٣

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى — كتاب الطالب — الفصل الدراسى الأول

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الأستاذ الدكتور / عفاف أبوالفتوح صالح — الدكتور / عصام وصفى روفائيل

الأستاذ / سيرافيم الياس اسكندر — الأستاذ / كمال يونس كبشة

مراجعة

أ / فتحى محمد شحاته — أ / سمير محمد سعداوى

إشراف علمى
مستشار الرياضيات
إشراف تربوى
مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

طبعة : ٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

الاسم: ....

المدرسة: ....

الفصل: ....

العنوان: ....

العام الدراسى: ....

مقدمة الكتاب

أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات: يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص، واختيار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى يوجد نماذج اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الإحصاء

حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية

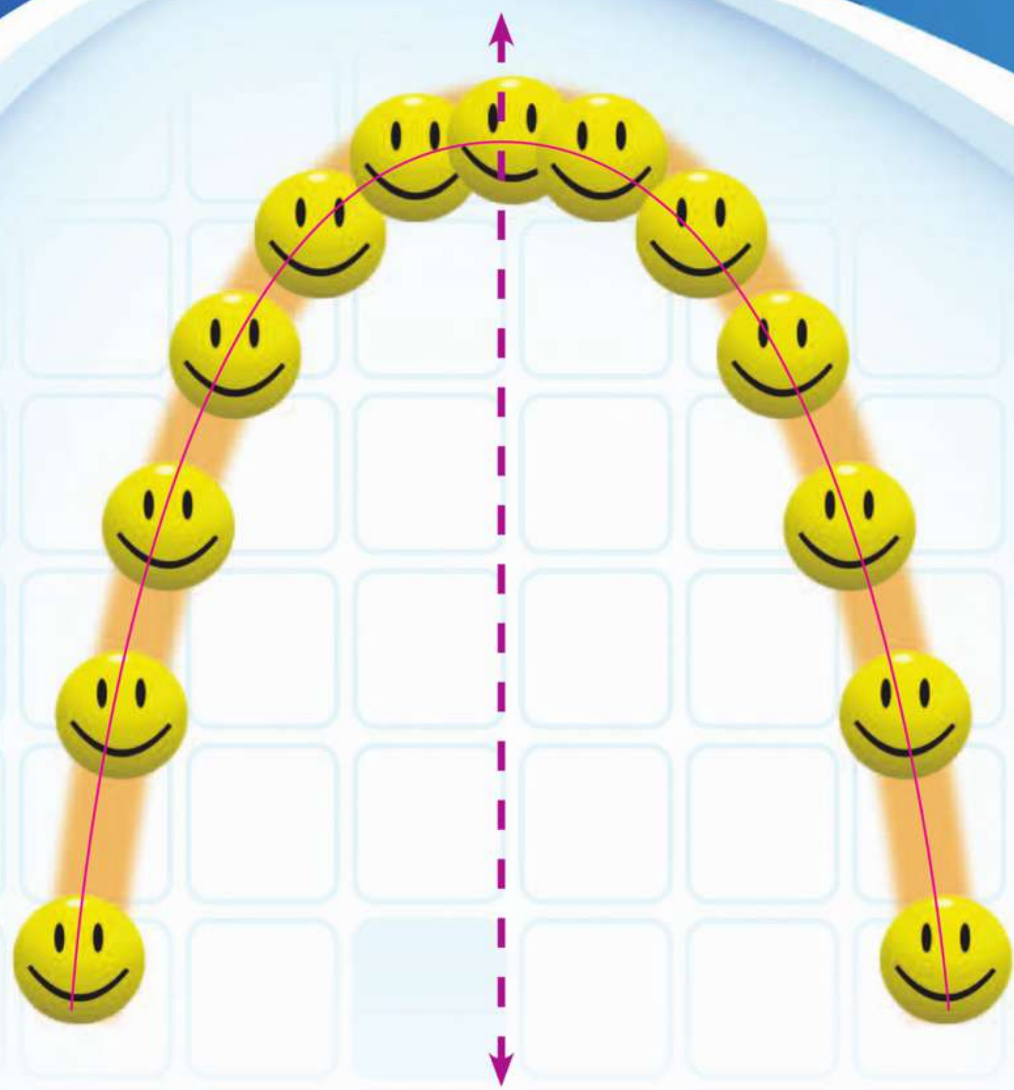
الأنشطة والتدريبات

الرموز الرياضية المستخدمة

طـ	مجموعة الاعداد الطبيعية	$\perp$	عمودى على
صـ	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
$\sqrt{\ }$	الجذر التربيعى للعدد أ	ق ($\angle$ أ)	قياس زاوية أ
$\sqrt[3]{\ }$	الجذر التكعيبى للعدد أ	ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)	قياس القوس أ ب
[أ ، ب]	فترة مغلقة	$\sim$	تشابه
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	$<$	أكبر من
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة	$\leqslant$	أكبر من أو تساوى
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة	$>$	أقل من
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	$\geqslant$	أقل من أو تساوى
$\equiv$	تطابق	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ	$\overline{\text{س}}$	الوسط الحسابى
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف العيارى
		مجـ أو Σ	المجموع

الجبر

العلاقات و الدوال



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.

هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

١ - ١

حاصلُ الضَّربِ الديكارتي

سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين.

مصطلحات أساسية

- ☆ زوجٌ مرتبٌ
- ☆ حاصلُ ضرب ديكارتي .
- ☆ مخططٌ سهمي .
- ☆ مخطط بياني
- ☆ علاقة .

فكر وناقش

سبق وأن درست العلاقة بين متغيرين س، ص.

١ أوجد مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تُحقِّق العلاقة:
ص = ٢ س - ١ عندما س = ٠، س = ١، س = ٢

٢ مثِّل هذه الأزواجَ المرتبة بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

٣ هل الزوجُ المرتب (٣، ٥) يساوي الزوج المرتب (٥، ٣)؟
(استعن بالرسم).

مما سبق نلاحظ:

١ في الزوج المرتب (أ، ب) يسمى أ بالمسقط الأول، ب بالمسقط الثاني.

٢ كلُّ زوجٍ مرتبٍ يمثلُ بنقطةٍ واحدةٍ وواحدة فقط في المستوى الإحداثي.

٣ **إذا كان** أ ≠ ب **فإن** (أ، ب) ≠ (ب، أ)، لماذا ؟

٤ (أ، ب) ≠ {أ، ب}.

٥ **إذا كان** (أ، ب) = (س، ص) **فإن** أ = س، ب = ص

مثال ١

أوجد س، ص إذا كان : (س - ٢، ٣) = (٥، ص + ١)

الحل

س - ٢ = ٥ ∴ س = ٧ ، ٣ = ص + ١ ∴ ص = ٢

تدرب

أوجد أ، ب في كلٍّ مما يأتي:

أ (أ، ب) = (-٥، ٩)

ب (أ - ٢، ب + ١) = (٢، -٣)

جـ (٦، ب - ٣) = (٢ - أ، - ١)

د (أ - ٧، ٢٦) = (-٢، ب^{٣} - ١)

مثال ٢

إذا كانت سـ = {أ، ب}، صـ = {-١، ٠، ٣} **فأوجد:**

سـ × صـ ، صـ × سـ، **ماذا تلاحظ؟**

الحل

لإيجاد حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة صـ ويُرمز له بالرمز سـ × صـ، نكتب مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصرٌ من سـ ، ومسقطها الثانى عنصرٌ من صـ فيكون:

سـ × صـ = {أ، ب} × {-١، ٠، ٣} = {(أ، -١)، (أ، ٠)، (أ، ٣)، (ب، -١)، (ب، ٠)، (ب، ٣)}

كما أن: صـ × سـ = {-١، ٠، ٣} × {أ، ب} = {(-١، أ)، (-١، ب)، (٠، أ)، (٠، ب)، (٣، أ)، (٣، ب)}

نلاحظ أن : سـ × صـ ≠ صـ × سـ

ويمكن الحصول على سـ × صـ، صـ × سـ من الجدولين الآتيين:

×		المسقط الثاني		
		-١	٠	٣
المسقط الأول	أ	(أ، -١)	(أ، ٠)	(أ، ٣)
	ب	(ب، -١)	(ب، ٠)	(ب، ٣)

×		المسقط الثاني	
		أ	ب
المسقط الأول	-١	(-١، أ)	(-١، ب)
	٠	(٠، أ)	(٠، ب)
	٣	(٣، أ)	(٣، ب)

فكر:

١ متى يكون سـ × صـ = صـ × سـ؟

٢ هل عدد عناصر سـ × صـ = عدد عناصر صـ × سـ؟

ملاحظات:

١ **إذا كانت** سـ، صـ مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين،
فإن: سـ × صـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ صـ}

٢ سـ × صـ ≠ صـ × سـ **حيث:** سـ ≠ صـ

ن (سـ × صـ) = ن (صـ × سـ) = ن (سـ) × ن (صـ)

حيث ن ترمز إلى عددِ عناصر المجموعة.

٣ **إذا كان** (ك، م) ∈ سـ × صـ **فإن** ك ∈ سـ، م ∈ صـ

٤ **إذا كانت** سـ مجموعةً غير خاليةٍ
فإن: سـ × سـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ}
و تكتب أحيانًا سـ^{٢} وتقرأ (سـ اثنين).

مثال ٣

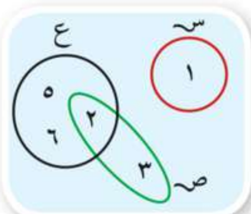
إذا كانت سـ = {١}، صـ = {٢، ٣}، ع = {٢، ٥، ٦} مثِّل المجموعات سـ، صـ، ع بشكل ڤن ثم أوجد:

أولاً: أ سـ × صـ   ب صـ × ع   جـ سـ × ع   د صـ^{٢}

ثانيًا: (سـ × صـ) ∪ (صـ × ع)   ثالثًا: سـ × (صـ ∩ ع)

رابعًا: (سـ × صـ) ∩ (سـ × ع)   خامسًا: (ع − صـ) × (سـ ∪ صـ)

الحل



أولاً:

أ سـ × صـ = {١} × {٢، ٣} = {(١، ٢)، (١، ٣)}

ب صـ × ع = {٢، ٣} × {٢، ٥، ٦}

= {(٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)}.

جـ سـ × ع = {١} × {٢، ٥، ٦} = {(١، ٢)، (١، ٥)، (١، ٦)}

د صـ^{٢} = صـ × صـ = {٢، ٣} × {٢، ٣}

= {(٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٣، ٣)}

ثانيًا: (سـ × صـ) ∪ (صـ × ع) = {(١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)}

ثالثًا: سـ × (صـ ∩ ع) = {١} × {٢} = {(١، ٢)}

رابعًا: (سـ × صـ) ∩ (سـ × ع) = {(١، ٢)، (١، ٣)} ∩ {(١، ٢)، (١، ٥)، (١، ٦)} = {(١، ٢)}.

خامسًا: ع − صـ = {٥، ٦}   ∴ (ع − صـ) × (سـ ∪ صـ) =   أكمل

تدرب

إذا كانت سـ = {٢، -١}، صـ = {٤، ٠}، ع = {٤، ٥، -٢} أوجد

أ سـ × صـ   ب صـ × ع   جـ سـ^{٢}

د ن (سـ × ع)   هـ ن (صـ^{٢})   و ن (ع^{٢})

تمثيلُ حاصلِ الضرب الديكارتي:

مثال ٤

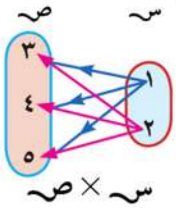
١ إذا كانت سـ = {١، ٢}، صـ {٣، ٤، ٥} **أوجد:** سـ × صـ، ومثله:

أولاً: بالمخططِ السَّهمي.   ثانيًا: بالمخططِ البياني.

الحل

س × ص = {١، ٢} × {٣، ٤، ٥} = { (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)}

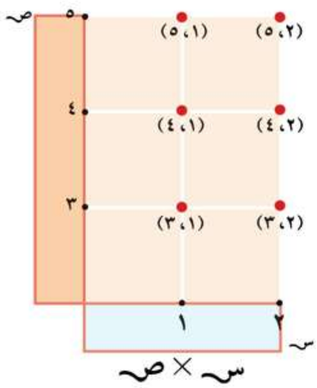
ويمثل حاصل الضرب الديكارتي س × ص بمخططٍ سهميٍّ أو شبكة بيانية، كما يلي:



أولاً: المخطط السهمي

نرسم سهمًا من كلّ عنصرٍ يمثلُ المسقطَ الأول (وهي عناصرُ المجموعة س) إلى كلّ عنصرٍ يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة ص)

أي أن: المخططُ السهميُّ لحاصلِ الضرب الديكارتي يُمثِّل كلّ زوجٍ مرتبٍ بسهمٍ يخرج من مسقطه الأول وينتهي عند مسقطه الثاني.



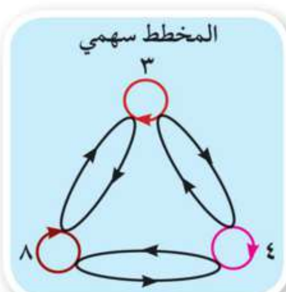
ثانيًا: المخططُ البياني (الشبكةُ البيانيةُ المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة س أفقيًا، وعناصر المجموعة ص رأسيًا فتكون نقطُ تقاطع الخطوط الأفقية والرأسيَّة تمثل الأزواج المرتبة لعناصرِ حاصل الضرب الديكارتي س × ص.

مثال ٥

إذا كانت س = {٣، ٤، ٨} فأوجد س × س ومثّله بمخططٍ سهميٍّ.

الحل



س × س = {٣، ٤، ٨} × {٣، ٤، ٨}

={ (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٨)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٨)، (٨، ٣)، (٨، ٤)، (٨، ٨)}.

ويلاحظ في الشكلِ : قد مُثلت الأزواجُ المرتبةُ بأسهم، وأن الأزواجَ المرتبة التي فيها المسقطُ الأول يساوي المسقطَ الثاني مثل (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٨، ٨) مُثلت بعروةٍ لتدل على أن السهمَ يخرجُ من النقطةِ، وينتهي عند نفس النقطة.

لاحظ أن: ن (س) = ٣ فتكون: ن (س × س) = ٣ × ٣ = ٩

وفي هذه الحالةِ يمثل حاصل الضرب الديكارتي س × س بيانيًا بتسع نقاطٍ، وكلّ نقطةٍ تمثّل زوجًا مرتبًا.

أما إذا كانت س مجموعةً غيرَ منتهيةٍ (لا يمكن حصر عدد عناصرها) فإن:

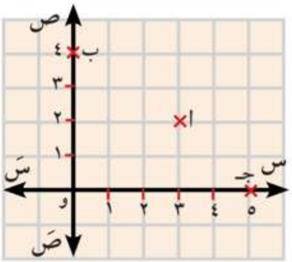
عدد عناصر س × س يكون غير منته.

فكر: كيف يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لكل من:

ط × ط، ص × ص، ن × ن، ح × ح

حاصلُ الضرب الديكارتي للمجموعاتِ غير المنتهية والتَّمثيل البياني له.

أولاً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي ط × ط = {(س، ص) : س ∈ ط، ص ∈ ط}



١ نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما $\overleftrightarrow{س سَ}$ أفقيًّا والآخر $\overleftrightarrow{ص صَ}$ رأسيًّا ومتقاطعين في النقطة و.

٢ نمثل الأعدادَ الطَّبيعية ط على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي مبتدئين بالنقطة (و) التي تمثل العددَ صفر.

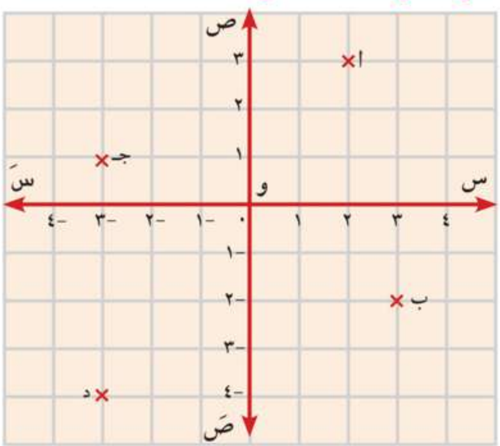
٣ ترسم مستقيماتٌ رأسيةٌ وأخرى أفقيةٌ من النقطِ التي تمثل الأعدادَ الطَّبيعية ، سوف نحصل على الشكلِ المقابلِ، وتكون نقط التقاطع لمجموعة هذه المستقيمات ممثلةً للشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي ط × ط.

لاحظ أن: كلَّ نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ط × ط.

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، ٢)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٠، ٤)

أكمل: النقطة جـ تمثل الزوج المرتب (،   )، النقطة و تمثل الزوج المرتب (،   )

ثانيًا: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ = {(س، ص): س ∈ صـ، ص ∈ صـ}.



نمثل مجموعةَ الأعدادِ الصَّحيحة على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

فتكون كلُّ نقطةٍ من نقط الشبكة تمثِّل أحدَ الأزواج في حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ.

وتعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثي صـ × صـ

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢،٣)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٣،-٢)

ثالثًا: لتمثيلِ حاصل الضرب الديكارتي ن × ن = {(س، ص) : س∈ن، ص∈ن}

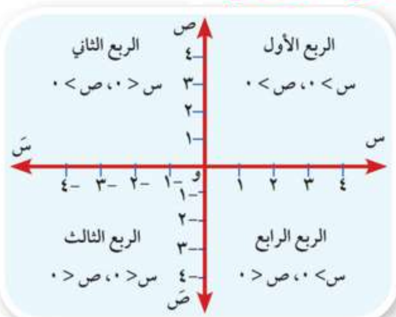
ارسم شبكةً بيانيةً متعامدةً ومثل مجموعةَ الأعدادِ النسبية ن على المستقيمين الأفقي والرأسي، ثم عيِّن عليها النقط: أ (٣، $\frac{٥}{٢}$)، ب (-$\frac{٣}{٢}$، ٤)، جـ (-٣، -$\frac{٣}{٢}$)، د ($\frac{٥}{٢}$، -$\frac{٣}{٢}$)

رابعًا: تمثيل حاصل الضرب الديكارتي ح × ح = {(س، ص) : س ∈ ح، ص ∈ ح}

حيث تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي، كما تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

يسمى المستقيم الأفقي $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ محور السينات، ويسمّى المستقيم الرأسي $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ محور الصادات

فتنقسم الشبكةُ إلى أربعةِ أقسامٍ (أرباع) كما بالشَّكل المقابل:

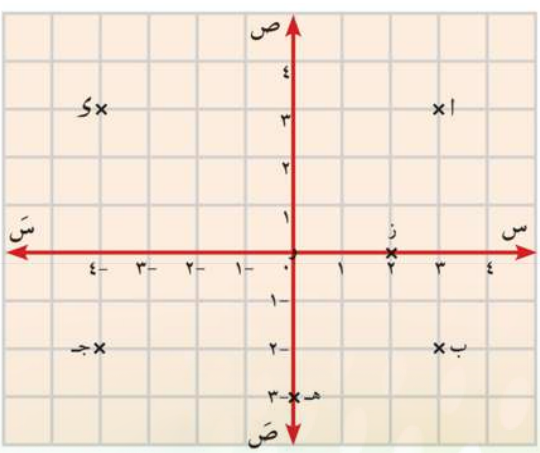


مثال ٦

كوِّن شبكةً تربيعيةً متعامدةً لحاصِل الضرب الديكارتي ح × ح ثم اذكر الربعَ الذي تقعُ فيه أو المحور الذي ينتمي إليه كل من النقط الآتية:

أ (٣، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٤، -٢)، ى (-٤، ٣)، هـ (٠، -٣)، ز (٢، ٠)

الحل



أ (٣، ٣) تقع في الربع الأول
ب (٣، -٢) تقع في الربع الرابع
جـ (-٤، -٢) تقع في الربع الثالث
د (-٤، ٣) تقع في الربع الثاني
هـ (٠، -٣) تقع على محور الصادات
ز (٢، ٠) تقع على محور السينات.

١ - ٢

العلاقات

سوف تتعلم

☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ.

☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة إلى نفسها.

مصطلحات أساسية

☆ علاقة.

☆ بيان العلاقة.

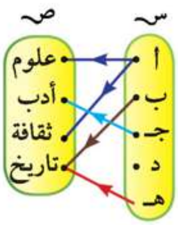
فكر وناقش

في مهرجان القراءة للجميع ذهب خمسةُ تلاميذ يمثلون المجموعة سـ= {أ، ب، جـ، د، هـ} إلى مكتبةِ المدرسة لقراءة بعضِ الكتب التي تمثلها المجموعةُ صـ = {علوم، أدب، ثقافة، تاريخ}.
فقرأ التلميذ (أ) كتابًا من كتب العلوم، وكتابًا من كتب الثقافة، وقرأ التلميذ (ب) كتابًا من كتب التاريخ، وقرأ التلميذ (جـ) كتابًا أدبيًّا، وقرأ التلميذ (هـ) كتابًا من كتب التاريخ، ولم يقرأ التلميذ (د) أيًّا من هذه الكتب.

١ اكتب العبارات السابقةَ في صورة أزواج مرتبة من سـ إلى صـ.

٢ مثِّل مجموعة الأزواج المرتبة السابقة في صورة مخطط سهمي.

