الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام زايد
YEAR OF ZAYED

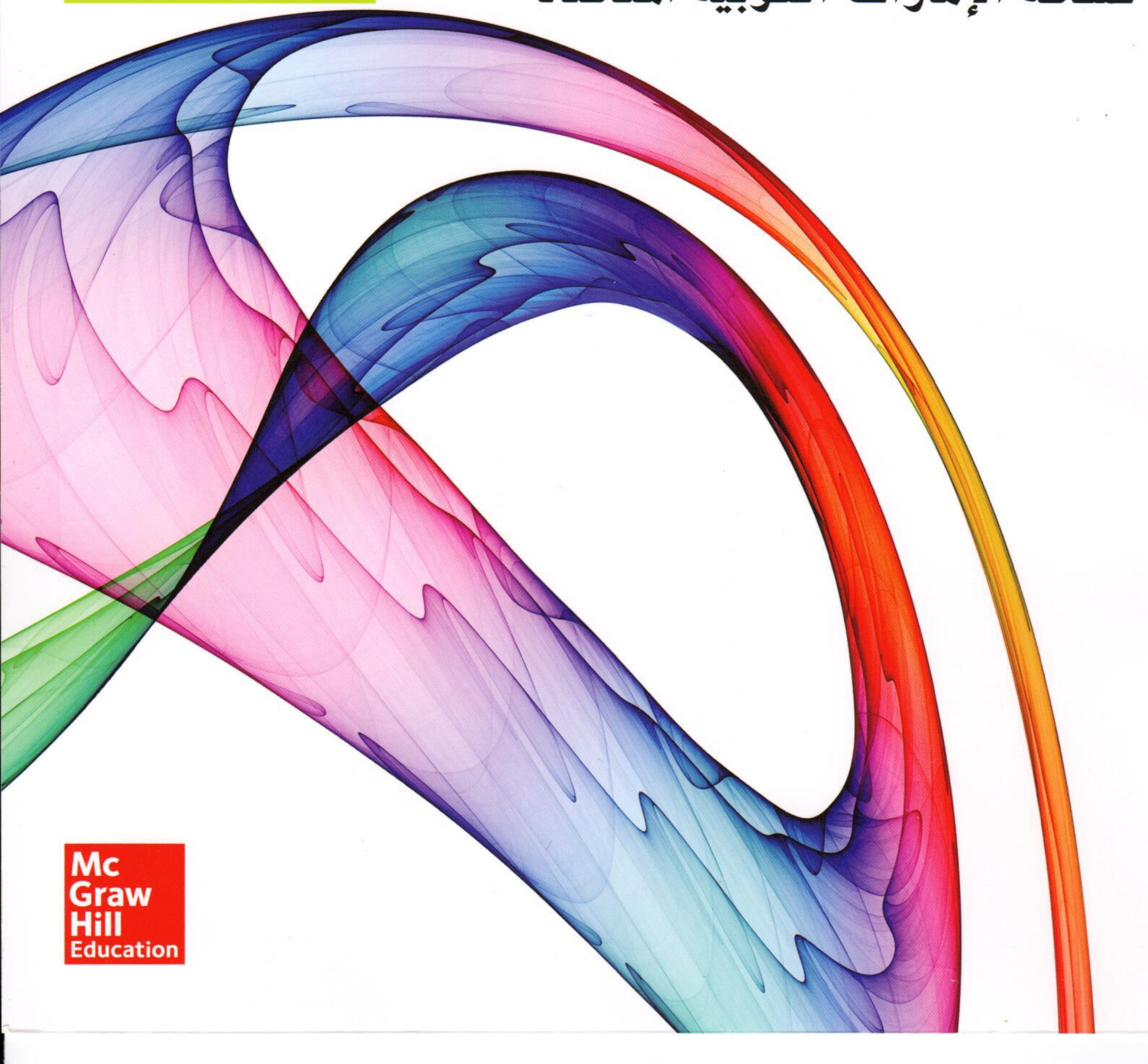
الرياضيات

11

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc
Graw
Hill
Education

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

رؤية
VISION
2021
الإمارات العربية المتحدة
UNITED ARAB EMIRATES

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 11 مجلد 3

McGraw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 11 Integrated Math SE Vol.3
FM, Integrated Math III © 2012
11. Trigonometric Functions, from Integrated Math III Chapter 11 © 2012
12. Trigonometric Identities and Equations, from Integrated Math III Chapter 12 © 2012
13. Proportions and Similarity, from Integrated Math III Chapter 13 © 2012
14. Transformations and Symmetry, from Integrated Math III Chapter 14 © 2012

صورة الغلاف: K-Fractals/Alamy Stock Photo

mheducation.com/prek-12

Mc Graw Hill Education

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-682519-3 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-682519-8 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-683234-4 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-683234-8 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-682810-1 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-682810-3 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-683489-8 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-683489-8 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

المؤلفون

يضمن المؤلفون الرئيسون بأن برامج الرياضيات لـ Macmillan/McGraw-Hill تم ضبطها رأسياً بشكل صحيح من البداية إلى النهاية—للنجاح في الرياضيات المتكاملة I و ما يلحقها. بمراجعة المحتوى من برامج المدرسة الثانوية، جميع برامجنا الرياضية تم ضبطها بوضوح من حيث المجال و الترتيب.

المؤلفون الرئيسون

الدكتور ج. أ. كارتر،

المدير العام
مدرسة أدلاي أ. ستيفنسون الثانوية
لينكولن شاير، إلينوي

مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا و الطرق اليدوية لتصوير النظريات؛ إنجاز الرياضيات لمتعلمين اللغة الإنجليزية

الدكتور جيلبرت ج. كيوفاس.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس — سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

مجالات الخبرة: تطبيق النظريات و المهارات في السياقات الغنية في الرياضيات؛ التمثيلات الرياضية

الدكتور روجر داي، NBCT

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاونشيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

مجالات الخبرة: تعلم و تطبيق الإحتمالية و الإحصاء؛ تعليم مدرس الرياضيات

الدكتور كارول مالوي،

أستاذ مساعد
جامعة شمال كارولينا في شابل هيل
شابل هيل، شمال كارولينا

مجالات الخبرة: التمثيلات و التفكير النقدي؛ نجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

راث كايسي

مستشار الرياضيات
مدرس إقليمي شريك
جامعة كنتاكي
ليكسنجتون، كنتاكي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

جيري كامينز

مستشار الرياضيات
رئيس سابق، المجلس الوطني لمشرفين الرياضيات
ويسترن سبرينج، إلينوي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

الدكتور بيرتشي هوليداي Ed.D.

مستشار الرياضيات الوطني
سيلفر سبرينج، ماريلاند

مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لتمثيل و فهم البيانات من الحياة اليومية؛ تأثير الرسومات البيانية على فهم الرياضيات

باتريس مور لاتشين

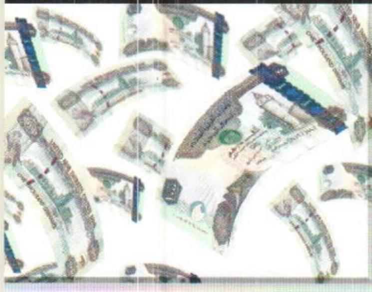
مستشار الرياضيات
هيوستن، تكساس

مجالات الخبرة: تعليم الرياضيات؛ العمل مع متعلمين اللغة الإنجليزية

المؤلف المشارك

دينا زايك مطويات

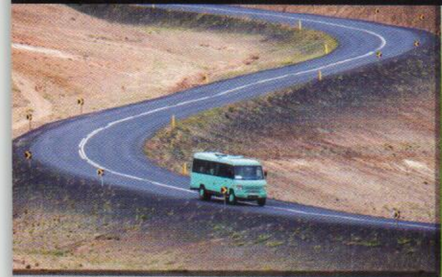
مستشار تعليمي
أنشطة Dinah-Might. Inc.
سان أنطونيو، تكساس



