.25(7)$ = AED $0.75(1)$ + AED $0.50(2)$. افترض أن هناك مجموعة من العملات المعدنية من فئتي 50 فلسًا و/أو 75 فلسًا مضافة إلى AED $0.25k$ عند $k > 6$. أثبت أن هذا يشير إلى وجود مجموعة من العملات المعدنية من فئتي 50 فلسًا و/أو 75 فلسًا مضافة إلى AED $0.25(k + 1)$.

الحالة 1 المجموعة التي تتضمن على الأقل عملة معدنية فئة 50 فلسًا. عوّض عنها بالعملة المعدنية فئة 75 فلسًا، وبذلك ستزداد قيمة المجموعة بمقدار AED 0.25 حتى تصبح AED $0.25k + 0.25$ أو AED $0.25(k + 1)$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

الحالة 2 المجموعة التي لا تتضمن عملات معدنية من فئة 50 فلسًا. يجب أن تتضمن المجموعة على الأقل ثلاث عملات معدنية من فئة 75 فلسًا، نظرًا لأ نه يجب أن تزيد قيمة المجموعة عن AED 1.50. وعوّض عن عملة معدنية من فئة 75 فلسًا بعملتين معدنيتين من فئة 50 فلسًا، وستزداد قيمة المجموعة بمقدار AED 0.25، حتى تصبح AED $0.25k$ + AED 0.25 أو AED $0.25(k + 1)$، وهو ما يساوي بالضبط P_{k+1}.

في الحالتين، نجد أن P_n صحيحة عند $n = k + 1$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 7$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k > 6$، فإن P_n صحيحة عند $n = 8$، و $n = 9$ ، وما إلى ذلك. بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، يُمكن تكوين كل العملا ت المعدنية لسداد التكلفة التي تزيد عن AED 1.50 باستخدام عملا ت معدنية من فئتي 50 فلسًا و 75 فلسًا فقط.

27. بما أن عدد كل مستطيل لديه عدد أكبر من الأعمدة عن الصفوف بمقدار واحد، فإن متتالية عدد المستطيلات مُعرفة بصراحة عبر الصيغة $a_n = n(n + 1)$. لإثبات أن مجموع عدد n للمستطيلات يُمكن إيجاده باستخدام $S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$، يجب إثبات أن $2 + 6 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$ صحيحة بالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة n. افترض أن هذه العبارة هي P_n. وبما أن $2 = \frac{1^3 + 3(1)^2 + 2(1)}{3}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $2 + 6 + \cdots + k(k + 1) = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3}$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3} + (k + 1)[(k + 1) + 1]$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3} + (k^2 + 3k + 2)$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + 9k + 6}{3}$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + (3k + 6k) + (3 + 1 + 2)}{3}$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (3k^2 + 6k + 3) + (2k + 2)}{3}$$

$$2 + 6 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)}{3}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}، إذًا P_{k+1} صحيحة. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 6 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

28. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 5 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$. بما أن $1(2 \cdot 1 - 1) = 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $1 + 5 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$$
$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) + 4(k + 1) - 3 = k(2k - 1) + 4(k + 1) - 3$$
$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = k(2k - 1) + (4k + 1)$$
$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = 2k^2 + 3k + 1$$
$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = (k + 1)(2k + 1)$$
$$1 + 5 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = (k + 1)[2(k + 1) - 1]$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}، إذًا P_{k+1} صحيحة. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن

$1 + 5 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ أو $\sum_{a=1}^{n} (4a - 3) = n(2n - 1)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

29. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 4 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$. بما أن $\frac{1}{2}[3(1) - 1] = 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $1 + 4 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + 3(k + 1) - 2 = \frac{k}{2}(3k - 1) + 3(k + 1) - 2$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{k}{2}(3k - 1) + (3k + 1)$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{k(3k - 1)}{2} + \frac{2(3k + 1)}{2}$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2}$$
$$1 + 4 + \cdots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{(k + 1)}{2}[3(k + 1) - 1]$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}، إذًا P_{k+1} صحيحة. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 4 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$
أو $\sum_{a=1}^{n} (3a - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

30. افترض أن P_n هي العبارة $2 + 6 + \cdots + (n^2 + n) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$. وبما أن $\frac{1(1 + 1)(1 + 2)}{3} = 2$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.

افترض أن $2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + [(k + 1)^2 + (k + 1)] = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + [(k + 1)^2 + (k + 1)]$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + (k^2 + 3k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k^2 + 3k + 2)$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + (k^2 + 3k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2) + 3(k^2 + 3k + 2)}{3}$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + (k^2 + 3k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)}{3}$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + (k^2 + 3k + 2) = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}$$
$$2 + 6 + \cdots + (k^2 + k) + (k^2 + 3k + 2) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][(k + 1) + 2]}{3}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}، إذًا P_{k+1} صحيحة، وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 6 + \cdots + (n^2 + n) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$ أو $\sum_{a=1}^{n} (a^2 + a) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

31. افترض أن P_n تساوي $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$. وبما أن $\frac{1}{3}=\frac{1}{2(1)+1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{k}{2k+1}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{k+1}{2k+3}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4k^2+8k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة، وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$ أو $\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{4a^2-1}=\frac{n}{2n+1}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

32. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n}{2(n+1)}$. وبما أن $\frac{1}{4}=\frac{1}{2(1+1)}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{k}{2(k+1)}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{k}{2(k+1)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{2(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{2(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+1)}{2(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{2(k+2)}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{2[(k+1)+1]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة، وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n}{2(n+1)}$ أو $\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2a(a+1)}=\frac{n}{2(n+1)}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

33. افترض أن $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$. وبما أن $\frac{1}{6}=\frac{1}{(1+1)(1+2)}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.

افترض أن $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+2)}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+2)}$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k(k+3)+2}{2(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k^2+3k+2}{2(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k+1}{2(k+3)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k+1}{2[(k+1)+2]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$ أو $\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{(a+1)(a+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

35. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n+2)}=\frac{n}{2(2n+2)}$. وبما أن $\frac{1}{2\cdot4}=\frac{1}{2(2+2)}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.

افترض أن $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}=\frac{k}{2(2k+2)}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}=\frac{k}{2(2k+2)}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{[2(k+1)][2(k+1)+2]}=\frac{k}{2(2k+2)}+\frac{1}{[2(k+1)][2(k+1)+2]}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k}{2(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k(2k+4)+1(2)}{2(2k+2)(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{2k^2+4k+2}{2(2k+2)(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{2(k+1)^2}{4(k+1)(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k+1}{4k+8}$$

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2k)(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k+1}{2[2(k+1)+2]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n+2)}=\frac{n}{2(2n+2)}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

38. افترض أن P_n هي العبارة $4^n + 6n - 1$ وتقبل القسمة على 9. P_1 هي العبارة $4^1 + 6(1) - 1$ وتقبل القسمة على 9. P_1 صحيحة، حيث إن $4^1 + 6(1) - 1 = 9$، وتقبل القسمة على 9. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $4^k + 6k - 1 = 9r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ يقبل القسمة على 9.

$$4^k + 6k - 1 = 9r$$
$$4^k = 9r - 6k + 1$$
$$4 \cdot 4^k = 4(9r - 6k + 1)$$
$$4^{k+1} = 36r - 24k + 4$$
$$4^{k+1} + 6k + 5 = 36r - 18k + 9$$
$$4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 9(4r - 2k + 1)$$

بما أن r و k عددان صحيحان، فإن $4r - 2k + 1$ هو عدد صحيح و $9(4r - 2k + 1)$ يقبل القسمة على 9. لذلك، $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ يقبل القسمة على 9. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $4^n + 6n - 1$ تقبل القسمة على 9 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

