# ستاتيكا

## التحليل الإنشائي للكمرات البسيطة

التحليل الإنشائي للكمرات البسيطة

٥

# الفصل الخامـس : التحليل الإنـشـائي للكمرات البسيطة

**الجـــــدارة:**

معرفة أنواع الكمرات المستعملة في المباني وتصنيـفهـا ، وكيفيّة التحليل الإنشائي للكمرات لإيجاد ردود أفعال الركائز والقوى الداخليّة (القوى المحوريّة ، قوى القص وعزوم الإنحناء) ورسم تخطيطاتهـا.

**الأهـــــداف:**

عندما تكتمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة على:

- معرفة أنواع الكمرات المستعملة في المباني وتصنيفهـا
- تعريفات القوى الدّاخليّة (القوى المحوريّة، قوى القص وعزوم الإنحناء)
- التحليل الإنشائي للكمرات وإيجاد ردود أفعال ركائزها والقوى الداخليّة عند مقاطع محدّدة ومختلفة
- تخطيطات القوى المحوريّة وقوى القصّ وعزوم الإنحناء للكمرات المحدّدة ستاتيكيّا
- العلاقات بين شدّة التحميل وقوّة القص وعزم الإنحناء

مستوى الأداء المطلوب : أن يصل المتدرّب إلى إتقان هذه الجدارة بنسبة ١٠٠٪.

الوقت المتوقع للفصل: ١٤ ساعة

**الوسائل الـمساعدة :**

- آلة حاسبة
- مسطرة وأقلام ملوّنة وطقم مثلّثـات

**متطلبات الجـــدارة:**

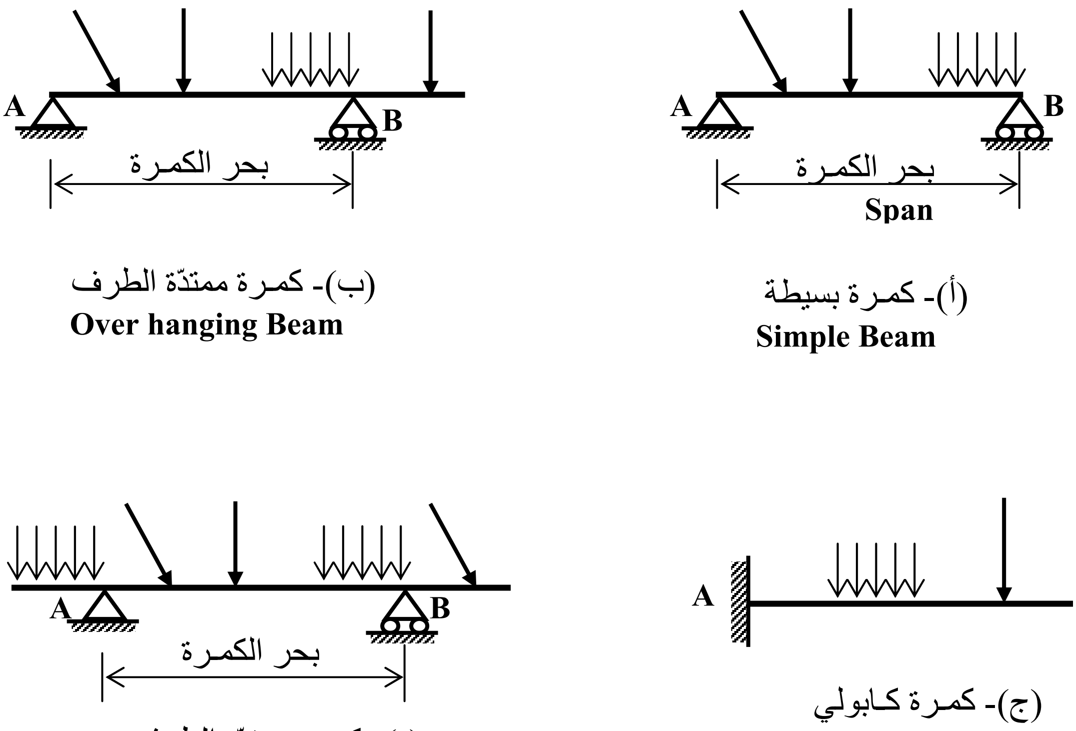
معرفة ما سبق دراسته في الرياضيات الأساسيّة والتخصصية وإتـقـان ما سبق دراسته في جميع الفصول السابقة من هذه المذكّرة : العمليات على القوى، العزوم، أنواع الركائز، معادلات الإتزان وحساب مركّبات ردود الأفعال.

## ٥- ١- تـصنيـف الكمـرات:

تعتبر الكمرة (beam) أو العارضة، كما تسمّى أحيانا، من أكثر العناصر الإنشائيّة شيوعا. وهي تكون في الغالب مستقيمة وذات مقطع ثابت. وتتعرّض الكمرة للإنحناء نتيجة لأحمال عموديّة (رأسيّة)، في غالب الأحيان، أو مائلة بالنسبة لمحورها الطولي.

ويسمّى الجزء الواقع بين محوري ركيزتين متتاليتين من الكمرة بحر (span) الكمرة.

يمكن تصنيف الكمرات حسب نوع الدعامات (أو الركائز) التي ترتكز عليها. ويوضّح الشكلين (٥- ١) و(٥- ٢) عدّة نماذج من الكمرات، وقد وقع تصنيفها إلى محدّدة (أو مقرّرة) وغير مقرّرة ستاتيكيّا. وسوف يتم التركيز في هذا الفصل على الكمرات المقرّرة ستاتيكيّا فقط.



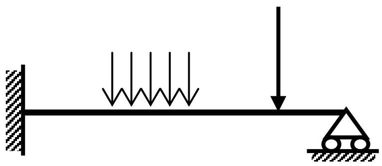

(أ)- كمرة بسيطة
**Simple Beam**

(ب)- كمرة ممتدّة الطرف
**Over hanging Beam**

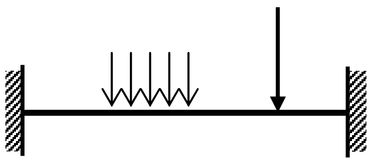
(ج)- كمرة كابولي
**cantilever Beam**

(د)- كمرة ممتدّة الطرفين

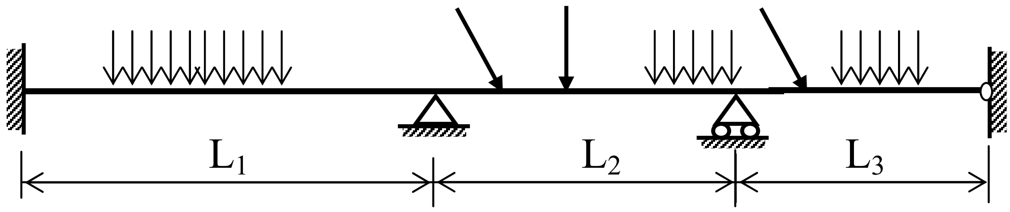
**شكل( ٥- ١) : كمرات محدّدة ستاتيكيّا**
**Statically determinate beams**



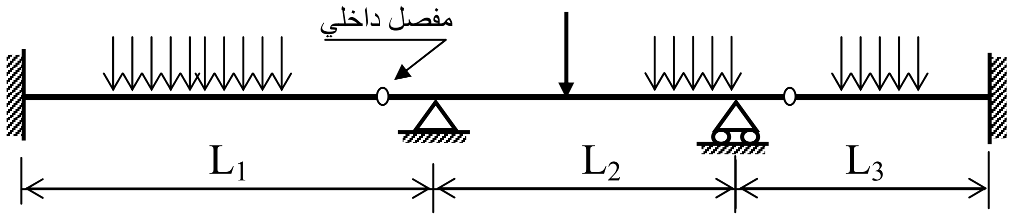
(أ)- كمـرة كـابولي طرفها مسنود
**End Supported Cantilever Beam**



(أ)- كمـرة مثبّتة الطرفين
**Built-in Beam**




(د)- كمـرة مســتــمرّة
**Continuous Beam**




(د)- كمـرة مركّـــبــة
**Compound Beam**

**شــكل( ٥- ٢ ): كمرات غير محدّدة ستاتيكيّا**
**Statically indeterminate beams**

## ٥ - ٢- القوى الدّاخـليّـة : القوّة المحوريّة وقوّة القص وعزم الإنحناء

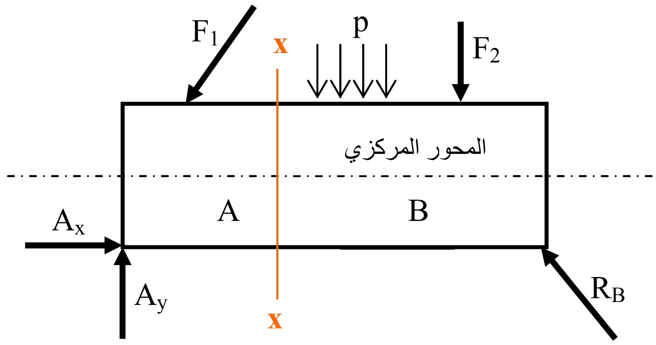
### ٥- ٢- ١- مقدمـة :

الغرض الأساسي من عمليّة التحليل الإنشائي هو التحقّق من مقدرة المنشأة أو العنصر الإنشائي على تحمّل كافّة القوى التي قد يتعرّض لها طوال عمره الإفتراضي دون أن يتصدّع أو ينهار. ويتمّ ذلك بمقارنة أكبر قيم للقوى الداخليّة التي تستحدث في العنصر الإنشائي نتيجة الأحمال الخارجيّة المؤثّرة عليه من ناحية، ومقاومة العنصر من ناحية أخرى.

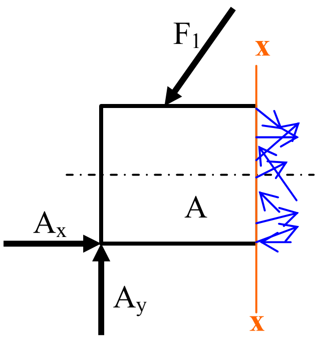
و تتوقّف مقاومة المنشأة على الخواص الهندسيّة لمقاطع العناصر الإنشائيّة سيتم التعرّض لها في الفصل القادم) المكوّنة له ونوع مادّة الإنشاء.

وسيخصّص هذا الفصل لدراسة القوى الداخليّة التي تنتج عن الأحمال الخارجيّة. وستقتصر الدراسة في هذه المرحلة على العناصر الطوليّة المستقيمة (مثل الكمرات) والمستوية التي تكون محاورها الواصلة بين مراكز المقاطع المتتالية خطا مستقيما، واقعا في مستوى واحد مع الأحمال.