الوحدة 1 المعادلات و المتباينات

الوحدة 2 العلاقات و الدوال الخطية

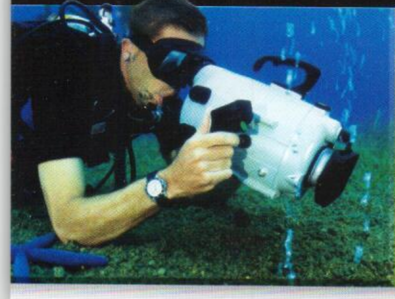
الوحدة 3
أنظمة المعادلات و المتباينات



الوحدة 4

كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

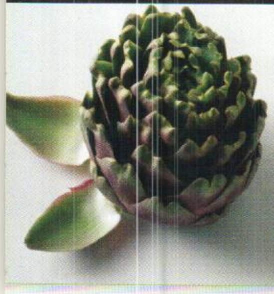
الوحدة 5
الدوال والعلاقات العكسية والجذرية



الوحدة 6 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

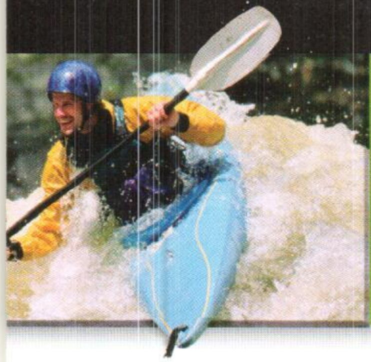
الوحدة 7 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 8 القطوع المخروطية



الوحدة 9 المتتاليات والمتسلسلات

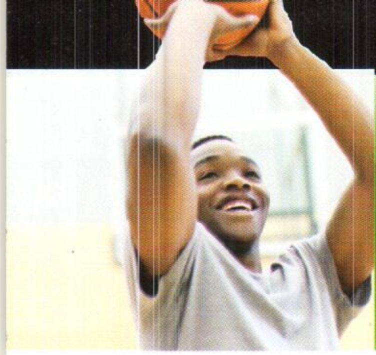
الوحدة 10 الإحصاء والإحتمالات



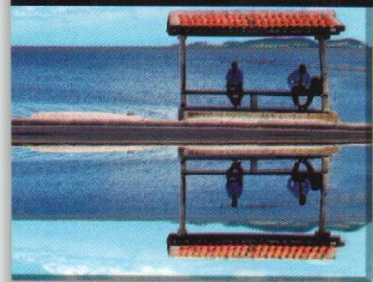
الوحدة 11 الدوال المثلثية

الوحدة 12

المتطابقات والمعادلات المثلثية



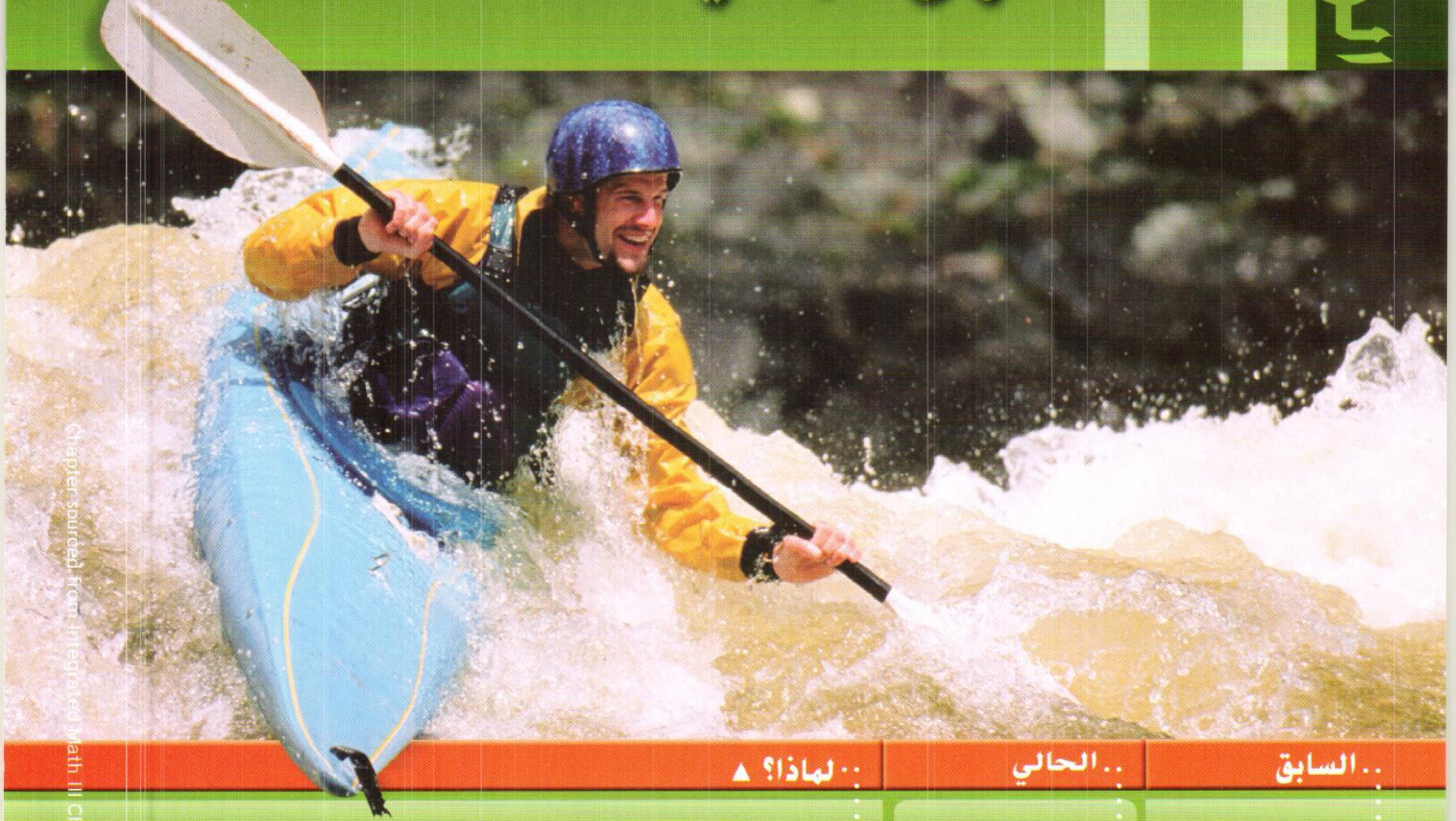
الوحدة 13 التناسب والتشابه



الوحدة 14 التحويلات والتطابق

الوحدة 11

الدوال المثلثية



.. السابق

- لقد مثلت الدوال بيانيًا وحللتها.

.. الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد قيم الدوال المثلثية.
  - حل المسائل باستخدام حساب مثلثات المثلث القائم.
  - حل المثلثات باستخدام قانون sine وقانون cosine.
  - تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.

.. لماذا؟ ▲

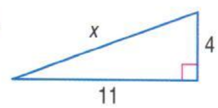
- **الرياضات المائية** لمعرفة الدوال المثلثية تطبيقات عملية في الرياضات المائية. يمكنك مثلًا استخدام حساب مثلثات المثلث القائم في إيجاد المسافة التي قطعها قارب الكاياك في النهر. وإذا كنت ماهرًا في الزوايا وقياساتها، فستفهم بشكل أفضل مدى روعة أن تتمكن من عمل دورة $540°$ على لوح التزلج على الماء.

الاستعداد للوحدة

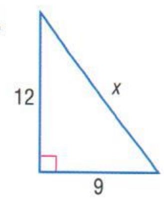
تدريب سريع

أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

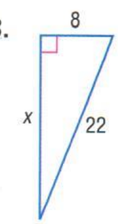
1.



2.



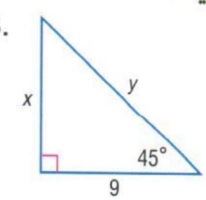
3.



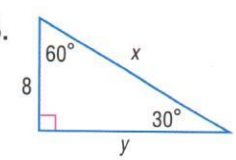
4. لدى سهيلة حديقة مستطيلة الشكل في خلفية المنزل، قياسها 12 مترًا في 15 مترًا. تريد سهيلة أن تضع ممشى صخريًا على قطر المستطيل. كم سيكون طول الممشى؟ قرّب إلى أقرب عشرة من المتر.

أوجد القياس المجهول، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.

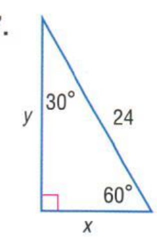
5.



6.



7.