39. افترض أن P_n هي العبارة $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي العبارة $2^{2(1)+1} + 3^{2(1)+1}$ وتقبل القسمة على 5. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $2^{2(1)+1} + 3^{2(1)+1} = 35$، وتقبل القسمة على 5. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 5r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $2^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1}$ يقبل القسمة على 5.

$$2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 5r$$
$$2^{2k+1} = 5r - 3^{2k+1}$$
$$2^{2k+1} \cdot 2^2 = 5r - 3^{2k+1} \cdot 2^2$$
$$2^{2k+1} \cdot 2^2 = (5r - 3^{2k+1})(3^2 - 5)$$
$$2^{2k+3} = 45r - 25r - 3^{2k+3} + 5(3^{2k+1})$$
$$2^{2k+3} + 3^{2k+3} = 45r - 25r + 5(3^{2k+1})$$
$$2^{2k+3} + 3^{2k+3} = 20r + 5(3^{2k+1})$$
$$2^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1} = 5(4r + 3^{2k+1})$$

بما أن r و k عددان صحيحان، فإن $4r + 3^{2k+1}$ عدد صحيح، و $5(4r + 3^{2k+1})$ يقبل القسمة على 5. لذلك، $2^{2k+3} + 3^{2k+3}$ يقبل القسمة على 5. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ تقبل القسمة على 5 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

40. افترض أن P_n هي العبارة $\left(\frac{a}{b}\right)^n > \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$ بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \ge 1$ و $0 < a < b$. P_1 صحيحة عند $n = 1$ و $0 < a < b$. و $\left(\frac{a}{b}\right)^1 > \left(\frac{a}{b}\right)^2$ هو عبارة صحيحة. افترض أن $\left(\frac{a}{b}\right)^k > \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح $k \ge 1$. أثبت أن $\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^{(k+1)+1}$ يجب أن تكون صحيحة.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k > \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^k > \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^{(k+1)+1}$$

بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\left(\frac{a}{b}\right)^n > \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة $n \ge 1$.

41. افترض أن P_n هي العبارة $(x+1)^n \ge nx$، بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \ge 1$ و $x \ge 1$. P_1 صحيحة، لأنه عند $n = 1$ و $x \ge 1$، تكون $(x+1)^1 \ge 1x$ عبارة صحيحة. افترض أن $(x+1)^k \ge kx$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح $k \ge 1$. أثبت أن $(x+1)^{k+1} \ge (k+1)x$ يجب أن تكون صحيحة.

$$(x+1)^k \ge kx$$
$$(x+1)(x+1)^k \ge (x+1)kx$$
$$(x+1)^{k+1} \ge kx^2 + k$$

نحتاج الآن إلى إثبات أن $kx^2 + kx \ge (k+1)x$. لاحظ أولاً أنه بما أن $k \ge 1$ و $x \ge 1$، فإن كلاً من kx و $x - 1$ غير سالبين. وبذلك يكون ناتجهما $kx(x-1)$ غير سالب. إذًا، $kx^2 - kx \ge 0$. مما يشير إلى أن $kx^2 \ge kx$. لكن $kx \ge x$. إذًا وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $kx^2 \ge x$. أضف kx لكلا طرفي $kx^2 \ge x$ وحلل إلى عوامل للحصول على $kx^2 + kx \ge (k+1)x$. بما أن $(x+1)^{k+1} \ge kx^2 + kx$ و $kx^2 + kx \ge (k+1)x$، فإن $(x+1)^{k+1} \ge (k+1)x$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $(x+1)^n \ge nx$ صحيحة بالنسبة للأعداد الصحيحة $n \ge 1$ وعند $x \ge 1$.

42. افترض أن P_n هي العبارة $(1+a)^n > 1 + na$، بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \ge 2$ وعند $a > 0$. P_2 صحيحة، لأنه عند $n = 2$ و $a > 0$، تكون $(1+a)^2 > 1 + 2a$ عبارة صحيحة. افترض أن $(1+a)^k > 1 + ka$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح $k > 2$. أثبت أن $(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$ يجب أن تكون صحيحة.

$$(1+a)^k > 1 + ka$$
$$(1+a)(1+a)^k > (1+a)(1+ka)$$
$$(1+a)^{k+1} > 1 + ka + a + ka^2$$
$$(1+a)^{k+1} > 1 + ka^2 + (k+1)a$$

نحتاج الآن إلى إثبات أن $1 + ka^2 + (k+1)a > 1 + (k+1)a$. لاحظ أولاً أنه بما أن $n \ge 2$ و $a > 0$، فإن كلاً من k و a^2 غير سالبين. وبذلك يكون ناتجهما ka^2 غير سالب. إذًا $ka^2 \ge 0$.

$$ka^2 \ge 0$$
$$ka^2 + [1 + (k+1)a] - [1 + (k+1)a] \ge 0$$
$$1 + ka^2 + (k+1)a \ge 1 + (k+1)a$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $(1+a)^{k+1} \ge 1 + ka^2 + (k+1)a$ و $1 + ka^2 + (k+1)a > 1 + (k+1)a$، فإن $(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $(1+a)^n > 1 + na$، عند قيم العدد الصحيح $n \ge 2$ وعند $a > 0$.

.43 $S_n = 2n^2$؛ افترض أن P_n هي العبارة $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$. بما أن $2 = 2(1)^2$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. وافترض أن $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) = 2k^2$ صحيحة عند العدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) = 2k^2$$
$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) + [4(k + 1) - 2] = 2k^2 + [4(k + 1) - 2]$$
$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2k^2 + (4k + 2)$$
$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2(k^2 + 2k + 1)$$
$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2(k + 1)^2$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_kإلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

.44 $S_n = \frac{n}{2}(5n - 1)$؛ افترض أن P_n هي العبارة $2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5n - 3) = \frac{n}{2}(5n - 1)$. بما أن $2 = \frac{1}{2}(5 \cdot 1 - 1)$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) = \frac{k}{2}(5k - 1)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) = \frac{k}{2}(5k - 1)$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + [5(k + 1) - 3] = \frac{k}{2}(5k - 1) + [5(k + 1) - 3]$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + (5k + 2) = \frac{k}{2}(5k - 1) + (5k + 2)$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + (5k + 2) = \frac{k(5k - 1) + 2(5k + 2)}{2}$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + (5k + 2) = \frac{5k^2 + 9k + 4}{2}$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + (5k + 2) = \frac{(k + 1)(5k + 4)}{2}$$
$$2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5k - 3) + (5k + 2) = \frac{k + 1}{2}[5(k + 1) - 1]$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 + 7 + 12 + 17 + \ldots + (5n - 3) = \frac{n}{2}(5n - 1)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

.45 $S_n = \frac{1}{2^n} - 1$؛ افترض أن P_n هي العبارة $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} - 1$. بما أن $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} - 1$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} - 1$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} - 1$$
$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) + \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^k} - 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) + \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right) - 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) + \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{2^{k+1}} - 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^k}\right) + \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} - 1$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} - 1$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

.46 $S_n = \frac{n}{3(n + 1)}$؛ افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{3n(n + 1)} = \frac{n}{3(n + 1)}$. بما أن $\frac{1}{6} = \frac{1}{3(1 + 1)}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{3k(k + 1)} = \frac{k}{3(k + 1)}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{3k(k + 1)} = \frac{k}{3(k + 1)}$$
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{3k(k + 1)} + \frac{1}{3(k + 1)[(k + 1) + 1]} = \frac{k}{3(k + 1)} + \frac{1}{3(k + 1)[(k + 1) + 1]}$$

الوحدة 9 ملحق الإجابات

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{k}{3(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{3(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{3(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+1)}{3(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{3(k+2)}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{3k(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{3[(k+1)+1]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{n}{3(n+1)}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