لاحظ أن: التعبير «قرأ» قد ربط بين بعض عناصر المجموعة سـ ببعض عناصر المجموعة صـ أي أن التعبير «قرأ» يعين علاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ وسنرمز لها عادة بالرمز ع وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمخططٍ سهميٍّ كالمبين بالشكل المقابل، حيث نرسمُ سهمًا يبدأ من التلميذِ، وينتهي عند نوع الكتب التي قرأها.



كما نستطيع أن نعبر عن العلاقة من سـ إلى صـ بمجموعة الأزواج المرتبة الآتية:

{(أ، علوم)، (أ، ثقافة)، (ب، تاريخ)، (جـ، أدب)، (هـ، تاريخ)}.

هذه المجموعةُ من الأزواجِ المرتبة تسمىّ بيان العلاقة ع.

فكِّر: هل بيان العلاقة ع مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي سـ × صـ؟

مثال ١

إذا كانت سـ = {-١، ١، ٢}، صـ = {٢، ٤، ٦، ٨}، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني: «ب = ٢ أ + ٤»، لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ
اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

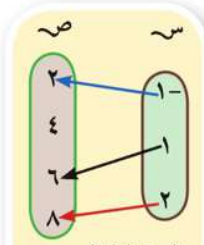
الحل

عندما أ = -١ ∴ ب = ٢ × (-١) + ٤ = ٢

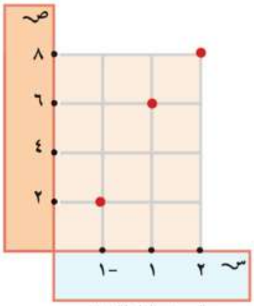
عندما أ = ١ ∴ ب = ٢ × ١ + ٤ = ٦

عندما أ = ٢ ∴ ب = ٢ × ٢ + ٤ = ٨

∴ ع = {(-١، ٢)، (١، ٦)، (٢، ٨)}



المخطط السهمي



المخطط البياني

مما سبق نستنتج أن

١) العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص حيث س، ص مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص.

٢) بيان العلاقةِ من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعةُ الأزواج المرتَّبة حيث المسقطُ الأول في كلٍّ منها ينتمي إلى المجموعة س، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة ص.

٣) إذا كانت ع علاقةً من مجموعة س إلى مجموعة ص فإن ع ⊂ س × ص.

العَلاقةُ من مجموعة إلى نفسها

إذا كان ع علاقة من س إلى س فإن ع تسمى علاقة على المجموعة س وتكون ع ⊂ س × س

مثال ٢

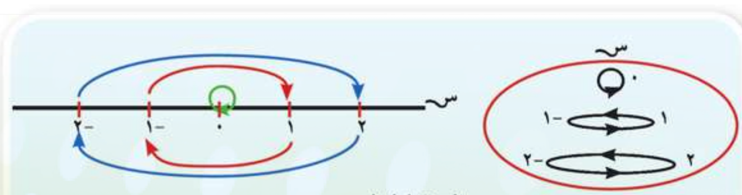
إذا كانت س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢} وكانت ع علاقةً معرفة على س حيث أ ع ب تعني :

«العدد أ معكوس جمعي للعدد ب». لكل أ، ب ∈ س

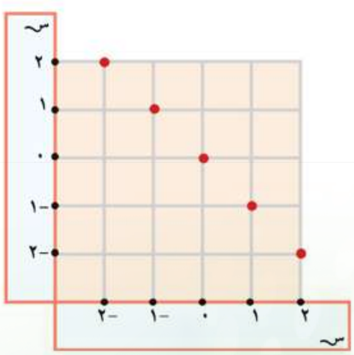
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر ديكارتي.

الحل

ع = {(-٢، ٢)، (-١، ١)، (٠، ٠)، (١، -١)، (٢، -٢)}



المخطط السهمي



المخطط الديكارتي

٣ - ١

الدَّالةُ (التطبيق)

سوف تتعلم

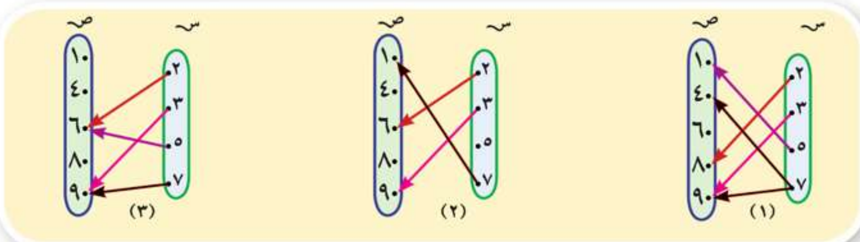
- ☆ مفهوم الدالة
- ☆ كيفية التَّعبير رمزيا عن الدالة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة
- ☆ مجال
- ☆ المجال المقابل
- ☆ مدى

فكر وناقش

الأشكالُ الآتيةُ تمثِّل ثلاثَ عَلاقات من سـ إلى صـ.



١ اكتب بيانَ كل علاقةٍ ومثِّلها بمخططٍ بياني.

٢ أي من هذه العلاقاتِ تحقِّق الشرطَ التالي: كل عنصر من عناصر سـ ارتبط بعنصرٍ واحد فقط من عناصر «صـ».

تعريف

يقالُ لعلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ أنها دالة إذا كان:

كلُّ عنصرٍ من عناصر سـ يظهر كمسقطٍ أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحدّدة لبيان العلاقة.

التعبيرُ الرمزيُّ للدالة:

١ يرمزُ للدالةِ بأحد الرموز: د أو ق أو ر أو ...

والدالة د من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ تكتب رياضيًّا:

د: سـ ← صـ وتقرأ: «د دالة من سـ إلى صـ».

ملاحظات:

١ إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى نفسها نقولُ إن د دالة على سـ.

٢ إذا كان الزوجُ المرتب (س، ص) ينتمي لبيان الدالة فإن العنصرَ ص يسمى صورة العنصر س بالدالة د.ونعبر عنه بإحدى الصورتين.

د: س ↤ ص وتقرأ الدالة: د ترسم س إلى ص

أو د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

١-٣

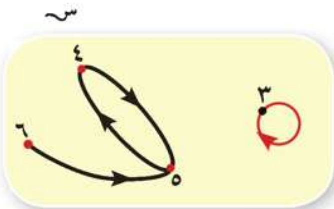
مثال ١

إذا كانت د دالة على سـ حيث: سـ = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان د (٣) = ٣، د (٤) = ٥، د (٥) = ٤، د (٦) = ٥.

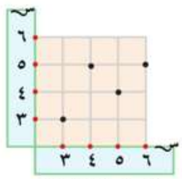
مثل د بمخطط سهمي وآخر بياني، اكتب بيانها.

الحل

بيان د = {(٣، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٥)}

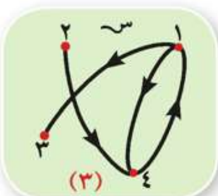


المخطط السهمي



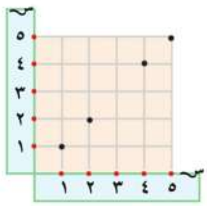
المخطط البياني

تدرب

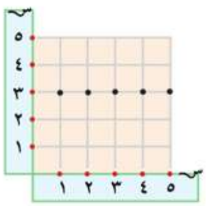


١ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣، ٤} فأي من المخططات السَّهمية الآتية تعبّر عن دالةٍ على المجموعة سـ

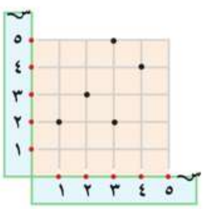
٢ أي من المخططاتِ البيانيةِ الآتية تعبِّر عن دالة من سـ إلى سـ.



(١)



(٢)



(٣)

فكِّر: هل كل علاقة دالة؟ فسِّر إجابتك وأعط أمثلة.

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ، أي أن: د: سـ ← صـ فإن:

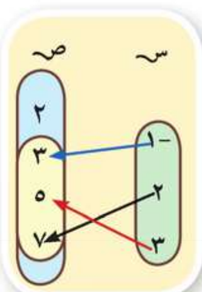
المجموعةُ سـ تسمى مجال الدالة د.

المجموعةُ صـ تسمى المجال المقابل للدالة د.

مجموعةُ صور عناصر مجموعة المجال سـ بالدالة د تسمى مدى الدالة.

فمثلاً: إذا كانت د: سـ ← صـ

، سـ = {-١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}، بيان د = {(-١، ٣)، (٣، ٥)، (٢، ٧)} فإن:



١ مجال الدالة د هو المجموعة سـ = {-١، ٢، ٣}

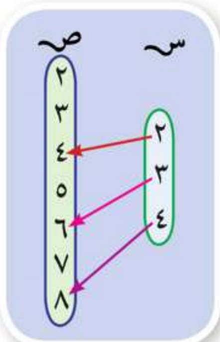
٢ المجالُ المقابلُ للدالةِ د هو المجموعة صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}

٣ مدى الدالة د هو مجموعةُ صور عناصر المجموعة سـ بواسطة الدالة د = {٣، ٥، ٧}

لاحظ أن: المدى مجموعةٌ جزئيةٌ من المجالِ المقابل للدالة.

مثال ٢

إذا كانت س = {٢، ٣، ٤}، ص = {ص : ص ∈ ط، ٢ ≤ ص < ٩} حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «أ = $\frac{1}{2}$ ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص، اكتب بيان ع ومثّلها بمخطط سهمي. بين أن ع دالة من س إلى ص وأوجد مداها.



الحل

ص = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}   بيان ع = {(٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر ص

مدى الدالة = {٤، ٦، ٨}

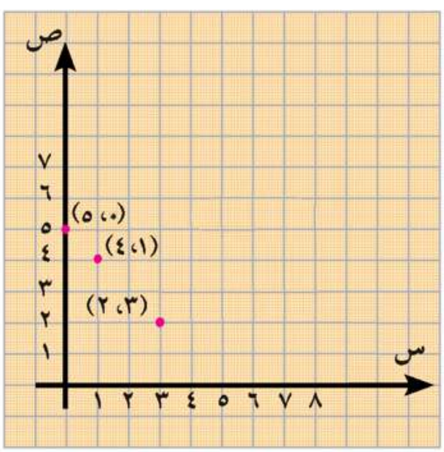
مثال ٣

إذا كانت س = {٠، ١، ٣}، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧} وكانت د : س ⟵ ص

حيث د (س) = ٥ − س . أوجد : ١ـ أوجد صور عناصر س بالداله د .

٢ـ ارسم مخطط بيانى للداله د .

الحل



د (س) = ٥ − س

د (٠) = ٥ ، د (١) = ٤ ، د (٣) = ٢

بيان الداله د = {(٠ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢)}

مدى الداله = {٥ ، ٤ ، ٢}

١ - ٤

دوالُّ كثيراتُ الحُدودِ

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم الدالة الخطية وتمثيلها البياني.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالةٌ كثيرةُ الحدود.
- ☆ دالةٌ خطيةٌ.
- ☆ دالة تربيعية.
- ☆ تمثيل بياني للدالة.

فكر وناقش

في الدوال $د: ح \leftarrow ح$ ، $د(س) = ٥$

$ر: ح \leftarrow ح$ ، $ر(س) = ٣ س - ٨$

$ه: ح \leftarrow ح$ ، $ه(س) = ٤ س^{٢} - ٥ س + ٨$

نلاحظ أن :

١ المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقية ح.

٢ قاعدةُ الدالة (صورة س) هي حد أو مقدار جبري.

٣ ما قوة المتغير س في الدوالِ السابقةِ؟

تعريف

الدالة $د : ح \leftarrow ح$ حيث:

$د(س) = ا_{٠} + ا_{١} س + ا_{٢} س^{٢} + ... + ا_{ن} س^{ن}$ حيث $ا_{٠}، ا_{١}، ا_{٢}، ... ا_{ن} \in ح$
$ن \in ط$، $ا_{ن} \neq ٠$، تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة ن.

وتكون: درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة.

تدرب

١ أي من الدوالِّ التالية تمثل كثيرة حدود:

أ $د_{١}(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣$ ب $د_{٢}(س) = س^{٣} + \frac{١}{س} + ٧$

جـ $د_{٣}(س) = س^{٢} + \sqrt{س} + ٨$ د $د_{٤}(س) = س(س + \frac{١}{س} - ٢)$

٢ إذا كانت $د: ح \leftarrow ح$ فاذكر درجة الدالة في كل حالة:

أ $د(س) = ٣ - ٢ س$ ب $د(س) = س^{٢} - (س^{٢} - ٣)$

جـ $د(س) = س(س - ٢س^{٢})$ د $د(س) = س^{٢}(س - ٣)^{٢}$

مثال ١

إذا كان د(س) = س^{٢} - س + ٣ أوجد: د (-٢) ، د (٠) ، د ($\sqrt{٣}$)

الحل

∵ د (س) = س^{٢} - س + ٣ ∴ د (-٢) = (-٢)^{٢} - (-٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩

د (٠) = ٣ ، د ($\sqrt{٣}$) = ($\sqrt{٣}$)^{٢} - $\sqrt{٣}$ + ٣ = ٦ - $\sqrt{٣}$

تدرب

إذا كانت: د (س) = س^{٢} - ٣ س ، ر (س) = س - ٣

أ أوجد: د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$)

ب اثبت د (٣) = ر (٣) = صفر

الدالة الخطية

تعريف

الدالة د : ع ← ع حيث د(س) = أ س + ب ، أ، ب ∈ ع، أ ≠ ٠ تسمى هذه الدالة دالة خطية، أو دالة من الدرجة الأولى.

التمثيلُ البياني للدالة الخطيَّة:

مثال ٢

مثِّل بيانيًّا الدالة د: ع ← ع، د (س) = ٢ س - ٣

الحل

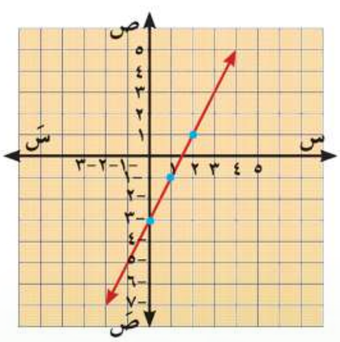
∵ د (س) = ٢ س - ٣

∴ د (٠) = ٠ - ٣ = -٣، د (١) = ٢ - ٣ = -١ ، د (٢) = ٤ - ٣ = ١

يمكن وضعُ هذه الأزواج المرتبة داخلَ جدول كالآتي:

س	٠	١	٢
ص = د (س)	-٣	-١	١

وتمثِّل الأزواجُ المرتبةُ على الشبكةِ التربيعية لحاصلِ الضرب الديكارتي ع × ع



ملاحظات:

١ يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ، و يفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتَّحقق من صحةِ التمثيل البيانى للدالة.

٢ إذا كانت د : ع ← ع، د (س) = أ س، حيث أ ≠ ٠ فإنه يمثلها بيانيًّا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)

تدرب

مثِّل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

١ د: د (س) = س + ٢ ٢ ر : ر (س) = ٣ س ٣ ق : ق (س) = - ٢ س

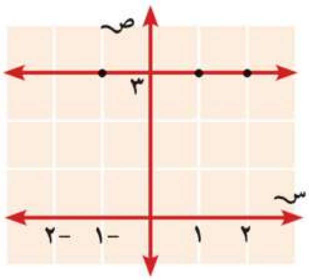
حالة خاصة: إذا كانت د : ع ← ع ، د (س) = ب حيث ب ∈ ع

فإن د تُسمىّ دالةً ثابتةً.

فمثلاً: د (س) = ٣ وتكتب ص = ٣

تمثل بمستقيم يوازي محور السينات.

س	١-	١	٢
ص = د (س)	٣	٣	٣



تدرب

مثل الدوال التالية بيانيًا

١ د (س) = ٥ ٢ د (س) = -٤ ٣ د(س) = ٠ ٤ د (س) = $\frac{1}{2}$ ٢

الدالةُ التَّربيعيةُ

الدالة د : ع ← ع حيث د (س) = أ $س^2$ + ب س + جـ ، أ، ب، جـ أعداد حقيقية، أ ≠ ٠ تُسمى دالة تربيعية. وهي دالة من الدرجة الثانية.

التمثيل البياني للدالة التربيعية.

مثال ٣

مثل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د، حيث د (س) = $س^2$، س ∈ ع متخذًا س ∈ [-٣،٣]

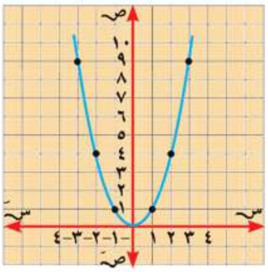
الحل

نعين بعضَ الأزواج المرتَّبة (س، د (س)) التي تنتمي إلى بيانِ الدالة د حيث س ∈ ع وأن الفترة [- ٣، ٣] تعطي بعضَ القيم الممكنة للمتغير س.

د(- ٣) = ٩ ، د(- ٢) = ٤، د (- ١) = ١، د(٠) = ٠، د (١) = ١، د (٢) = ٤، د (٣) = ٩

نضعُ هذه الأزواجَ المرتبةَ في جدولٍ كالآتي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



نعيِّن في المستوى الديكارتي النقاطَ التي تُمثِّل هذه الأزواجَ المرتبة. ثم نرسمُ منحنيًا ممهدًا يمرُّ بهذه النقاط.

لاحظ أن:

(١) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

(٢) إحداثي رأس المنحنى (٠، ٠) والقيمة الصغرى للدالة = ٠

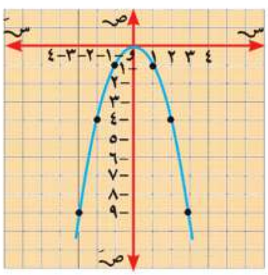
مثال ٤

مثِّل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د حيث: د (س) = - $س^{٢}$، س ∈ ح متخذًا س ∈ [-٣، ٣]

الحل

نكرِّر نفس خطوات الحل السابقة:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص = د (س)	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩



ومن الرسمِ نلاحظ أن:

(١) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

(٢) إحداثي رأس المنحنى (٠، ٠) والقيمة العظمى للدالة = ٠

الجبر

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب
والتغير الطردى والتغير العكسى

هل تعلم ؟

أن وزن الجسم على سطح القمر يساوى $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض

تصور أنك ذهبت فى رحلة للقمر ؛ كم سيصبح وزنك؟

٢ - ١

النسبة

سوف تتعلم

- مفهوم النسبة.
- خواص النسبة.

المصطلحات الأساسية

- مقدم النسبة.
- تالى النسبة.
- حدّا النسبة.

فكر وناقش

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هى: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{٤}{٣}$

وعمومًا إذا كان أ، ب عددين حقيقيين **فإن النسبة**

بين العدد أ والعدد ب

تكتب بإحدى الصور: أ إلى ب أو أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة، ويسمى ب تالى النسبة، ويسمى أ، ب معًا **بحدى النسبة.**

أكمل وأجب عن الأسئلة:

١ هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر؟

$$\frac{٣}{٥} \overset{?}{=} \frac{٣ \times ....}{٥ \times ....}$$

٢ هل تتغير النسبة إذا أضفنا عددًا حقيقيًّا لكل من حديها؟

$$\frac{٢}{٣} \overset{?}{=} \frac{٢ + ...}{٣ + ...}$$

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$، هل أ = ٣، ب = ٥ لجميع قيم أ، ب؟

مثال (١)

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

$\therefore \frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore$ ٣ (س + ٧) = ٢ (س + ١١)

$\therefore$ ٣ س + ٢١ = ٢ س + ٢٢ $\therefore$ ٣ س - ٢ س = ٢٢ - ٢١

$\therefore$ س = ١

مثال (٢)

أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ :٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل علي النسبة ٣:٢

الحل

نفرض ان العدد المطلوب = س حيث س $\in$ ح$_+$ $\therefore$ مربعه = $س^٢$

$\therefore \frac{٢٩ + س^٢}{٤٦ - س^٢} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ ٢ (٢٩ + $س^٢$) = ٣ (٤٦ - $س^٢$)

٥٨ + ٢ $س^٢$ = ١٣٨ - ٣ $س^٢$ $\therefore$ ٥$س^٢$ = ٨٠

$\therefore$ $س^٢$ = ١٦ $\therefore$ س = ٤

٢ - ٢

التناسب

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم التناسب
- ☆ خواص التناسب
- ☆ التناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- ☆ تناسب
- ☆ أول متناسب
- ☆ ثانى متناسب
- ☆ ثالث متناسب
- ☆ رابع متناسب
- ☆ طرفا التناسب
- ☆ وسطا التناسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه **يقال أن أ**، ب، جـ، د كميات متناسبة، وإذا كانت الكميات أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

فى التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ يسمى **(الأول المتناسب)**، ب يسمى **(الثانى المتناسب)**، جـ يسمى **(الثالث المتناسب)**، د يسمى **(الرابع المتناسب)**.