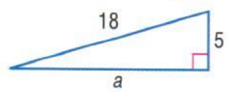


8. يميل السلم على الحائط بزاوية °45. إذا كان طول السلم 12 مترًا، فما الارتفاع الذي سيصل إليه السلم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

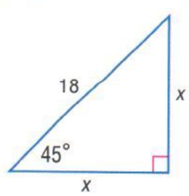
أوجد القياس المجهول في المثلث القائم.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوّض عن c بـ 18 وعن b بـ 5.
$324 = a^2 + 25$	بسّط.
$299 = a^2$	اطرح 25 من الطرفين.
$17.3 \approx a$	أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

مثال 2

أوجد القياسات المجهولة، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	جمّع الحدود المتشابهة.
$2x^2 = 324$	بسّط.
$x^2 = 162$	اقسم كل طرف على 2.
$x = \sqrt{162}$	أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$x = 9\sqrt{2}$	بسّط.

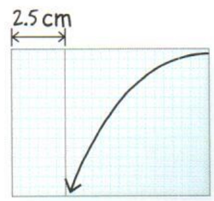
البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك للوحدة 11. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

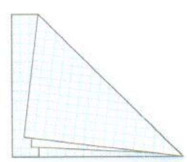
المطويات® منظّم الدراسة

الدوال المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 11 عن الدوال المثلثية. وابدأ بأربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

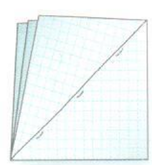
1 **دبس** الأوراق معًا وقِس 2.5 cm من أسفل.



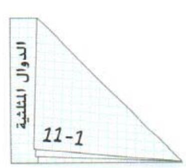
2 **اطو** الأوراق بشكل مائل.



3 **دبس** الأوراق بالطول لعمل الكتاب.



4 **اكتب** على الحافة الدوال المثلثية.



المفردات الجديدة

حساب المثلثات	trigonometry
جيب الزاوية	sine
cosine	cosine
ظل الزاوية	tangent
قاطع التمام	cosecant
القاطع	secant
ظل التمام	cotangent
زاوية الارتفاع	angle of elevation
زاوية الانخفاض	angle of depression
الوضع القياسي	standard position
راديان	radian
قانون sine	Law of Sines
حالة مبهمة	ambiguous case
قانون cosine	Law of Cosines
دائرة الوحدة	unit circle
دالة دائرية	circular function
دالة دورية	periodic function
دورة	cycle
فترة	period
سعة	amplitude
التردد	frequency

مراجعة المفردات

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

الدالة العكسية تكون الدالتان f و g متعاكستين إذا وفقط إذا كان تركيبهما عبارة عن الدالة المحايدة.

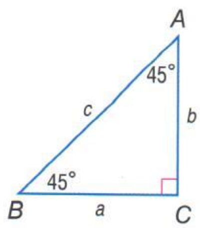
11-1 مختبر ورقة البيانات
استكشاف المثلثات القائمة الخاصة

يمكنك استخدام ورقة بيانات في استكشاف قياسات أضلاع المثلثات القائمة الخاصة.

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

النشاط مثلث °90-°45-°45

قياس الساقين a و b في المثلث ذي القياس °90-°45-°45، متساويان. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟



الخطوة 1 أدخل الصيغ الموضحة في ورقة البيانات. تستخدم الصيغة نظرية فيثاغورس في صورة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2) =B2/A2 =B2/C2 =A2/C2

45-45-90 triangles

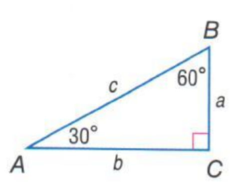
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 2 افحص النتائج. لأن المثلثات ذات القياس °90-°45-°45 تشترك في قياسات الزوايا نفسها، فهي جميعًا تكون متشابهة. وتكون جميع نسب الأضلاع بهذه المثلثات متشابهة. نسب الضلع *b* إلى الضلع *a* تكون 1. نسب الضلع *b* إلى الضلع *c* والضلع *a* إلى الضلع *c* تكون 0.71 تقريبًا.

النموذج والتحليل

استخدم ورقة البيانات أدناه للمثلثات °90-°60-°30.



30-60-90 triangles

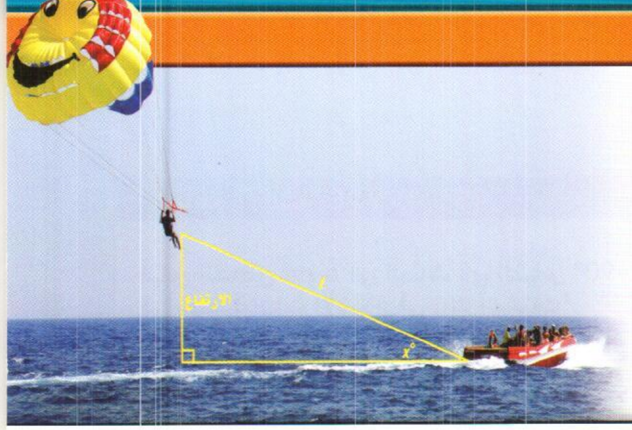
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

1. انسخ ورقة البيانات أعلاه وأكملها.
2. صِف العلاقة بين المثلثات °90-°60-°30 مستخدمًا الأبعاد الموضحة.
3. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟

الدرس 11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

السابق	الحالي	لماذا؟
• استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة.	1 إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة. 2 استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة وقياسات زواياها.	• ارتفاع الشخص الذي يمارس التزلج المائي بالمظلة يعتمد على حبل السحب ℓ والزاوية التي يصنعها الحبل مع محور $x°$ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، فإنه يمكنك استخدام نسبة لإيجاد ارتفاع الشخص الذي يمارس هذا النشاط.



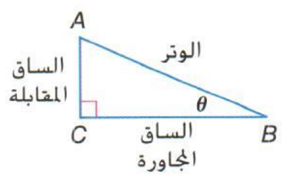
المفردات الجديدة

حساب المثلثات trigonometry
النسبة المثلثية trigonometric ratio
دالة مثلثية trigonometric function
sine
cosine cosine
ظل الزاوية tangent
قاطع التمام cosecant
القاطع secant
ظل التمام cotangent
الدوال العكسية reciprocal functions
معكوس sine inverse sine
معكوس cosine inverse cosine
معكوس ظل الزاوية inverse tangent
زاوية الارتفاع angle of elevation
زاوية الانخفاض angle of depression

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 النسب المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات هو دراسة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث القائم. وتقارن **النسبة المثلثية** بين أطوال الأضلاع في المثلث القائم. وتكون **للدالة المثلثية** قاعدة تعطيها نسبة مثلثية.



يُستخدم الحرف الإغريقي *theta* θ غالبًا في تمثيل قياس زاوية حادة في مثلث قائم. ويُستخدم كلٌ من الوتر، والساق المقابلة θ، والساق المجاورة θ في تعريف النسب المثلثية الست.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية في المثلثات القائمة

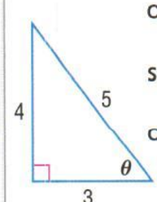
الشرح إذا كان θ هو قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإذًا النسب المثلثية التالية المشتملة على الضلع المقابل *opp*، والضلع المجاور *adj*، والوتر *hyp*، صحيحة.

الرموز

$\sin$ (sine) $\theta = \frac{opp}{hyp}$ $\qquad$ $\csc$ (قاطع التمام) $\theta = \frac{hyp}{opp}$

$\cos$ (cosine) $\theta = \frac{adj}{hyp}$ $\qquad$ $\sec$ (القاطع) $\theta = \frac{hyp}{adj}$

$\tan$ (ظل الزاوية) $\theta = \frac{opp}{adj}$ $\qquad$ $\cot$ (ظل التمام) $\theta = \frac{adj}{opp}$



أمثلة

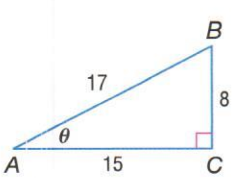
$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية

أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الساق المقابلة θ: $CB = 8$ الساق المجاورة θ: $AC = 15$ الوتر: $AB = 17$



$\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{8}{15}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{15}{17}$ $\qquad$ $\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{8}{17}$

$\cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{15}{8}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{17}{15}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{17}{8}$

تمرين موجّه

1. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية B.

لاحظ أن نسب cosecant و secant و cotangent معكوسات لنسب sine وcosine و tangent على التوالي. ويُطلق عليها اسم **النسب المثلثية العكسية**.