47. افترض أن P_n هي العبارة $f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$. وبما أن $f_1=1$ ، و $1-2=1-f_3=1-f_{1+2}$ أو 1. فإن $f_1=f_{1+2}-1$ صحيحة. إذًا، P_n صحيحة عند $n=1$. افترض أن $f_1+f_2+\cdots+f_k=f_{k+2}-1$ صحيحة عند العدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$f_1+f_2+\cdots+f_k=f_{k+2}-1$$
$$f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1}=f_{k+2}-1+f_{k+1}$$
$$f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1}=f_{k+3}-1$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$. وما إلى ذلك. إذًا، $f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

48. افترض أن P_n هي العبارة $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n. بما أن $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^1=r^1[\cos(1)\theta+i\sin(1)\theta]$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n=1$. افترض أن $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$
$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{k+1}=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{k+1}=r^{k+1}[\cos k\theta\cos\theta+(\cos k\theta)(i\sin\theta)+i\sin k\theta\cos\theta+i^2\sin k\theta\sin\theta]$$
$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{k+1}=r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)]$$
$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{k+1}=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta]$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

49. افترض أن P_n هي العبارة التي تنص على أنه إذا كان لدى مضلع عدد n من الأضلاع، ومجموع الزوايا الداخلية يساوي $(n-2)180$. P_3 صحيحة، لأنه بما أن $n=3$. فإن المضلع عبارة عن مثلث، ومجموع الزوايا الداخلية يساوي 180 و $180=(3-2)180$. افترض أن المضلع لديه عدد k من الأضلاع، ومجموع الزوايا الداخلية يساوي $(k-2)180$ بالنسبة للعدد الصحيح الموجب $k\geq 3$. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أنه إذا كان للشكل عدد $k+1$ من الأضلاع، فإن مجموع الزوايا الداخلية يساوي $(k+1-2)180$. استخدم فرضية الاستقراء وتقييدها المتمثل في $k\geq 3$. تأمل مضلعًا محدبًا توجد به الرؤوس $k+1$. بما أن $k\geq 3$. فإن $k+1\geq 3$. إذا تناولنا الرأس x. فإن هناك رأسًا أخرى وهي y بحيث تكون هناك رأس واحدة بين x و y في اتجاه واحد، والرؤوس $k-2$ في الاتجاه المقابل.
صِل x بـــ y باستخدام حافة أخرى لقسم مضلع أصلي إلى مضلعين. ومجموع الزوايا الداخلية للمضلعين الجديدين يساوي مجموع الزوايا الداخلية للمضلع الأصلي. وأحد المضلعين عبارة عن مثلث، ولدى الآخر الرؤوس k (واحدة منها منعزلة بين x و y). مجموع الزوايا الداخلية للمثلث يساوي 180. ووفق فرضية الاستقراء، فإن مجموع الزوايا الداخلية بالمضلع الآخر يساوي $(k-2)180$. وبجمع كل ذلك، نحصل على $(k+1-2)180$ وهكذا يتم إثبات النظرية. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، إذا كان لدى المضلع عدد n من الأوجه، فإن مجموع الزوايا الداخلية يساوي $(n-2)180$ وهو صحيح بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة في $n\geq 3$.

50. افترض أن P_n هي العبارة $(xy)^n=x^ny^n$. وبما أن $(xy)^1=x^1y^1$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n=1$. وافترض أن $(xy)^k=x^ky^k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن يكون صحيحًا.

$$(xy)^k=x^ky^k$$
$$xy\cdot(xy)^k=xy\cdot x^ky^k$$
$$(xy)^{k+1}=x^{k+1}y^{k+1}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n=1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n=2$، و $n=3$. وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $(xy)^n=x^ny^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

51. افترض أن P_n هي العبارة $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$. بما أن $\left(\frac{x}{y}\right)^1 = \frac{x^1}{y^1}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{x^k}{y^k}$ صحيحة عند العدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{x^k}{y^k}$$
$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{x}{y} \cdot \frac{x^k}{y^k}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{k+1} = \frac{x^{k+1}}{y^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

52. افترض أن P_n هي العبارة $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. بما أن $x^{-1} = \frac{1}{x^1}$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$
$$x^{-1} \cdot x^{-k} = x^{-1} \cdot \frac{1}{x^k}$$
$$x^{-k-1} = \frac{1}{x^1 \cdot x^k}$$
$$x^{-(k+1)} = \frac{1}{x^{k+1}}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

53. افترض أن P_n هي العبارة $\cos n\pi = (-1)^n$ بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n. وبما أن $\cos \pi = (-1)^1$ هو عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\cos k\pi = (-1)^k$ صحيحة بالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\cos k\pi = (-1)^k$$
$$\cos k\pi \cdot \cos \pi = (-1)^k \cdot \cos \pi$$
$$\cos k\pi \ \mathrm{coxs}\ \pi + (-\sin k\pi \sin \pi + \sin k\pi \sin \pi) = (-1)^k \cdot (-1)$$
$$(\cos k\pi \cos \pi - \sin k\pi \sin \pi) + \sin k\pi \sin \pi = (-1)^{k+1}$$
$$\cos (k\pi + \pi) + \sin k\pi \sin \pi = (-1)^{k+1}$$
$$\cos (k\pi + \pi) + \sin k\pi \cdot 0 = (-1)^{k+1}$$
$$\cos (k\pi + \pi) + 0 = (-1)^{k+1}$$
$$\cos [(k+1)\pi] = (-1)^{k+1}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\cos n\pi = (-1)^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

54. افترض أن $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$ و P_n هي العبارة $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$.

وبما أن $a_1 = a_1\left(\frac{1-r}{1-r}\right)$ هي عبارة صحيحة، و P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} = a_1\left(\frac{1-r^k}{1-r}\right)$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} = a_1\left(\frac{1-r^k}{1-r}\right)$$
$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} + a_1r^{(k+1)-1} = a_1\left(\frac{1-r^k}{1-r}\right) + a_1r^{(k+1)-1}$$
$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} + a_1r^k = \frac{a_1(1-r^k) + a_1r^k(1-r)}{1-r}$$
$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} + a_1r^k = \frac{a_1 - a_1r^k + a_1r^k - a_1r^{k+1}}{1-r}$$
$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} + a_1r^k = \frac{a_1 - a_1r^{k+1}}{1-r}$$
$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{k-1} + a_1r^k = a_1\left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right)$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

55. افترض أن $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 1)d]$ و P_n هي العبارة $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$. بما أن $a_1 = \frac{1}{2}[2a_1 + (1 - 1)d]$ صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] = \frac{k}{2}[2a_1 + (k - 1)d]$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] = \frac{k}{2}[2a_1 + (k - 1)d]$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{k}{2}[2a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd)$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{k[2a_1 + (k - 1)d] + 2(a_1 + kd)}{2}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{2a_1k + k(k - 1)d + 2a_1 + 2kd}{2}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{2a_1k + 2a_1 + [k(k - 1) + 2k]d}{2}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{2a_1(k + 1) + (k^2 + k)d}{2}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{2a_1(k + 1) + (k + 1)kd}{2}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + (a_1 + kd) = \frac{k + 1}{2}(2a_1 + kd)$$

$$a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (k - 1)d] + \{a_1 + [(k + 1) - 1]d\} = \frac{k + 1}{2}\{2a_1 + [(k + 1) - 1]d\}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

56. افترض أن P_n هي العبارة $n! < n^n$ بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n > 1$. حيث $n = 2$، و $2! < 2^2$ صحيحة؛ إذًا، P_2 صحيحة. افترض أن $k! < k^k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح $k > 1$. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$k! < k^k$
$(k + 1) \cdot k! < (k + 1) \cdot k^k$

بما أن k هو عدد صحيح موجب، فإن
$k < k + 1$.
$k^k < (k + 1)^k$
$(k + 1) \cdot k^k < (k + 1)(k + 1)^k$
$(k + 1) \cdot k^k < (k + 1)^{k+1}$

وفق خاصية التعدي في المتباينة، إذا كان $(k + 1) \cdot k! < (k + 1) \cdot k^k$ و $(k + 1) \cdot k^k < (k + 1)^{k+1}$، فإن $(k + 1) \cdot k! < (k + 1)^{k+1}$. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 2$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 3$، و $n = 4$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $n! < n^n$ صحيحة بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n > 1$.