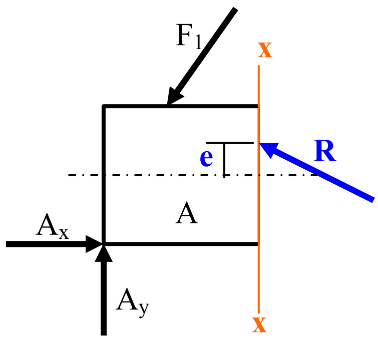
بالإشارة إلى شكل (٥ – ٣- أ ) ، الذي يبيّن عنصرا إنشائيّا في حالة إتّزان تحت تأثير مجموعة الأحمال وردود أفعال الركائز. يفصل المقطع x-x العنصر إلى جزأين منفصلين تمام الإنفصال A و B. وبما أن العنصر ككل في حالة إتزان، فطبقا لمبدأ الجسم الحر (أو المقتطع) فإن كل جزء منه في حالة إتزان. فعلى سبيل المثال يجب أن يكون الجزء A في حالة إتزان تحت القوى المؤثّرة علي هذا الجزء وهي $F_1$ و $A_x$ و $A_y$ ومجموعة قوى تمثّل تأثير الجزء B على الجزء A كما هو مبيّن في الشكل (٥- ٣- ب). ويمكن إستبدال مجموعة تلك القوي بمحصّلتها R كما في الشكل (٥- ٣- ج).



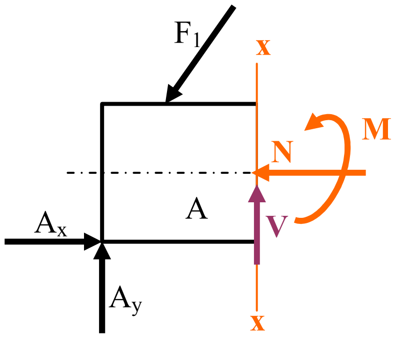

شكل( ٥- ٣- أ )



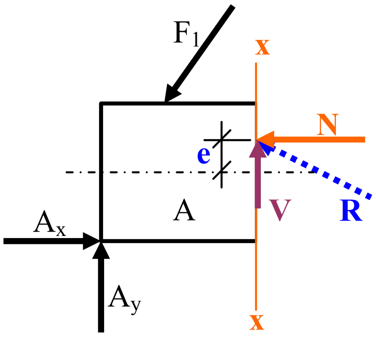

شكل( ٥- ٣-ب )




شكل( ٥- ٣-ج )




شـكـل( ٥- ٣- هـ )




شـكـل( ٥- ٣- د )

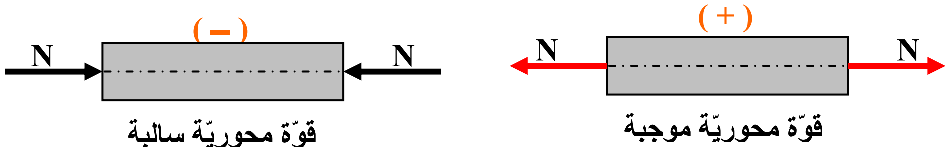
شـكـل(٥- ٣)

كما يمكن تحليل القوّة R إلى مركّبة مماسّة (tangential) للمقطع V وأخرى لامركزيّة (eccentric) عموديّة على المقطع N كما في الشكل (٥- ٣- د). وحسب مبدأ انتقاليّة القوّة تكافئ هذه الأخيرة قوّة مركزيّة (centric) محوريّة بنفس مقدار واتجاه N وعزم M مقداره N.e. وبالتالي يتم الحصول على القوى الداخليّة عند المقطع x-x كما هي مبيّنة على الشكل (٥- ٣- هـ) وهي: قوّة محوريّة (عموديّة للمقطع) N ، و قوّة مماسّة للمقطع V وعزم M.

## ٥- ٢- ٢– تعريف القوى الدّاخليّة:

١- القوّة المحوريّة N ( Normal/axial force ) : وهي القوّة التي تؤثّر عموديّا على المقطع، أو في اتجاه المحور الطولي للعنصر الإنشائي. وتعرّف القوّة المحوريّة (أو العموديّة) عند مقطع محدّد بأنّها مجموع المركّبات الأفقيّة لجميع القوى الخارجيّة، بما فيها ردود الأفعال، التي تقع إما عن يمين المقطع فقط أو عن يساره فقط.

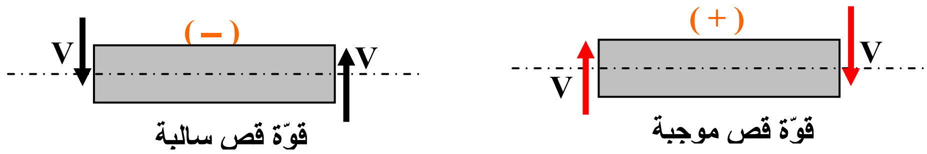
وتعتبر القوّة المحوريّة موجبة إذا كانت شادّة للمقطع وتعتبر سالبة إذا كانت ضاغطة عليه كما في الشكل (٥- ٤).




شـكـل( ٥- ٤ )

٢- قوّة القـص V ( Shear force ) : وهي القوّة التي تمسّ المقطع، أو تؤثّر عموديّا على المحور الطولي للعنصر الإنشائي. وتعرّف قوّة القـص عند مقطع محدّد بأنّها مجموع المركّبات الرأسيّة لجميع القوى الخارجيّة، بما فيها ردود الأفعال، التي تقع إما عن يمين المقطع فقط أو عن يساره فقط.

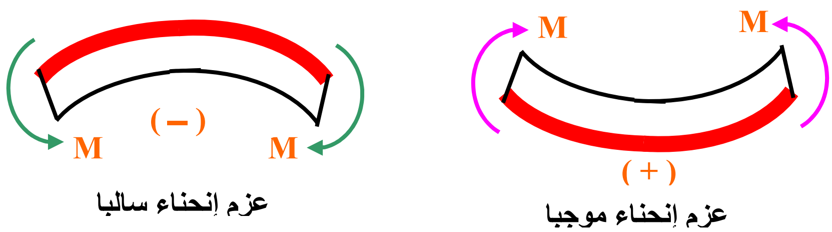
وتعتبر قوّة الـقـص موجبة إذا كانت إلى أعلى عن يسار المقطع أو إلى أسفل عن يمين المقطع. وتعتبر سالبة عكس ذلك كما في الشكل (٥- ٥).




**شـكـل ( ٥ـ ٥ )**

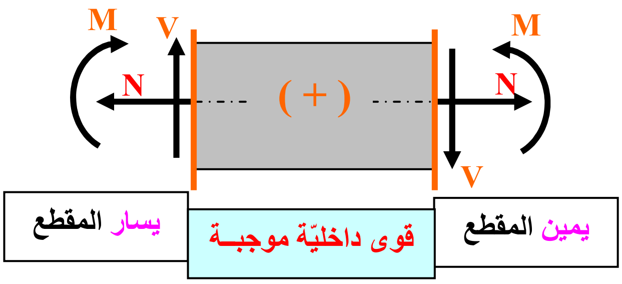
٣- عـزم الإنحـنـاء ( bending Moment ) : عزم الإنحناء عند مقطع من المقاطع هو مجموع عزوم جميع القوى الخارجيّة، بما فيها ردود الأفعال، التي تقع إما عن يمين المقطع فقط أو عن يساره فقط، وذلك حول مركز المقطع.

ويعتبر عزم الإنحناء الذي يتسبّب في إحداث شدّ في الألياف السفلى أو ضغطا في الألياف العليا موجبا، ويعتبر سالبا عكس ذلك كما في الشكل ( ٥- ٦).




**شـكـل( ٥ـ ٦ )**

يـلخّص الشكل التالي رقم (٥- ٧) إصطلاحات الإشـارات (sign conventions) للقوّة المحوريّة N وقوّة القص V وعزم الإنحناء M .



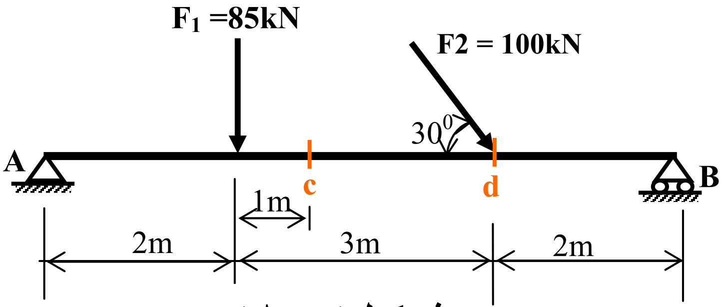

شـكـل ( ٥ – ٧ )

### ٥- ٢- ٣- طـريقة حساب القوى الداخليّة عند مقطع محدّد:

إن حساب القوّة المحوريّة أو قوّة القص أو عزم الإنحناء عند مقطع محدّد هو تطبيق مباشر للتعريفات التي وردت في الفقرة السابقة. ويجب ملاحظة أنّه عند حساب هذه الكمّيات تؤخذ جميع القوى، بما فيها ردود الأفعال، الواقعة على أي من جانبي المقطع المعيّن. ويفضّل جانب على آخر حسب السهولة النسبيّة للعمليات الحسابيّة المتعلّقة بالجانب المختار. ويوضّح المثال التالي نموذجا لهذه الحسابات.

**مـثـال ٥- ١:**

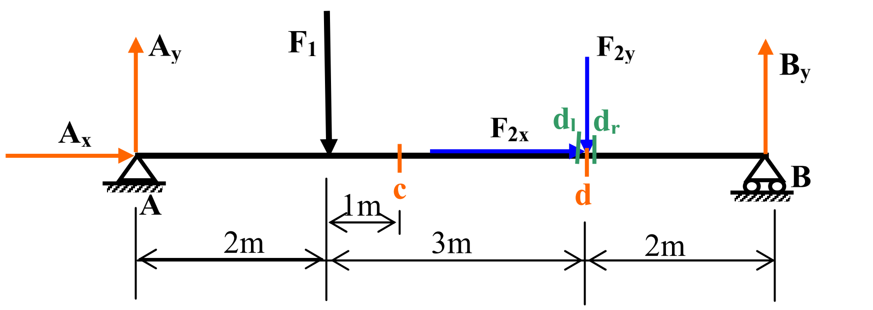
أحسب القوّة المحوريّة و قوّة القص و عزم الإنحناء عند كل من المقطعين c و d في الكمرة المبيّنة في الشكل ( ٥- ٨).




**شـكـل( ٥- ٨ )**

**الحل:**

الخطوة الأولى هي حساب مركّبات ردود الفعل المجهولة. ويمكن ذلك بتطبيق الطرق التي سبق شرحها بالفصل الرابع. ويبيّن شكل (٥- ٩) مركّبات ردود الأفعال والأحمال الخارجيّة بعد تحليل الحمل المائل في اتجاه محور الكمرة وعموديّا عليه.