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أي دالة مثلثية يكون مجموعة كل الزوايا الحادة θ في المثلث القائم. إذًا، تعتمد الدوال المثلثية في المثلث القائم على قياسات الزوايا الحادة فقط، وليس أطوال الأضلاع.

نصيحة دراسية

احفظ النسب المثلثية تعد SOH-CAH-TOA وسيلة لتذكر الحرف الأول من كل كلمة في النسب تعويضًا عن sine و cosine و tangent.

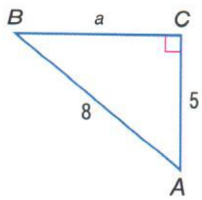
$$\sin \theta = \frac{opp}{hyp}$$

$$\cos \theta = \frac{adj}{hyp}$$

$$\tan \theta = \frac{opp}{adj}$$

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فأوجد القيمة الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ B.



الخطوة 1 ارسم مثلثًا قائمًا مع تسمية زاوية حادة واحدة B.
قم بتسمية الضلع المقابل 5 والوتر 8.

الخطوة 2 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$b = 5$ و $c = 8$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط.
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كل طرف.
$a = \pm\sqrt{39}$	خذ الجذر التربيعي من كل طرف.
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

الخطوة 3 أوجد القيم الأخرى.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8}$، فإن $\csc B = \frac{hyp}{opp}$ أو $\frac{8}{5}$.

$$\cos B = \frac{adj}{hyp} = \frac{\sqrt{39}}{8} \qquad \sec B = \frac{hyp}{adj} = \frac{8}{\sqrt{39}} = \frac{8\sqrt{39}}{39}$$

$$\tan B = \frac{opp}{adj} = \frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5\sqrt{39}}{39} \qquad \cot B = \frac{adj}{opp} = \frac{\sqrt{39}}{5}$$

تمرين موجّه

2. إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية المتبقية لـ B.

قراءة في الرياضيات

تسمية المثلثات

في جميع أنحاء هذه الوحدة، سيُستخدم حرف كبير لتمثيل كل من رأس المثلث وقياس الزاوية عند هذا الرأس. ويُستخدم نفس الحرف ولكن بالصورة الصغيرة له لتمثيل الضلعين المقابلين لهذه الزاوية وطول الأضلاع.

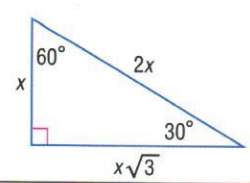
الزوايا التي تكون قياساتها 30° و45° و60°، تحدث كثيرًا في حساب المثلثات.

المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

30°-60°-90°

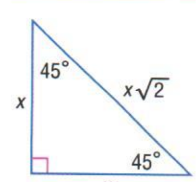
$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \quad \tan 60° = \sqrt{3}$$



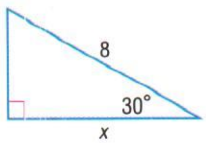
45°-45°-90°

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45° = 1$$



2 استخدام النسب المثلثية يمكنك استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة وقياسات الزوايا الناقصة في المثلثات القائمة.

مثال 3 إيجاد طول الضلع الناقص



استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

طول الوتر هو 8. القياس الناقص هو الضلع المجاور للزاوية °30. استخدم دالة cosine لإيجاد x.

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$ دالة cosine

$$\cos 30° = \frac{x}{8}$$ عوّض عن θ بـ °30، وعن *adj* بـ x، وعن *hyp* بـ 8.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$$ اضرب كل طرف في 8.

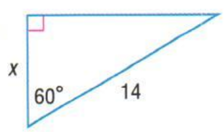
$$6.9 \approx x$$ استخدم آلة حاسبة.

نصيحة دراسية

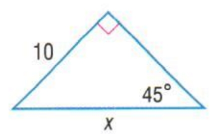
اختر دالة
إذا كان طول الوتر مجهولاً، فينبغي إذًا استخدام إما دالة sine أو cosine لإيجاد القياس الناقص.

تمرين موجّه

3A.

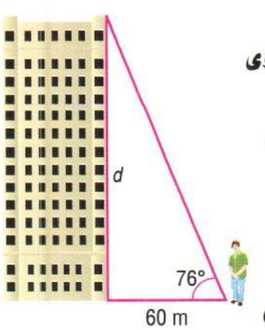


3B.



يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة في المثلثات التي ليس لها زوايا بقياس °30 أو °45 أو °60

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع الناقص



المباني لحساب ارتفاع مبنى، سار مازن مسافة 60 مترًا من قاعدة المبنى واستخدم أداة المميال لقياس الزاوية من عينيه إلى قمة المبنى. إذا كان مستوى عينيه هو مترين، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟

الزاوية المقيسة هي °76. الضلع المجاور للزاوية يبلغ 60 مترًا. القياس الناقص هو الضلع المقابل للزاوية. استخدم دالة Tangent لإيجاد d.

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ دالة Tangent

$$\tan 76° = \frac{d}{60}$$ عوّض عن θ بـ °76، وعن *opp* بـ d، وعن *adj* بـ 60.

$$60 \tan 76° = d$$ اضرب كل طرف في 60.

$$240 \approx d$$ استخدم آلة حاسبة للتبسيط: 60 $\boxed{\text{TAN}}$ 76 $\boxed{\text{ENTER}}$.

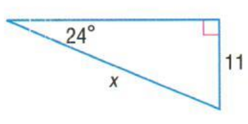
لأن قياس المميال بلغ مترين أعلى مستوى الأرض، فارتفاع المبنى هو 242 مترًا تقريبًا.

الربط بالحياة اليومية

تقيس أدوات المميال زاوية المجال المغناطيسي للأرض وكذلك الانحدار والتمايل للمركبات والمراكب الشراعية والطائرات. وهي تُستخدم أيضًا في رصد البراكين وحفر الآبار.

المصدر: مجلة العلوم

تمرين موجّه



4. استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

عند حل معادلات مثل $3x = -27$، أنت تستخدم معكوس الضرب لإيجاد x. يمكنك أيضًا إيجاد قياسات الزوايا باستخدام معكوس sine أو cosine أو tangent.

المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و sine زاوية A هو x، فإن **معكوس sine** لـ x هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\sin A = x$، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.
مثال	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و cosine A هو x، فإن **معكوس cosine** لـ x هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\cos A = x$، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.
مثال	$\cos A = \sqrt{22} \rightarrow \cos^{-1} \sqrt{22} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و tangent لـ A هو x، فإن **معكوس الظل** لـ x هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\tan A = x$، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.
مثال	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة في الرياضيات

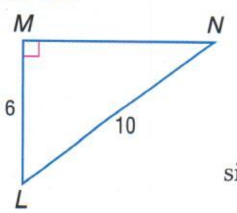
الدقة التعبير $\sin^{-1} x$ يُقرأ معكوس sine لـ x ويُفسر على أنه الزاوية التي sine لها هو x. انتبه ولا تخلط بين هذا الترميز والترميز الخاص بالأسس السالبة؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. بدلاً من ذلك، هذا الترميز يُشبه الترميز الخاص بمعكوس الدالة، $f^{-1}(x)$.

إذا كنت تعرف sine أو cosine أو tangent الخاص بزاوية حادة، فإنه يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية، وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

مثال 5 إيجاد قياس الزاوية الناقصة

أوجد قياس كل زاوية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

a. $\angle N$



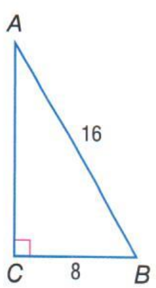
أنت تعلم قياس الضلع المقابل لـ $\angle N$ وقياس الوتر. استخدم دالة sine.

$\sin N = \frac{6}{10}$ $\quad$ $\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ $\quad$ معكوس sine

$36.9° \approx m\angle N$ $\quad$ استخدم آلة حاسبة.

b. $\angle B$



استخدم دالة cosine.

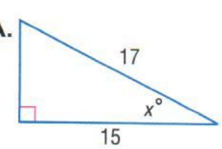
$\cos B = \frac{8}{16}$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$ $\quad$ معكوس cosine

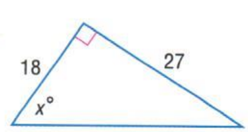
$60° = m\angle B$ $\quad$ استخدم آلة حاسبة.