59. افترض أن P_n هي العبارة $a_n < 3$. وبما أن $\sqrt{6} < 3$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $a_k < 3$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k}$
$(a_{k+1})^2 = 6 + a_k$
$(a_{k+1})^2 - 6 = a_k$

$a_k < 3$
$(a_{k+1})^2 - 6 < 3$
$(a_{k+1})^2 < 9$
$a_{k+1} < 3$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن P_n صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

الدرس 9-5

31. $1024t^5 + 3840t^4 + 5760t^3 + 4320t^2 + 1620t + 243$

32. $512 - 960y + 600y^2 - 125y^3$

33. $64m^6 - 192m^5n + 240m^4n^2 - 160m^3n^3 + 60m^2n^4 - 12mn^5 + n^6$

34. $6561h^4 + 5832h^3j + 1944h^2j^2 + 288hj^3 + 16j^4$

35. $2187p^7 + 5103p^6q + 5103p^5q^2 + 2835p^4q^3 + 945p^3q^4 + 189p^2q^5 + 21pq^6 + q^7$

36. $a^{16} - 16a^{14}b + 112a^{12}b^2 - 448a^{10}b^3 + 1120a^8b^4 - 1792a^6b^5 + 1792a^4b^6 - 1024a^2b^7 + 256b^8$

37. $16{,}807c^{10} + 36{,}015c^8d + 30{,}870c^6d^2 + 13{,}230c^4d^3 + 2835c^2d^4 + 243d^5$

38. $128w^7 - 1792w^6x^3 + 10{,}752w^5x^6 - 35{,}840w^4x^9 + 71{,}680w^3x^{12} - 86{,}016w^2x^{15} + 57{,}344wx^{18} - 16{,}384x^{21}$

65a. $f(x) = x^3$: $3x^2 + 3xh + h^2, h \neq 0$
$f(x) = x^4$: $4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3, h \neq 0$
$f(x) = x^5$: $5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4, h \neq 0$
$f(x) = x^6$: $6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5, h \neq 0$

$f(x) = x^7$: $7x^6 + 21x^5h + 35x^4h^2 + 35x^3h^3 + 21x^2h^4 + 7xh^5 + h^6, h \neq 0$

$f(x) = x^n$: $nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + {}_nC_3x^{n-3}h^2 + \cdots + {}_nC_rx^{n-r}h^{r-1} + \cdots + h^{n-1}, h \neq 0$

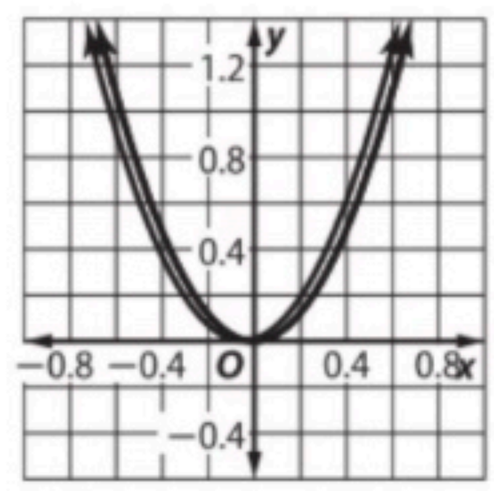
65b.

	$f(x) = x^3$	$f(x) = x^4$	$f(x) = x^5$
$h = 0.1$	$3x^2 + 0.3x + 0.01$	$4x^3 + 0.6x^2 + 0.04x + 0.001$	$5x^4 + 1x^3 + 0.1x^2 + 0.005x + 0.0001$
$h = 0.01$	$3x^2 + 0.03x + 0.0001$	$4x^3 + 0.06x^2 + 0.0004x + 0.000001$	$5x^4 + 0.1x^3 + 0.001x^2 + 0.000005x + (1 \times 10^{-8})$
$h = 0.001$	$3x^2 + 0.003x + 0.000001$	$4x^3 + 0.006x^2 + 0.000004x + (1 \times 10^{-9})$	$5x^4 + 0.01x^3 + 0.00001x^2 + (5 \times 10^{-9})x + (1 \times 10^{-12})$
$h = 0.0001$	$3x^2 + 0.0003x + 0.00000001$	$4x^3 + 0.0006x^2 + 0.00000004x + (1 \times 10^{-12})$	$5x^4 + 0.001x^3 + (1 \times 10^{-7})x^2 + (5 \times 10^{-12})x + (1 \times 10^{-16})$

	$f(x) = x^6$	$f(x) = x^7$
$h = 0.1$	$6x^5 + 1.5x^4 + 0.2x^3 + 0.015x^2 + 0.0006x + 0.00001$	$7x^6 + 2.1x^5 + 0.35x^4 + 0.035x^3 + 0.0021x^2 + (7 \times 10^{-5})x + (1 \times 10^{-6})$
$h = 0.01$	$6x^5 + 0.15x^4 + 0.002x^3 + 0.000015x^2 + (6 \times 10^{-8}) \cdot x + (1 \times 10^{-10})$	$7x^6 + 0.21x^5 + 0.0035x^4 + (3.5 \times 10^{-5})x^3 + (2.1 \times 10^{-7})x^2 + (7 \times 10^{-10})x + (1 \times 10^{-12})$
$h = 0.001$	$6x^5 + 0.015x^4 + 0.00002 \cdot x^3 + (1.5 \times 10^{-8})x^2 + (6 \times 10^{-12})x + (1 \times 10^{-15})$	$7x^6 + 0.021x^5 + 0.000035x^4 + (3.5 \times 10^{-8})x^3 + (2.1 \times 10^{-11})x^2 + (7 \times 10^{-15})x + (1 \times 10^{-18})$
$h = 0.0001$	$6x^5 + 0.0015x^4 + 0.0000002x^3 + (1.5 \times 10^{-11})x^2 + (6 \times 10^{-16})x + (1 \times 10^{-20})$	$7x^6 + 0.0021x^5 + 0.00000035x^4 + (3.5 \times 10^{-11})x^3 + (2.1 \times 10^{-15})x^2 + (7 \times 10^{-20})x + (1 \times 10^{-24})$

الإجابة النموذجية: عندما تتناقص h، فإن جميع الحدود عدا الحد الأول في كل تعبير يقترب من 0.

65c.



الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية للدوال متماثلة بالضبط تقريبًا.

67. الإجابة النموذجية: استخدم عالم الرياضيات الصيني تشو شي تشيه المثلثات عام 1303. إذا كان العدد الثاني لأي صف هو عددًا أوليًا، فإن جميع الأعداد الأخرى في الصف (عدا الصف الأول) تقبل القسمة على العدد الأولي. والقطر الثاني للمثلث عبارة عن مجموعة من الأعداد الطبيعية. أما القطر الثالث، فهو عبارة عن مجموعة من الأعداد المثلثية.

69. الإجابة النموذجية: تعامل مع $x + y$ على أنه حد فردي، وفكك $[(x + y) + z]^n$; $(x + y)^n + n(x + y)^{n-1}z + {}_nC_2(x + y)^{n-2}z^2 + {}_nC_3(x + y)^{n-3}z^3 + \cdots + {}_nC_r(x + y)^{n-r}z^r + \cdots + z^n$.