كما يسمى أ، د **طرفى التناسب**، ب، جـ **وسطى التناسب**.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن:

١) أ = م جـ ، ب = م د حيث م ∈ ح*

٢) أ د = ب جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

٣) $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عددية من عندك

ثانيًا: إذا كان: أ د = ب جـ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص بالمثال العددى الآتى:

تعلم أن: ٤ × ٨ = ٢ × ١٦

فإن: $\frac{٤}{٢} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{٤}{١٦} = \frac{.....}{.....}$

مثال ١

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة: $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

نفرض أن س = ٢م، ص = ٣م (حيث م ثابت ≠ صفر)

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م} = \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر:

بقسمة كل من البسط والمقام على ص ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{٣ \times \frac{س}{ص} + ٢}{٦ - \frac{س}{ص}} = \frac{٣ \times \frac{٢}{٣} + ٢}{٦ - \frac{٢}{٣}}$ ← **أكمل** $= \frac{\cdots}{\frac{\cdots}{\cdots}} = \frac{\cdots}{\cdots}$

مثال ٢

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب س

$\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

$\therefore ٤ \times س = ١٢ \times ١٦$ [حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين]

$\therefore س = \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$ $\therefore$ الرابع المتناسب = ٤٨

مثال ٣

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد س فتكون الأعداد ٣ + س، ٥ + س، ٨ + س، ١٢ + س **متناسبة**

$\therefore \frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$ $\therefore (٥ + س)(٨ + س) = (٣ + س)(١٢ + س)$

$\therefore ٤٠ + ١٣س + س^٢ = ٣٦ + ١٥س + س^٢$ $\therefore ١٥س - ١٣س = ٤٠ - ٣٦$

$\therefore ٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$

تدرب

١ أ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢، .... ، ٤، ٦

ب أوجد الثالث المتناسب للأعداد ٨، ٦، .... ، ١٢

٢ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة ٧ أ + ٩ ب : ٤ أ + ٢ ب

ثالثاً: إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ...$ ، م$_{١}$، م$_{٢}$، م$_{٣}$، ... $\in$ ح*

فإن: $\frac{\text{أ م}_{١} + \text{جـ م}_{٢} + \text{هـ م}_{٣} + ...}{\text{ب م}_{١} + \text{د م}_{٢} + \text{و م}_{٣} + ...}$ = إحدى النسب

فمثلا: إذا كان: $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣} = \frac{\text{جـ}}{٤}$ بضرب حدى النسبة الأولى فى ٢ وحدى النسبة الثانية فى -٥ وحدى النسبة الثالثة فى ٣ $\therefore$ $\frac{٢\text{أ} - ٥\text{ب} + ٣\text{جـ}}{٢ \times ٢ - ٣ \times ٥ + ٣ \times ٤}$ = إحدى النسب

أى أن: ٢أ - ٥ب + ٣جـ = إحدى النسب

مثال ٤

إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن**: $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} - ٢\text{د}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$

الحل

$\because$ إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة $\therefore$ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٥ والثانية فى ٣ فإن مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

$\therefore$ $\frac{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$ = إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٣ والثانية فى -٢ فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب.

$\therefore$ $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٣\text{ب} - ٢\text{د}}$ = إحدى النسب (٢)

من (١)، (٢) $\therefore$ $\frac{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٣\text{ب} - ٢\text{د}}$

$\therefore$ $\frac{٣\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٥\text{أ} + ٣\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} - ٢\text{د}}{٥\text{ب} + ٣\text{د}}$ (وهو المطلوب إثباته)

حل آخر:

افرض $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت

أ = ب م ، جـ = د م وعوض فى كلا الطرفين.

تدرب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فأثبت أن:**

أولاً: $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ **ثانيًا:** $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

إرشاد: افرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت $\neq$ ٠ وأكمل

أو بأى طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{٢}{٦}$، $\frac{٦}{١٨}$

١ هل توجد علاقة بين $(٦)^{٢}$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

٢ إذا استبدل العدد ٦ بالعدد (-٦) هل توجد علاقة بين $(-٦)^{٢}$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، جـ: إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، جـ بالثالث المتناسب

حيث: $ب^{٢} =$ أجـ أو ب = $\pm \sqrt{أجـ}$

مثال ٥

أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل

الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm ٩$

مثال ٦

إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، جـ

أي أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

نفرض $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

$\therefore$ ب = جـ م، أ = ب م = جـ م $\times$ م = جـ م^٢

الطرف الأيمن = $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٤ + جـ^٢ م^٢}{جـ^٢ م^٢ + جـ^٢}$

$= \frac{جـ^٢ م^٢ (م^٢ + ١)}{جـ^٢ (م^٢ + ١)} = م^٢$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

حل آخر:

بفرض: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ $\therefore \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \text{م}^{٢}$

من النسبتين الأولى والثانية $\text{م}^{٢} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}$ = الطرف الأيمن

، $\text{م}^{٢} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ = الطرف الأيسر

من (١)، (٢) $\therefore \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

مثال (٧) أكمل مايأتي :

١ ـ إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{\text{ص}}$ في تناسب متسلسل

فإن : $\text{س}^{٢}\text{ص}$ = ...

٢ـ الوسط المتناسب للكميتين ٩ $\text{س}^{٢} - ٢٥\ \text{ص}^{٢}$ ، $\frac{٣\ \text{س} + ٥\ \text{ص}}{٣\ \text{س} - ٥\ \text{ص}}$ هو ....

الحل

١ ـ $\because$ ٧ ، س ، $\frac{١}{\text{ص}}$ في تناسب متسلسل فإن $\frac{٧}{\text{س}} = \text{س ص}$

$\therefore \text{س}^{٢}\text{ص} = ٧$

٢ـ $\because$ ٩ $\text{س}^{٢} - ٢٥\ \text{ص}^{٢}$ ، م ، $\frac{٣\ \text{س} + ٥\ \text{ص}}{٣\ \text{س} - ٥\ \text{ص}}$ في تناسب متسلسل

حيث م الوسط المتناسب

$\therefore \frac{٩\text{س}^{٢} - ٢٥\ \text{ص}^{٢}}{\text{م}} = \frac{\text{م}(٣\ \text{س} - ٥\ \text{ص})}{٣\ \text{س} + ٥\ \text{ص}}$ $\therefore \text{م}^{٢} = (٣\ \text{س} + ٥\ \text{ص})^{٢}$

$\therefore \text{م} = \pm (٣\ \text{س} + ٥\ \text{ص})$

٢ - ٣

التغير الطردى و التغير العكسى

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم التغير الطردى
- ☆ مفهوم التغير العكسى
- ☆ كيفية التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

- ☆ تغير
- ☆ تغير طردى
- ☆ تغير عكسى

أولا: التغير الطردى

فكر وناقش (١)

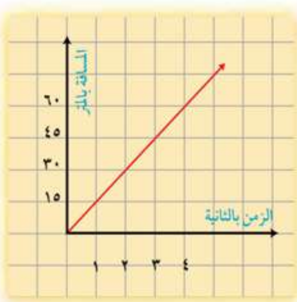
تتحرك سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث فإذا كانت المسافة المقطوعة ف بالمتر فى زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة: ف = ع ن.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

أ مثِّل العلاقة بين ف، ن بيانيًا.

ب هل التمثيل البيانى يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)؟

جـ أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ؟



نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقدارًا ثابتًا وهو ١٥

أي: ف = ١٥ ن ويقال حينئذ إن ف تتغير طرديًا بتغير ن وتكتب رمزيًا ف ∝ ن.

تعريف:

يقال: إن ص تتغير طرديًا مع س وتكتب ص ∝ س إذا كانت ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠) وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_{١}$، $س_{٢}$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_{١}$، $ص_{٢}$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{س_{١}}{س_{٢}}$

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ إذا كانت ص ∝ س فإن ص = م س **وكذلك** إذا كانت ص = م س فإن ص ∝ س

مثال ١

إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**

أولاً: العلاقة بين ص، س   **ثانيًا:** قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

أولاً: ∵ ص ∝ س   ∴ ص = م س   (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

∴ ١٤ = ٤٢ × م   ∴ م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

ثانيًا: عندما س = ٦٠   ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

ملاحظة: يمكن استخدام العلاقة $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_١}{س_٢}$ لإيجاد قيمة ص فى المطلوب الثاني

ثانياً: التغير العكسى

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

أ **اكتب** العلاقة بين كل من م ، س ، ص.

ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوى ٣٠ سم^٢ **فأكمل** الجدول الآتى:

س	٣	٥	٦	١٠
ص	....	....	....	....

جـ **أوجد** س ص فى كل حالة. **ماذا تلاحظ؟**

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠   أى أن: ص = $\frac{٣٠}{س}$ أى أن ص تتغير عكسيًا بتغير س وتكتب رمزيًا   ص ∝ $\frac{١}{س}$

وبالمثل: س = $\frac{٣٠}{ص}$ أى أن: س تتغير عكسيًا بتغير ص وتكتب رمزيًا   س ∝ $\frac{١}{ص}$

تعريف:

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ إذا كانت س ص = م (حيث م ثابت ≠ ٠)

وإذا أخذ المتغير س القيمتين س_1، س_2 وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين ص_1، ص_2 على الترتيب فإن: $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ولا يمثلها خط مستقيم.

٢ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن: ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وكذلك إذا كانت ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ فإن ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$.

مثال ٢

إذا كانت ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أولاً: أوجد العلاقة بين س، ص. **ثانيًا:** أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥.

الحل

∵ ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ ∴ ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتى س، ص فى العلاقة

∴ ٣ = $\frac{\text{م}}{2}$ ∴ م = ٢ × ٣ = ٦

∴ العلاقة هى: ص = $\frac{6}{\text{س}}$

عندما س = ١,٥ ∴ ص = $\frac{6}{1.5}$ = ٤

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة ص من العلاقة $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

تدرب

بين أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب فى كل حالة:

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
-٢	-٩
-١٨	١
٩	-٢

مثال ٣

الربط بالفيزياء: إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هى ع = ٩,٨ ن

أولاً: **حدد** نوع التغير بين ع، ن.

ثانيًا: أ **أوجد** قيم ع عندما ن = ٢ ثانية ، ن = ٤ ثوانٍ

ب **أوجد** قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ متر/ث

الحل

أولاً: ∵ ع = ثابت × ن أي ع ∝ ن أي ع تتغير طرديًا بتغير ن.

ثانيًا: أ عندما ن = ٢ تكون ع = ٩,٨ × ٢ = ١٩,٦ متر/ث

عندما ن = ٤ تكون ع = ٩,٨ × ٤ = ٣٩,٢ متر/ث

ب عندما ع = ٢٤,٥ تكون ٢٤,٥ = ٩,٨ × ن ∴ ن = $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = ٢,٥ ثانية.

مثال ٤

الربط بالهندسة: إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم؛ **فأوجد** (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم.

الحل

∵ $\text{ع} \propto \frac{1}{\text{نق}^2}$ ∴ $\text{ع} = \text{م} \times \frac{1}{\text{نق}^2}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

ع = ٢٧ عند نق = ١٠,٥

∴ $٢٧ = \text{م} \times \frac{1}{(١٠,٥)^2}$ ∴ $\text{م} = ٢٧ \times (١٠,٥)^2$ (١)

وبالتعويض من (١) ∴ $\text{ع} = ٢٧ \times (١٠,٥)^2 \times \frac{1}{\text{نق}^2}$

وعندما نق = ١٥,٧٥ سم ∴ $\text{ع} = ٢٧ \times (١٠,٥)^2 \times \frac{1}{(١٥,٧٥)^2} = ١٢$ سم

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلي:

27 | × | 10.5 | x^2 | ÷ | 15.75 | x^2 | =

مثال (٥)

الربط مع الكيمياء : إذا كانت العلاقة بين كل من الكثافة (ث) و الكتلة (ك) و الحجم (ح) هي

$\text{ث} = \frac{\text{م ك}}{\text{ح}}$ ، (حيث م ثابت ≠ ٠)

أولاً : حدد نوع التغيير بين ث ، ك ونوع التغيير بين ث ، ح

ثانياً : أوجد قيمة م إذا كان ث = ٦ جم / سم^3 ، ك = ٣٠ جم ، ح = ٧ سم^3

ثالثاً : أوجد قيمة ح إذا كان ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^3

الحل

أولاً : الكثافة (ث) تتناسب طردياً مع الكتلة (ك) ، تتناسب عكسياً مع الحجم (ح)

ثانياً : $\text{ث} = \frac{\text{م ك}}{\text{ح}} \longleftarrow ٦ = \frac{\text{م}(٣٠)}{٧} \longleftarrow \text{م} = \frac{٤٢}{٣٠} = \frac{٧}{٥}$

ثالثاً : وعندما ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^3 ∴ $٩ = \frac{٧ \times ٤,٥}{٥\text{ح}}$

∴ $\text{ح} = \frac{٧ \times ٠,٩}{٩} = ٠,٧$ م^3

الإحصاء

الوحدة الثالثة : الإحصاء

مطعم للمثلجات يقدم أنواعًا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين.

ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.

٣ - ١

جمع البيانات

سوف تتعلم

- ☆ أنواع مصادر جمع البيانات.
- ☆ أساليب جمع البيانات.
- ☆ كيفية اختيار عينة.
- ☆ أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

- ☆ مصادر أولية.
- ☆ مصادر ثانوية.
- ☆ أسلوب الحصر الشامل.
- ☆ أسلوب العينات.
- ☆ اختيار متحيز.
- ☆ اختيار عشوائي.
- ☆ عينة.
- ☆ عينة عشوائية.
- ☆ عينة طبقية.

فكر وناقش

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائى واتخاذ القرارات المناسبة.

١ ما مصادر جمع البيانات؟ ٢ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

١ مصادر أولية (مصادر ميدانية):

وهى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأى) و يتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

٢ مصادر ثانوية (مصادر تاريخية):

وهى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

ويتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعًا للهدف وحجم المجتمع الإحصائى محل البحث. و يعرف المجتمع الإحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة.

فمثلاً: تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته التلميذ .

أولا: أسلوب الحصر الشامل:

ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج.

ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة.

ثانيًا: أسلوب العينات:

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائى الذى تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات:

1. توفير الوقت والجهد والتكاليف.
2. الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع الأسماك مثلاً).
3. الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة فى بعض الأحيان مثل:

أ فحص دم مريض من خلال عينة (لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة).

ب فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح.

(معرفة العمر الزمنى للمصباح الكهربى يقتضى إشعاله حتى احتراقه).

ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيدًا (صادقًا)، وتسمى **بالعينة المتحيزة**.

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها فى العينة :

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)

وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما فى مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار فى ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولايعتبر هذا الاختيار عشوائيًّا.

ثانيًا: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

(١) العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

أ إذا كان حجم المجتمع صغيرًا:

عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل ٤٠ تلميذًا فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ يكتب عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة ، ثم توضع فى صندوق ، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق . وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

ب إذا كان حجم المجتمع كبيرًا:

بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ،فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملية شاقة ؛فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠ ، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج EXCEL) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩ ، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ كما يلى :

ابدأ

ومع تكرار الضغط على مفتاح  تتوالى ظهور الأرقام ونكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

٢ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس؛ أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعًا للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، و يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.

مثال: عند دراسة المستوى التعليمى لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصًا؛ فلابد أن نختار ٣٠ شخصًا من طبقة الذكور، ٢٠ شخصًا من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.

مثال

مصنع به ٥٠٠ عامل ويريد المسئولون عن المصنع معرفة آراء العاملين فى نظام ساعات الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع. وضح كيف يتم اختيار هذة العينة باستخدام الألة

الحل

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٥٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠ = ٥٠ عاملاً

أي أننا نريد اختيار ٥٠ عاملاً لإجراء هذا الأستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كما يلى :

١- يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقماً من ١ إلى ٥٠٠

٢- تستخدم الألة الحاسبة العلمية لاختيار ٥٠ رقماً بالطريقة السابق ذكرها والتى تنحصر بين ١ ، ٥٠٠ والأرقام العشوائية التى تظهر اكبر من ٥٠٠ يتم استبعادها.

ناقش معلمك فى الحل

٣ - ٢

التشتت

سوف تتعلم

☆ مقاييس التشتت (المدى - الانحراف المعيارى)

مصطلحات أساسية

☆ نزعة مركزية.
☆ وسط حسابي.
☆ تشتت.
☆ مدى.
☆ انحراف معياري.

فكر وناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى، الوسيط، المنول) وأمكنك حسابها لأية مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حول هذه القيمة.

فإذا كان الأجر الأسبوعى بالجنيهات لمجموعتين من العمال أ، ب فى أحد المصانع كما يلى:

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠

مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

١ **أوجد** الوسط الحسابى لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

٢ **قارن** بين أجور المجموعتين أ، ب. **ماذا تستنتج؟**

تعلم أن: الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

فيكون:

الوسط الحسابى لأجور **المجموعة أ** = $\frac{١٧٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٢٣٠ + ٢٤٠}{٥}$

= $\frac{١٠٠٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

الوسط الحسابى لأجور **المجموعة ب** = $\frac{٥٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٩٠ + ٤٠٠}{٥}$

= $\frac{١٠٠٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

١ **الوسط الحسابى** لأجور المجموعة أ = الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = ٢٠٠ جنيه

٢ **الأجر الوسيط** = الأجر المنوالى = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

ويلاحظ أن:

(١) مجموعتى الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية.

(٢) أجور المجموعة أ متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهًا، بينما أجور المجموعة ب متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٥٠، ٤٠٠ جنيه.

أى أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتًا من أجور المجموعة أ.

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضها.

التشتت: لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.

أى إن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

مقاييس التشتت

١ المدى : (أبسط مقاييس التشتت)

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها فى المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = ٦٠ - ٥١ = ٩

مدى المجموعة الثانية = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠

وعلى هذا نعتبر **المجموعة الثانية أكثر تشتتًا من المجموعة الأولى.**

لاحظ أن:

(١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

(٢) يتأثر المدى تأثرًا كبيرًا بالقيم المتطرفة.

فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تتشتت فى مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢) منها فإن **المدى** = ٥٢ - ٤٢ = ١٠ أى $\frac{١}{٥}$ المدى السابق حسابه.

(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى،فقد لايعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٢ الانحراف المعيارى:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو **"الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى".**

أى أن:

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\left(\text{س} - \overline{\text{س}}\right)^{٢}}{\text{ن}}}$$

حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات.

$\overline{\text{س}}$ (سين Bar) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.

ن إلى عدد المفردات.

مجـ إلى عملية الجمع.

أولا: حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:

مثال

احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ٢١

الحل

لحساب الانحراف المعيارى نكوِّن الجدول المقابل حيث:

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

$$\therefore \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$\overline{\text{س}} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٦ + ١٨ + ٢١}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

$$\because \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\left(\text{س} - \overline{\text{س}}\right)^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} \simeq ٣,٢٨٦$$

س	س - $\overline{\text{س}}$	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢}
١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
المجموع ٨٠		٥٤

ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى :

لأى توزيع تكرارى، يكون:

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢} ك}{\text{مجـ} ك}}$$

حيث: **س** تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، **ك** تكرار القيمة أو المجموعة

مجـ ك مجموع التكرارات ، الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{\text{مجـ} س ك}{\text{مجـ} ك}$

مثال ١

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة.

الحل

باعتبار عدد الوحدات التالفة (**س**) وعدد الصناديق المناظر لها (**ك**)
لحساب الانحراف المعيارى للوحدات التالفة نكوِّن الجدول التالى:

ويكون:

عدد الوحدات التالفة (س)	عدد الصناديق (ك)	س × ك	س - $\overline{س}$	(س - $\overline{س}$)^{٢}	(س - $\overline{س}$)^{٢}ك
صفر	٣	صفر	٣-	٩	٢٧
١	١٦	١٦	٢-	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	١-	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

الوسط الحسابى $\overline{س}$

$$= \frac{\text{مجـ} س \times ك}{\text{مجـ} ك}$$

$$= \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$$

الانحراف المعيارى σ

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢} ك}{\text{مجـ} ك}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} \simeq ١,٤٢٨ \text{ وحدة}$$

مثال ٢

التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.

الحل

(١) نوجد مراكز المجموعات س

فيكون: مركز المجموعة الأولى = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ = ٦

وهكذا ونسجلها فى العمود الثالث.

(٢) نضرب مراكز المجموعات × التكرارات المناظرة لها؛ **أي** س × ك ونسجلها فى العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

(٣) نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابى؛ **أي** نوجد $(\text{س} - \overline{\text{س}})$

(٤) نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط الحسابى؛ **أي** $(\text{س} - \overline{\text{س}})^٢$

(٥) نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابى × تكرار هذه المجموعة؛ **أي** $(\text{س} - \overline{\text{س}})^٢ \times \text{ك}$

(٦) نحسب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^٢ \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$

فيكون:

المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 ك$
-٠	٢	٢	٤	-١٠,٦	١١٢,٣٦	٢٢٤,٧٢
-٤	٥	٦	٣٠	-٦,٦	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
-٨	٨	١٠	٨٠	-٢,٦	٦,٧٦	٥٤,٠٨
-١٢	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
١٦-٢٠	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
المجموع	٤٠		٥٠٤			٨١٧,٦

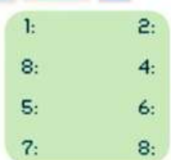
الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$

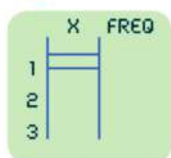
الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \sqrt{٢٠,٤٤} \simeq ٤,٥٢$ درجة

يمكن استخدام حاسبة الجيب [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] فى التحقق من صحة حساب الانحراف المعيارى.

أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائى والاستعداد لإدخال البيانات

On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)



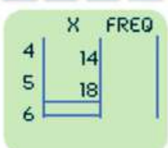


ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (مثال ٢)

١ ندخل مراكز المجموعات ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨

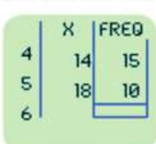
On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)

2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =

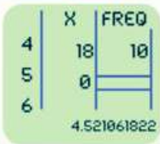


٢ الانتقال إلى بداية العمود الثانى(FREQ) وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٢، ٥، ٨، ١٥، ١٠

► ▲ 2 = 5 = 8 = 1 5 = 1 0 =



③ استدعاء الناتج (الانحراف المعيارى) Shift 1 5 (VAR) 3 (Xσn) = ▲



فيكون $\sigma \simeq ٤,٥٢١$

④ العودة للنظام الأصلى وإغلاق الحاسبة

لاحظ أن:

(١) يتأثر الانحراف المعيارى بانحرافات جميع القيم، وبالتالى تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.

(٢) الانحراف المعيارى له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس عند تساويها فى الوسط الحسابى، وتكون المجموعة الأكبر فى الانحراف المعيارى هى الأكثر تشتتًا.

حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

علم حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات والذى يتناول دراسة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، وكان قدماء المصريين هم أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات فى بناء الأهرامات، وبناء معابدهم، وفى دراسة الفلك،وفى حساب المسافات الجغرافية، كما قاس البابليون الزوايا بالدرجات والدقائق والثوانى، وقد قام البيرونى بعمل جداول لجيوب الزوايا ثم استنتج الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف الغرب على ما صاغه علماء العرب والمسلمون من خلال ترجمة كتب الفلك العربية على يد العالم الألمانى يوهان مولر.

أبو الريحان البيرونى
عالم ولد فى خوارزم عام
٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

٤ - ١

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.

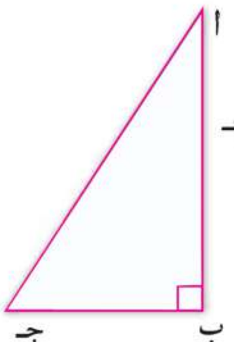
مصطلحات أساسية

- قياس ستينى.
- جيب زاوية.
- جيب تمام زاوية .
- ظل زاوية.

فكر و ناقش

فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب،

أكمل باستخدام أحد الرموز (> أو < أو =)



١ إذا كان ق(∠ جـ) > ق (∠ أ) فإن أ ب ...... ب جـ

٢ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ١

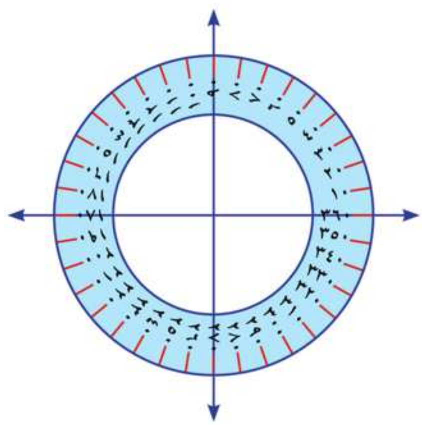
٣ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ١

٤ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \div \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ...... $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

٥ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ١

٦ $\frac{(\text{أ ب})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}} + \frac{(\text{ب جـ})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}}$ ١

القياس الستينى للزوايا



درسنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°، وإذا قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة)؛ والدرجة هى وحدة القياس الستينى، كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالى:

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

٣٥ درجة ، ٢٤ دقيقة ، ٤٢ ثانية تكتب

كالآتى : ″٤٢ ′٢٤ °٣٥ ويمكن تحويل الدقائق والثوانى إلى أجزاء من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :

١-٤

أولاً: نحول ٢٤َ إلى درجات ٢٤َ = $\frac{٢٤}{٦٠}$ = ٠,٤°، ونحول ٤٢ً أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات:

٤٢ً = $\frac{٤٢}{٦٠}$ = ٠,٧َ ، ٠,٧َ = $\frac{٠,٧}{٦٠}$ = ٠,٠١١٦٦٦٧°

فيكون الناتج ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° = ٣٥ + ٠,٤ + ٠,٠١١٦٦٦٧ = ٣٥,٤١١٦٦٦٧°

ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالى:

والناتج هو: ٣٥,٤١١٦٦٦٧°   ٣٥ [°′″] ٢٤ [°′″] ٤٢ [°′″]

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

فمثلاً: ٥٤,٣٦° يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

فيكون الناتج : ٣٦ً ٢١َ ٥٤°   ٥٤,٣٦ [=] [SHIFT] [°′″]

تدرب

١ **اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:**

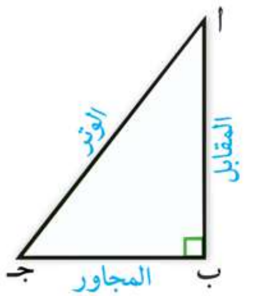
أ ١٦َ ٧٦°   ب ٥٦ً ٣َ ٤٥°   جـ ٨ً ٣٨َ ٨٥°   د ٤٣ً ٢٦َ ٦٥°

٢ **اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثوانى.**

أ ٣٤,٦°   ب ٧٨,٠٨°   جـ ٥٦,١٨°   د ٨٣,٢٤٦°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ، جـ زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية جـ يسمى بالمقابل ، والضلع المجاور للزاوية جـ يسمى بالمجاور ، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وسنتعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهى:

١ **جيب الزاوية:** ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية sin .

٢ **جيب تمام الزاوية:** ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية cos .

٣ **ظل الزاوية:** ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية tan .

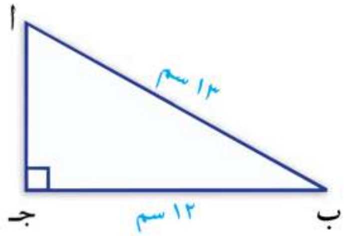
$$\text{جا حـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا حـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا حـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

مثال

١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، أ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٢سم .



أ **أوجد** طول $\overline{\text{أ جـ}}$

ب **أوجد كلاً من:** جا أ ، جتا أ ، ظا أ ، جا ب ، جتا ب ، ظا ب

جـ **أثبت أن :** جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

د **أوجد :** ١ + ظا^{٢}أ

الحل

أ ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} - (ب جـ)^{٢}

∴ (أ جـ)^{٢} = (١٣)^{٢} - (١٢)^{٢} = (١٣ + ١٢) (١٣ - ١٢) = ٢٥

∴ أ جـ = ٥سم

ب جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا أ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

جـ **الطرف الأيمن =** جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤ + ٢٥}{١٦٩} = ١$$

د ١ + ظا^{٢}أ = ١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

٤ - ٢

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد النسب المثلثية للزوايا.
- ☆ (٣٠°، ٤٥°، ٦٠°)

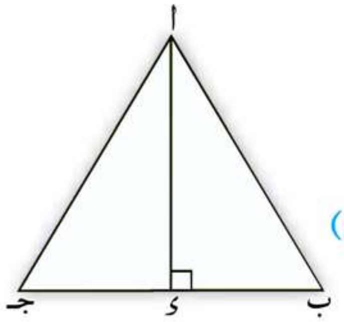
مصطلحات أساسية

- ☆ نسبة مثلثية.
- ☆ زاوية خاصة.

فكر وناقش

① فى الشكل المقابل:

ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٢ل ، رسم $\overline{\text{ا ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$



أكمل :

① ق(∠ب) = ...°

② ق(∠ب ا ى) = ...°

③ ب ى = ... ، ا ى = ... (بدلالة ل)

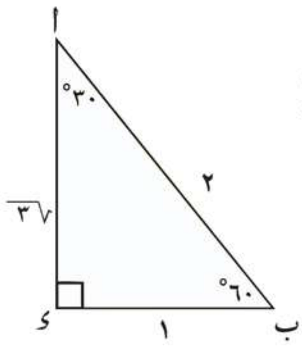
④ ب ى : ا ب : ا ى = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ ا ب ى ثلاثينى ستينى، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ب ى : ا ب : ا ى = ١ : ٢ : $\sqrt{3}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالى :



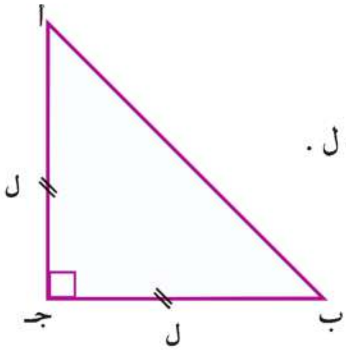
جا ٣٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{ا ب}}$ = $\frac{1}{2}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ٣٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{ا ى}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

جا ٦٠° = $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا ٦٠° = $\frac{\text{ب ى}}{\text{ا ب}}$ = $\frac{1}{2}$ ، ظا ٦٠° = $\frac{\text{ا ى}}{\text{ب ى}}$ = $\sqrt{3}$

فكر وناقش



① فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين،وقائم الزاوية فى جـ،وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

١ ق(∠أ) = ... ، ق(∠ب) = ...

٢ ∵ (أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + ... ∴ (أ ب)^{٢} = ل^{٢} + ...

∴ (أ ب)^{٢} = ٢ل^{٢} ∴ أ ب = $\sqrt{٢}$ ل

٣ أ جـ : ب جـ : أ ب = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

أ جـ : ب جـ : أ ب = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥° **كالآتى :**

جا ٤٥° = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ = ١

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالآتى :

ق الزاوية / النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

ملاحظات :

١ **مما سبق نجد أن:** (**جيب**) أى زاوية يساوى (**جيب تمام**) الزاوية المتممة لهذه الزاوية ، والعكس صحيح .

فمثلاً: جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥°

٢ لأى زاوية أ يكون : $\text{ظا أ} = \dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

مثال ١

أوجد قيمة كل من :

أ جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

ب $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠° + \text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠°}$

الحل

أ المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

ب المقدار = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠° + \text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠°} = \dfrac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + (١)^{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} - \left(\frac{١}{٢}\right)} = \dfrac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ١}{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}} = \dfrac{١ + ١}{١} = ٢$

تدرب

برهن على صحة كل مما يأتى:

أ جا^{٢} ٣٠° = ٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا^{٢} ٣٠°

مثال ٢

أوجد النسب المثلثية التالية :

جا ٤٣° ، جتا ٢٨َ ٥٣° ، ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤°

مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

جا ٤٣° ≃ ٠,٦٨٢٠ ابدأ ← sin ٤٣ =

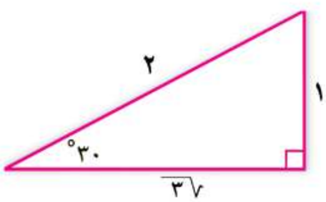
جتا ٢٨َ ٥٣° ≃ ٠,٥٩٥٣ ابدأ ← cos ٥٣ °′″ ٢٨ °′″ =

ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤° ≃ ٢,١٠٨٩ ابدأ ← tan ٦٤ °′″ ٣٧ °′″ ٤٩ °′″ =

إيجاد الزاوية إذا عُلمت النسبة المثلثية لها :

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كانت الزاوية قياسها ٣٠° فإن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ وكذلك إذا كانت الزاوية قياسها ٣٣° فإن جا ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥



sin ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كان جا س = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ والمطلوب معرفة قيمة س .

فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ ← SHIFT sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = °′″ ٣٣°

مثال ٣

أوجد ق(∠هـ) فى كل مما يأتى :

جا هـ = ٠,٦ ، جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ، ظا هـ = ١,٠٨٢٣

الحل

∵ جا هـ = ٠,٦ ∴ ق(∠هـ) = ١٢ً ٥٢َ ٣٦° SHIFT sin ٠,٦ =

∵ جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ∴ ق(∠هـ) = ٣٥ً ٣٣َ ٥١° SHIFT cos ٠,٦٢١٧ =

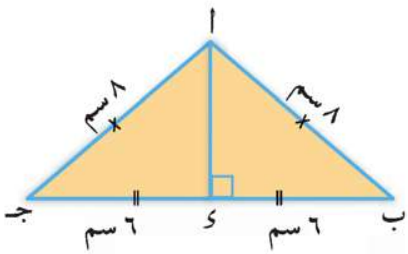
∵ ظا هـ = ١,٠٨٢٣ ∴ ق(∠هـ) = ٤٨ً ١٥َ ٤٧° SHIFT tan ١,٠٨٢٣ =

الربط بالهندسة: مثال٤ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم.

أوجد :

أولاً: ق(∠ب)

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.



الحل

نرسم أى ⊥ ب جـ

∵ المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

∴ ى منتصف ب جـ ويكون ب ى = جـ ى = ٦سم

∵ جتا ب = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة:

SHIFT cos 0.75 =

∴ ق(∠ب) = ٣٥ً ٢٤َ ٤١° (وهو المطلوب أولاً)

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أ ى (من نظرية فيثاغورث)

∵ (أ ى)² = (أ ب)² - (ب ى)²

∴ (أ ى)² = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨ ∴ أ ى = ٢√٧

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ى = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢√٧

= ١٢√٧ سم² ≃ ٣١,٧٥سم² (وهو المطلوب ثانياً)

حل آخر للجزء الثانى:

$\because$ جا ب = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$ $\qquad$ $\therefore$ جا ب = $\frac{\text{أ ء}}{٨}$

$\therefore$ أ ء = ٨ جا (٣٥ً ٢٤َ ٤١°) $\quad$ ①

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ء $\qquad$ وبالتعويض من ① فى هذه العلاقة

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ جا (٣٥ً ٢٤َ ٤١°) $\simeq$ ٣١,٧٥ سم^{٢}.

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالى:

ابدأ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 sin 41 °'" 24 °'" 35 °'" =

مثال٥

أوجد قيمة س التى تحقق س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠°

الحل

$\because$ س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠°

$\therefore$ س × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

$\therefore$ س × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\Leftarrow$ س = ٣

مثال٦

أوجد قيمة س التى تحقق ٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠° − ٢ظا٤٥° حيث س زاوية حادة

الحل

$\because$ ٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠° − ٢ظا^{٢} ٤٥°

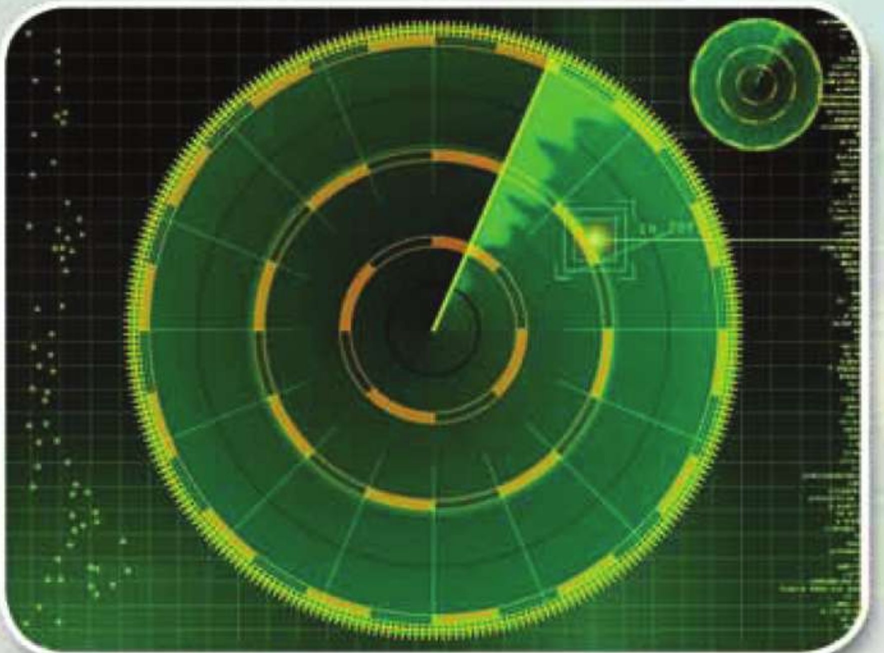
$\therefore$ ٢ جا س = $(\sqrt{٣})^{٢}$ − ٢×١ = ٣−٢ = ١

$\therefore$ جا س = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ س = ٣٠°

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: **الهندسة التحليلية**



يستخدم الرادار فى التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة الأجسام المتحركه كالطائرات والسفن.

وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن- ...)

٥ - ١

البعد بين نقطتين

سوف تتعلم

☆ كيفية إيجاد البعد بين نقطتين باستخدام قانون البعد.

مصطلحات أساسية

☆ مستوى إحداثى.

☆ زوج مرتب.

☆ بعد بين نقطتين.

فكر وناقش

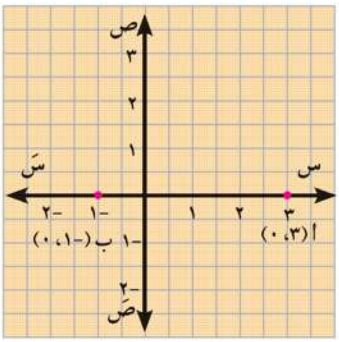
سبق أن قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثى .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

١ أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠)

٢ جـ (٠، -٣)، د (٠، -١)

٣ م (٣، ٢)، ن (٧، ٥)

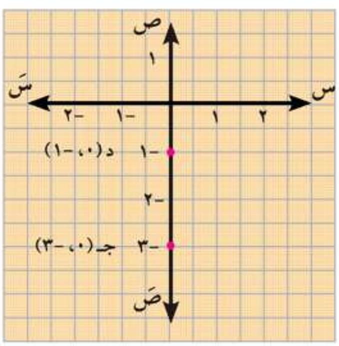
نلاحظ مما سبق أن :



١ النقطتين أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠) تقعان على محور السينات، وبالتالى فإن :

أ ب = |-١ - ٣| = |-٤|

فيكون أ ب = ٤ وحدة طول.

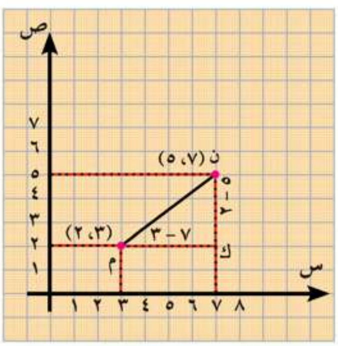


٢ النقطتين جـ (٠، -٣)، د (٠، -١) تقعان على محور الصادات، وبالتالى فإن :

جـ د = |-٣ - (-١)|

= |-٣ + ١| = |-٢|

فيكون جـ د = ٢ وحدة طول .



٣ النقطتين م (٣، ٢)، ن (٧، ٥) يمكن تمثيلهما بيانيًا كما فى الشكل المقابل.

ولإيجاد طول $\overline{\text{م ن}}$ نوجد :

م ك = |٧ - ٣| = ٤ وحدة طول،

ن ك = |٥ - ٢| = ٣ وحدة طول .

△ م ك ن قائم الزاوية فى ك

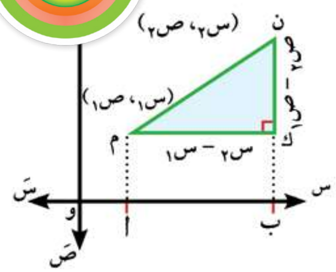
∴ (ن م)^{٢} = (م ك)^{٢} + (ك ن)^{٢}

(نظرية فيثاغورث)

(ل م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} (ل م)^{٢} = ٩ + ١٦

(ل م)^{٢} = ٢٥ ∴ (ل م) = ٥ وحدة طول

وبوجه عام :



إذا كانت : م $(س_1، ص_1)$، ن $(س_2، ص_2)$ نقطتين فى المستوى الإحداثى

فإن : ك م = |و ب - و أ|

= $|س_2 - س_1|$

ك ن = |ن ب − ك ب| = $|ص_2 - ص_1|$

∵ △ ن ك م قائم الزاوية فى ك **(نظرية فيثاغورث)**

∴ $(م ن)^2 = (ك م)^2 + (ك ن)^2$

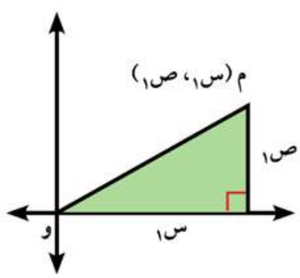
$= (س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2$

∴ م ن = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

البعد بين النقطتين $(س_1، ص_1)$، $(س_2، ص_2)$ = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة :



فى الشكل المقابل بعد النقطة م $(س_1، ص_1)$ عن نقطة الأصل و (٠، ٠)

و م = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

مثال ١

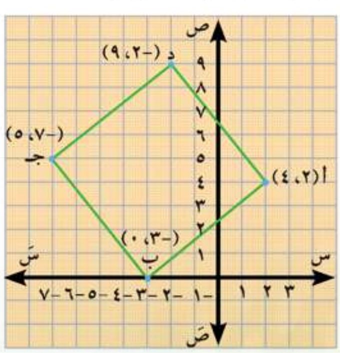
أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢، ٤)، ب (-٣، ٠)، جـ(-٧، ٥) د(-٢، ٩) اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.