تمرين موجّه **أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5A.



5B.



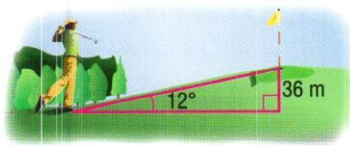
في الشكل المبين على اليسار، الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية السباح ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الارتفاع**. الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية حارس الإنقاذ ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الانخفاض**.

نصيحة دراسية

زوايا الارتفاع والانخفاض
زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض متطابقتان بما أنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لمستقيمات متوازية.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض

a. الجولف يقف لاعب الجولف عند قاعدة الكرة وينظر لأعلى إلى العشب الذي يكسو التل. إذا كانت القاعدة أدنى من العشب 36 مترًا وزاوية الارتفاع من القاعدة إلى الحفرة تساوي °12، فأوجد المسافة من القاعدة إلى الحفرة.

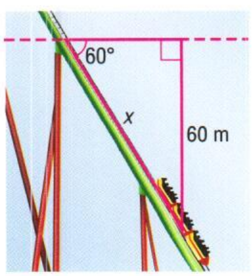


اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل لزاوية °12) والمسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12^\circ = \dfrac{36}{x}$	$\sin \theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
$x \sin 12^\circ = 36$	اضرب كل طرف في x.
$x = \dfrac{36}{\sin 12^\circ}$	اقسم كل طرف على $\sin 12^\circ$.
$x \approx 173.2$	استخدم آلة حاسبة.

إذًا، المسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة هي حوالي 173.2 مترًا.

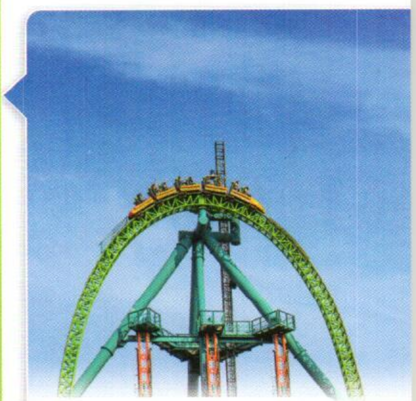
b. قطار الملاهي تل قطار الملاهي له *زاوية هبوط*، أو زاوية انخفاض، تساوي °60. وهبوط رأسي يبلغ 60 مترًا. قدّر طول التل.



اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الهبوط الرأسي (الضلع المقابل لزاوية °60) وطول التل (الوتر).

$\sin 60^\circ = \dfrac{60}{x}$	$\sin \theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
$x \sin 60^\circ = 60$	اضرب كل طرف في x.
$x = \dfrac{60}{\sin 60^\circ}$	اقسم كل طرف على $\sin 60^\circ$.
$x \approx 70$	استخدم آلة حاسبة.

إذًا، طول التل هو حوالي 70 مترًا.



الربط بالحياة اليومية

أكثر قطارات الملاهي انحدارًا في العالم لها زوايا هبوط تقترب من °90.

المصدر: النيمت رولر كوستر

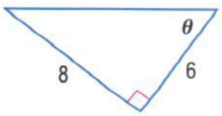
تمرين موجّه

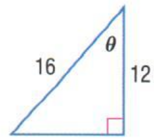
6A. النقل منحدر مُستخدَم لتفريغ شاحنة منقولات له زاوية ارتفاع °32. إذا كانت قمة المنحدر ترتفع عن الأرض 1.2 متر، فقدّر طول المنحدر.

6B. السلالم إذا وُضع سلم طوله 14 مترًا في منزل بزاوية ارتفاع °72. فما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.**

1. 

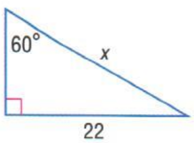
2. 

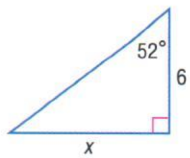
مثال 2 **في مثلث قائم، تكون $\angle A$ حادة. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.**

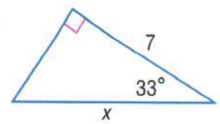
3. $\cos A = \frac{4}{7}$

4. $\tan A = \frac{20}{21}$

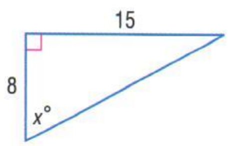
المثالان 3 و 4 **استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

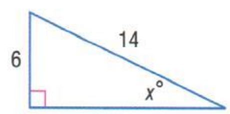
5. 

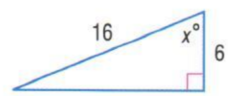
6. 

7. 

مثال 5 **أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

8. 

9. 

10. 

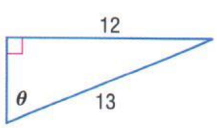
مثال 6

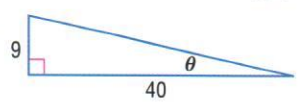
11. **الاستنتاج المنطقي** وجد عمر شجرتين أمام بعضهما مباشرة على كل جانب من الوادي. عندما تحرك مسافة 100 متر من الشجرة على جانبه (بشكل موازٍ مع حافة الوادي). تشكلت زاوية قياسها 70° بالشجرة على جانبه والشجرة على الجانب الآخر. أوجد المسافة عبر الوادي.

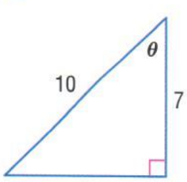
12. **السلالم** زاوية الارتفاع الموصي بها للسلم المستخدم في مكافحة الحريق هي 75°. ما الارتفاع الذي يصل إليه سلم طوله 21 مترًا على مبنى إذا تم استخدام زاوية الارتفاع الموصي بها؟ قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.

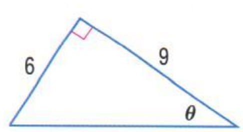
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.**

13. 

14. 

15. 

16. 

مثال 2 **في مثلث قائم، تكون $\angle A$ و $\angle B$ حادتين. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.**

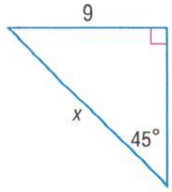
17. $\tan A = \frac{8}{15}$

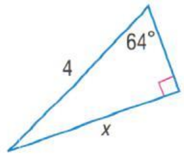
18. $\cos A = \frac{3}{10}$

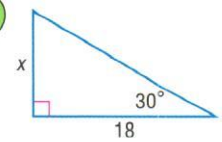
19. $\tan B = 3$

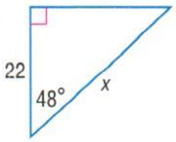
20. $\sin B = \frac{4}{9}$

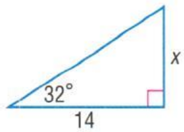
المثالان 3 و 4 **استخدم نسبة مثلثية لإيجاد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

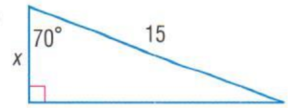
21. 

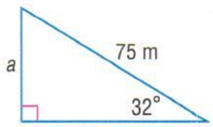
22. 

23. 

24. 

25. 

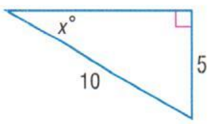
26. 

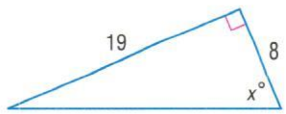


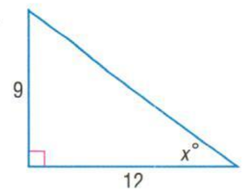
27. **التزلج المائي بالمظلة** ارجع إلى بداية الدرس والشكل الموضح على اليسار. أوجد قيمة a، ارتفاع الشخص المتزلج. إذا كان حبل السحب طوله 75 مترًا والزاوية الناشئة قياسها °32. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

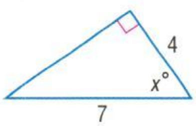
28. **تمثيل النماذج** يرغب علي في بناء جسر من حبال بين منزل الشجرة الخاص به ومنزل الشجرة الخاص بخالد. افترض أن منزل الشجرة الخاص بعلي يقع خلف نظيره الخاص بخالد مباشرة. وعلى مسافة 20 مترًا على اليسار من منزل الشجرة الخاص بعلي، توجد زاوية قياسها °52 بين المنزلين. أوجد طول الحبال.