70.
$$\begin{aligned} 2^n &= (1 + 1)^n \\ &= {}_nC_0\, 1^n1^0 + {}_nC_1\, 1^{n-1}1^1 + {}_nC_2\, 1^{n-2}1^2 + \cdots + {}_nC_n\, 1^01^n \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n \end{aligned}$$

73. الإجابة النموذجية: أوجد الحد الذي يجعل ناتج $\frac{1}{2v}$ و $6v^7$ أسين متقابلين بالنسبة لـ v؛ وبذلك ستتم قسمة v عند حساب المعامل. والحد الثاني لتفكيك $\left(\frac{1}{2v} + 6v^7\right)^8$ هو $\frac{3}{8}$.

74. افترض أن P_n هي العبارة $(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$ لأي عدد صحيح موجب n. بما أن $(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$ أو $a + b$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $(a + b)^k = {}_kC_0\, a^kb^0 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^1 + {}_kC_2\, a^{k-2}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$(a + b)^k = {}_kC_0\, a^kb^0 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^1 + {}_kC_2\, a^{k-2}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k$$

$$(a + b)^k(a + b) = (a + b)({}_kC_0\, a^kb^0 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^1 + {}_kC_2\, a^{k-2}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k)$$

$$(a + b)^k(a + b) = a({}_kC_0\, a^kb^0 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^1 + {}_kC_2\, a^{k-2}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k) + b({}_kC_0\, a^kb^0 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^1 + {}_kC_2\, a^{k-2}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k)$$

$$(a + b)^k(a + b) = {}_kC_0\, a^{k+1}b^0 + {}_kC_1\, a^kb^1 + {}_kC_2\, a^{k-1}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^k + {}_kC_0\, a^kb^1 + {}_kC_1\, a^{k-1}b^2 + \cdots + {}_kC_k\, a^0b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = {}_{k+1}C_0\, a^{k+1}b^0 + {}_{k+1}C_1\, a^k b^1 + {}_{k+1}C_2\, a^{k-1}b^2 + \cdots + {}_{k+1}C_{k+1}\, a^0 b^{k+1}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

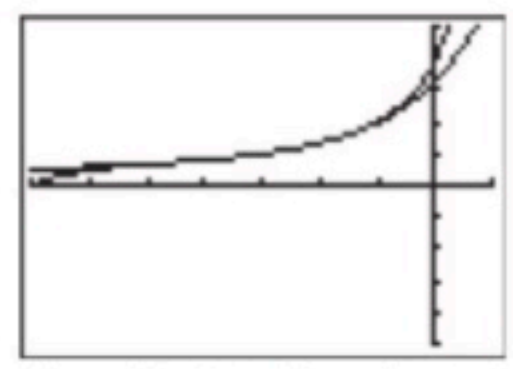
76. افترض أن P_n هي العبارة $10^{2n-1} + 1$ وتقبل القسمة على 11. P_1 صحيحة لأن $10^{2(1)-1} + 1$ يساوي 11. وهو ما يقبل القسمة على 11. وافترض أن P_k صحيحة، حيث k هو عدد صحيح موجب، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $10^{2k-1} + 1 = 11r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r وتشير إلى أن $10^{2(k+1)-1} + 1$ تقبل القسمة على 11.

$$10^{2k-1} + 1 = 11r$$
$$10^{2k-1} = 11r - 1$$
$$100 \cdot 10^{2k-1} = 100(11r - 1)$$
$$10^{2k+1} = 1100r - 100$$
$$10^{2k+1} + 1 = 1100r - 99$$
$$10^{2(k+1)-1} + 1 = 11(100r - 9)$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $100r - 9$ هو عدد صحيح و $11(100r - 9)$ يقبل القسمة على 11. لذلك، $10^{2(k+1)-1}$ يقبل القسمة على 11. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $10^{2n-1} + 1$ يقبل القسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

الدرس 9-6

1.

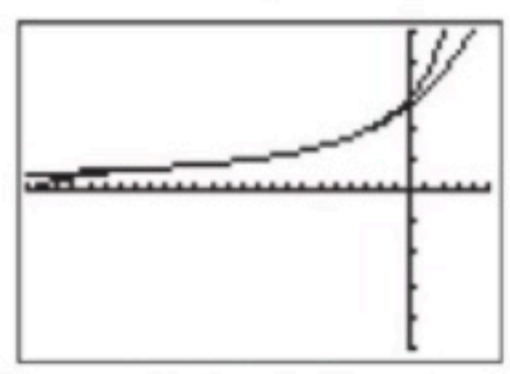


$[-7, 1]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

$$g(x) = \frac{4}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{4}\right)^n$$

عند $-7 < x < 1$

2.

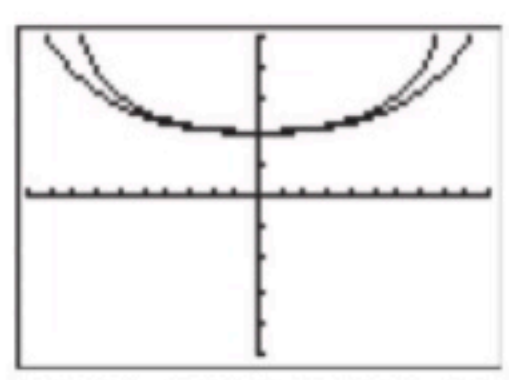


$[-2.5, 0.5]$ scl: 0.1 by $[-5, 5]$ scl: 1

$$g(x) = \frac{3}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x+2}{3}\right)^n$$

عند $-\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$

3.

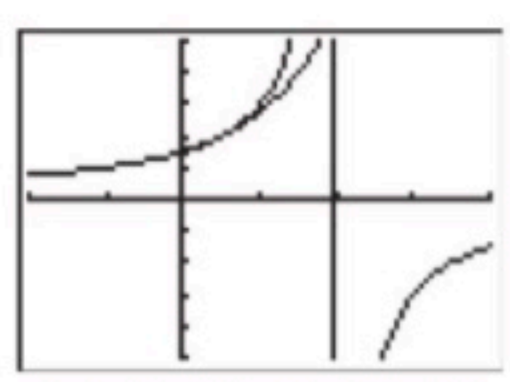


$[-1, 1]$ scl: 0.1 by $[-5, 5]$ scl: 1

$$g(x) = \frac{2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^n$$

عند $-1 < x < 1$

4.

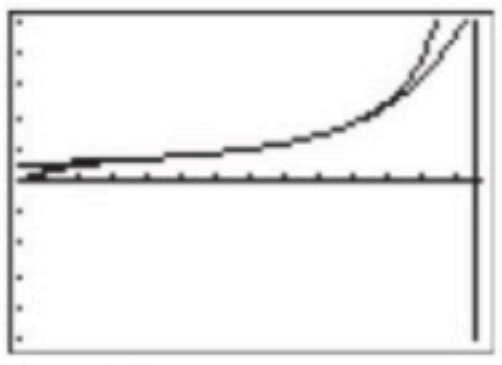


$[-2, 4]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

$$g(x) = \frac{3}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$$

عند $-4 < x < 2$

5.

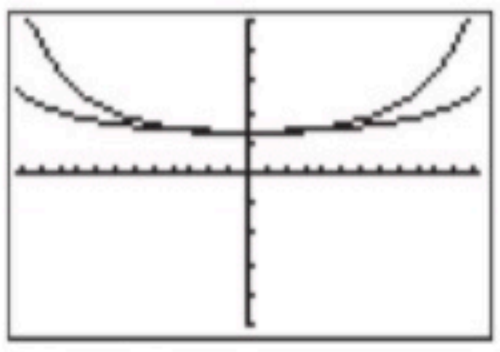


$\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

$$g(x) = \frac{2}{5-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x-3}{2}\right)^n$$

عند $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$

6.