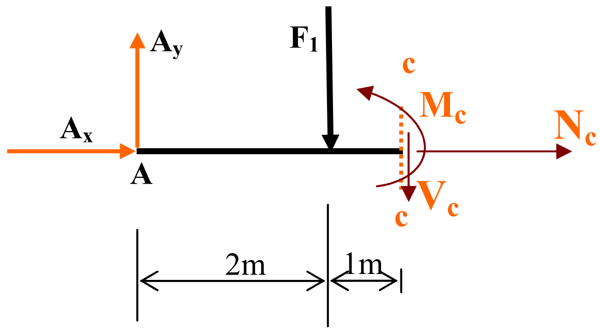

$F_{2x}$ = 86.6 kN    $F_{2y}$ = 50 kN    Ax = -86.6 kN    Ay =75 kN    By = 60 kN

**شـكـل( ٥- ٩ )**

أ - المقطع c:

كما سبق ذكره يمكن حساب القوى الداخليّة باعتبار القوى الواقعة إما عن يمين المقطع أو عن يساره.

- باعتبار القوى الواقعة عن يسار المقطع، كما في الشكل (٥- ١٠):

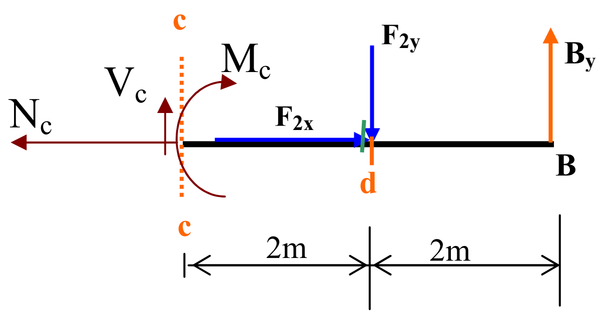



Ax = -86.6 kN   Ay =75 kN   $F_1$ = 60 kN

**شكل (٥- ١٠ )**

$$N_c = - A_x = -(-86.6) \text{ kN} \quad \text{then} \quad N_c = 86.6 \text{ kN}$$
$$V_c = A_y - F_1 = 75 - 85 = -10 \text{ kN}$$
$$M_c = A_y \times 3 - 1 \times F_1 = 225 - 85 = 140 \text{ kN.m}$$

- فيما يلي سيعاد حساب القوى الدّاخليّة باعتبار القوى الواقعة عن يمين المقطع، كما في الشكل (٥- ١١):




$F_{2x}$ = 86.6 kN   $F_{2y}$ = 50kN   By = 60 kN

**شكل (٥- ١١ )**

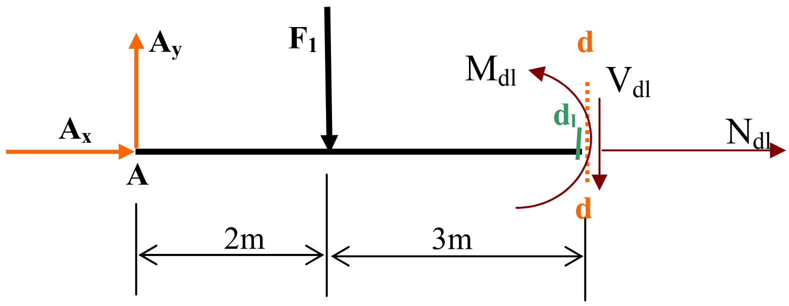
$$N_c = F_{2x} = 86.6 \text{ kN}$$
$$V_c = -B_y + F_{2y} = -60 + 50 = -10 \text{ kN}$$
$$M_c = B_y \times 4 - 2 \times F_{2y} = 240 - 100 = 140 \text{ kN.m}$$

حيث، يلاحظ أن هذه هي نفس القيم التي سبق حسابها باعتبار القوى الواقعة عن يسار المقطع.

ب- المـقـطـع d:

يختلف هذا المقطع عن المقطع c كونه يتعرّض لحمل مركّز في اتّجاه المحور ($F_{2x}$) وحمل آخر رأسي ($F_{2y}$). وفي مثل هذه الحالة، تحسب القوّة المحوريّة وقوّة القص عند مقطعين أحدهما عن يسار المقطع مباشرة، والآخر عن يمينه مباشرة.

ـ مقطع عن يسار(left) المقطع d مباشرة، أي أن ($F_{2x}$) و($F_{2y}$) يؤثّران عن يمين المقطع. وبالتالي تكون القوى الواقعة عن يسار المقطع حسب الشكل (٥- ١٢):

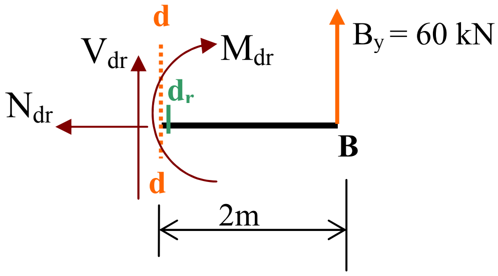



Ax = -86.6 kN   Ay =75 kN   $F_1$ = 85 kN

**شـكـل( ٥- ١٢ )**

$$N_{dl} = -A_x = -(-86.6) \text{ kN} = 86.6 \text{ kN}$$
$$V_{dl} = A_y - F_1 = 75 - 85 = -10 \text{ kN}$$
$$M_{dl} = A_y \times 5 - 3 \times F_1 = 375 - 255 = 120 \text{ kN.m}$$

ـ مقطع عن يمين (right) المقطع d مباشرة، أي أن ($F_{2x}$) و($F_{2y}$) يؤثّران عن يسار المقطع. حيث من الواضح أنه من الأسهل اعتبار القوى الواقعة على الجانب الأيسر من المقطع، وهي قوّة واحدة ($B_y$) في هذه الحالة، كما في الشكل (٥- ١٣):




شـكـل (٥ـ ١٣

$$N_{dr} = 0$$
$$V_{dr} = -B_y = -60 \text{ kN}$$
$$M_{dr} = B_y \times 2 = 120 \text{ kN.m}$$

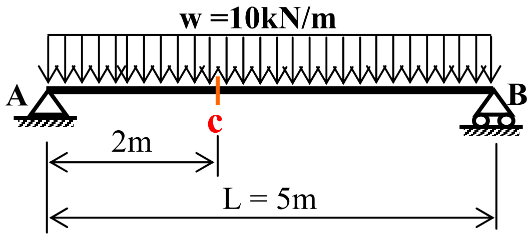
يوضّح هذا المثال أنه عند تأثير قوّة مركّزة أفقيّة على المحور يحدث تغيّر مفاجئ في القوّة المحوريّة فيكون لها قيمة عند مقطع عن يمين نقطة تأثير القوّة المركّزة مباشرة، وقيمة مختلفة عند مقطع عن يسار نقطة تأثير القوّة المركّزة مباشرة.

بالمثل، عند تأثير قوّة مركّزة رأسيّة على المحور يحدث تغيّر مفاجئ في قوّة القص فيكون لها قيمة عند مقطع عن يمين نقطة تأثير القوّة المركّزة مباشرة، وقيمة مختلفة عند مقطع عن يسار نقطة تأثير القوّة المركّزة مباشرة.

أما بالنسبة لعزم الإنحناء فلا يحدث فيه تغيّر مفاجئ وتظلّ قيمته عند نقطة تأثير قوّة مركّزة كما هي بالنسبة للمقطعين الواقعين مباشرة عن يمين ويسار نقطة تأثير القوّة المركّزة.

**مـثــال ٥- ٢:**

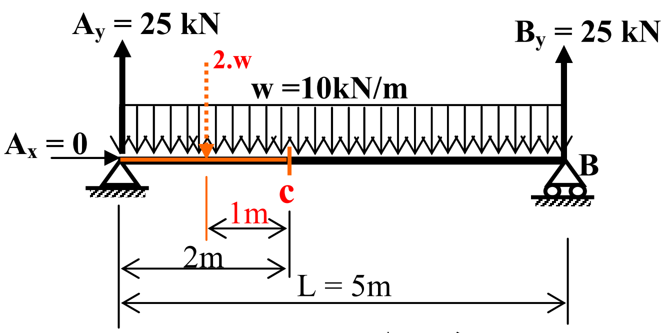
احسب القوّة المحوريّة و قوّة القص و عزم الإنحناء عند المقطع c في الكمرة المبيّنة في الشكل ( ٥- ١٤ ).




**شـكـل ( ٥- ١٤ )**

**الـحـل:**

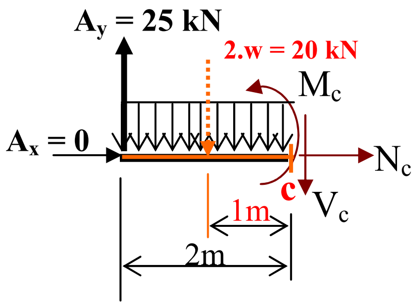
الخطوة الأولى هي حساب مركّبات ردود الأفعال المجهولة. ويمكن ذلك بتطبيق الطرق التي سبق شرحها بالفصل الرابع، ويبيّن شكل ( ٥- ١٥ ) مركّبات ردود الأفعال.




**شـكـل ( 5- ١٥ )**

ملاحظة هامة: عند حساب القوى الدّاخليّة، لا يسمح باستبدال القوى الموزّعة بقوى مركّزة مكافئة.

ـ القوى الدّاخليّة عند المقطع c باعتبار القوى الواقعة عن يسار المقطع حسب الشكل (٥- ١٦):




شـكـل ( 5- ١٦ )

$$N_c = A_x = 0$$
$$V_c = A_y - w.2 = 25 - 20 = 5 \text{ kN}$$
$$M_c = A_y \times 2 - w \times 2 \times 1 = 50 - 20 = 30 \text{ kN.m}$$

### ٥ – ٢- ٤- تـمثيل القـوى الدّاخـليّة:

تخطيط أو تمثيل القوى الدّاخليّة يُعتبر فيها محور العنصر الإنشائي خط قاعدة (base line)، وتمثّل الإحداثيات العموديّة على هذا الـخـط قيم القوى الداخليّة عند المقاطع المتتالية في العنصر الإنشائي.

وتوقّع الإحداثيات التي تمثّل قوى محوريّة أو قوى قص موجبة فوق خط القاعدة، بينما توقّع تلك التي تمثّل قوى محوريّة أو قوى قـص سالبة أسفل خط القاعدة.

وتُوقّع الإحداثيات التي تمثّل عزم إنحناء موجبا أسفل خط القاعدة، بينما توقّع تلك التي تمثّل عزم إنحناء سالبا فوق خط القاعدة.وعند إتباع هذا الإصطلاح، يقال أن تخطيط عزم الإنحناء مرسوم على جانب الشدّ (tension side). ويعتبر تحديد جانب الشدّ أمرا بالغ الأهميّة في تصميم المنشآت الخرسانيّة المسلّحة.

وبالرغم من أنه يكفي تمثيل الرسومات مع بيان القيم العدديّة للإحداثيات الرئيسيّة فإنه من المستحسن رسم هذه التخطيطات بمقياس رسم مناسب. ويساعد ذلك على اكتشاف الأخطاء الحسابيّة التي قد يتضمّنها الحل.