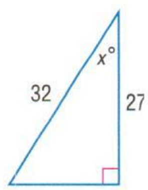
مثال 5 **أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

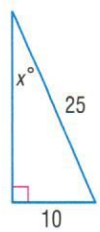
29. 

30. 

31. 

32. 

33. 

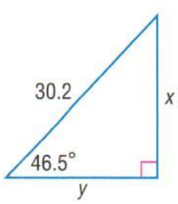
34. 

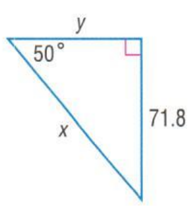
مثال 6

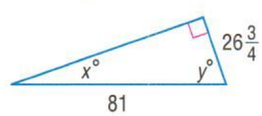
35. **السناجب** السناجب الطائرة البالغة تستطيع أن تصنع قفزة منزلقة من ارتفاع 50 مترًا. إذا طار سنجاب منزلقًا من مسافة رأسية تبلغ 50 مترًا وزاوية هبوط °9، فأوجد التغير في ارتفاع السنجاب.

36. **الطيران الشراعي** قفزت طائرة شراعية بزاوية ارتفاع °20. أوجد التغير في ارتفاع هذه الطائرة إذا طارت مسافة أفقية تبلغ 18 مترًا.

استخدم النسب المثلثية لإيجاد قيمتي x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

37. 

38. 

39. 

حُــلّ كل من المعادلات الآتية.

40. $\cos A = \frac{3}{19}$
41. $\sin N = \frac{9}{11}$
42. $\tan X = 15$
43. $\sin T = 0.35$
44. $\tan G = 0.125$
45. $\cos Z = 0.98$

46. المعالم مَعْلَم يلقي بظل طوله 24 مترًا. وزاوية الارتفاع من نهاية الظل إلى قمة المَعْلَم قياسها °50.

a. ارسم مثلثًا قائمًا مع تسميته لتمثيل هذه الحالة.

b. اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد ارتفاع المَعْلَم.

c. أوجد قيمة الدالة لتحديد ارتفاع المَعْلَم مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

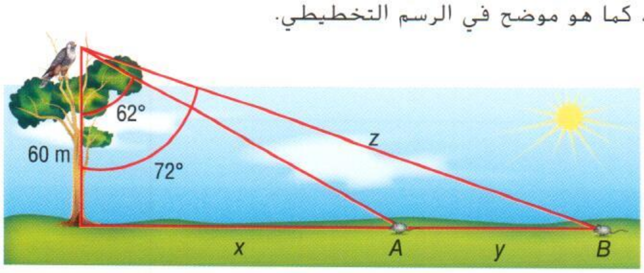
47 أعشاش الطيور ترتفع عينا أماني 1.5 متر عن الأرض وهي تنظر إلى عش طائر في شجرة. إذا كانت زاوية الارتفاع هي °74.5 وهي تقف على بعد 4 أمتار من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عش الطائر؟ قرّب إلى أقرب متر.

48. المنحدرات منحدران للدراجات يغطي كل منهما مسافة أفقية من 8 أمتار. وتبلغ زاوية الارتفاع لأحدهما °20، والآخر °35. كما هو موضح على اليسار.

a. بكم يزيد ارتفاع المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

b. بكم يزيد طول المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

49. الصقور صقر على ارتفاع 60 مترًا يرى فأرين A و B، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.



a. ما المسافة التقريبية z بين الصقر والفأر B؟

b. ما المسافة الفاصلة بين الفأرين؟

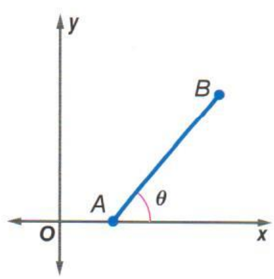
في المثلث $\triangle ABC$، تكون $\angle C$ زاوية قائمة. استخدم القياسات المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الناقصة للمثلث $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

50. $m\angle A = 36°$, $a = 12$

51. $m\angle B = 31°$, $b = 19$

52. $a = 8$, $c = 17$

53. $\tan A = \frac{4}{5}$, $a = 6$



54. التحدٍ قطعة مستقيمة لها نقطتا النهاية $A(2, 0)$ و $B(6, 5)$، كما هو موضح في الشكل على اليسار. ما قياس الزاوية الحادة θ التي تصنعها القطعة المستقيمة والمحور الأفقي x؟ اشرح كيف وجدت القياس.

55. الفرضيات حدد ما إذا كان العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

بالنسبة لأي زاوية حادة، دالة sine لا تكون لها قيمة سالبة أبدًا.

56. مسألة غير محددة الإجابة في المثلث القائم CBA، $\sin A = \sin C$. ما الذي يمكنك استنتاجه بشأن $\triangle ABC$؟ برر استنتاجك.

57. الكتابة في الرياضيات سطح له ميل $\frac{2}{3}$. صِف العلاقة بين الميل وزاوية الارتفاع θ التي يصنعها السطح مع المحور الأفقي. ثم استخدم دالة مثلثية عكسية لإيجاد قيمة θ.

تدريب على الاختبار المعياري

58. الإجابة الموسعة تحتاج مدرستك إلى 5 حافظات للكتب السنوية. تعرض شركة الأمل للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 153.85 مع تخفيض 10% على طلب 5 حافظات. وتعرض شركة التفوق للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 157.36 مع تخفيض 15% على طلب 5 حافظات.

a. أي شركة ستختارها؟

b. ما أقل مبلغ يمكنك إنفاقه على الكتب السنوية؟

59. الإجابة القصيرة باعت فرقة العزف قمصانًا وقبعات لجمع التبرعات. وبلغ إجمالي ما باعوه 105 سلع وجمعوا AED 1170. إذا كانت تكلفة القبعة AED 10 وتكلفة القميص AED 15، فكم قميصًا بيعت؟

60. كشك شطائر يقدم الشطيرة بسعر x والمشروب بسعر y. وتبلغ تكلفة شطيرتين ومشروب واحد AED 4.50. وثلاث شطائر ومشروبين AED 7.25. أي مصفوفة يمكن ضربها في $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة x و y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

61. SAT/ACT طول مستطيل وعرضه تمثلهما النسبة 5:12. إذا كانت مساحة المستطيل 240 سنتيمترًا مربعًا، فما طول قطره، بالسنتيمتر؟

F 24 **H** 28 **K** 32

G 26 **J** 30

مراجعة شاملة

حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة. ثم حدد أي عبارة تمثل الافتراض.

62. يعتقد ناصر أن قطع المسافة من منزله إلى المتجر بدراجته يستغرق أقل من 10 دقائق.

63. لافتة طعام تنص على أن شطيرة الديك الرومي البالغة 30 سنتيمترًا تحتوي على تسعين جرامًا من اللحم.

64. تستغرق السيدة منى 15 دقيقة على الأقل لإعداد كعكة.

65. حمام السباحة عدد الزيارات إلى حمام سباحة عام التي يقوم بها 425 عضوًا في العام موزع طبيعيًا باستخدام المتوسط 90 والانحراف المعياري 15.

a. ما النسبة المئوية التقريبية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة 45 مرة على الأقل؟

b. ما احتمال اختيار عضو عشوائيًا يكون ذهب إلى حمام السباحة أكثر من 120 مرة؟

c. ما النسبة المئوية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة ما بين 75 و105 مرات؟

66. الاستطلاعات شركة استطلاعات ترغب في تقدير عدد الأشخاص المؤيدين لقانون بيئي جديد. تجري الشركة استطلاعها على 20 شخصًا. ما احتمال أن يكون الشخص المؤيد للقانون هو 0.5.

a. ما احتمال وجود 12 شخصًا بالضبط مؤيدين للقانون الجديد؟

b. ما العدد المتوقع للأشخاص المؤيدين للقانون؟

مراجعة المهارات

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي. واستخدم الوحدات المناسبة في إجابتك.