الحل

أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2} = \sqrt{[-٣-٢]^2 + [٠-٤]^2} = \sqrt{(-٥)^2 + (-٤)^2} = \sqrt{٤١}$

ب جـ = $\sqrt{[-٧-(-٣)]^2 + [٥-٠]^2} = \sqrt{(-٤)^2 + (٥)^2} = \sqrt{٤١}$

جـ د = $\sqrt{[-٢-(-٧)]^2 + [٩-٥]^2} = \sqrt{(٥)^2 + (٤)^2} = \sqrt{٤١}$



د أ = $\sqrt{[٢-(٢)]^{٢}+[٤-٩]^{٢}}$ = $\sqrt{(٤)^{٢}+(-٥)^{٢}}$ = $\sqrt{٤١}$

∵ أب = ب جـ = جـ د = دأ = $\sqrt{٤١}$

∴ أب جـ د إما أن يكون مربعًا أو معينًا

لإثبات أن الشكل أب جـ د مربع نوجد طولى القطرين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$

أ جـ = $\sqrt{[-٧-٢]^{٢}+[٥-٤]^{٢}}$ = $\sqrt{٨٢}$

ب د = $\sqrt{[-٢-(-٣)]^{٢}+[٩-٠]^{٢}}$ = $\sqrt{(-١)^{٢}+(٩)^{٢}}$ = $\sqrt{٨٢}$

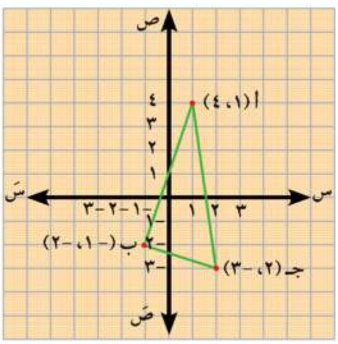
∵ أجـ = ب د = $\sqrt{٨٢}$ وأضلاع الشكل أب جـ د متساوية فى الطول

∴ الشكل أب جـ د مربع

مثال ٢

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢)، جـ (٢، -٣) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه

الحل



$(\text{أب})^{٢} = (-١-١)^{٢} + (-٢-٤)^{٢} = ٤ + ٣٦ = ٤٠$

$(\text{ب جـ})^{٢} = [٢-(-١)]^{٢} + [-٣-(-٢)]^{٢} = ٩ + ١ = ١٠$

$(\text{أ جـ})^{٢} = (٢-١)^{٢} + (-٣-٤)^{٢} = ١ + ٤٩ = ٥٠$

$(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢} = ٤٠ + ١٠ = ٥٠$ ، $(\text{أ جـ})^{٢} = ٥٠$

∵ $(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$

∴ ق (∠ ب) = ٩٠° (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ م (△ أب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أب × ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٤٠} \times \sqrt{١٠} = \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠}$ = ١٠ وحدة مربعة

مثال ٣

أثبت أن النقط أ (٣، -١)، ب (-٤، ٦)، جـ (٢، -٢)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (-١، ٢)، ثم أوجد محيط الدائرة .

الحل

أ م = $\sqrt{(-١-٣)^{٢}+[٢-(-١)]^{٢}} = \sqrt{(-٤)^{٢}+(٣)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

ب م = $\sqrt{[-١-(-٤)]^{٢}+[٢-٦]^{٢}} = \sqrt{(٣)^{٢}+(-٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

جـ م = $\sqrt{(-١-٢)^{٢}+[٢-(-٢)]^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢}+(٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∵ أ م = ب م = حـ م = ٥

∴ أ ، ب، جـ تقع على دائرة مركزها م

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد إحداثيى منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

- طرفا قطعة مستقيمة.
- إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة .

فكر وناقش

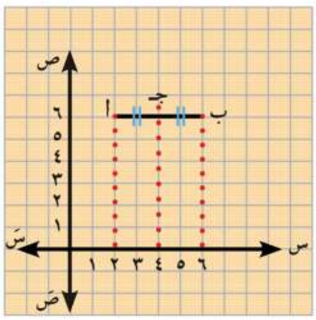
فى مستوى إحداثى متعامد: أوجد إحداثيي النقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ إذا كان:

أولاً : أ (٢، ٦)، ب (٦، ٦)

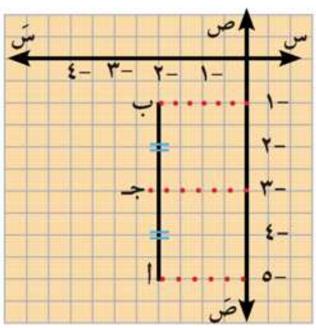
ثانيًا : أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١)

ثالثًا : أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)

أولاً : القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ(٢، ٦)، ب (٦، ٦) توازى محور السينات ويكون إحداثيى نقطة منتصفها هى جـ (٤، ٦).



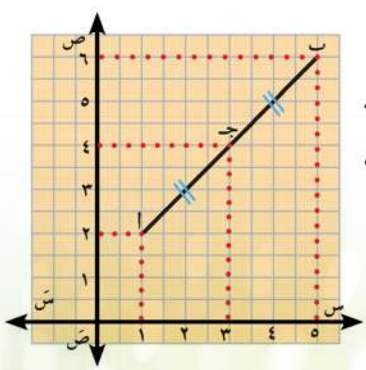
ثانيًا : القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١) توازى محور الصادات، ويكون إحداثيى نقطة منتصفها هى جـ (-٢، -٣).



ثالثاً : فى الشكل المقابل :

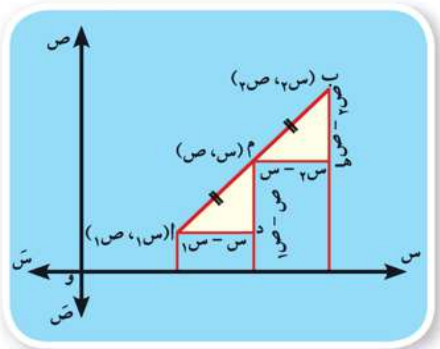
نفرض أن نقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتان أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)، ومن الرسم نجد أن إحداثيي جـ هو (٣، ٤) .

أى أن جـ ($\frac{١+٥}{٢}$، $\frac{٢+٦}{٢}$) أى جـ (٣، ٤)



وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة كالآتى :

إذا كانت : أ (س$_1$، ص$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$)، م (س، ص) حيث م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.



ومن تطابق المثلثين $\triangle$ م د أ ، $\triangle$ ب هـ م

نجد أن : أ د = م هـ

$\therefore$ س − س$_1$ = س$_2$ − س

$\therefore$ ٢س = س$_1$ + س$_2$ $\qquad$ $\therefore$ س = $\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}$

وبالمثل : م د = ب هـ $\qquad$ $\therefore$ ص − ص$_1$ = ص$_2$ − ص

$\therefore$ ٢ص = ص$_1$ + ص$_2$ $\qquad$ $\therefore$ ص = $\dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}$

م $\left(\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}، \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$

مثال : إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ وكان أ (٣، - ٧) ، ب (- ٥، - ٣)

فإن إحداثيي منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي $\left(\dfrac{٣ - ٥}{٢}، \dfrac{- ٧ - ٣}{٢}\right)$ أي (- ١، - ٥)

مثال ١

إذا كانت جـ (٦، -٤) هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥، -٣) فأوجد إحداثيى نقطة ب .

الحل

نفرض أن ب (س$_2$، ص$_2$)، أ (٥، -٣)، منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي النقطة جـ (٦، -٤)

$\because$ س = $\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}$، ص = $\dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}$

$\therefore$ ٦ = $\dfrac{٥ + \text{س}_2}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ ٥ + س$_2$ = ١٢ $\qquad$ $\therefore$ س$_2$ = ١٢ -٥ = ٧

-٤ = $\dfrac{-٣ + \text{ص}_2}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ -٣ + ص$_2$ = -٨

ص$_2$ = -٨ + ٣ $\qquad$ ص$_2$ = -٥

$\therefore$ ب (٧، -٥)

مثال٢

أب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٢)، ب (٤، -٥)، جـ (٠، -٣) - أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثيى نقطة د .

الحل

الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه،

نفرض د $(س_١ ، ص_١)$

∵ م منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ م $\left(\frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ٣}{٢}\right)$

∴ م $\left(\frac{٣}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

، م منتصف $\overline{ب د}$ ∴ م $\left(\frac{٤ + س_١}{٢} ، \frac{-٥ + ص_١}{٢}\right)$

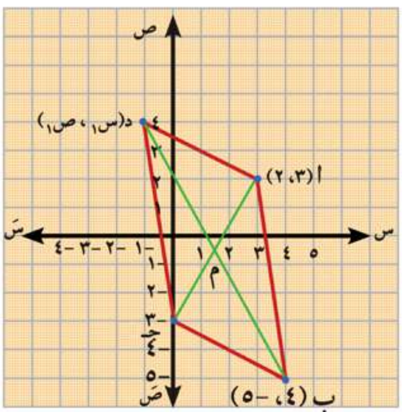
∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٤ + س_١}{٢}$ ∴ $٣ = ٤ + س_١$

∴ $س_١ = -١$

، $-\frac{١}{٢} = \frac{-٥ + ص_١}{٢}$ ∴ $-١ = -٥ + ص_١$

∴ $ص_١ = ٤$

∴ إحداثى د (-١ ، ٤)



(٠،-٣)

ميل الخط المستقيم

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

سوف تتعلم

- ☆ العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين.
- ☆ العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين.

مصطلحات أساسية

- ☆ قياس موجب للزاوية.
- ☆ قياس سالب للزاوية.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ مستقيمان متوازيان.
- ☆ مستقيمان متعامدان.

فكر وناقش

أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

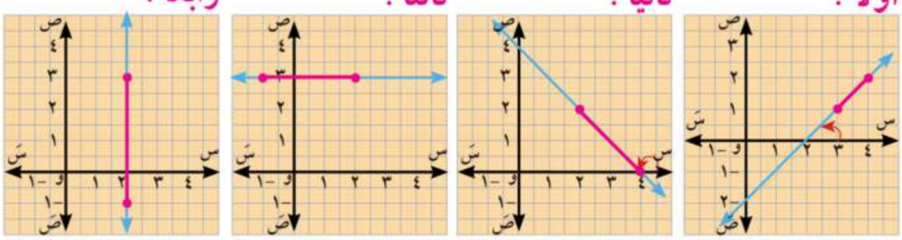
أولاً : (٣، ١)، (٤، ٢)　　**ثانيًا** : (٤، ٠)، (٢، ٢)

ثالثًا : (-١، ٣)، (٢، ٣)　　**رابعًا** : (٢، -١)، (٢، ٣)

ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن رسم المستقيمات المارة بأزواج النقط السابقة فى المستوى الإحداثى المتعامد كما فى الأشكال الآتية :

أولاً :　ثانيًا :　ثالثًا :　رابعًا :



القياس الموجب والقياس السالب للزاوية:

تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت مأخوذة فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

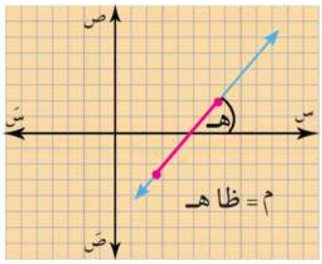
رقم الشكل	الميل ($\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$)، $س_٢ > س_١$	نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	ميل الخط المستقيم
أولاً	$م = \frac{٢ - ١}{٤ - ٣} = ١$	حادة	أكبر من الصفر
ثانيًا	$م = \frac{٢ - ٠}{٢ - ٤} = -١$	منفرجة	أقل من الصفر
ثالثًا	$م = \frac{٣ - ٣}{٢ + ١} =$ صفر	صفرية	يساوى صفرًا
رابعًا	$م = \frac{٣ + ١}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	قائمة	غير معرف

ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؛

أى أن: ميل الخط المستقيم = ظا هـ

حيث هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٨ً ١٢َ ٥٦° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥ .

الحل

١ ∵ م = ظا هـ ∴ م = ظا ٤٨ً ١٢َ ٥٦° = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥

ابدأ ← tan 56 °′″ 12 °′″ 48 °′″ =

٢ ∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦٥ ∴ ق(∠ هـ) = ١٣ً ٤َ ٥٦°

ابدأ ← SHIFT tan 1.4865 = °′″

تدرب

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

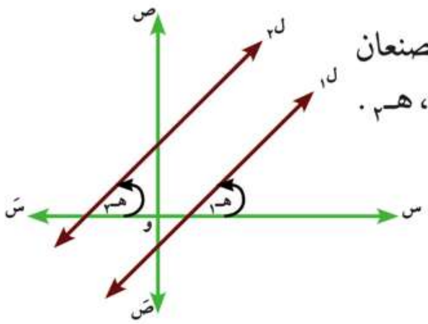
أ ٣٠° ب ٤٥° جـ ٦٠°

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية :

أ م = ٠,٣٦٧٣ ب م = ١,٠٢٤٦ جـ م = ٣,١٦٤٨

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين $ل_1$، $ل_2$ ميلاهما $م_1$، $م_2$، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما $هـ_1$، $هـ_2$.

أكمل ما يأتى :

(١) ق ($\angle$ $هـ_1$) = ق ($\angle$ $هـ_2$) لأنهما ....

(٢) ظا $هـ_1$ .... ظا$هـ_2$

(٣) $م_1$ .... $م_2$

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان $ل_1$ // $ل_2$ **فإن** $م_1$ = $م_2$

أى أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان $م_1$ = $م_2$ فإن $ل_1$ // $ل_2$

أى أن: إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

أمثلة

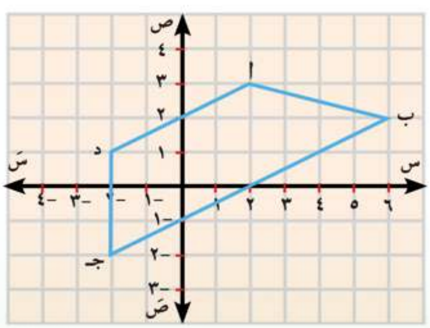
(١) أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٣، -٢)، (٤، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° .

الحل

ميل المستقيم الأول ($م_1$) = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - (-٢)}{٤ - (-٣)} = \frac{٧}{٧} = ١$

ميل المستقيم الثانى ($م_2$) = ظا ٤٥° = ١ $\because$ $م_1$ = $م_2$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان .

(٢) مثِّل بيانيًّا النقط أ(٢، ٣)، ب (٦، ٢) جـ (-٢، -٢)، د (-٢، ١)، على المستوى الإحداثى، ثم أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .



الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$

ولإثبات ذلك تحليليًّا نوجد ميل كل من $\overline{أد}$ ، $\overline{بجـ}$.

ميل $\overline{أد}$ (وليكن $م_١$)

∵ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ∴ $م_١ = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

وميل $\overline{ب جـ}$ (وليكن $م_٢$)

$م_٢ = \frac{٢ + ٢}{٦ + ٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∵ $م_١ = م_٢$ ..... ∴ $\overline{أد} // \overline{ب جـ}$

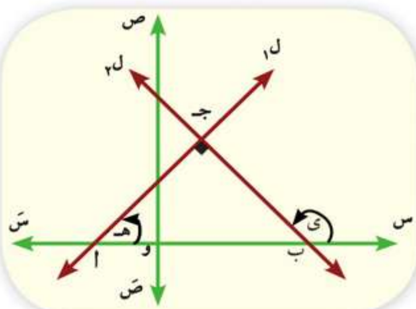
∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف ما لم تكن النقط أ، ب، جـ، د على استقامة واحدة .... (١)

∵ ميل $\overline{أب} = \frac{٣ - ٢}{٢ - ٦} = \frac{١}{-٤}$، ميل $\overline{جـ د} = \frac{٢ + ١}{-٢ + ٢}$ ....(غير معرف)

∴ المستقيمان غير متوازيين............ (٢)

من (١)، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين



فكر وناقش

الشكل المقابل : يمثل المستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ الذى ميلاهما $م_١$، $م_٢$ حيث $ل_١ \perp ل_٢$.

أوجد العلاقة بين ق($\angle$ هـ)، ق($\angle$ ى)

ثم أكمل الجدول الآتى باستخدام حاسبة الجيب:

قيم هـ	°٢٠	°٤٠	.....	.....	....
قيم ى	......	.....	°١٤٠	°١٥٠	.....
ظا هـ × ظا ى	.....	.....	.....	.....	.....

من الجدول السابق نجد أن :

ظا هـ × ظا ى = -١ أى أن : $م_١ م_٢ = -١$

$ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ حيث $م_١$ ، $م_٢ \in ح^*$

إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ **فإن** $م_١ \times م_٢ = -١$

أى أن: حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١

وعكس ذلك صحيح؛ **فإذا كان** $م_١ \times م_٢ = -١$ **فإن** $ل_١ \perp ل_٢$

أى أن إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين = -١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

أمثلة

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣$\sqrt{٣}$)، (٥، ٢$\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°.

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول م_1 وميل المستقيم الثانى م_2.

$\because$ $\text{م} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ $\qquad$ $\therefore$ $\text{م}_1 = \dfrac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = -\sqrt{٣}$

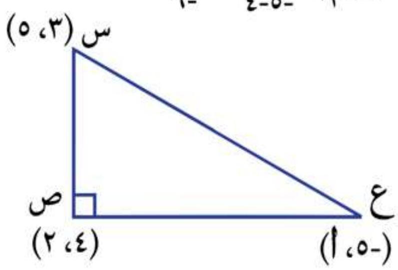
$\because$ م = ظاهـ $\qquad$ $\therefore$ $\text{م}_2 = \text{ظا } ٣٠° = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -\sqrt{٣} \times \dfrac{١}{\sqrt{٣}} = -١$ $\qquad$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان.

٢ إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤، ٢)، س (٣، ٥)، ع (-٥، أ) قائم الزاوية فى ص **فأوجد قيمة أ.**

الحل

نوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فيكون $\text{م}_1 = \dfrac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = \dfrac{٣}{-١} = -٣$ ، نوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ فيكون $\text{م}_2 = \dfrac{\text{أ} - ٢}{-٥ - ٤} = \dfrac{\text{أ} - ٢}{-٩}$



$\because$ $\triangle$ س ص ع قائم الزاوية فى ص $\qquad$ $\therefore$ $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -١$

$\therefore$ $-٣ \times \dfrac{\text{أ} - ٢}{-٩} = -١$ $\qquad$ $\therefore$ $\dfrac{(\text{أ} - ٢)}{٣} = -١$

$\therefore$ أ - ٢ = -٣ $\qquad$ $\therefore$ أ = ٢ - ٣ $\qquad$ $\therefore$ أ = -١

٥ - ٤

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

- معادلة خط مستقيم.
- ميل خط مستقيم.
- جزء مقطوع من محور الصادات .

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهى :

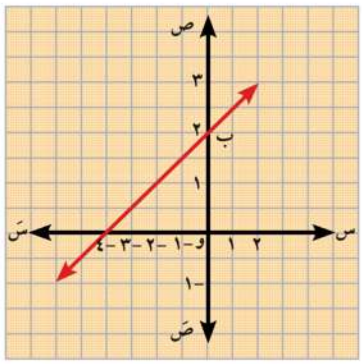
أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠

وتمثيلها بيانيًّا بخط مستقيم .

مثال

مثِّل العلاقة : س -٢ص + ٤ = ٠ بيانيًّا .

ومن الشكل البيانى احسب :



أ ميل الخط المستقيم .

ب طول الجزء الرأسى المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتى :

بوضع ص = ٠   ∴ س + ٤ = ٠

∴ س = -٤   (-٤ ، ٠)   يحقق العلاقة .

بوضع س = ٠   ∴ -٢ص + ٤ = ٠

∴ ٢ص = ٤   (٠، ٢)   يحقق العلاقة

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) > ٠ ..... (لماذا؟)

فيكون م = $\frac{......}{......}$ = $\frac{......}{......}$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (جـ) و طوله يساوى ٢ وحدة طول .

ويمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة :ص = م س + جـ

فيكون ٢ص = س + ٤ وبقسمة الطرفين على ٢ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

ونلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س ويساوى $\frac{١}{٢}$، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = ٢ وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق .

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) على الصورة:

ص = م س + جـ   حيث م، جـ ∈ ح

لاحظ أن : يمكن وضع معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر، ب ≠ ٠

على الصورة : ص = م س + جـ كالآتى :

أ س + ب ص + جـ = صفر   فيكون ب ص = - أ س − جـ

∴ ص = $-\frac{أ}{ب}$ س − $\frac{جـ}{ب}$

وهى على الصورة : ص = م س + جـ

حيث م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

، جـ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم ٣ س + ٤ ص − ٥ = صفر بطريقتين ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

الحل

∵ معادلة الخط المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠، ب ≠ ٠

∴ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

∴ ٤ ص = -٣س +٥

ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + $\frac{٥}{٤}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، -٣)، ب (٥، -٤) .

الحل

∵ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ، ب = $\frac{-٤ - (-٣)}{٥ - ٢}$ = $\frac{-٤ + ٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ فيكون ميل المستقيم العمودى عليه = ٣

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١، ٢) فهى تحقق معادلته .