وللإختصار سيشار إلى تخطيط القوّة المحوريّة بالأحرف ت.ق.م أو NFD أو N(x).

وسيشار إلى تخـطيط قــوّة القـص بالأحرف ت.ق.ق أو SFD أو V(x).

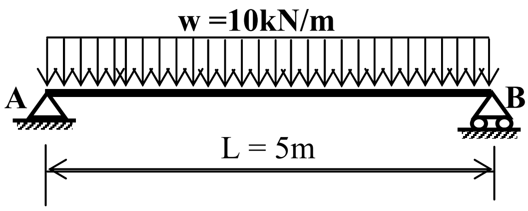
وسيشار إلى تخـطيط عـزم الإنحناء بالأحرف ت.ع.إ أو BMD أو M(x).

لرسم هذه التخطيطات تحسب قيم القوّة المحوريّة وقوّة القص وعزم الإنحناء عند عدد من المقاطع، ويتمّ ذلك بالطرق التي سبق شرحها في الفقرة السابقة. كما يمكن كتابة تعبيرات جبريّة، أو دالاّت (algebraic expressions) لكي تعطي قيم القوى الداخليّة عند المقاطع المختلفة على طول الكمرة. وتتحدّد تمثيل القوى الداخليّة من توقيع القيم المحسوبة كإحداثيات عموديّة على خط قاعدة بطول محور الكمرة.

وفيما يلي سيقدّم عدد من الأمثلة لتخطيط وتمثيل القوى الدّاخليّة.

**مثـــال ٥- ٣:**

ارسم تخطيط القوّة المحوريّة وتخطيط قوّة القص وتخطيط عزم الإنحناء للكمرة البسيطة الواقعة تحت تأثير حمل موزّع بانتظام كما هو مبيّن في الشكل( ٥- ١٧).

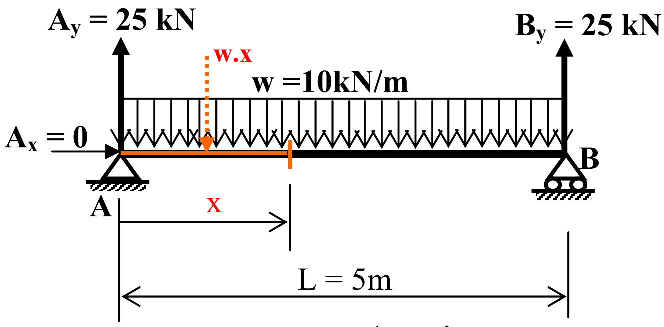



**شــكــل ( ٥- ١٧ )**

**الـحـل:**

يبيّن الشكل ( ٥- ١٨ ) مركّبات ردود الأفعال والأحمال الخارجيّة، كما جرى توضيحه وحسابه في الأجزاء السابقة:

$$A_y = B_y = w \times L/2 = 25\ \text{kN}$$
$$A_x = 0$$




**شـكـل (٥- ١٨)**

تتكوّن هذه الكمرة البسيطة، وهي حالة شائعة، من منطقة واحدة أو مـجال واحد ( جزء لا تتغيّر فيه الأحمال). لذلك تحلّل الكمرة باعتبار مقطع واحد متحرّك على كامل طول الكمرة موضعه x من الطرف الأيسر( الركيزة A ): $0 < x < L = 5m$

باعتبار القوى الخارجيّة الواقعة يسار المقطع، وبتطبيق تعريفات القوى الداخليّة أعلاه:

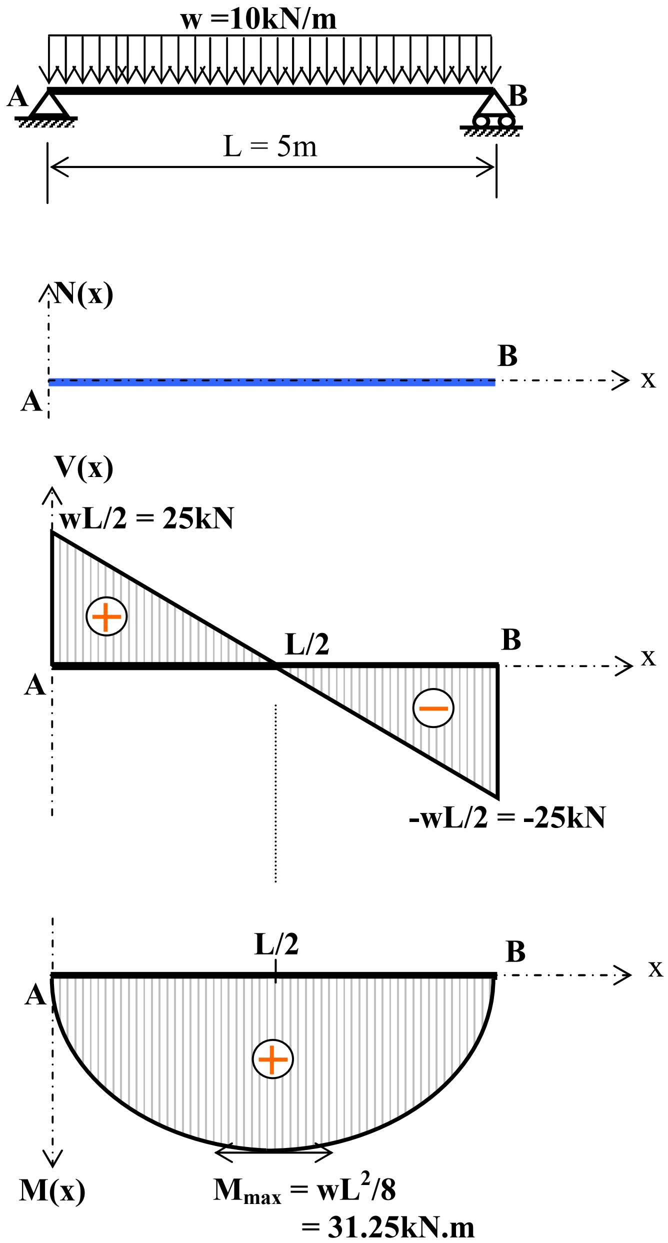
$$N(x) = -A_x = 0$$
$$V(x) = A_y - w.x = 25 - 10.x$$
$$M(x) = A_y.x - w.x.x/2 = 25.x - 5.x^2$$

ويلاحظ أن $V(x)$ هي دالّة من الدرجة الأولى ، تبيّن أن قوّة القص تتغيّر خطّيا عبر الكمرة من:
$A_y = w.L/2 = 25$ kN مباشرة عن يمين الركيزة A $(x = 0)$ إلى:
$-B_y = -w.L/2 = -25$kN مباشرة عن يسار الركيزة B $(x = L = 5m)$.

بينما معادلة $M(x)$ هي معادلة من الدرجة الثانية (parabola) بالنسبة للمسافة x. ويبيّن الجدول التالي بعض قيم العزم بدلالة x :

| x (m) | 0 | 1 | 2 | L/2 = 2.5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M (kN.m) | 0 | 20 | 30 | $wL^2/8 = 31.25$ | 30 | 20 | 0 |

ومن الحســـابات الســابقة، يمكن بسهـــولة رسم تخطيطات القوى الدّاخليّة كما هو مبيّن في الشكل ( ٥- ١٩ ).




شـكـل ( ٥- ١٩ )

ويلاحظ من الشكل ( ٥- ١٩ ) يلاحظ أنّ :

- قيمة عزم الإنحناء تساوي صفرا عند الركيزة المفصليّة A الطرفيّة وكذلك عند الركيزة المنزلقة الطرفيّة B.
- أكبر عزم انحناء حدث عند مقطع حيث تساوي قوّة القص صفرا (عند منتصف بحر الكمرة) وقيمته:

$$w\ \frac{L^2}{8}\ \mathrm{M_{max}} =$$

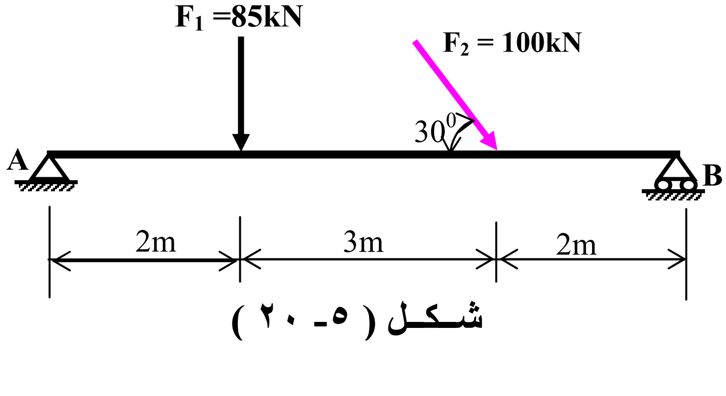
ويمكن حساب هذه القيمة مباشرة من تعريف عزم الإنحناء أو من مساحة تخطيط قوّة القص بين A و نقطة المنتصف (L/2):

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{WL^2}{8} = \frac{1}{2}(25)\frac{5}{2} = 31.25\ kN.m$$

- دالّـة قوّة القص V(x) من الدرجة الأولى ، و دالّة عزم الإنحناء M(x) من الدرجة الثانية.

**مثـال ٥- 4:**

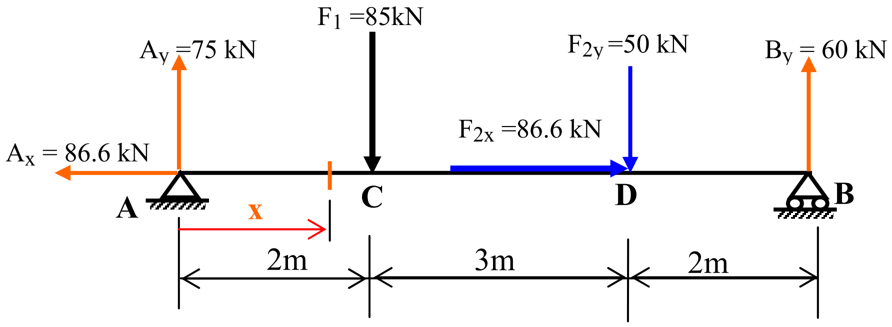
ارسم تخطيط القوّة المحوريّة وتخطيط قوّة القص وتخطيط عزم الإنحناء للكمرة المبيّنة في الشكل ( ٥- ٢٠ ).




**شكل ( ٥- ٢٠ )**

**الحل:**

يبيّن الشكل ( ٥- ٢٠ ) مركّبات ردود الأفعال والأحمال الخارجيّة، كما جرى توضيحه وحسابه في الأجزاء السابقة.




**شكل ( ٥- ٢٠ )**

تشمل هذه الكمرة ثلاثة مناطق أو مجالات مختلفة، وهي: [AC] و [CD] و [DB] ، وتحلّل كلّ منطقة من الكمرة باعتبار وجود مقطع متحرّك على كامل المجال موضعه x من الطرف الأيسر.