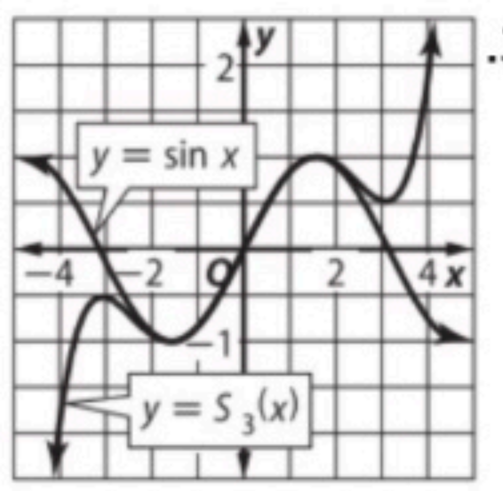


$\left[\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ scl: 0.1 by $[-5, 5]$ scl: 1

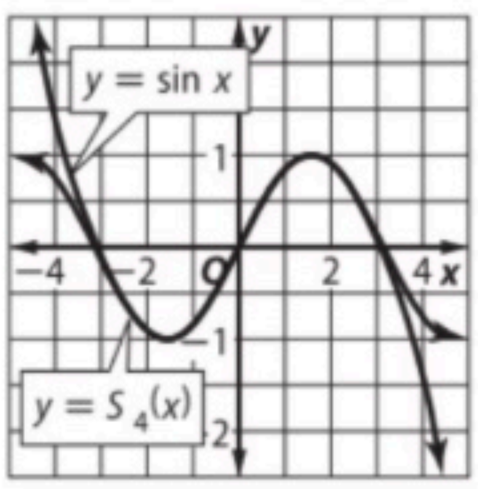
$$g(x) = \frac{4}{3-2x^2}$$
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x^2+1}{4}\right)^n$$

عند $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$

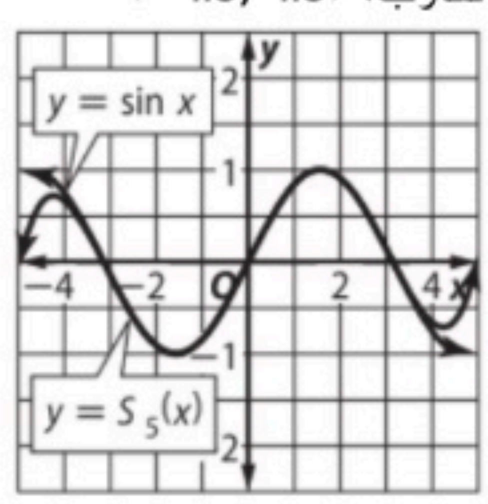
35a.



الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-1.5, 1.5)$

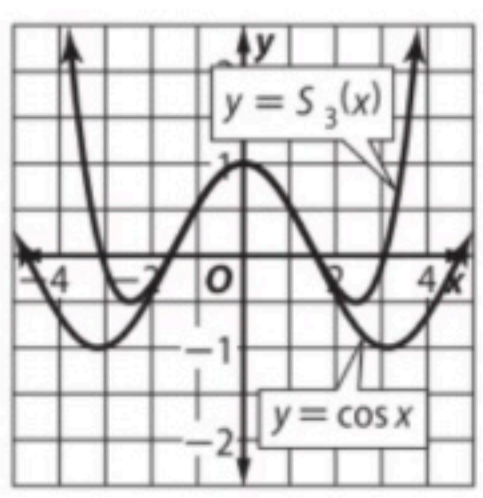


الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-2.5, 2.5)$

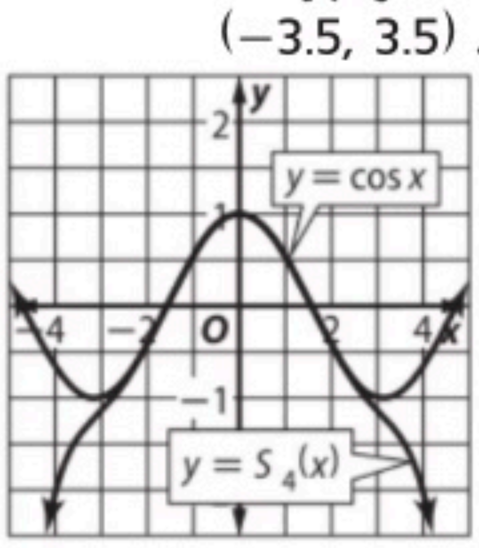


الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-3.5, 3.5)$

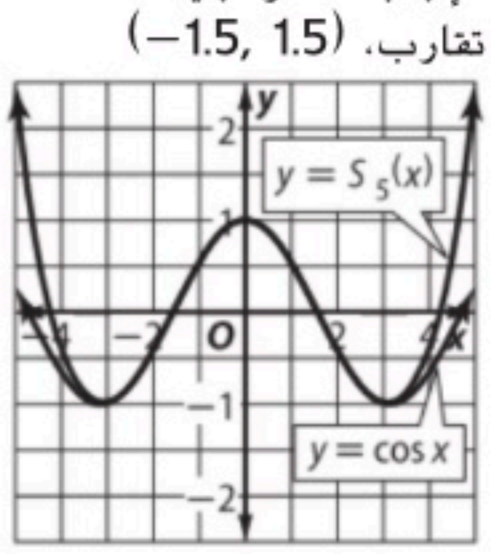
35b.



الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-1.5, 1.5)$



الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-2.5, 2.5)$



الإجابة النموذجية:
تقارب، $(-3, 3)$

35c. الإجابة النموذجية: تتسع فترة التقارب كلما ازداد n. عندما يقترب n من اللانهاية، فإن متسلسلة القوى تساوي الدالة المثلثية التي تمثلها.

43. الحدان: $\frac{|e^{2.1} - (1 + 2.1)|}{e^{2.1}} = 0.62$ أو 62%؛ الحدود الثلاثة:

$$\frac{\left|e^{2.1} - \left(1 + 2.1 + \frac{2.1^2}{2}\right)\right|}{e^{2.1}} \; 0.35$$ أو 35%؛ الحدود الستة:

$$\frac{\left|e^{2.1} - \left(1 + 2.1 + \frac{2.1^2}{2} + \frac{2.1^3}{6} + \frac{2.1^4}{24} + \frac{2.1^5}{120}\right)\right|}{e^{2.1}} = 0.02$$ أو 2%

44. $\sin \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7!} = 0.4794$

$\cos \frac{1}{2} \approx 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} = 0.8776$

$0.4794^2 + 0.8776^2 \approx 1$

تبلغ قيمة التوقع 1 بالضبط لأن $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

45. $\sin 1 \approx 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} = 0.8415$

$\cos 1 \approx 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} - \frac{1^6}{6!} = 0.5403$

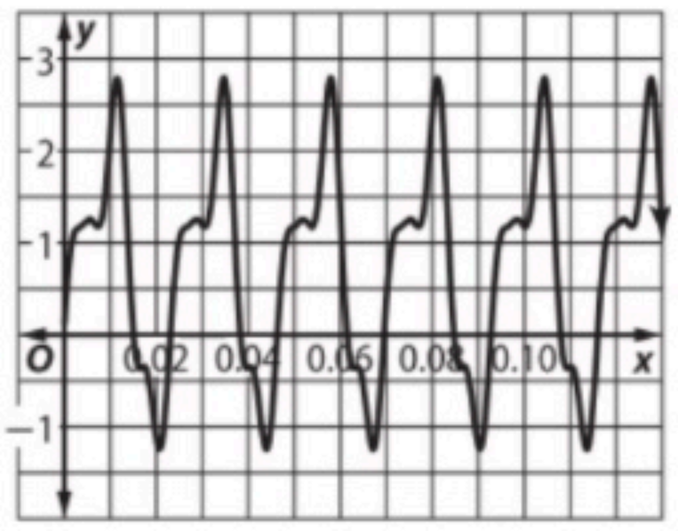
$\tan 1 = \frac{\sin 1}{\cos 1} \approx \frac{0.8415}{0.5403} = 1.5575$

$\sec 1 = \frac{1}{\cos 1} = \frac{1}{0.5403} = 1.8508$

$1.8508^2 - 1.5575^2 \approx 0.9997$

تبلغ قيمة التوقع 1 بالضبط لأن $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.