∴ ٢ = ٣ × ١ + جـ   ∴ جـ = ٢ - ٣ = -١

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣س -١

٣ إذا كانت أ (-٣، ٤)، ب (٥، -١)، جـ (٣، ٥) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل

نقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{٣+٥}{٢} ، \frac{٥-١}{٢}\right) = \left(\frac{٨}{٢} ، \frac{٤}{٢}\right) = (٤ ، ٢)$

∴ ميل الخط المستقيم المطلوب = $\frac{٢-٤}{٤+٣} = \frac{-٢}{٧}$

∵ ص = م س + جـ   ∴ ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ ٤ = $\frac{-٢}{٧}$ × -٣ + جـ   ∴ ٤ = $\frac{٦}{٧}$ + جـ   ∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة : ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$ وبضرب طرفى المعادلة فى ٧

∴ ٧ص = -٢س + ٢٢   أى المعادلة هى : ٢س + ٧ص - ٢٢ = ٠

الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى: العلاقات والدوال

حاصل الضرب الديكارتي

تمارين (١ ـ ١)

أولاً: أكمل ما يأتي

١) إذا كان (أ + ٥، ٣) = (٨، ب - ١) فإن أ =.........، ب = ...

٢) إذا كان (س°، ص +١) = (٣٢، ∛٢٧) فإن س =........، ص = ...

٣) إذا كانت (س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣) فإن √(س + ٢ص) = ...

٤) إذا كانت ن (س^٢) = ٩، فإن ن (س) = ...

٥) إذا كانت س × ص = { (٢، ٦)، (٢، ٩)، (٣، ٦)، (٣، ٩)، (٥، ٦)، (٥، ٩)}، فإن

س = ...

ص = ...

٦) إذا كانت ص × س = { (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٤، ٣)

، (٤، ٤) ، (٤، ٥) }، فإن س = ...

ص = ...

ثانيًا: اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ن (سـ) = ٣، ن (سـ × صـ) = ١٢ فإن ن (صـ) تساوي

أ ٤ ب ٩ جـ ١٥ د ٣٦

٢ إذا كان (٣، ٥) ∈ {٣، ٦} × {س، ٨} فإن س =

أ ٨ ب ٦ جـ ٥ د ٣

٣ إذا كانت النقُطة (٥، ب - ٧) تقع على محورِ السينات فإن ب =

أ ٢ ب ٥ جـ ٧ د ١٢

٤ إذا كانت النقُطة (س- ٤، ٢ - س) حيث س ∈ صـ تقع في الربع الثالثِ فإن س تساوي:

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٦

ثالثاً:

١ إذا كانت سـ = {٢، ٣}، صـ {٣، ٤، ٥} أوجد:

أ سـ × صـ ومثِّله بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. ب ن (سـ × صـ)

جـ ن (صـ٢) د (سـ × صـ) ∩ صـ٢

٢ إذا كان سـ × صـ = { (١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)} أوجد:

أ سـ، صـ ب صـ × سـ جـ صـ٢

٣ إذا كان: سـ = {٣، ٤}، صـ = {٤، ٥}، ع = {٦، ٥} فأوجد:

أ سـ × (صـ ∩ ع) ب (سـ – صـ) × ع جـ (سـ – صـ) × (صـ – ع)

٤ على شبكةٍ بيانيةٍ متعامدةٍ لحاصل الضرب الديكارتي ع × ع عين النقط الآتية:

أ (٤، ٥)، ب (٦، -٣)، جـ (-٢، ٧)، د (-١، ٦)، هـ (-٤، -٥)، م (٠، ٦)، ك (٩، ٠)

ثم اذكر الربعَ الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط.

٥ إذا كانت سـ = {١، ٥، ٦}، صـ {٢، ٤، ٥} فأوجد:

أ سـ × صـ ب صـ × سـ ومثِّله بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

جـ ن (سـ × صـ)

٦ إذا كانت سـ = [- ٢، ٣]، أوجد المنطقة التي تمثل سـ × سـ.

بين أي من النقاط التالية تنتمي إلى حاصل الضرب الديكارتي سـ × سـ

أ (١، ٢)، ب (٣، - ١)، جـ (- ١، ٤)، د (-٢، ٠)

العلاقات

تمارين (١ ـ ٢)

١) إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {١٢، ٢١، ٤٧، ٥٢}، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني :
(أ رقم من أرقام العدد ب)، لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ

أولاً : اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

ثانياً : بين أي مما يلى صواب مع ذكر السبب:

١ ع ٥٢ ٢ ع ٢١ ٣ ع ٤٧

٢) إذا كانت سـ = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠}، وكانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعني **(أ مضاعف ب)**، لكل أ، ب∈ سـ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٣) إذا كانت سـ = {٢، ٤، ٥، ٧}، صـ = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني (أ ≥ ب)، لكل أ، ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيانَ ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٤) إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {١، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{5}$} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني: **«العدد أ هو المعكوس الضربي للعدد ب»** لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بين ع ومثلها بمخطط سهميٍّ وآخر بياني.

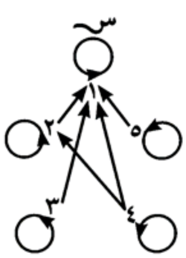
٥) إذا كانت سـ = {١، ٣، ٤، ٥}، صـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني **«أ + ب = ٧»** لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٦) إذا كانت سـ = {-١، ٠، ١، ٢، ٣}، صـ = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني **«أ^{٢} = ب»** لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٧) إذا كانت سـ = {-٢، -١، ١، ٢}، صـ = {$\frac{1}{8}$، $\frac{1}{3}$، ١، ٣، ٨} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني **«أ^{٣} = ب»** لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيانَ ع ومثلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.

٨) إذا كانت سـ = {٢، ٣، ٤}، صـ = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني **«أ تقسم ب»** لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ اكتب بيان ع .

٩) **الشكلُ المقابلُ:**
يمثل المخططُ السهميُّ للعلاقة ع المعرفة على المجموعة سـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}
اكتب بيان ع ومثلها بمخططٍ بياني.



الدالة (التطبيق)

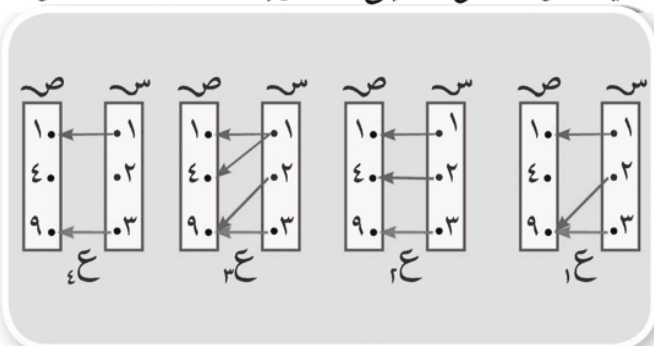
هل تعلم أن: د: س ← ص وتقرأ: «د دالة من س إلى ص».

أ، د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

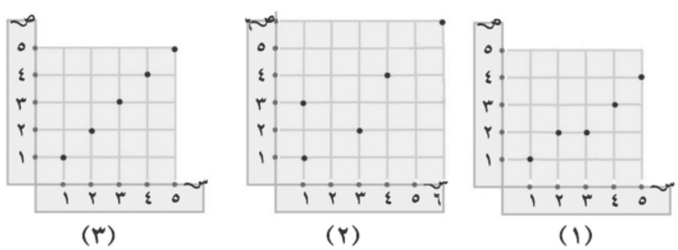
مدى الدالة د هو مجموعةُ صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د

تمارين (١ ـ ٣)

١ أي من العَلاقاتِ التالية تمثِّل دالة من س إلى ص؟ و إذا كانت العلاقةُ تمثلُ دالةً، فأوجد مدى الدالة.



٢ أي من العَلاقاتِ التالية تمثِّل دالة من س إلى ص؟ و إذا كانت العلاقةُ تمثلُ دالةً، فأوجد مدى الدالة.



(١) (٢) (٣)

٣ إذا كانت س = {٢، ٥، ٨}، ص = {١٠، ١٦، ٢٤، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ عامل من عوامل ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. **هل ع دالة ؟ ولماذا ؟**

٤ إذا كانت س = {٠، ١، ٤، ٧}، ص = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع عَلاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «أ + ب > ٨» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ، ومثِّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

٥ إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠} وكانت ع عَلاقة على س حيث أ ع ب تعني: «أ مضاعف ب» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ، ومثِّلها لمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

٦ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٦، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني : «أ + ٢ ب = عدد فردي» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخططٍ سهميٍّ. **هل ع دالة؟ ولماذا ؟**

دوال كثيرات الحدود

تمارين (١ ـ ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي :

١ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢ س - ١ يمثلها بيانيًا خطٌ مستقيمٌ يقطع محورَ الصادات في النقطة ....

٢ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٣ س + ٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

٣ إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخطِّ المستقيمِ الممثل للدالة د : ع ← ع حيث د(س) = ٤ س - ٥
فإن أ تساوي ....

ثانيًا: ١ إذا كان د : ع ← ع ، اذكر درجة د ثم أوجد د (-٢) ، د (٠) ، د $\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث:

أ د (س) = ٣ ب د (س) = ٣ - ٢ س جـ د (س) = س^{2} - ٤

٢ مَثِّل بيانيًّا الدوالَّ الخطيةَ الآتيةَ، وأوجد نقطَ تقاطعِ المستقيم الممثل لكلٍّ منها مع محوري الإحداثيات:

أ د (س) = ٢ س ب د (س) = - $\frac{1}{2}$ س جـ د (س) = ٢ س + ١

د د (س) = ٢ - س هـ د (س) = ٣ س - ١ و د (س) = - ٢ س + ٣

٣ مَثِّل بيانيًّا كلاً من الدوالِّ الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

أ د (س) = س^{2} - ٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣] ب د(س) = (س - ٢)^{2} متخذاً س ∋ [- ١ ، ٥]

جـ د (س) = س^{2} + ٢ س + ١ متخذاً س ∋ [- ٤ ، ٢] د د (س) = ٢ - س^{2} متخذاً س ∋ [- ٣ ، ٣]

نشاط

الربط بالتكنولوجيا

استخدام برامج الحاسوب:

- توجد العديدُ من البرامج المجانية لرسم المنحنيات وحل المعادلات، وهي متوفرةٌ على الشبكة العنكبوتيةِ ومنها البرنامج المجاني: الرياضيات للجميع (GeoGebra) وموقعه على الشبكة: http://www.geogebra.org والبرنامج يدعم باللغة العربية.
- باستخدام البرنامج مثل بيانيًا كلاً من الدوال الآتية:

① د (س) = ٢ س + ١ ② د (س) = ٥ - ٣ س

③ د (س) = س^{٢} - ٣ س + ٢ ④ د (س) = ٤ - ٣ س - س^{٢}

نشـــاط

① شركةٌ لرصفِ الطرق تتقاضى ١٠٠٠٠٠ جنيه (رسم ثابت) ثم ٣٠ جنيهًا لكلِّ مترٍ فإذا كان س (طول الطريق المرصوف بالأمتار)، ص (التكلفة الكلية التي تأخذها الشركة بالجنيهات).

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥)

أولاً: الشكلُ الذي يمثل العلاقةَ بين س ، ص هو الشكل رقم ....

ثانيًا: أيٌّ من العلاقات الآتيةِ تمثِّل المعلوماتِ السابقةَ:

أ ص = ٣٠ س ب ص = ٣٠س + ١٠٠٠٠٠ جـ ص = ١٠٠٠٠٠ س + ٣٠ د ص = ٣٠٠٠٠٠٠ س

ثالثًا: اكتب مقالاً تتناولُ فيه مدى جهودِ الدولة في تطوير ورصف الطرق حتى تكونَ سريعةً وآمنة، وما ينبغي عليك من اتباع تعليمات المرور في السير والمحافظة على نظافةِ وسلامةِ هذه الطرق.

اختبار الوحدة

١ إذا كانت س = {٠، ١، ٤، ٧}، ص = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع علاقة من س إلى ص، حيث أ ع ب تعني: «أ + ب < ٦» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني. هل ع دالة؟ اذكر السَّبب.

٢ مثل بيانيًّا كلاً من الدوالِّ الآتية:

أ د (س) = ٣ س - ١

ب د (س) = - ٢ س

جـ د (س) = س^{٢} - ٣ متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣]

د د (س) = ١ - ٣ س + س^{٢} متخذاً س ∈ [-١ ، ٤]

٣ أثناء قراءةِ كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقةُ بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:

أ مثل العلاقة بين ن ، ص بيانيًّا ثم أوجدَ العلاقةَ الجبرية بينهما.

ب ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب؟

جـ كم عدد صفحات الكتابِ المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟

٤ **الشكلُ المقابلُ**: يمثِّل منحنى الدالة د حيث:

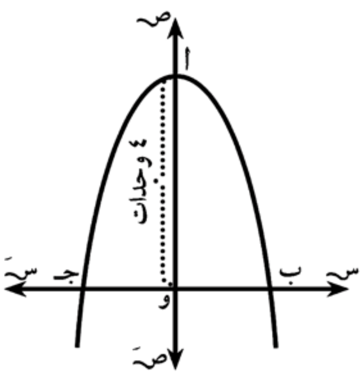
د (س) = م - س^{٢}، إذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجد:

أ قيمة م.

ب إحداثيي ب، جـ

جـ مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، جـ .



الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

النسبة

تمارين (٢ ـ ١)

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣؛ **أوجد العددين؟**

٢ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، و إذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ ؛ **أوجد** العددين.

٣ **أوجد** العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

٤ **أوجد** العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٥ **أوجد** العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

التناسب

تمارين (٢ – ٢)

١ **إذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة فأثبت أن:**

أ $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^٢ = \frac{٢س^٢ - ٣ص^٢}{٢ع^٢ - ٣ل^٢}$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥س^٣ - ٣ع^٣}{٥ص^٣ - ٣ل^٣}} = \frac{س + ع}{ص + ل}$

٢ **إذا كان** $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ **فأثبت أن:**

أ $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$

ب $\sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢} = ٢س + ص$

٣ إذا كانت أ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:**

أ $\frac{أ جـ}{ب د} = \left(\frac{أ - جـ}{ب - د}\right)^٢$

ب $\sqrt[٣]{\frac{٥أ^٣ - ٣جـ^٣}{٥ب^٣ - ٣د^٣}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

٤ **إذا كانت ب هى الوسط المتناسب بين أ، جـ فأثبت أن:**

أ $\frac{أ + ب + جـ}{أ^{-١} + ب^{-١} + جـ^{-١}} = ب^٢$

ب $\frac{٢جـ^٢ - ٣ب^٢}{٢ب^٢ - ٣أ^٢} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$

٥ **إذا كانت أ، ب، جـ، د فى تناسب متسلسل؛ فأثبت أن:**

أ $\frac{أ ب - جـ د}{ب^٢ - جـ^٢} = \frac{أ + جـ}{ب}$

ب $\frac{أ^٢ - ٣جـ^٢}{ب^٢ - ٣د^٢} = \frac{ب}{د}$

جـ $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^٣}{جـ^٢ د + د^٣}$

د $\frac{جـ^٢ - د^٢}{أ - جـ} = \frac{ب د}{أ}$

٦ **إذا كانت: ٥أ، ٦ب، ٧جـ، ٨د كميات موجبة فى تناسب متسلسل**

فأثبت أن: $\sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٨د}} = \sqrt{\frac{٥أ + ٦ب}{٧جـ + ٨د}}$

٧ إذا كانت: $\frac{ص}{س - ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س + ص}{ع}$ **فأثبت** أن كلاً من هذه النسب يساوى ٢ (ما لم تكن: س + ص = ٠)

ثم **أوجد** س : ص : ع

٨ **إذا كان** $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ **فأوجد** قيمة س.

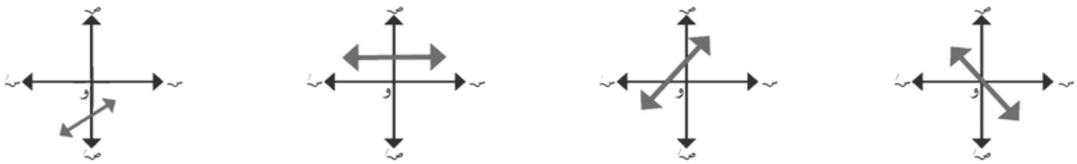
٩ **إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كل من أ، ب، جـ**

التغير الطردي و التغير العكسي

تمارين (٢ ـ ٣)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

① أى من الأشكال البيانية الأتية تمثل تغيرا طرديا بين س، ص:



أ   ب   جـ   د

② العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص، س هى:

أ س ص = ٥   ب ص = س + ٣   جـ $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ د $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

③ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التناسب يساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ ٢   د ٦

ثانيًا: (الحساب العقلي): من بيانات الجدول التالى أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

أ بين نوع التغير بين ص، س   ب أوجد ثابت التناسب

جـ أوجد قيمة ص عندما س = ٣   د أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

تمارين عامة على الوحدة

(١) إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًّا مع عدد المشتركين س؛ فاختر الإجابة الصحيحة:

(أ) ص = أ س
(ب) ص = $\frac{أ}{س}$
(جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠)
(د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

(٢) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ فأوجد س عندما ص = ٨٠

(٣) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًّا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا فى ٦ ساعات؛ فكم كيلو مترًا تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات؟

(٤) إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًّا مع وزنه على الأرض (ر) ، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر؛ فماذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

(٥) إذا كانت ص تتغير عكسيًّا مع س وكانت ص =٢ عندما س =٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ١٦

(٦) إذا كانت أ، ب، جـ، د، فى تناسب متسلسل فأثبت أن:

(أ) $\frac{أ^٢ - ٣جـ^٢}{ب^٢ - ٣د^٢} = \frac{ب}{د}$
(ب) $\frac{٢أ + ٣د}{٣أ - ٤د} = \frac{٢أ^٣ + ٣ب^٣}{٣أ^٣ - ٤ب^٣}$

(٧) إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$ فأثبت أن $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$.

(٨) **الربط بالهندسة:** س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة فى مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ فأوجد س : ص.

(٩) **تطبيقات حياتية:** فى مجال اهتمام الدولة بالريف المصرى، رصدت الدولة مبلغ $١,٨٥ \times ١٠^{٦}$ جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب؛ فما هى تكاليف كل منها؟

(١٠) **تطبيقات حياتية:** إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًّا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٦ عمال فى أربع ساعات، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل؟

نشــاط

① (حساب عقلى) من بيانات الجدول الآتى: أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

أ بين مع ذكر السبب أن التغير بين س، ص تغير عكسى.

ب اكتب ثابت التغير.　　　　جـ اكتب العلاقة بين س ، ص.

د أوجد قيمة ص عندما س = ٤٨　　　　هـ أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

② إذا كانت نسبة النجاح فى إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هى ٨٣ ٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩ ٪، ونسبة النجاح للبنات ٨٩ ٪ فأوجد

أولا: نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات فى هذه المحافظة.

ثانيا: النسبة بين عدد البنين و عدد البنات فى هذة المحافظة

اختبار الوحدة

① إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+جـ}{٦} = \frac{جـ+أ}{٥}$ فاثبت أن: $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$

② إذا كان ص = أ − ٩ وكان ص $\propto \frac{١}{س^٢}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

③ إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص $\propto$ ع.

④ إذا كان $س^٤ ص^٢ - ١٤ س^٢ ص + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن ص $\propto \frac{١}{س^٢}$

⑤ **الربط بالفلك:** إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان $و_١$ = ١٨٢ كجم، $ر_١$ = ٣٥ كجم فأوجد $ر_٢$ عندما $و_٢$ = ٣١٢ كجم.

⑥ **الربط بالفيزياء:** إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث عندما نق = ٣ سم. أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم.

الوحدة الثالثة: الإحصاء

جمع البيانات

تمارين (٣ ــ ١)

١ **قارن** بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينًا مزايا وعيوب كل منهما.

٢ ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها فى مستوى الخدمة المقدمة لهم، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠، واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. **حدد** باستخدام آلتك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة.

٣ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ؛ **فاحسب** عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

التشتت

تدرب

الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ، ب فى الصف الثالث الإعدادى فى أحد الاختبارات:

فصل أ

مجموعات الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

فصل ب

مجموعات الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

١ **مثل** كلاً من التوزيعين بالمضلع التكرارى على شكل واحد.

٢ **أوجد** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من التوزيعين التكراريين.

٣ **أى** الفصلين أكثر تجانسًا فى مستوى التحصيل؟

تمارين (٣ ـ ٢)

١ **احسب الانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:**

أ ١٦، ٣٢، ٥، ٢٠، ٢٧ ب ٧٢، ٥٣، ٦١، ٧٠، ٥٩

جـ ١٥، -١٢، -٩، ٢٧، -٦ د ٢٢، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ١٨

٢ **إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = صفرًا، فماذا تستنتج؟**

٣ **التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة:**

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

٤ **التوزيع التكرارى التالى يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس:**

الوزن بالكيلو جرام	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-٨٥	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

أوجد: أ الوسط الحسابى لأوزان التلاميذ. ب الانحراف المعيارى لأوزان التلاميذ.

تمارين عامة على الوحدة

١ **اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات فى كل من:**

أ معرفة نوعية القمح قبل شرائه.

ب معرفة درجة ملوحة مياه البحر.

جـ معرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها.

٢ **يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالى:**

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة؛ أوجد حجم العينة كلها.

٣ **احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية:**

٢٣، ١٢، ١٧، ١٣، ١٥، ١٦، ٨، ٩، ٣٧، ١٠

٤ **فيمايلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال:**

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات.

٥ **التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات:**

عدد الكيلو مترات لكل لتر	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلو مترات لكل لتر.