- المنطقة الأولى [AC]: $0 < x < 2m$

باعتبار القوى الخارجيّة الواقعة يسار المقطع، فإن دالّات القوى الداخليّة تكون كالتالي:

$$N(x) = A_x = 86.6 \text{ kN}$$
$$V(x) = A_y = 75 \text{ kN}$$
$$M(x) = A_y.x = 75.x$$

يلاحظ أن قيمة N(x) ، وكذلك V(x). ثابتة في المجال $0 < x < 2m$ ، بينما M(x) هي معادلة من الدرجة الأولى تتغيّر خطيا. ويبيّن الجدول التالي قيمة عزم الإنحناء للمجال $0 < x < 2m$:

| x (m) | 0 | 2 |
|---|---|---|
| M (kN.m) | 0 | 150 |

- المنطقة الثانية [CD] : $2m < x < 5m$

باعتبار القوى الخارجيّة الواقعة يسار المقطع، فإن دالّات القوى الداخليّة تكون كالتالي:

$$N(x) = A_x = 86.6 \text{ kN}$$
$$V(x) = A_y - F_1 = 75 - 85 = -10 \text{ kN}$$

$$M(x) = A_y.x - F_1(x-2) = 75.x - 85.\ x + 170 = 170 - 10.x$$

وحيث لا يوجد أي قوّة محوريّة إضافيّة بين النقطتين C و D، تظلّ N(x) ثابتة في هذه المنطقة. بينما تتغيّر قيمة قوّة القص عند مقطع عن يمين C مباشرة تغيّرا مفاجئا من 75kN إلى 10kN- ثمّ تظلّ ثابتة حتى يسار المقطع D مباشرة.

تبيّن معادلة M(x) أن عزم الإنحناء يتغيّر خطّيا في الجزء [CD] من الكمرة. ويبيّن الجدول التالي قيمة عزم الإنحناء في المجال $2m < x < 5m$:

| 5 | 2 | x (m) |
|---|---|---|
| 120 | 150 | M (kN.m) |

يلاحظ أنّ قيمة عزم الإنحناء عند النقطة C ( x = 2m)، هي نفس النتيجة التي سبق التوصّل إليها في المجال [AC].

- المنطقة الثالثة [DB] : $5m < x < 7m$

من الواضح أنّه من السهل اعتبار القوى الخارجيّة الواقعة يمين المقطع، وهي قوّة واحدة في هذه الحالة. وتبعا لذلك، تكون دالاّت القوى الداخليّة كالتالي:

$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -B_y = -60\ kN$$
$$M(x) = B_y\,(7 - x) = 60(7-x) = 420 - 60.x$$

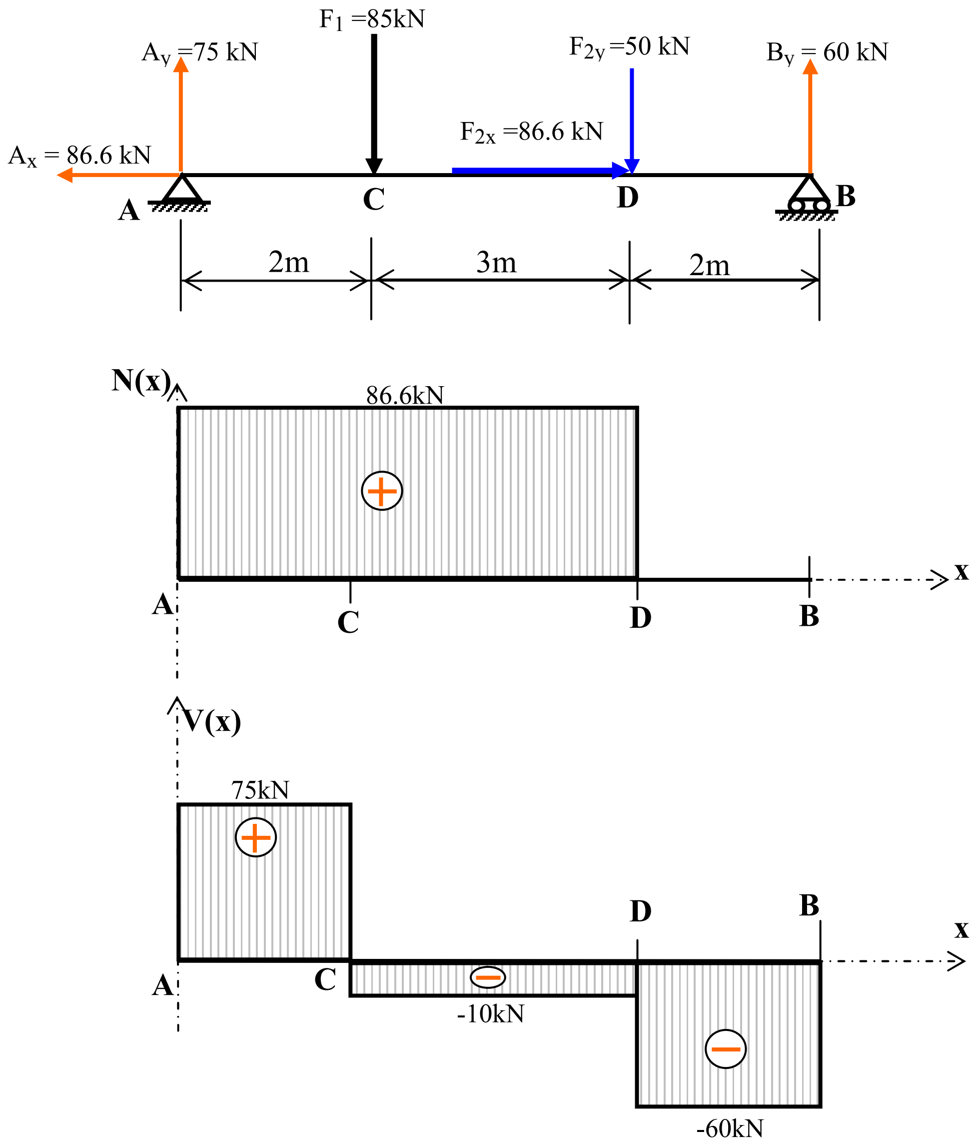
لأنه لا يوجد أي قوّة محوريّة بين النقطتين D و B، فإنّ N(x) تساوي صفرا في هذه المنطقة. بينما تـتغـيّر قيمة قوّة القص عند مقطع عن يمين D مباشرة تغيّرا مفـاجـئا من 10 kN- إلى 60kN- ثمّ تظلّ ثابتة حتى يسار المقطع B مباشرة.

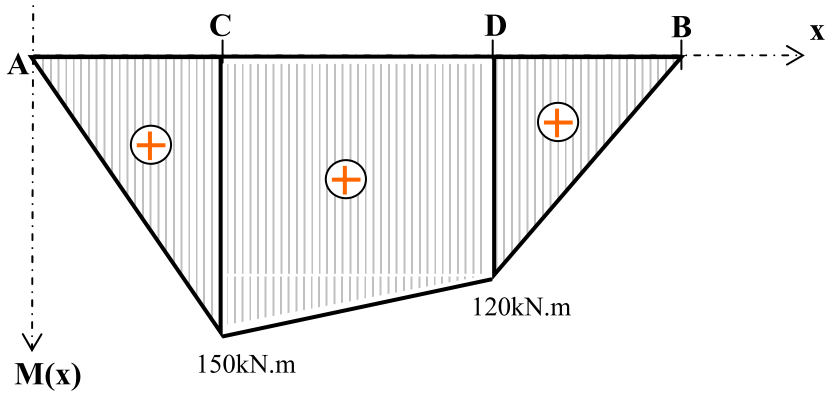
تبيّن معادلة M(x) أن عزم الإنحناء يتغيّر خطّيا في الجزء [DB] من الكمرة. ويبيّن الجدول التالي قيمة عزم الإنحناء في المجال $5m < x < 7m$ :

| 7 | 5 | x (m) |
|---|---|---|
| 0 | 120 | M (kN.m) |

عليه فإن عزم الإنحناء يساوي صفرا عند الركيزة البسيطة B ، بينما يساوي 120kN.m عند النقطة D ، وهي نفس النتيجة التي سبق التوصّل إليها في المجال [CD].

من الحسابات السابقة، يمكن بسهولة رسم تخطيطات القوى الدّاخليّة كما هو مبيّن في الشكل (٥-٢١).






شـكـل ( ٥- ٢١ )

ويلاحظ من الشكل ( ٥- ٢١ ) ما يلي :

- أكبر عزم انحناء حدث عند المقطع حيث تغيّرت قيمة قوّة القص فجأة من موجب إلى سالب.
- في كل منطقة، عندما تكون قوّة القص V(x) ثابتة (دالّـة من الدرجة صفر) ، يتغيّر عزم الإنحناء خطّيا ((M(x) من الدرجة الأولى).
- قيمة عزم الإنحناء M عند المقطع C تساوي المساحة لتخطيط قوّة القص حتى المقطع :

$$M_C = 75 \times 2 = 150 \text{ kN.m}$$

كذلك، قيمة عزم الإنحناء M عند المقطع D تساوي المساحة لتخطيط قوّة القص حتى المقطع :

$$M_D = 75 \times 2 - 10 \times 3 = 150 - 30 = 120 \text{ kN.m}$$

- قيمة عزم الإنحناء تساوي صفرا عند الركيزة المفصليّة الطرفيّة وكذلك عند الركيزة المنزلقة الطرفيّة.

### ٥- ٢- ٥- العلاقات بين شدّة التحميل وقوّة القص وعزم الإنحناء :

في المشاريع الإنشائيّة، تتعرّض معظم الكمرات إلى أحمال عموديّة على محورها. وفي هذه الحالات، تنعدم القوّة المحوريّة (N(x) = 0) و تؤدّي معرفة علاقات معيّنة قائمة بين شدّة التحميل وقوّة القص وعزم الإنحناء إلى تسهيل عمليّة رسم تخطيطي قوّة القص وعزم الإنحناء. لاحظ أن أغلب هذه العلاقات وقع الإشارة إليها في ملاحظات المثالين السابقين.

كما يجب ملاحظة أن جميع العلاقات التالية مبنيّة على إعتبارات الإتّزان فقط، وبالتالي فهي لا تتأثّر بشكل مقطع الكمرة أو نوع الكمرة، وما إذا كانت محدّدة ستاتيكيّا أو غير محدّدة، أو نوع مادّتها.

وفيما يلي، ستقدّم العلاقات بين شدّة التحميل وقوّة القص وعزم الإنحناء وذلك بطريقة مبسّطة وسهلة :

ع١- إذا تعرّض جزء من كمرة إلى حمل موزّع بانتظام، أي تكون شدّة التحميل w ثابتة، يكون تخطيط قوّة القص في هذا الجزء خطّا مستقيما، ويكون تخطيط عزم الانحناء منحني من الدرجة الثانية.