48.



الإجابة النموذجية: يتذبذب التمثيل البياني بنمط يتكرر حوالي كل 0.0232 ثانية.

49. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -x - \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^5}{5!} - \frac{(-x)^7}{7!} + \cdots\\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots\\ &= -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

50. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= 1 - \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^4}{4!} - \frac{(-x)^6}{6!} + \cdots\\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\\ &= \cos x\end{aligned}$$

53. الإجابة النموذجية: يُمكن إيجاد تمثيل متسلسلة القوى لـ sine باستخدام $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$. بالنسبة لقيم x في الفترة $[-0.1, 0.1]$، فإن قيمة الحد المكعب وكذلك كل ذي درجة أعلى تكون أقل من أو تساوي $\left|\frac{1}{6000}\right|$. ويمثل هذا أقل من عُشر 1 في المئة من القيمة. إذًا، بالنسبة لقيم x في الفترة $[-0.1, 0.1]$، يكون الحد الأول من المتسلسلة x التقريب القريب من $\sin x$.

54.
$$\begin{aligned}2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}}{2i}\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}\right)\\ &= \frac{1}{2i}[(\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta - i \sin \theta)^2]\\ &= \frac{1}{2i}[\cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta)]\\ &= \frac{1}{2i}[\cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta]\\ &= \frac{1}{2i}(4i \sin \theta \cos \theta)\\ &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

56. $e^{ix} - e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)$ صيغة أويلر

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ بسّط.

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ اقسم الطرفين على $2i$.

57. $e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x)$ صيغة أويلر

$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ بسّط.

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ اقسم الطرفين على 2.

58. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

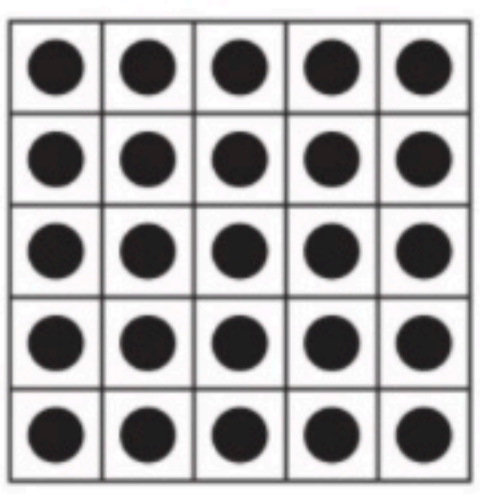
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$

62. افترض أن P_n هي العبارة $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n(3n + 5)}{2}$. بما أن $4 = \frac{1[3(1) + 5]}{2}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض P_k: $4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) = \frac{k(3k + 5)}{2}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) = \frac{k(3k + 5)}{2}$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{k(3k + 5)}{2} + [3(k + 1) + 1]$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{k(3k + 5) + 2[3(k + 1) + 1]}{2}$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{3k^2 + 11k + 8}{2}$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{(k + 1)(3k + 8)}{2}$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{(k + 1)(3k + 3 + 5)}{2}$$
$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3k + 1) + [3(k + 1) + 1] = \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 5]}{2}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n(3n + 5)}{2}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

76a.



76e. افترض أن P_n هي العبارة $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. بما أن $1 = 1^2$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$.
افترض أن $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

دليل الدراسة والمراجعة

29. افترض أن P_n هي العبارة $6^n - 9$ وتقبل القسمة على 3. P_1 هي العبارة $6^1 - 9$ وتقبل القسمة على 3. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $6^1 - 9$ يساوي -3، وتقبل القسمة على 3. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $6^k - 9 = 3r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $6^{k+1} - 9$ يقبل القسمة على 3.

$$6^k - 9 = 3r$$
$$6^k = 3r + 9$$
$$6 \cdot 6^k = 6(3r + 9)$$
$$6^{k+1} = 18r + 54$$
$$6^{k+1} - 9 = 18r + 45$$
$$6^{k+1} - 9 = 3(6r + 15)$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $6r + 15$ هو عدد صحيح، و $3(6r + 15)$ يقبل القسمة على 3. إذًا، $6^{k+1} - 9$ يقبل القسمة على 3. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $6^n - 9$ تقبل القسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

30. افترض أن P_n هي العبارة $7^n - 5$ وتقبل القسمة على 2. P_1 هي العبارة $7^1 - 5$ وتقبل القسمة على 2. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $7^1 - 5$ تساوي 2، وتقبل القسمة على 2. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $7^n - 5 = 2r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $7^{k+1} - 5$ يقبل القسمة على 2.

$$7^k - 5 = 2r$$
$$7^k = 2r + 5$$
$$7 \cdot 7^k = 7(2r + 5)$$
$$7^{k+1} = 14r + 35$$
$$7^{k+1} - 5 = 14r + 30$$
$$7^{k+1} - 5 = 2(7r + 15)$$

بما أن r هو عدد صحيح، فإن $7r + 15$ هو عدد صحيح، و $2(7r + 15)$ يقبل القسمة على 2. إذًا، $7^{k+1} - 5$ يقبل القسمة على 2. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $7^n - 5$ تقبل القسمة على 2 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

31. افترض أن P_n هي العبارة $5^n + 3$ وتقبل القسمة على 4. P_1 هي العبارة $5^1 + 3$ وتقبل القسمة على 4. P_1 هي عبارة صحيحة نظرًا لأن $5^1 + 3$ تساوي 8، وتقبل القسمة على 4. افترض أن P_k صحيحة، حيث k عدد صحيح موجب، ثم أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $5^n + 3 = 4r$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r مما يشير إلى أن $5^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4.

$$5^k + 3 = 4r$$
$$5^k = 4r - 3$$
$$5 \cdot 5^k = 5(4r - 3)$$
$$5^{k+1} = 20r - 15$$
$$5^{k+1} + 3 = 20r - 12$$
$$5^{k+1} + 3 = 4(5r - 3)$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $5r - 3$ عدد صحيح، و $4(5r - 3)$ يقبل القسمة على 4. إذًا، $5^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

32. افترض أن P_n هي العبارة $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$. بما أن $2(1)[2(1)+1] = \frac{1 \cdot [(1+1)(4 \cdot 1 + 5)]}{3}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$ صحيحة بالنسبة للعدد الصحيح k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) = \frac{k(k+1)(4k+5)}{3}$$
$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) + 2(k+1)[2(k+1)+1] = \frac{k(k+1)(4k+5)}{3} + 2(k+1)[2(k+1)+1]$$
$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) + 2(k+1)[2(k+1)+1] = \frac{k(k+1)(4k+5) + 6(k+1)[2(k+1)+1]}{3}$$
$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) + 2(k+1)[2(k+1)+1] = \frac{4k^3 + 21k^2 + 35k + 18}{3}$$
$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) + 2(k+1)[2(k+1)+1] = \frac{(k+1)(k+2)(4k+9)}{3}$$
$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2k(2k+1) + 2(k+1)[2(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][4(k+1)+5]}{3}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