الربط بالتكنولوجيا

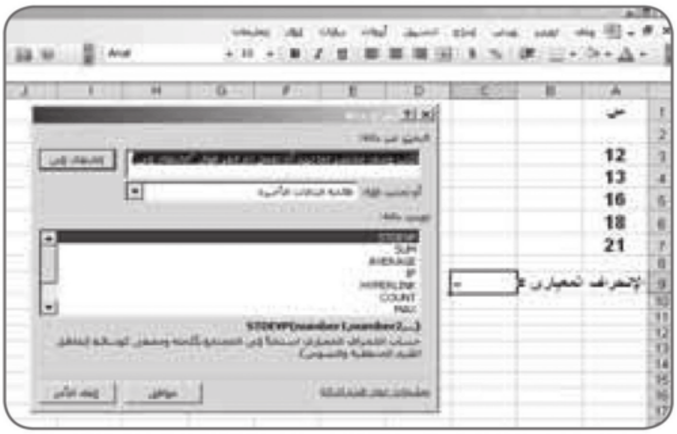
استخدام برامج الحاسب الآلى لحساب الانحراف المعيارى.

أولاً: ابدأ (**Start**) ثم برامج (**programs**) ثم الجداول الإلكترونية (**Excel**) فتظهر الشاشة التالية:

١

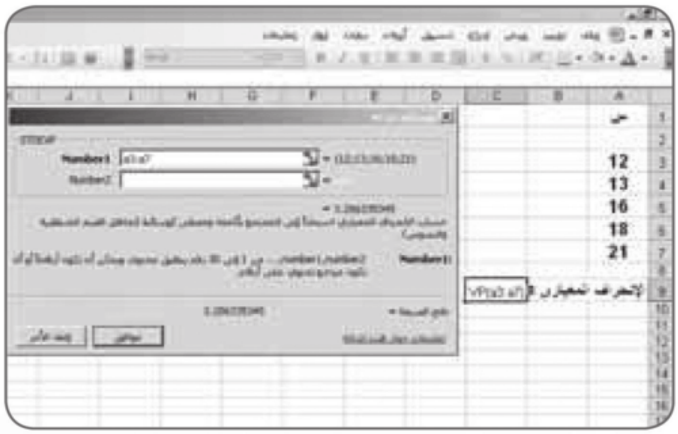
- أدخل بيانات مثال (١) فى المدى (A3 , A7) كما بالشكل
- من قائمة إدراج (**insert**)، اختر دالة $(\mathcal{F}x)$ ثم إدخال

٢



- من مربع حوار البحث عن دالة ، اختر الدالة **STDEVP** ثم إدخال

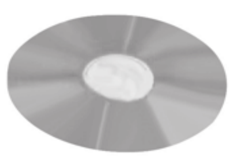
٣



- لحساب الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات حدد نطاق المتغير (A3 , A7) ثم إدخال

٤

- لاحظ أن الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات = ٣,٢٨٦٣٣٥ وهو نفس الناتج السابق حسابه فى مثال (١) باستخدام الحاسبة.



نشـــاط

١ باستخدام أسلوب العينات اختر عينة عشوائية من زملائك بالفصل حجمها ١٠ مفردات ثم قس أطوالهم بالسنتيمترات، واحسب متوسط طول زملائك بالفصل. **قارن** بين النتائج التى حصلت عليها والنتائج الأخرى التى حصل عليها زملاؤك. فسر إجابتك.

٢ الجدول المقابل يبين درجات الحرارة على بعض المدن.

أ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى.

ب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى.

(يمكنك تتبع النشرة الجوية اليومية وحساب الإنحراف المعيارى لها)

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

اختبار الوحدة

١ **اشرح بإيجاز العينة العشوائية البسيطة مبينًا كيف يتم اختيارها.**

٢ **احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:**

أ ٦٥، ٦١، ٧٠، ٦٤، ٧٠، ٧٦، ٧٠

ب ٣٩، ٨٥، ٤٦، ٩١، ٨٨، ٥٠، ٧٧

أى المجموعتين أ، ب أكثر تجانسًا؟

٣ **للتوزيع التكرارى التالى احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى:**

المجموعة	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

٤ **قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة مايفضلون تناوله فى فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من:**

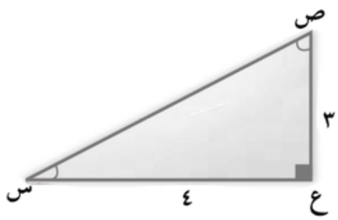
أ مشروبات ساخنة ب وجبات خفيفة جـ مثلجات

حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

الوحدة الرابعة :حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تمارين (٤ ـ ١)



① **فى الشكل المقابل : أكمل**

أ جا س = ... ب جتا س = ...

جـ ظا س = ... د جتا ص = ...

هـ ظا ص = ... و جا ص = ...

② إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

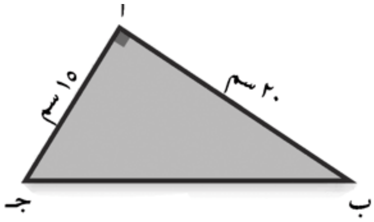
③ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

④ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ **فأوجد** القياس الستينى لكل زاوية من زواياه.

⑤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جا حـ ، جتا أ ، جتا حـ ، ظا حـ .

⑥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .



٧ **فى الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث فيه ق($\angle$ أ) = ٩٠° ، أ جـ = ١٥سم ، أ ب = ٢٠سم

أثبت أن : جتا حـ جتا ب - جا حـ جا ب = صفر

٨ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم

أوجد قيمة : (أ) ظا س + ظا ع (ب) جتا س جتا ع - جا س جا ع

(جـ) جا س جتا ع + جتا س جا ع

٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم ،

أوجد قيمة كل من : (أ) ظا س $\times$ ظا ص (ب) جا^{٢}س + جا^{٢}ص

١٠ أ ب جـ ى شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أى = ٤سم ، أ ب = ٥سم، ب جـ = ١٢سم

أثبت أن : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا حـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ حـ + جتا}^{٢}\text{ ب}} = ٣$

١١ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢سم ، رسم $\overleftarrow{\text{أى}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أى}}$ $\cap$ $\overline{\text{ب جـ}}$ = {ى}

أولاً: أوجد قيمة : جا ($\angle$ جـ أ ى) ، جتا ($\angle$ جـ أ ى) ، ظا ($\angle$ جـ أ ى)

ثانياً: أثبت أن: (أ) جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ = ١ (ب) جا ب + جتا جـ > ١

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

تمارين (٤ ـ ٢)

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٢ إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٣ جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = ...

٤ إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٥ إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٢ أوجد قيمة المقدار التالى مبيناً خطوات العمل

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا^{٢} ٣٠°

٣ أثبت أن:

أ جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠° + جتا^{٢} ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

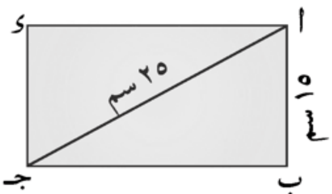
٤ أوجد قيمة س اذا كان:

٤س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥°

٥ أوجد هـ ، حيث هـ زاوية حادة.

جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

٦ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:

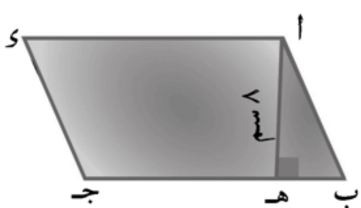


ا ب جـ ى مستطيل فيه ا ب = ١٥سم ، ا جـ = ٢٥سم .

أوجد : أولاً: ق(∠ا جـ ب)

ثانياً: مساحة سطح المستطيل ا ب جـ ى .

٧ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:



ا ب جـ ى متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم^{٢} ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

$\overline{اهـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ا هـ = ٨سم

أوجد : أولاً: طول $\overline{اى}$ **ثانياً:** ق(∠ب)

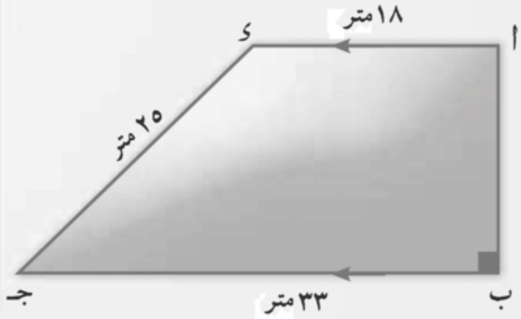
ثالثاً: طول ا ب لأقرب رقم عشرى واحد **(استخدم أكثر من طريقة)**

نشـاط

قطعة أرض على شكل شبه منحرف أ ب جـ ى فيها $\overline{أى} // \overline{ب جـ}$ ، ق($\angle$ ب) = ٩٠° ،

أ ى = ١٨مترًا ، ب جـ = ٣٣متر

ى جـ = ٢٥متر



المطلوب : أ إيجاد طول $\overline{أب}$.

ب ق($\angle$ جـ).

جـ إذا أراد صاحب قطعة الأرض عمل نافورة دائرية الشكل داخلها ، فما أكبر مساحة ممكنة لهذه النافورة ؟ ثم أوجد مساحة الجزء المتبقى من قطعة الأرض.

(π = ٣,١٤)

اختبار الوحدة

١ **أثبت صحة كل من المتساويات الآتية ، مبينا خطوات الحل :**

أ جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

ب ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$

٢ **بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التى تحقق كلاً من :**

أ ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠°

ب ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

٣ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦سم ، ق($\angle$ جـ) = ٢٤َ ٨٤° .
أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول ب جـ .

٤ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{أى} // \overline{ب جـ}$ ، ق($\angle$ ب) = ٩٠° ، فإذا كان أ ب = ٣سم ، أ ى = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم . **أثبت أن :** جتا ($\angle$ ى جـ ب) - ظا ($\angle$ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

٥ سُلَّم $\overline{أب}$ طوله ٦أمتار يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسى وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هى مسقط نقطة أ على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{أجـ}$.

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

تمارين (٥ ـ ١)

أولاً: أكمل ما يأتى:

١ البعد بين النقطة (-٣، ٤) ونقطة الأصل يساوى ....

٢ البعد بين النقطتين (- ٥، ٠)، (٠، ١٢) يساوى ....

٣ البعد بين النقطتين (١٥، ٠)، (٦، ٠) يساوى ....

٤ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوى ....

٥ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠)، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة؛ فإن أ = ...

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١ النقط (٠، ٠)، (٦، ٠)، (٠، ٨) :

أ تكون مثلث منفرج الزاوية　　ب تكون مثلث حاد الزوايا

جـ تكون مثلث قائم الزاوية　　د تقع على استقامة واحدة

٢ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة ، فأى من النقط الآتية تنتمى للدائرة ؟

أ (١، ٢)　　ب (- ٢، ١)　　جـ ($\sqrt{3}$، ١)　　د ($\sqrt{2}$، ١)

٣ بَيِّنْ أيًّا من مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

أ (١، ٤)، (٣، - ٢)، (- ٣، ١٦)　　ب (٧، ٠)، (- ٣، - ٣)، (٢٢، ٩)

جـ (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٢ ، ٢)　　د (- ١، - ٤)، (١، ٠)، (٠، - ٢)

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (-٢، ٣) يساوى ٥

ب إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣ أ -١، -٥) يساوى ١٣

٢ إذا كانت أ (س، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (٥، ١) وكانت أ ب = ب جـ؛ فأوجد قيمة س.

٣ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (٦، ١) يساوى ٢ √٥ ؛ فأوجد قيمة س .

٤ بَيِّنْ نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى زواياه :

أ أ (٣، ١٠)، ب (٨، ٥)، جـ (٥، ٢)   ب أ (١، -١)، ب (٢، ١)، جـ (-٣، -٢)

جـ أ (٣، ٣)، ب (٤، -١)، جـ (١، ١)

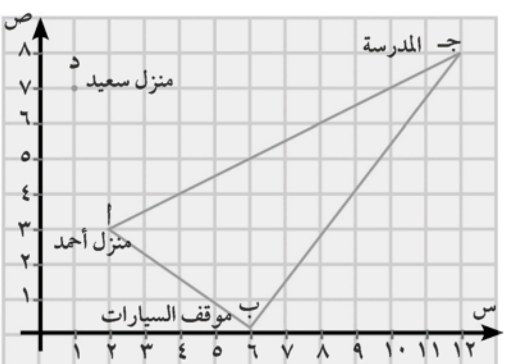
٥ بَيِّنْ نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (- ٢، ٤)، ب (٣، - ١)، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه .

٦ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، -٥)، ب (- ١، ٧)، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد مساحته .

٧ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ(٥، ٣)، ب (٦، -٢)، جـ (١، -١)، د (٠، ٤) اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين، ثم أوجد مساحته .

٨ أثبت أن النقط أ(-٢، ٥)، ب (٣، ٣)، جـ (-٤، ٢) ليست على استقامة واحدة، و إذا كانت د (-٩، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع .

٩ **فى الشكل المقابل :**



أ أوجد إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد وموقف السيارات والمدرسة .

ب بعد منزل أحمد عن المدرسة .

جـ بعد منزل سعيد عن المدرسة.

د أيهما أقرب: منزل أحمد عن المدرسة أم منزل سعيد عن المدرسة ؟

هـ هل الطريقان $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ متعامدان ؟ اذكر السبب.

١٠ إذا كانت أ، ب، جـ، د أربع نقط معلومة فى مستوى إحداثى متعامد ؛ فحدد الشروط التى تجعل هذه النقط رؤوسًا لكل من الأشكال الهندسية الآتية :

١ متوازى أضلاع   ٢ مستطيل   ٣ معين   ٤ مربع

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تمارين (٥ ـ ٢)

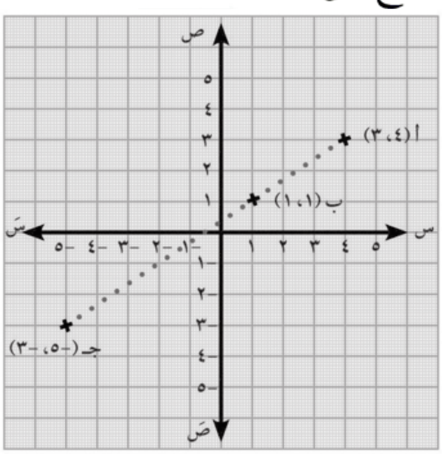
أولا : أكمــل

أ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة أب حيث أ (٥، -٢) فإن إحداثيى النقطة ب هى ....

ب **إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د** أربع نقط على استقامة واحدة
، كان أ ب = ب جـ = جـ د، أ(١، ٣)، جـ (٥، ١) أوجد :
أولاً : إحداثيى النقطة ب هى (........ ، ....)
ثانيًا : إحداثيى النقطة د هى (........ ، ....)

جـ أد متوسط فى △ أب جـ، م منتصف أد
حيث أ (٠، ٨)، ب (٣، ٢)، جـ (-٣، ٦) أوجد :
أولاً : إحداثيى نقطة د هى (........ ، ....)
ثانيًا : إحداثيى نقطة م هى (......... ، ....)
تحقق بتعين إحداثيات النقط.

د لاثبات أن النقط أ (٤، ٣)، ب(١، ١)، جـ (-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة



أكمل :

أ ب = √ (١ - ٤)^٢ + (١ - ٣)^٢ = ...

ب جـ = √ (-٥ - ١)^٢ + (-٣ - ١)^٢ = ...

أ جـ = √ (-٥ - ٤)^٢ + (-٣ - ٣)^٢ = ...

∴ أ ب + ب جـ = ... + ... = ...

∵ أ ب + ... = أ جـ

∴ النقط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

هـ أوجد إحداثيى نقطة جـ حيث جـ منتصف أب فى الحالات الآتية :

١ أ(٢، ٤)، ب (٦، ٠) ، جـ (....،....)
٢ أ (٧، -٥)، ب (-٣، ٥) ، جـ (....،....)
٣ أ(-٣، ٦)، ب (٣، -٦) ، جـ (....،....)
٤ أ (٧، -٦)، ب (-١، ٠) ، جـ (....،....)

ثانيًا : ① إذا كانت جـ منتصف أب فأوجد س، ص فى كل من الحالات الآتية :

أ : أ (١، ٥) ، ب (٣، ٧) ، جـ (س، ص)

ب : أ (- ٣، ص) ، ب (٩، ١١) ، جـ (س، - ٣)

جـ : أ (س، - ٦) ، ب (٩، - ١١) ، جـ (- ٣، ص)

د : أ (س، ٣) ، ب (٦، ص) ، جـ (٤، ٦)

② إذا كانت أ (١، - ٦)، ب (٩، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم أب إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول .

③ أثبت أن النقط أ (٦، ٠)، ب (٢، -٤)، جـ (-٤، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلاً .

④ إذا كانت النقط أ(٣، ٢)، ب (٤، -٣)، جـ (-١، -٢)، د (-٢، ٣) هى رؤوس معين ؛ فأوجد :

أ إحداثيى نقطة تقاطع القطرين .

ب مساحة المعين أ ب جـ د.

⑤ أثبت أن النقط أ (-٣، ٠)، ب (٣، ٤)، جـ(١، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على ب جـ.

⑥ إذا كانت أ (-١، -١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠)، د (٣، -٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد . أثبت أن أ جـ، ب د ينصف كل منها الآخر ، ثم عين نوع الشكل.

⑦ أثبت أن النقط أ (٥، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٢، -٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د معينًا وأوجد مساحة سطحه .

⑧ أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٤)، ب (٢، -١)، جـ (-٤، -٣) ؛ أوجد إحداثيى د .

خذ هـ ∈ أد حيث أ هـ = ٢ أ د . ما إحداثيًا النقطة هـ ؟

ميل الخط المستقيم

تمارين (٥ ـ ٣)

أولاً : أكمل ما يأتى

١ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ يساوى ....

٢ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ يساوى ....

٣ ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (-٢، ٣) يساوى ....

٤ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨، ٣)، ب (٢، ك) فإن ك = ...

٥ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (م، ٤)، د (-٥، ٧) فإن م تساوى .....

٦ أب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يساوى ....

٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ، ٠)، (٠، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ = ...

ثانيًا :

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (- ٣، ٤)، جـ (- ٣، - ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢)، د (- ٣، ٢) .

٢ إذا كانت أ (- ١، - ١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

٣ إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°؛ فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$، $ل_٢$:

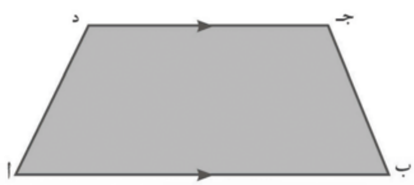
أ متوازيين ب متعامدين

٤ إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ.

٥ أثبت أن النقط أ (- ١، ١)، ب (٠، ٥)، جـ (٤، ٢)، د (٥، ٦) هى رؤوس لمتوازى أضلاع.

٦ أثبت باستخدام الميل أن النقط ا (- ١، ٣)، ب (٥، ١)، جـ (٦، ٤)، د (٠، ٦) هى رؤوس مستطيل .

٧ فى الشكل المرسوم :
أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$ ،
أ(٩، -٢)، ب (٣، ٢)، جـ (س، -س)،
د (٤، -٣)، أوجد إحداثيى نقطة جـ .



٨ أثبت أن النقط أ (٤ , ٣)، ب (٧، ٠)، جـ (١، -٢) هى رؤوس مثلث . و إذا كانت نقطة د (١، ٢) فأثبت أن الشكل أب جـ د شبه منحرف وأوجد النسبة بين أد ، ب جـ .

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات

تمارين (٥ ـ ٤)

١) إذا كان ص = م س + جـ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات ؛ فأكمل ما يأتى :

أ) معادلة الخط المستقيم عندما م = ١ ، جـ = ٣ تكون على الصورة ....

ب) معادلة الخط المستقيم عندما م = -٢ ، جـ = ١ تكون على الصورة ....

جـ) معادلة المستقيم عندما م = ٣ ، جـ = ٠ تكون على الصورة ....

٢) أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات فى كل مما يأتى :

أ) ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ ب) ٥ س + ٤ص − ١٠ = ٠ جـ) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

٣) أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات الآتية :

أ) ميله يساوى ٢ و يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

ب) ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص-١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ .

جـ) يمر بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١) .

د) معادلة الخط المستقيم عندما م = صفر، جـ = صفر .

٤) ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية:

أ) ميله يساوي $\frac{-١}{٢}$ ويقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوي وحدة واحدة.

ب) ميله يساوي ٢ و يقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات.

جـ) يقطع من الجزءين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزءين طوليهما ٢، ٣ من الوحدات على الترتيب.

٥) الجدول الآتي يمثل علاقة خطية.

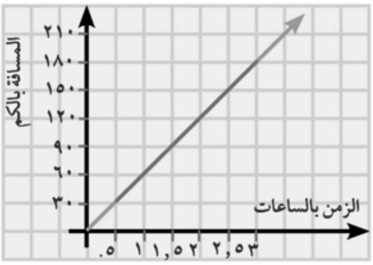
س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	أ

أ) أوجد معادلة الخط المستقيم.

ب) أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

جـ) أوجد قيمة أ.

٦ **الشكل المقابل**: يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التى تقطعها سيارة بالكيلومتر والزمن (بالساعة) الذى قطعت فيه هذه المسافة.