ع٢- في حالة عدم وجود أي حمل بين مقطعين من الكمرة، يتكوّن تخطيط قوّة القصّ من خط مستقيم موازي لخط القاعدة (خط المحور x)، ويكون تخطيط عزم الانحناء خطّا مستقيما.

ع٣- بأي جزء من الكمرة، إذا كانت شدّة التحميل دالّة من الدرجة (n)، تكون قوّة القص دالّة من الدرجة (n+1) ويكون عزم الانحناء دالّة من الدرجة (n+2).

ع٤- عند نقطة تأثير حمل مركّز، يحدث تغيّر مفاجئ في تخطيط قوّة القصّ ( " تقفز" بمقدار يساوي قيمة الحمل المركّز) ومن ثمّ يحدث تغيّر مفاجئ في ميل تخطيط عزم الانحناء على جانبي الحمل المركّز ويظهر ذلك في التخطيط المذكور.

ع٥- من الممكن رسم تخطيط قوّة القص بطريقة أوتوماتيكيّة وذلك باتخاذ مسار على طول الكمرة مبتدئا من طرفها الأيسر ثمّ تتّبع الأحمال، بما فيها مركّبات ردّ الفعل العموديّة على المحور، صعودا وهبوطا حسبما يعترض منها المسار.

ع٦- عزم الانحناء يبلغ نهاية عظمى ( maximum ) أي أكبر قيمة موجبة، أو نهاية صغرى (minimum) أي أقل قيمة سالبة عند المقطع حيث تكون قوّة القص صفرا.

وحسب اصطلاحات الإشارات المتّبعة في هذا الفصل، يكون عزم الانحناء نهاية عظمى حيث تتغيّر قوّة القص من موجب إلى سالب، والعكس بالعكس.

ع٧- قيمة عزم الانحناء عند مقطع محدّد تساوي مساحة تخطيط قوّة القص حتّى ذلك المقطع.

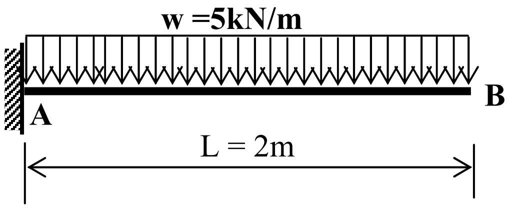
وتبعا للعلاقات أعلاه، تجدر الإشارة أنّه عند رسم تخطيط قوّة القصّ يركّز الانتباه على الأحمال، وعند رسم تخطيط عزم الانحناء يركّز الانتباه على تخطيط قوّة القصّ.
وتجدر الإشارة أنّه عندما تقع ركيزة بسيطة (منزلقة أو مفصليّة) عند إحدى طرفي الكمرة، تكون قيمة عزم الانحناء عندها تساوي صفرا.

باستخدام هذه العلاقات، يمكن تخطيط الشكل العام لتخطيطي قوّة القص وعزم الانحناء، ثمّ بحساب القيم العدديّة عند بعض المقاطع (الرئيسه) من الكمرة، يتمّ الحصول على الرسم الكامل لهذين التخطيطين.

فيما يلي بعض الأمثلة لزيادة توضيح عمليّة رسم تخطيط القوى الدّاخليّة في الكمرات المحدّدة استاتيكيًا، وإن كانت الكمرات غير المحدّدة إستاتيكيًا تخضع لنفس المبادئ العامّة.

**مثال ٥ - ٥:**

ارسم تخطيط القوى الدّاخليّة للكابولي المعرض لحمل موزّع بانتظام كما في الشكل رقم (٥- ٢٢).




**شـكـل ( ٥- ٢٢ )**

**الحل:**

- مركّبات ردود الأفعال باستخدام معادلات الاتزان ،

$A_x = 0$
$A_y = w\times L = 10$ kN□
$M_A = w\times L^2/2 = 10$ kN.m

- تخطيط القوّة المحوريّة:

لعدم وجود أي قوّة تؤثّر على الكمرة في اتجاه محورها فإن : $N(x) = 0$

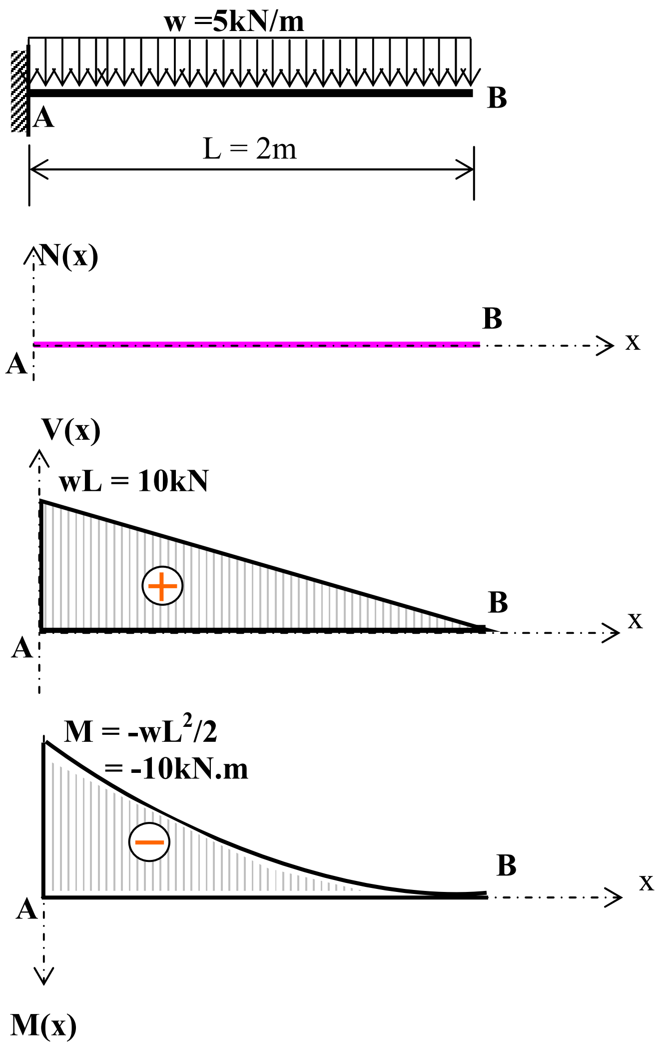
- تخطيط قوّة القصّ :

بما أنّ شدّة التحميل ثابتة بين A وB ، فإن قوّة القصّ تتغيّر خطّيا عبر الكابولي من $V_A = 10$ kN إلى $V_B = 0$.

- تخطيط عزم الإنحناء :

بما أنّ قوّة القصّ تتغيّر خطّيا بين A وB ، فإنّ تخطيط عزم الانحناء يكون منحنى من الدرجة الثانية ، قيمته عند A : $M = - w.L^2/2 = - 10kN.m$ ، وعند الطرف الحر B : $M = 0$ ، وعليه يصبح من السهل توقيع تخطيط عزم الإنحناء.

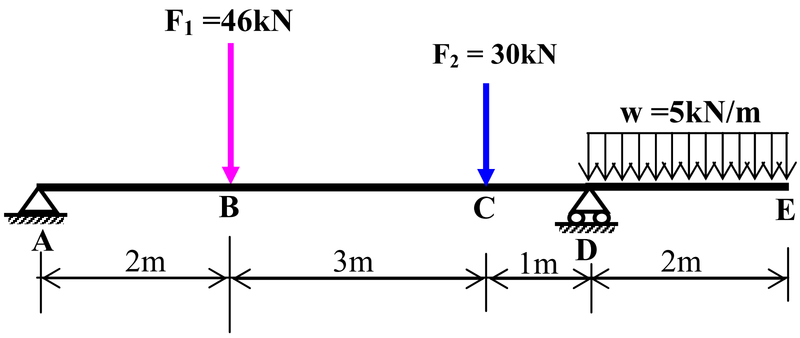
وبالتالي يبيّن الشكل ( ٥- ٢٣) تخطيطات القوى الداخليّة .




شكل ( ٥- ٢٣ )

**مثال ٥- ٦ :**

ارسم تخطيط القوى الدّاخليّة للكمرة المبيّنة في الشكل رقم ( ٥- ٢٤ ).




شـكـل ( ٥- ٢٤ )

**الـحـل:**

- مركّبات ردود الأفعال باستخدام معادلات الاتزان ،

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 2F_1 + 5F_2 - 6D_y + 2.w.7 = 0$$
$$6D_y = 2\times46 + 5\times30 + 5\times2\times7$$
$$6D_y = 312$$
$$\rightarrow \quad D_y = 52 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = A_y - F_1 - F_2 + D_y - 2.w = 0$$
$$A_y = F_1 + F_2 + 2.w - D_y$$
$$\rightarrow \quad A_y = 34 \text{ kN}$$

- تخطيط القوّة المحوريّة:

لعدم وجود أي قوّة تؤثّر على الكمرة في اتجاه محورها فإن : $N(x) = 0$

- تخطيط قوّة القصّ :

قيمة قوّة القص يمين A مباشرة تساوي Ay = 34kN. ولعدم وجود أي حمل بين A و B، تبقى قوّة القص ثابتة حتى B ، حيث تهبط فجأة بقيمة $F_1$ لتصبح 12kN- وتبقى ثابتة حتى C حيث تهبط فجأة بقيمة $F_2$ لتصبح 42kN- ، وتبقى ثابته حتى D حيث تصعد قيمة $D_y$ لتصبح 10kN . وبما أنّ الجزء DE يؤثّر عليه حمل موزّع بانتظام، فهذا الجزء تتغيّر قوّة القص فيه خطّيا من 10kN عند D لتصبح صفرا عند الطرف الحرE.