67. 4.3 كيلومترات $\left(\dfrac{\text{5280 مترًا}}{\text{1 كيلو متر}}\right)$

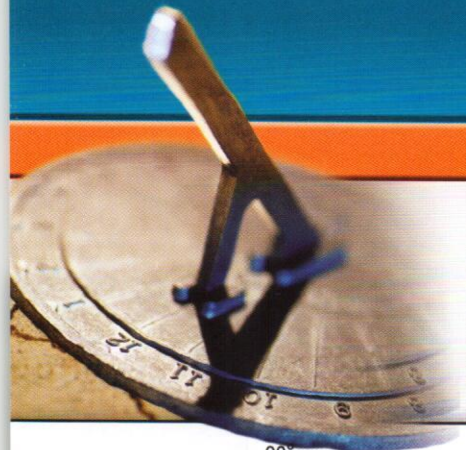
68. 8 لترات

69. 21 مترًا

70. $\left(\dfrac{\text{18 سنتيمتر مكعب}}{\text{5 ثوان}}\right)$ 24 ثانية

71. 65 درجة 72.10 دقائق

الدرس 11-2
الزوايا وقياس الزاوية



..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• استخدمت الزوايا بمقياس الدرجات.	• 1 رسم الزوايا في وضع قياسي وإيجادها. 2 التحويل بين القياسات بالدرجات والقياسات بالراديان.	• الساعة الشمسية أداة تشير إلى الوقت من اليوم عن طريق الظل الذي تلقيه على سطح موسوم لإظهار الساعات أو أجزاء من الساعات. ويتحرك الظل حول القرص بزاوية °15 كل ساعة.

المفردات الجديدة

الوضع القياسي standard position
ضلع الابتداء initial side
ضلع الانتهاء terminal side
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء coterminal angles
راديان radian
الزاوية المركزية central angle
طول القوس arc length

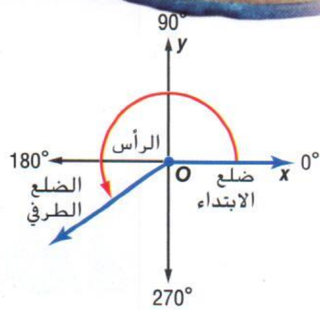
ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الزوايا في الوضع القياسي

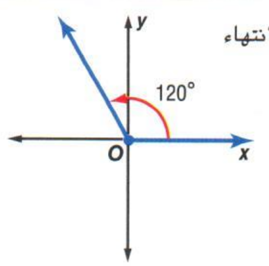
الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في **وضع قياسي** إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على محور x الموجب.

- الشعاع الموجود على محور x يُسمى **ضلع الابتداء** للزاوية.
- الشعاع الذي يدور حول المركز يُسمى **ضلع الانتهاء**.

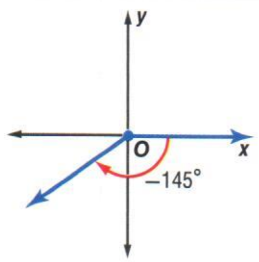


المفهوم الأساسي قياسات الزوايا

إذا كان قياس الزاوية موجبًا، يدور ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة.



إذا كان قياس الزاوية سالبًا، يدور ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

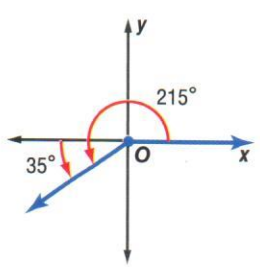


مثال 1 رسم الزوايا في وضع قياسي

ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.

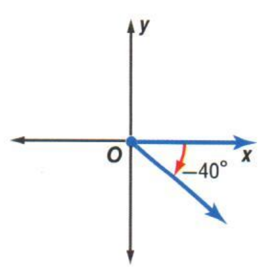
a. 215° $215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °35 في عكس اتجاه عقارب الساعة من بعد محور x السالب.



b. −40°

الزاوية سالبة. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °40 في اتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب.

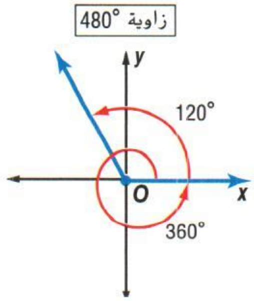


تمرين موجّه

1A. 80°

1B. −105°

يستطيع ضلع الانتهاء لأي زاوية إتمام أكثر من دورة كاملة واحدة. على سبيل المثال، الدوران الكامل بزاوية $360°$ زائد دوران بزاوية $120°$ يشكلان زاوية قياسها $360° + 120°$ أو $480°$.

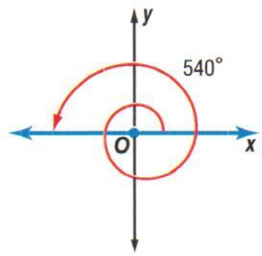


مثال 2 من الحياة اليومية رسم الزوايا في وضع قياسي

التزلج المائي بالألواح ***التزلج على الماء بالألواح*** **يجمع بين ركوب الأمواج والتزلج على الألواح والتزلج على الجليد بالألواح والتزلج على الماء. وتتمثل إحدى مناورات التزلج في الدوران بزاوية 540 درجة في الهواء. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها $540°$.**

$540° = 360° + 180°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $180°$ من بعد محور x الموجب.



تمرين موجّه

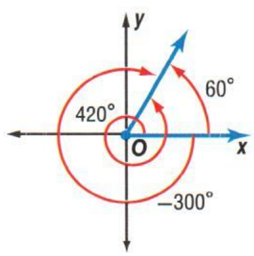
2. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها $600°$.

الربط بالحياة اليومية

يعد التزلج المائي بالألواح من أسرع الرياضات المائية انتشارًا في الولايات المتحدة. حيث ازدادت المشاركة فيها بأكثر من 100% في الأعوام الأخيرة.

المصدر: King of Wake

إذا كانت توجد زاويتان أو أكثر في وضع قياسي وتشترك في ضلع الانتهاء، فهي تُسمى **زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء**. على سبيل المثال، الزوايا التي يكون قياسها $60°$ و $420°$ و $-300°$، تكون زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء، كما هو موضح في الشكل على اليسار.



يمكن إيجاد الزاوية التي تكون مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، عن طريق الجمع إلى مضاعف $360°$ أو الطرح منه.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

قراءة في الرياضيات

زاوية الدوران

في حساب المثلثات، يُشار إلى الزاوية في بعض الأحيان *بزاوية الدوران*.

مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

a. 130°

زاوية موجبة: $130° + 360° = 490°$ اجمع إلى $360°$.

زاوية سالبة: $130° - 360° = -230°$ اطرح $360°$.

b. −200°

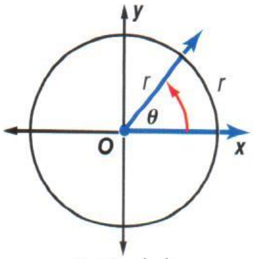
زاوية موجبة: $-200° + 360° = 160°$ اجمع إلى $360°$.

زاوية سالبة: $-200° - 360° = -560°$ اطرح $360°$.

تمرين موجّه

3A. $15°$ **3B.** $-45°$

2 التحويل بين الدرجات والراديان



$\theta = 1$ راديان

التحويل بين الدرجات والراديان يمكن قياس الزوايا أيضًا بالوحدات المستندة إلى طول القوس. **راديان** واحد هو قياس زاوية θ في وضع قياسي يقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا له نفس الطول كما هو الأمر مع نصف قطر الدائرة.

محيط الدائرة هو $2\pi r$. لذا، الدوران الكامل حول الدائرة يساوي 2π راديان. بما أن 2π راديان $= 360°$، فإن القياس بالدرجة والقياس بالراديان تربط بينهما علاقة توضحها المعادلات التالية.