أوجد:

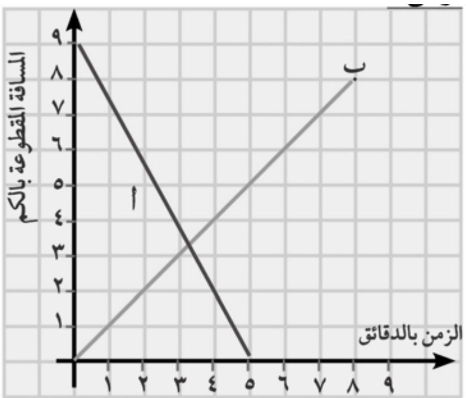
أ المسافة المقطوعة بعد ٩٠دقيقة.

ب الزمن الذى قطعت فيه السيارة ١٥٠ كيلو مترًا.

جـ سرعة السيارة.

د معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن

٧ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) بالكيلومترات والزمن (ن) بالدقائق لكل من الجسمين أ، ب:



أ هل بدأ أ ، ب الحركة في توقيت واحد؟

ب بعد كم دقيقة التقى أ، ب؟

جـ ما سرعة أ ؟

د اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب.

نشــاط

① فى الشكل المقابل :

النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ (٤، ٣).

أولا : أكمل ما يأتى :

أ و أ = ... وحدة الطول

ب و ب = ... وحدة الطول

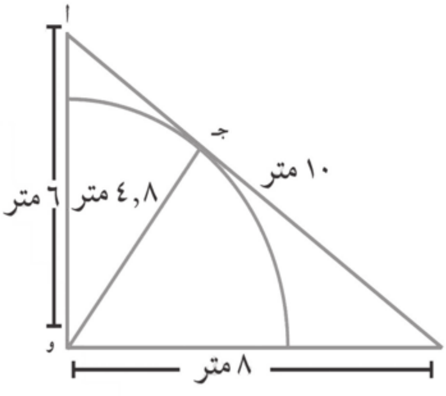
ثانيًا : اختر من المجموعة الأولى ما يناسبها من المجموعة الثانية :

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
أ ميل $\overleftrightarrow{أب}$	١-
ب ميل $\overleftrightarrow{وجـ}$	$\frac{-٣}{٤}$
جـ ميل $\overleftrightarrow{وأ}$	صفر
د ميل $\overleftrightarrow{وب}$	$\frac{٣}{٤}$
	١
	غير معرف

ثالثًا : أوجد إحداثيات النقط أ، ب، و ، ثم أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{جـو}$.

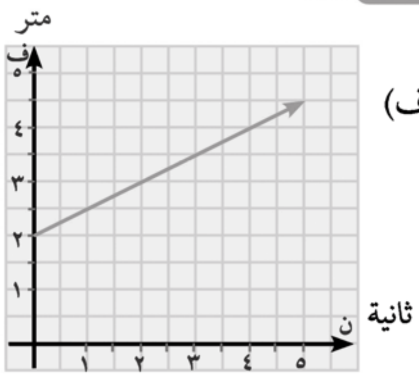
رابعًا : أوجدطول كل من $\overline{جـأ}$، $\overline{جـب}$، $\overline{جـو}$

خامسًا: أثبت بأكثر من طريقة أن جـ مركز الدائرة المارة بالنقط أ، و، ب.



② ربطت بقرة عند نقطة و بحبل طوله ٤,٨ من المتر، فإذا كانت المساحة و أ ب مزروعة بالبرسيم، فاحسب مساحة الأرض المزروعة بالبرسيم التى لاتستطيع أن تأكلها البقرة. لأقرب متر مربع.

اختبار الوحدة



(١) الشكل المقابل :

يمثل حركة جسيم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة (ف) مقيسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية ؛ أوجد :

أ المسافة عند بدء الحركة .

ب سرعة الجسيم .

جـ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم .

د المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .

هـ الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة.

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

أ المستقيم الذى معادلته ٢س – ٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله :

أ -٦ ب -٢ جـ $\frac{٢}{٣}$ د ٢

ب إذا كان المستقيمان ٣ س -٤ص -٣ = ٠، ك ص + ٤س -٨ = ٠ متعامدين فإن ك =

أ -٤ ب -٣ جـ ٣ د ٤

جـ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك تساوى :

أ -٢ ب -١ جـ ١ د ٢

د مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س -٤ص = ١٢، س = ٠، ص = ٠ يساوى :

أ ٦ ب ٧ جـ ١٢ د ٥

هـ $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٥، ٢)؛ أى من النقط التالية ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

أ (١، ٦) ب (٢، ٣) جـ (٠، ٠) د (٣، -٤)

و إذا كان أ (٣، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (س، ص) فإن إحداثيي نقطة جـ التى تجعل △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب هى:

أ (٦، -١) ب (-٤، ٥) جـ (٣، -٢) د (٨، -٢)

(٣) أ (٥، -٦)، ب (٣، ٧)، جـ (١، -٣)؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{أ ب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١، ٣)، ب (٣، ٥) .

(٥) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠ .

٦ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، - ١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.

٨ أ ب جـ مثلث فيه أ (١، ٢)، ب (٥، - ٢)، جـ (٣، ٤)، د منتصف $\overline{أب}$، رسم $\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ ؛ أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{د هـ}$.

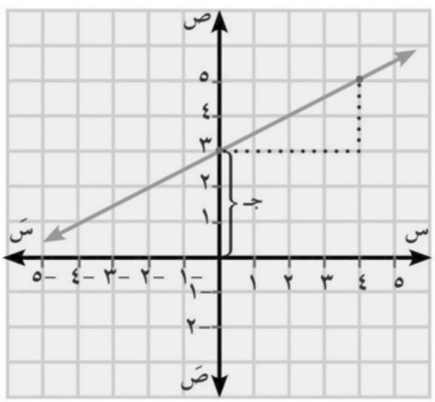
٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (٠، ٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (- ١، ٤)، (١، ٧).

١٠ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١)، (٦، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

١١ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات، حيث أ (س، ٧)، ب (٣، ٥) فأوجد قيمة س .

١٢ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ // محور السينات، حيث جـ (٤، ٢)، د (- ٥، ص) فأوجد قيمة ص.

١٣ أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٢)، (٥، ١).



١٤ فى الشكل المقابل أوجد :

أ ميل الخط المستقيم (م) .

ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ).

جـ معادلة الخط المستقيم بمعلومية م، جـ .

د طول الجزء المقطوع من محور السينات .

هـ مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات .

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة (−٣، ٤) تقع فى الربع ....

أ) الأول ب) الثانى جـ) الثالث د) الرابع

(٢) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى........

أ) المدى ب) الوسط الحسابى جـ) الانحراف المعيارى د) المنوال

(٣) إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

أ) ٣ : ٤ ب) ٤ : ٣ جـ) ٣ : ٧ د) ٤ : ٧

(٤) إذا كانت ن (س) = ٢، ن (ص^{٢}) =٩ فإن ن (س × ص) = ...

أ) ٦ ب) ١٨ جـ) ١١ د) ٧

(٥) المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ....

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٦ د) ١٢

(٦) إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س= ....

أ) ١٦ ب) ١٢ جـ) ٢٤ د) ٦

السؤال الثانى:

(أ) إذا كانت س × ص = { (٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٧) } فأوجد:

(١) ص (٢) ص × س

(ب) إذا كانت أ، ب، جـ، ء كميات متناسبة فأثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب - أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء - جـ}}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت س = {٢، ٣، ٥}، ص = {٤، ٦، ٨، ١٠} وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن «٢أ = ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

(١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى (٢) بين أن ع دالة

(ب) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

السؤال الرابع:

(أ) إذا كانت س = {١، ٣، ٥} وكانت ع دالة على س وكان بيان

ع = {(أ، ٣)، (ب، ١)، (١، ٥)} فأوجد

(١) مدى الدالة (٢) القيمة العددية للمقدار أ + ب

(ب) إذا كانت ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد:

(١) العلاقة بين س، ص (٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

السؤال الخامس:

(أ) مثل بيانيا منحنى الدالة د حيث د (س) = (س − ٣)^{٢} متخذا س $\in$ [٠، ٦]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة الصغرى للدالة ومعادلة محور التماثل

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم ٨، ٩، ٧، ٦، ٥

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة (٣ ، ٤) تقع فى الربع ....

أ) الأول　　ب) الثانى　　جـ) الثالث　　د) الربع

(٢) من مقاييس التشتت ....

أ) الوسيط　　ب) الوسط الحسابى　　جـ) الانحراف المعيارى　　د) المنوال

(٣) الثالث المتناسب للعددين ٣، ٦ هو ....

أ) $\frac{١}{٢}$　　ب) ٩　　جـ) ٢　　د) ١٢

(٤) إذا كانت ن (سـ) = ٢، ن (صـ × سـ) = ٦ فإن ن (صـ ٢) = ...

أ) ٤　　ب) ٩　　جـ) ١٦　　د) ١٢

(٥) المدى لمجموعة القيم ٧، ٣، ٦، ٩، ٥ يساوى ....

أ) ٣　　ب) ٤　　جـ) ٦　　د) ١٢

(٦) إذا كان س ص = ٧ فإن ص $\propto$ ....

أ) $\frac{١}{\text{س}}$　　ب) س − ٧　　جـ) س　　د) س + ٧

السؤال الثانى:

(أ) إذا كانت سـ = {٢، ٥}، صـ = {١، ٢}، ع = {٣} فأوجد:

(١) ن (سـ × ع)　　(٢) (صـ ∩ سـ) × ع

(ب) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ، جـ فأثبت أن $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت سـ = {١، ٣، ٤، ٥}، صـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

وكانت ع علاقة معرفة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعنى أن «أ + ب = ٧»

لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ

(١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى　　(٢) بين أن ع دالة

(ب) إذا كانت ٥ أ = ٣ ب أوجد قيمة $\frac{٧\text{أ} + ٩\text{ب}}{٤\text{أ} + ٢\text{ب}}$

السؤال الرابع:

(أ) إذا كانت د (س) = ٤ س + ب وكان د (٣) = ١٥ أوجد قيمة ب

(ب) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد:

(١) العلاقة بين س، ص (٢) قيمة ص عندما س = ٥

السؤال الخامس:

(أ) مثل بيانيا منحنى الدالة د حيث د (س) = ٤ – س ٢ متخذا س $\ni$ [-٣، ٣]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى للدالة ومعادلة محور التماثل

(ب) الجدول الأتى يمثل عدد الأطفال فى ١٠٠ أسرة فى إحدى المدن:

عدد الأطفال (س)	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر (ص)	٦	١٥	٤٠	٢٥	١٤	١٠٠

أحسب المتوسط الحسابى والإنحراف المعيارى.

(للطلاب المدمجين)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل ما يأتى:

(١) النقطة (٥، ٣) تقع فى الربع ....

(٢) الدالة د (س) = س^{٣} + ٨ تسمى دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

(٣) المدى لمجموعة القيم ٤، ١٤، ٢٥، ٣٤ هو ....

(٤) إذا كان ص = ٢ س فإن ص ∝ ....

(٥) إذا كانت سـ = {٢، ٤، ٦} فإن ن (سـ^{٢})= ....

(٦) إذا كان (أ ، ٣) = (٦، ب) فإن أ + ب = ...

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

(١) إذا كان س ص = ٧ فإن ص ∝ ....

[$\frac{١}{س}$ ، س − ٧، س، س + ٧]

(٢) إذا كان ٢، ٣، ٦، س كميات متناسبة فإن س = ... [٩، ١٨، ١٢، ٣]

(٣) إذا كان ٢ أ = ٥ ب فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

[$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٥}{٢}$]

(٤) من مقاييس التشتت ....

[الوسط الحسابى، المدى، المنوال، الوسيط]

(٥) إذا كان ن(سـ) = ٥ ، ن (سـ × صـ) = ١٠ فإن ن (صـ) = ...

[٤، ٣، ٢، ١]

(٦) إذا كان سـ = {١} فإن سـ^{٢} = ...

[١، (١، ١)، {(١، ١)}، {١}]

السؤال الثالث:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:

(١) إذا كان بيان الدالة د = {(١، ٣)، (٢، ٤)، (٣، ٣)}

فإن مجال الدالة د = {١، ٢، ٣} (   )

(٢) إذا كان ص $\propto$ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فإن ص = ٢ عندما س = ٤ (   )

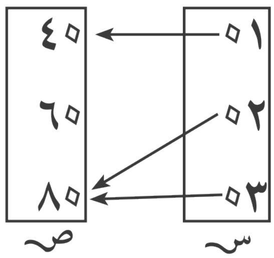
(٣) إذا كان مجـ(س ـ سَ)^{٢} = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوى ٩ فإن α = ٤ (   )

(٤) نقطة تقاطع المستقيم الذى يمثل الدالة

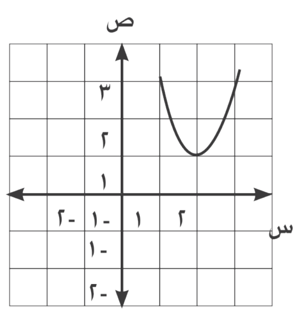
د (س) = س + ٢ مع محور السينات هى النقطة (−٢، ٠) (   )

(٥) إذا كانت د : سـ ← صـ فإن سـ تسمى المجال لهذه الدالة (   )

(٦) المخطط السهمى المقابل من سـ إلى صـ تمثل دالة (   )



س ٤ : صل من العمود (أ) ما يناسبه من العمود (ب)

أ	ب
(١) إذا كان (١، ٤) $\in$ {٢، س} × {١، ٤} فإن س=	٦
(٢) إذا كانت دالة س حيث د (س) = س − ٤ يمثلها بيانيا مستقيم يمر بالنقطة (أ، ٢) فإن أ = ...	١
(٣) $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{....}{١٦}$	١٠
(٤) إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (٥) + د (− ٥) = ...	٦±
(٥) الوسط المتناسب للعددين ٤، ٩ هو	٢
(٦) فى الشكل المقابل معادلة خط التماثل للمنحنى هو س = ... 	٨

نماذج إختبارات الهندسة

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) ظا ٤٥° = ...

أ) ١   ب) ٢ $\sqrt{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\sqrt{٢}$

(ب) إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ فإن ق(∠ س) = ... حيث س قياس زاوية حادة

أ) ٤٥°   ب) ٦٠°   جـ) ٣٠°   د) ٩٠°

(جـ) البعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤) يساوى ....

أ) ٤   ب) ٥   جـ) ٦   د) ٧

ء) إذا كان س + ص = ٥، ك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن ك = ...

أ) −٢   ب) −١   جـ) ١   د) ٢

(هـ) إذا كان أ (٥، ٧)، ب (١، −١) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى ....

أ) (٢، ٣)   ب) (٣، ٣)   جـ) (٣، ٢)   د) (٣، ٤)

(و) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، −٥) ويوازى محور الصادات هى ....

أ) س = ٣   ب) ص = −٥   جـ) ص = ٢   د) س = −٥

السؤال الثانى:

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن: حا ٦٠° = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°

(ب) أثبت أن النقط أ (−٣، −١)، ب (٦، ٥)، جـ (٣، ٣) تقع على استقامة واحدة.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت ٤ حتا ٦٠° حا ٣٠° = طا س فأوجد قيم س حيث س زاوية حادة

(ب) إذا كانت جـ (٦، −٤) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥، −٣) فأوجد إحداثيى النقطة ب

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان المستقيم ل ١ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك)، والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان $ل_١$ // $ل_٢$

(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ فيه أ جـ = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم أوجد

(١) حتا أ حتا ب – حا أ حا ب (٢) ق (∠ ب)

السؤال الخامس:

(أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويمر بالنقطة (١، ٠)

(ب) أثبت أن النقط أ (٣، –١)، ب (–٤، ٦)، جـ (٢، –٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها النقطة م (–١، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة.

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ٢ حا ٣٠° ظا ٦٠°

أ) $\sqrt{٣}$ ب) ٣ جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

أ) س = − ٢ ب) س= − ٣ جـ) ص = −٢ د) ص= −٣

(٣) إذا كان جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س زاوية حادة فإن جا ٢ س = ...

أ) ١ ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ) − ٢ د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٤) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٢ وحدة طول فإن النقطة .... تنتمى إليها

أ) (١، −٢) ب) (−٢، $\sqrt{٥}$) جـ) ($\sqrt{٣}$، ١) د) (٠، ١)

(٥) البعد العمودى بين المستقيمين س − ٢ = ٠، س + ٣ = ٠ يساوى ....

أ) ١ ب) ٥ جـ) ٢ د) ٣

(٦) إذا كان المستقيمان اللذان ميلالهما − $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيان فإن ك = ...

أ) ٦ ب) −٤ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ٢

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان جتا هـ ظا ٣٠° = جتا^{٢} ٤٥° فأوجد ق (∠ هـ) حيث هـ زاوية حادة

(ب) بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٣، ٣)، ب (١، ٥)، جـ (١، ٣)
من حيث أطوال أضلاعه

السؤال الثالث:

(أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ٣)، (−١، −٣) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

(ب) إذا كانت النقطة (٣، ١) فى منتصف البعد بين النقطتين (١، ص)، (س، ٣) أوجد النقطة (س، ص).

السؤال الرابع:

(أ) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولايهما ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب ثم أوجد ميل هذا المستقيم.

(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ جـ = ١٠ سم، ب جـ = ٨ سم

أثبت أن جا^٢ أ + ١ = ٢ جتا^٢ جـ + جتا^٢ أ

السؤال الخامس:

(أ) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ٣)، (٢ ، ٤) يوازى المستقيم ٣ ص – س – ١ = ٠

(ب) أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أ ى // ب جـ، ق (∠ ب) = ٩٠°، أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٦ سم، أ ى = ٢ سم، أوجد طول ى جـ ثم أوجد قيمة جتا ∠ ب جـ ى

أجب عن الأسئلة الآتية: **يسمح باستخدام الآلة الحاسبة**

الإجابة فى نفس الورقة

السؤال الأول: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارات الخطأ:

(١) البعد بين النقطتين (٩، ٠)، (٤، ٠) يساوى ٥ ( )

(٢) إذا كان طا هـ = ١ فإن قياس ق (∠ هـ) = ٤٥° ( )

(٣) المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ١ يقطع من محور الصادات جزء طوله − ١ ( )

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ = ١

[حيث كلا من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ لا يوازى أى من المحورين] ( )

(٥) ظا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ( )

(٦) إذا كانت أ (١، ٢)، ب (٣، ٤) ، فإن إحداثى نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هى (٢، ٣) ( )

السؤال الثانى:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) بعد النقطة (٤، ٣) عن المحور السينى يساوى [−٣، ٣، ٤، −٤]

(٢) ٤ حتا ٣٠° طا ٦٠° = [٣، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٦، ١٢]

(٣) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيان

فإن ك = ... [−٢، −١، ١، ٢]

(٤) النقط (٠، ٠)، (٣، ٠)، (٠، ٤)

[تكون مثلث منفرج الزاوية، تكون مثلث حاد الزاويا ، تكون مثلث قائم الزاوية، تقع على استقامة واحدة]

٥- إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ = ...

[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$]

(٦) إذا كان حا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة كان

جا ٢ س = ... [١، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

السؤال الثالث

صل من العمود أ بما يناسبه من العمود ب:

أ	ب
(١) ميل المستقيم الموازى للمحور السينى = ...	١٠
(٢) حا ^{٢} ٣٠° + جتا ^{٢} ٣٠° = ...	
(٣) إذا كان أ ب جـ ى مستطيل، أ (−١، −٤)	صفر
جـ (٥، ٤) فإن طول $\overline{\text{ب ى}}$ = ... وحدة طول	
(٤) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله ٢ هو	١
ص = ... س	−٣
(٥) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، −٣)	٢
ويوازى محور السينات ص = ...	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(٦) قيمة المقدار $\frac{\text{٢ ظا ٣٠}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ = ...	

السؤال الرابع:

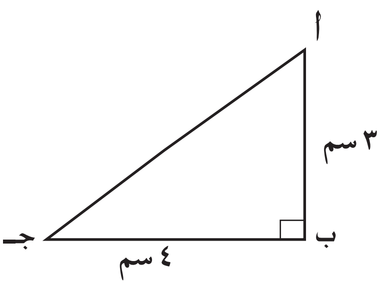
أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$ وكان ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overline{\text{جـ ى}}$ = ...

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم

الزاوية فى ب، أب = ٣ سم، ب جـ = ٤ سم

فإن جا حـ = ...



(٣) إذا كانت النقطة (٠، أ) تنتمى للمستقيم

٣ س − ٤ ص = − ١٢ فإن أ = ...

(٤) إذا كانت س جتا ٦٠° = ظا ٤٥° ، فإن س = ...

(٥) البعد بين النقطة (٤، ٣) ونقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد يساوى ......

(٦) إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$

حيث أ (٥، −٢) فإن إحداثى نقطة ب هى (..........، ....)

المقاس	عدد الصفحات بالغلاف	ورق المتن	ورق الغلاف	طباعة المتن	طباعة الغلاف	التجليد	رقم الكتاب
$\frac{١}{٨}$ (٥٧×٨٢)	١٢٤	٧٠ جرام	١٨٠ جرام	٨٠ صفحة ٤ لون ٤٤ صفحة ١ لون	٤ لون	بشر	٢٥٢/١٠/٢/١١/٣/٥٢

http://elearning.moe.gov.eg

صندوق تأمين ضباط الشرطة