- تخطيط عزم الانحناء :

بما أنّ قوّة القصّ ثابتة في الأجزاء AB و BC و CD، فعزم اللانحناء يتغيّر خطّيا ، قيمته صفرا ($M_A = 0$) عند الركيزة الطرفيّة A ، ثمّ:

$$M_B = A_y.2 = 68 \text{ kN}$$

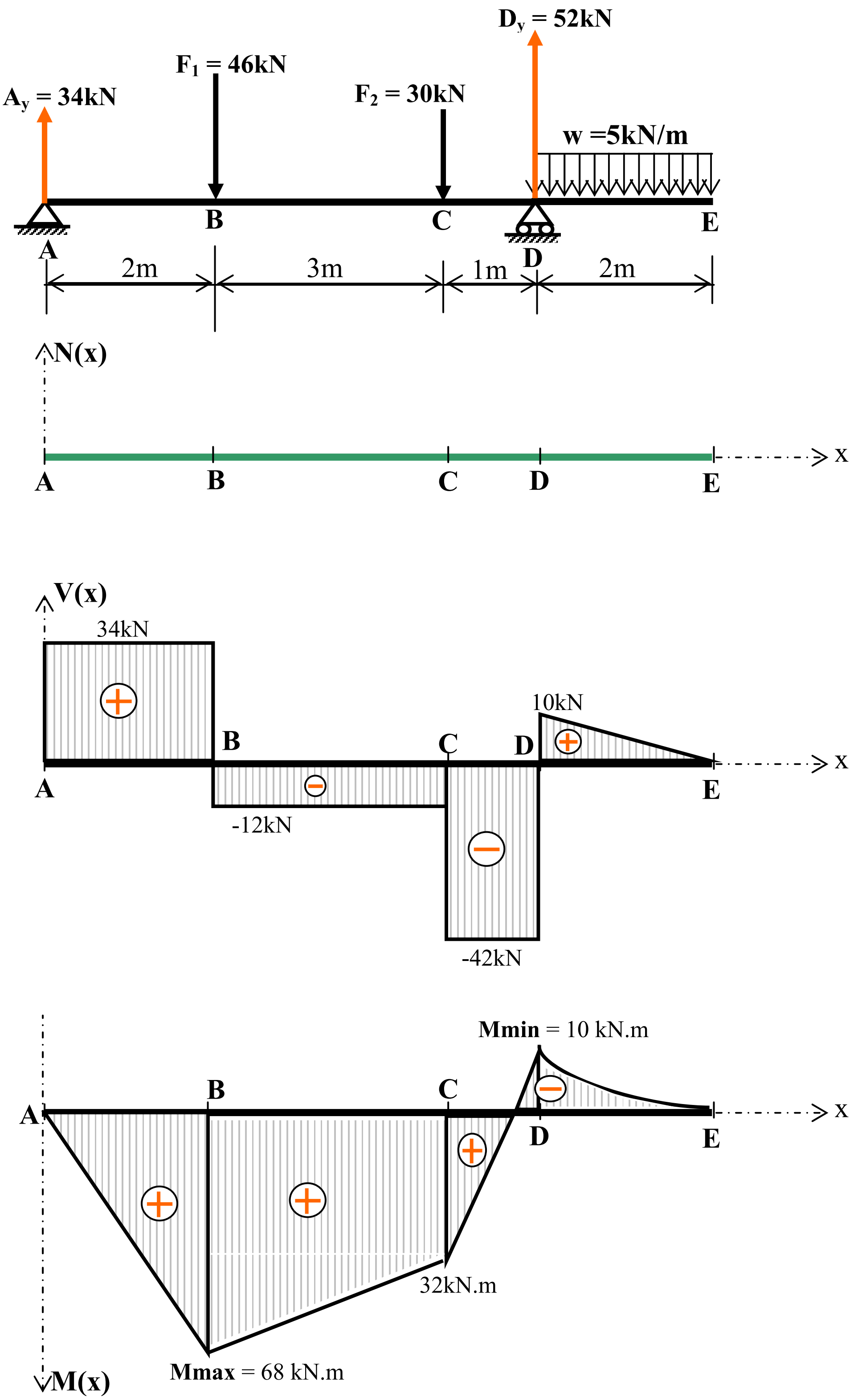
عند المقطع B ، قيمة قوّة القص تمرّ من الموجب إلى السّالب وتبعا لذلك قيمة عزم الانحناء العظمي تكون عند هذا المقطع ($M_{max} = M_B$).

$$M_C = A_y.5 - F_1.3 = 32\text{kN}$$
$$M_D = -w.2.1 = -10\text{kN}$$

عند المقطع D ، قيمة قوّة القص تمرّ من السّالب إلى الموجب وتبعا لذلك قيمة عزم الانحناء الصغرى تكون عند هذا المقطع ($M_{min} = M_D$).

بما أنّ قوّة القص تتغيّر خطّيا بين D و E ، فإنّ تخطيط عزم الانحناء له منحنى من الدرجة الثانية و يهبط من 10kN- عند D إلى صفرا ($M_E = 0$) عند الطرف الحرE.

ويبيّن الشكل ( ٥- ٢٥ ) تخطيطات القوى الداخليّة .


$D_y$ = 52kN
$F_1$ = 46kN
$A_y$ = 34kN
$F_2$ = 30kN
w =5kN/m
A
B
C
D
E
2m
3m
1m
2m
N(x)
x
V(x)
34kN
10kN
-12kN
-42kN
Mmin = 10 kN.m
32kN.m
Mmax = 68 kN.m
M(x)

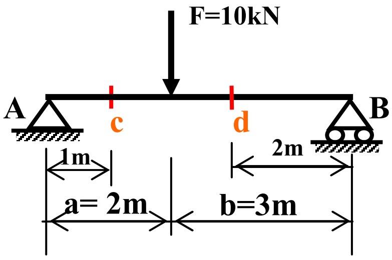
شـكــل ( ٥ ـ ٢٥ )

## ٥- ٣ – تمارين:

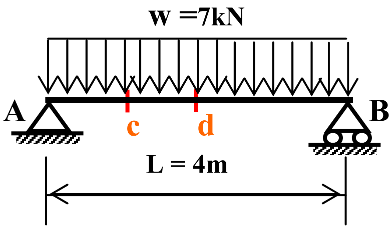
(**ت٥- ١**)–(**ت٥- ٤**): احسب قيم القوى الداخليّة عند المقطع c ( الواقع 1m على يمين الركيزة A ) وعند المقطع d (الواقع 2m على يسار الركيزة B) وذلك في الأشكال من (ت٥- ١ ) إلى (ت٥- ٤).

[جواب (ت٥- ١): $N_c = 0, V_c = 6$ kN, $M_c = 6$ kN.m, $N_d = 0, V_d = -4$ kN, $M_d = 8$ kN.m

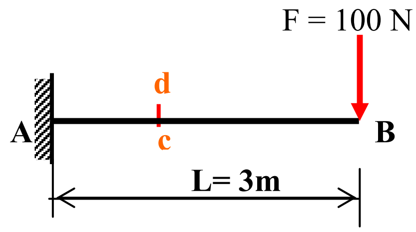
[جواب (ت٥- ٤): $N_c = 0, V_c = 11$ kN, $M_c = 11$ kN.m, $N_{dL} = N_{dr} = 0, V_{dr} = -7$ kN, $V_{dL} = -1$ kN, $M_d = 14$ kN.m



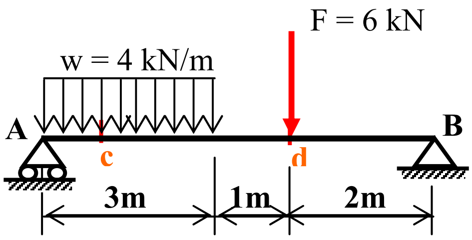

شكل ( ت٥- ١ )




شكل ( ت٥- ٢ )



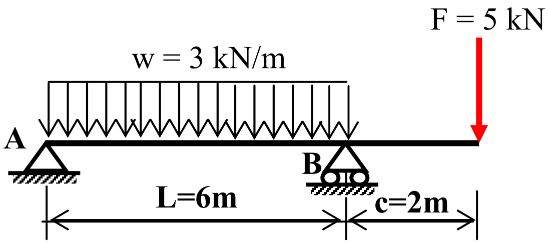

شكل ( ت٥- ٣ )



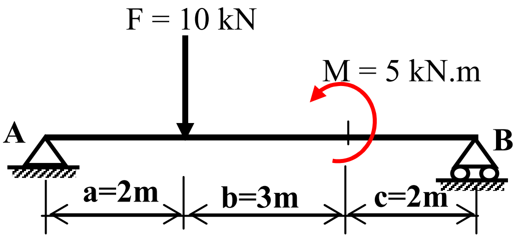

شكل ( ت٥- ٤ )

(**ت٥- ٥**) – (**ت٥- ٨** ) : ارسم تخطيط قوّة القص وعزم الانحناء للكمرات المبيّنة في الأشكال من (ت٥- ١ ) إلى ( ت٥- ٤ ).

(**ت٥- ٩**) – (**ت٥- ١٠** ) : ارسم تخطيط قوّة القـص وعزم الانحناء للكمرات المبيّنة في الشكلين (ت٥- ٩ ) و ( ت٥- ١٠ ).

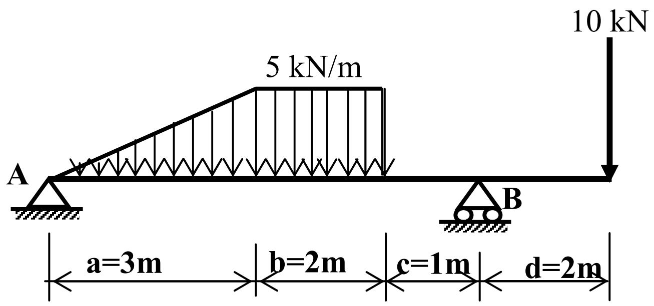


شـكل ( ت5- ٩ )



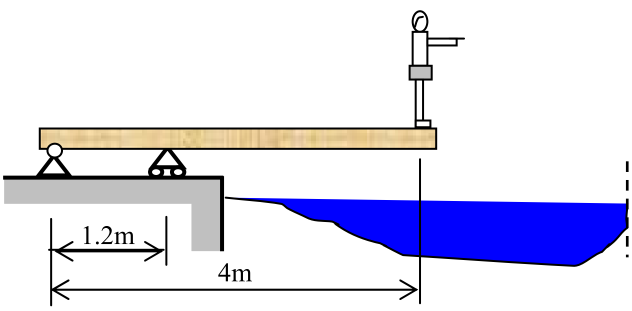
شـكل ( ت5- ١٠

(**ت٥- ١١**): ارسم تخطيط قوّة القص وعزم الانحناء للكمرة المبيّنة في الشكل رقم (ت٥- ١١ ) مع حساب قيمة عزم الانحناء الأعظمي وتحديد موقعه.



شـكل ( ت٥- ١١ )

(**ت٥- ١٢**): ارسم تخطيط قوّة القص وعزم الانحناء للوح الغطس الذي يستعمل في السباحة وهو يحمل طالبا وزنه $P = 750N$ على أهبة القفز كما هو مبيّن في الشكل(ت ٥- ١٢). علـما أن وزن الـــلوح $w = 25N/m$.

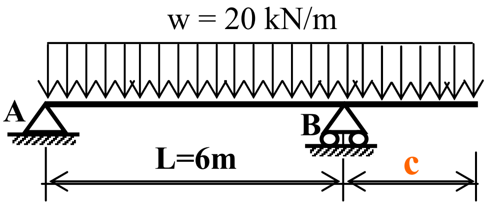


شـكـل (ت٥-١٢)

(**ت٥- ١٣**): أوجد الطول الأمثل للـكابـولي c في الكمرة المبيّنة في الشكل(ت ٥- ١٣).

ملاحظة: الطول الأمثل للكابولي c هو ما ينتج عنه تساوي القيمة العدديّة لأكبر عزم انحناء موجب وأكبر عزم إنحناء سالب ($M_{max} = |M_{min}|$) .