33. افترض أن P_n هي العبارة $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. بما أن $\frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$ هي عبارة صحيحة، فإن P_n صحيحة عند $n = 1$. افترض أن $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ صحيحة بالنسبة إلى العدد الصحيح الموجب k. أثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}=\frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$

العبارة الأخيرة تنص بالضبط على أن P_{k+1}. إذًا P_{k+1} صحيحة. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1}. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. بمعنى أنه باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

34. افترض أن P_n هي العبارة $4n \geq 4^n$. بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. P_1 صحيحة، لأن $4(1) \geq 4^1$ هي متباينة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $4k \geq 4^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $4^k \geq 4k$ يشير إلى أن $4^{k+1} \geq 4(k+1)$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$k \geq 1$	$4^k \geq 4k$
$12k \geq 12$	$4\cdot4^k \geq 4\cdot4k$
إذا كان $12k \geq 12$ و $12 \geq 4$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $12k \geq 4$.	$4^{k+1} \geq 16k$
$12k \geq 4$	
$4k + 12k \geq 4k + 4$	
$16k \geq 4(k+1)$	

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $4^{k+1} \geq 16k$ و $16k \geq 4(k+1)$، فإن $4^{k+1} \geq 4(k+1)$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 1$، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن $4n \geq 4^n$ بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

35. افترض أن P_n هي العبارة $5n < 6^n$. P_1 صحيحة، نظرًا لأن $5(1) < 6^1$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $5k < 6^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن $5k < 6^k$ يشير إلى أن $5(k+1) < 6^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$k \geq 1$	$5k < 6^k$
$1 \leq k$	$6\cdot5k < 6\cdot6^k$
$25\cdot1 \leq 25\cdot k$	$30k < 6^{k+1}$
$25 \leq 25k$	
إذا كان $5 \leq 25$ و $25 \leq 25k$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $5 \leq 25k$.	
$5 \leq 25k$	
$5k + 5 \leq 25k + 5k$	
$5(k+1) \leq 30k$	

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $5(k+1) \leq 30k$ و $30k < 6^{k+1}$، فإن $5(k+1) < 6^{k+1}$. بما أن P_n صحيحة عند k $1 \geq$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 1$، فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$، وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، $5n < 6^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة n.

تدريب على الاختبار

11c. تقاربية؛ الإجابة النموذجية: نعم؛ كلما ازداد n، سيقترب قياس كل زاوية داخلية من $180°$. وبذلك يقترب قياس كل زاوية خارجية من 0.

12. افترض أن P_n هي العبارة $n! > 5^n$. P_{12} صحيحة، نظرًا لأن $12! > 5^{12}$ هي متباينة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $k! > 5^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا عند $k \geq 12$، وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $k! > 5^k$ يشير إلى أن $(k+1)! \geq 5^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$k \geq 12$	$k! > 5^k$
$k + 1 \geq 13$	$(k+1)\cdot k! > (k+1)\cdot5^k$
إذا كان $k + 1 \geq 13$ و $13 \geq 5$، فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k + 1 \geq 5$.	$(k+1)! > (k+1)\cdot5^k$
$k + 1 \geq 5$	
$(k+1)\cdot5^k \geq 5\cdot5^k$	
$(k+1)\cdot5^k \geq 5^{k+1}$	

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $(k+1)! > (k+1) \cdot 5^k$ و $(k+1) \cdot 5^k \geq 5^{k+1}$. فإن $(k+1)! > 5^{k+1}$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 12$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 12$، و P_n صحيحة عند $n = 13$، و $n = 14$. وما إلى ذلك، بمعنى أنه وفق المبدأ الممتد للاستنتاج في الرياضيات، نجد أن $n! > 5^n$ بالنسبة لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 12$.

13. افترض أن P_n هي العبارة $4n < 7^n$. P_1 صحيحة، نظرًا لأن $4(1) < 7^1$ هي عبارة صحيحة. وافترض أن P_k صحيحة، بمعنى أن $4k < 7^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 1$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $4k < 7^k$ يشير إلى أن $4(k+1) < 7^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$4k < 7^k$$
$$7 \cdot 4k < 7 \cdot 7^k$$
$$28k < 7^{k+1}$$

$$k \geq 1$$

إذا كان $k \geq 1$ و $\frac{2}{13} \geq 1$. فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k \geq \frac{2}{13}$.

$$k \geq \frac{2}{13}$$
$$\frac{2}{13} \leq k$$
$$4 \leq 26k$$
$$4k + 4 \leq 4k + 26k$$
$$4(k+1) \leq 28k$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $28k \leq 4(k+1)$ و $28k < 7^{k+1}$. فإن $4(k+1) < 7^{k+1}$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 1$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 1$. فإن P_n صحيحة عند $n = 2$، و $n = 3$. وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $4n < 7^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة n.

14. افترض أن P_n هي العبارة $3^n > n + 8$. P_3 صحيحة، حيث $3^3 > 3 + 8$ هي متباينة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث $3^k > k + 8$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 3$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3^k > k + 8$ يشير إلى أن $3^{k+1} > (k+1) + 8$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$3^k > k + 8$$
$$3 \cdot 3^k > 3(k+8)$$
$$3^{k+1} > 3k + 24$$

$$k \geq 3$$

إذا كان $k \geq 3$ و $-7.5 \geq 3$. فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k \geq -7.5$.

$$k \geq -7.5$$
$$2k \geq -15$$
$$2k + 16 \geq 1$$
$$3k + 16 \geq k + 1$$
$$3k + 24 \geq (k+1) + 8$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $3^{k+1} > 3k + 24$ و $3k + 24 \geq (k+1) + 8$. فإن $3^{k+1} > (k+1) + 8$. وبما أن P_n صحيحة عند $n = 3$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 3$. فإن P_n صحيحة عند $n = 4$، و $n = 5$. وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $3^n > n + 8$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة في $n \geq 3$.

15. افترض أن P_n هي العبارة $3n < \left(\frac{5}{2}\right)^n$. P_2 صحيحة، حيث $3(2) < \left(\frac{5}{2}\right)^2$ هي عبارة صحيحة. افترض أن P_k صحيحة، حيث $3k < \left(\frac{5}{2}\right)^k$ إذا كان k عددًا صحيحًا موجبًا $k \geq 2$. وأثبت أن P_{k+1} يجب أن تكون صحيحة. بمعنى أن تثبت أن $3k < \left(\frac{5}{2}\right)^k$ يشير إلى أن $3(k+1) < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$. استخدم الجزأين بفرضية الاستقراء.

$$3k < \left(\frac{5}{2}\right)^k$$
$$\frac{5}{2} \cdot 3k < \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^k$$
$$\frac{15}{2}k < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$$

$$k \geq 2$$

إذا كان $k \geq 2$ و $\frac{2}{3} \geq 2$. فإنه وفق خاصية التعدي للمتباينة، نجد أن $k \geq \frac{2}{3}$.

$$k \geq \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} \leq k$$
$$3 \leq \frac{9}{2}k$$
$$3k + 3 \leq 3k + \frac{9}{2}k$$
$$3(k+1) \leq \frac{15}{2}k$$

وفق خاصية التعدي للمتباينة، إذا كان $\frac{15}{2}k \leq 3(k+1)$ و $\frac{15}{2}k < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$. فإن $3(k+1) < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$. بما أن P_n صحيحة عند $n = 2$ ويشير P_k إلى أن P_{k+1} عند $k \geq 2$. فإن P_n صحيحة عند $n = 3$، و $n = 4$. وما إلى ذلك. وفق المبدأ الممتد للاستدلال في الرياضيات، نجد أن $3n < \left(\frac{5}{2}\right)^n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة في $n \geq 2$.