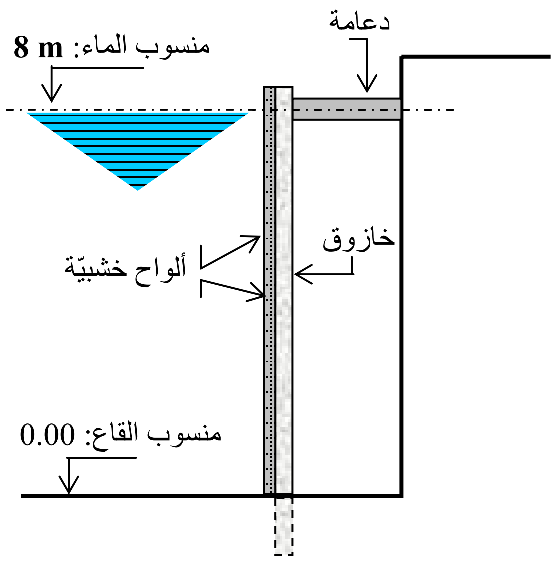
[الجواب: c = 1.93 m]




شـكل ( ت٥ـ ١٣ )

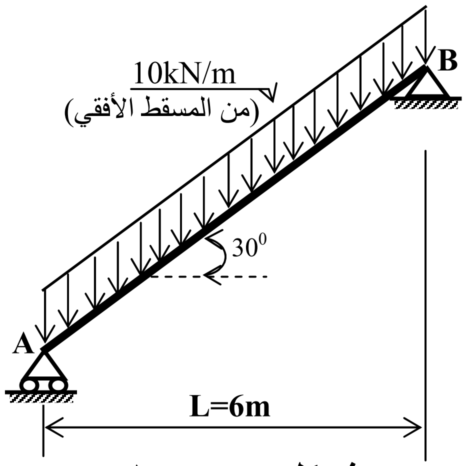
(ت٥- ١٤): أقيم سدّ مؤقّت لتجفيف منطقة عمل في مجرى مائي. يتكوّن السدّ من ألواح خشبيّة ترتكز على خوازيق (piles). و يرتكز كل خازوق على دعامة عند منسوب سطح الماء، بينما يمكن اعتبار الخازوق مثبّتا عند منسوب القاع كما يظهر في الشكل (ت٥- ١٤).

فإذا كانت المسافة بين الخوازيق 0.7m والدعامات تقاوم $\frac{2}{7}$ من الضغط على الخازوق، احسب قيمة قوة القص وعزم الانحناء في الخازوق عند منسوب القاع. افترض الوزن النوعي للماء $\gamma_w = 10\text{kN/m}^3$ .




شـكـل ٥ـ ١٤

(**ت٥- ١٥**)**:** ارسم تخطيط القوّة المحوريّة وقوّة القصّ وعزم الإنحناء للكمرة المائلة المبيـّنة في الشـكـل (ت٥- ١٥)، والتي تتعرّض فيه الكمرة لحمل موزّع بانـتظــام مقداره $w_h=10$ kN على كلّ متر من المسقط الأفــقي.



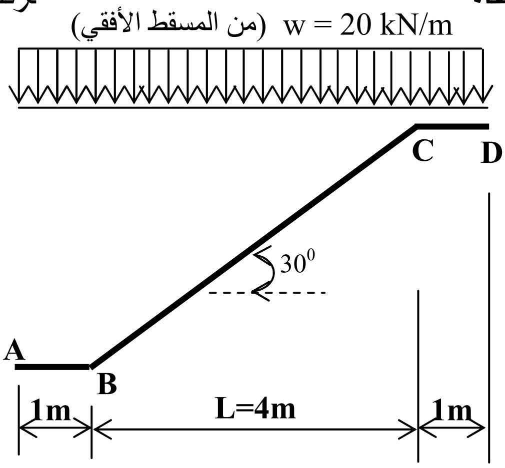

**شــكل ( ت5- ١٥**

(**ت٥- ١٦**)**:** يتّخذ محور الكمرة ABCD الموضحة في الشكل (ت٥- ١٦). المطلوب رسم تخطيط القوّة المحوريّة وقوّة القصّ وعزم الانحناء في الحالات التالية:

١- الكمرة مثبّتة عند الطرف D.

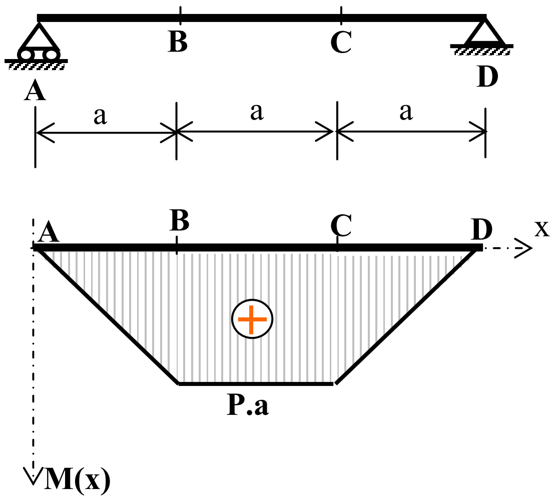
٢- الكمرة ترتكز على دعامة مفصليّة عند D و على دعامة منزلقة عند A .

٣- الكمرة ترتكز على دعامة مفصليّة عند C و على دعامة منزلقة عند B .

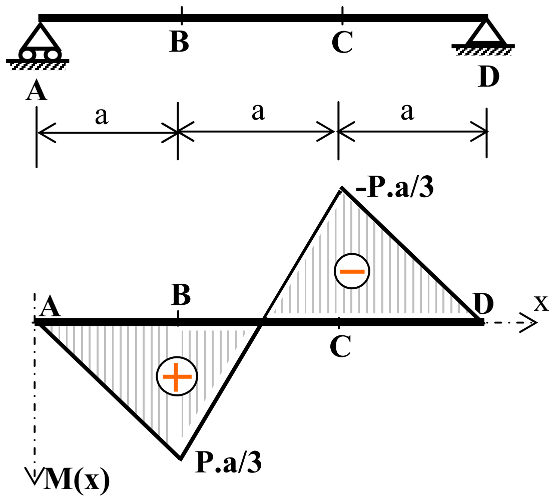



**شــكل ( ت5- ١٦**

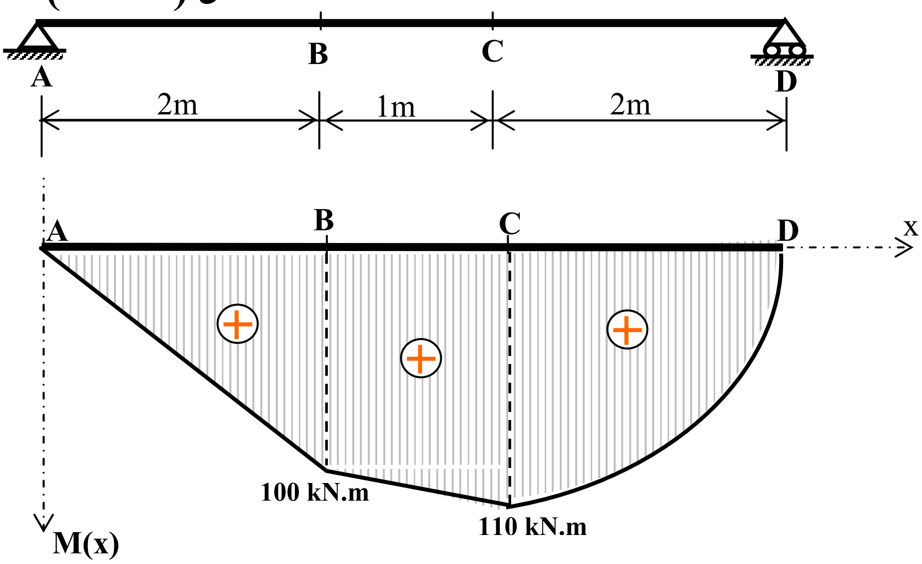
(**ت٥- ١٧**)–(**ت٥- ٢٠** ) **:** بالإعتماد على تخطيط عزم الانحناء و بالإستعانة بالعلاقات بين الأحمال وقوّة القص وعزم الانحناء: أرسم تخطيط قوّة القص وأوجد ووضّح الأحمال المؤثّرة على كلّ كمرة من الكمرات المبيّنة في الأشكال من (ت٥- ١٧) إلى (ت٥- ٢٠).



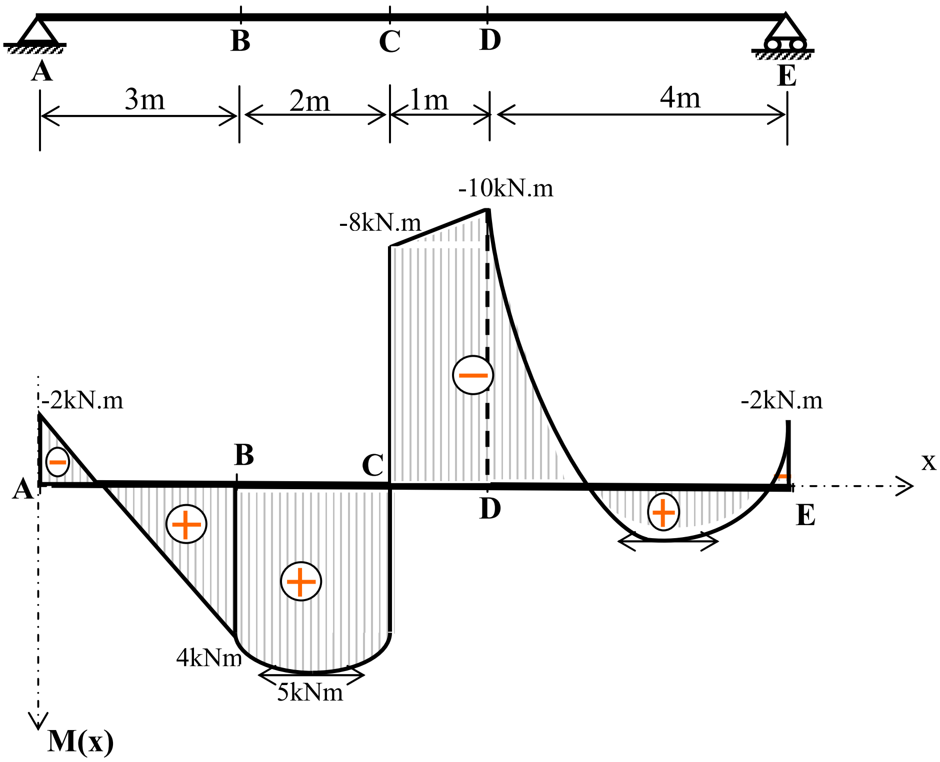

شـكـل (ت٥-١٧)




شـكـل (ت٥-١٨)




شـكـل (ت ٥ ـ ١٩ )




شـكـل (ت٥- 20)

تورنتو – كندا : تحتوي على ٧ ناطحات سحاب يبلغ طول كل منها أكثر من ٢٠٠ مترا ،
من أشهرها The CN Tower