2π راديان $= 360°$ π راديان $= 180°$

نصيحة دراسية

البنية كما هو الحال مع الدرجات، يقيس الراديان مقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

- قياس الزاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان دورانه عكس اتجاه عقارب الساعة.
- يكون القياس سالبًا إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

المفهوم الأساسي التحويل بين الدرجات والراديان

درجات إلى راديان	راديان إلى درجات
للتحويل من درجات إلى راديان، اضرب عدد الدرجات في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.	للتحويل من راديان إلى درجات، اضرب عدد الراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

مثال 4 التحويل بين الدرجات والراديان

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

a. $-30°$

$$-30° = -30\cancel{°} \cdot \frac{\pi \text{ راديان}}{180\cancel{°}}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ راديان}$$

=

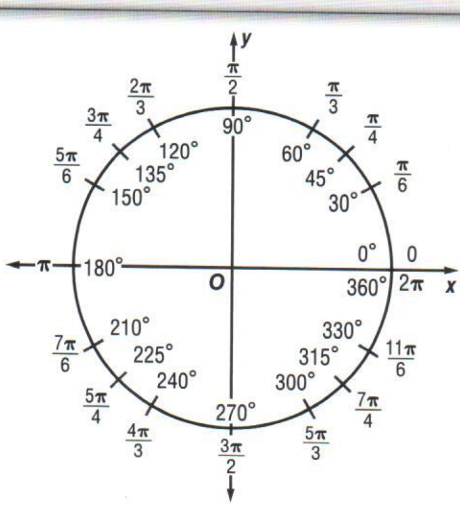
تمرين موجّه

4A. $120°$ **4B.** $-\frac{3\pi}{8}$

قراءة في الرياضيات

القياسات بالراديان تُحذف كلمة *راديان* عادةً عندما يتم التعبير عن الزوايا بقياس الراديان. لذلك، في حالة ذُكرت الزاوية دون وحدات قياس، يكون القياس بالراديان ضمنيًا.

ملخص المفهوم الدرجات والراديان



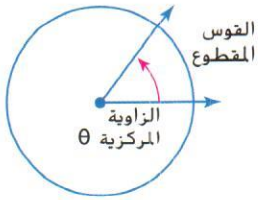
يوضح الرسم التخطيطي قياسات متكافئة بالدرجات والراديان لزوايا خاصة.

قد تستفيد من حفظ ما يلي من القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان. ولا تكون الزوايا الخاصة الأخرى سوى مضاعفات لهذه الزوايا.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ $90° = \frac{\pi}{2}$

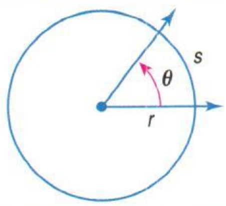
الزاوية المركزية للدائرة هي زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة. إذا كنت تعلم قياس الزاوية المركزية ونصف قطر الدائرة، فإنه يمكنك إيجاد طول القوس الذي تقطعه هذه الزاوية.



المفهوم الأساسي طول القوس

الشرح بالنسبة لدائرة نصف قطرها r وزاويتها المركزية θ (بالراديان). **طول القوس** s يساوي ناتج ضرب r و θ.

النموذج



الرموز $s = r\theta$

ستبرر هذه الصيغة في التدريب 52.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد طول القوس

الشاحنات إذا كان نصف قطر إطارات الشاحنة الكبيرة يساوي 82 سنتيمترًا. فما المسافة التي تقطعها شاحنة كبيرة بالمتر بعد ثلاثة أرباع فقط من دوران الإطار؟

الخطوة 1 أوجد الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ الزاوية تساوي $\frac{3}{4}$ دورة كاملة.

الخطوة 2 استخدم نصف القطر والزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ اكتب صيغة لطول القوس.

$= 82 \cdot \frac{3\pi}{2}$ عوّض عن r بـ 28 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{2}$.

$= 388.8$ cm استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$= 3.9$ m اقسم على 100 للتحويل إلى أمتار.

إذًا، تقطع الشاحنة حوالي 3.9 أمتار بعد ثلاثة أرباع من دوران الإطار.

انتبه!

طول القوس تذكر عند إيجاد طول القوس أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجة. وتذكر كذلك أن عدد الراديان في دوران كامل هو 2π.

تمرين موجّه

5. دائرة قطرها 9 سنتيمترات. أوجد طول القوس إذا كانت الزاوية المركزية تساوي 60°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المُعطى.**

1. 140° **2.** −60° **3.** 390°

مثال 3 **أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

4. 25° **5** 175° **6.** −100°

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

7. $\frac{\pi}{4}$ **8.** 225° **9.** −40°

مثال 5 **10. الاستنتاج** صنع لاعب تنس دورة بيده تحركت على امتداد مسار قوس. إذا كان نصف قطر دائرة القوس هو 1.2 متر وزاوية الدوران هي 100°. فما طول القوس؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المُعطى.**

11. 75° **12.** 160° **13.** −90°

14. −120° **15.** 295° **16.** 510°

17. الجمباز لاعب جمباز على المتوازي المختلف الارتفاع يتأرجح ليصنع زاوية دوران °240.

18. الطعام تم تدوير غطاء برطمان صلصة المعكرونة °420 قبل أن يُفتح.

مثال 3 **أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

19. 50° **20.** 95° **21.** 205°

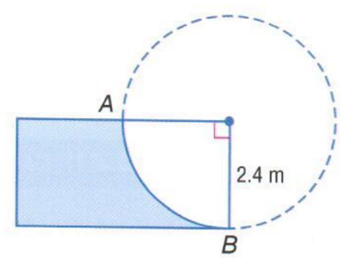
22. 350° **23.** −80° **24.** −195°

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

25. 330° **26.** $\frac{5\pi}{6}$ **27.** $-\frac{\pi}{3}$

28. −50° **29.** 190° **30.** $-\frac{7\pi}{3}$

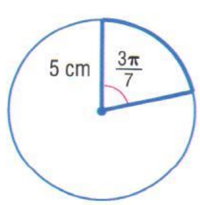
مثال 5 **31. التزلج على الألواح** منحدر التزلج على الألواح المبين على اليسار يُسمى أنبوب ربعي *(quarter pipe)*. والسطح المنحني يحدده نصف قطر الدائرة. أوجد طول الجزء المنحني من المنحدر.



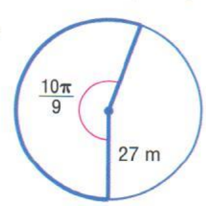
32. القوارب النهرية ناعور القارب النهري له قطر 7.2 أمتار. أوجد طول القوس للدائرة التي يصنعها الناعور عندما يدور °300.

أوجد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

33.



34.



35. الساعات كم يستغرق عقرب الدقائق في الساعة للمرور عبر 2.5π راديان؟

36. المثابرة راجع بداية الدرس. ظل يتحرك حول ساعة شمسية بزاوية °15 كل ساعة.

a. بعد كم ساعة ستكون زاوية دوران الظل $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b. ما زاوية الدوران بالراديان بعد 5 ساعات؟

c. ساعة شمسية نصف قطرها 20 سنتيمترًا. ما القوس الذي يشكله ظل بعد 14 ساعة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

37. 620° **38.** −400° **39.** $-\frac{3\pi}{4}$ **40.** $\frac{19\pi}{6}$

41 **أرجوحات** زاوية دوران الأرجوحة قياسها $165°$.

a. ارسم الزاوية في وضع قياسي.

b. اكتب قياس الزاوية بالراديان.

c. إذا كانت سلاسل الأرجوحة طولها متران، فما طول القوس الذي تصنعه الأرجوحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. صِف كيف سيتغير طول القوس إذا تمت مضاعفة أطوال سلاسل الأرجوحة.

42. **التمثيلات المتعددة** تأمل $A(-4, 0)$ و $B(-4, 6)$ و $C(6, 0)$ و $D(6, 8)$.

a. **هندسيًا** ارسم $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$ مع جعل E عند نقطة الأصل.

b. **جبريًا** أوجد قيمة كلاً من tangent لـ $\angle BEA$ و tangent لـ $\angle DEC$.

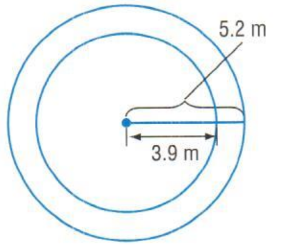
c. **جبريًا** أوجد ميل $\overline{BE}$ و $\overline{ED}$.

d. **لفظيًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الميل وزاوية الظل؟

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

43. $\frac{21\pi}{8}$ **44.** $124°$ **45.** $-200°$ **46.** 5

47. **لعبة الدوّارات** تصنع لعبة الدوّارة 5 دورات في الدقيقة. الدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الخارجي لها نصف قطر يساوي 5.2 أمتار. والدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الداخلي لها نصف قطر يساوي 3.9 أمتار.

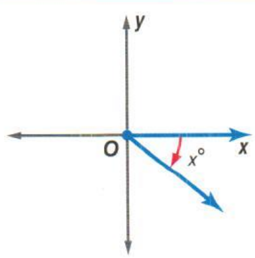


a. أوجد الزاوية θ بالراديان التي تدورها الدوّارة في ثانية واحدة.

b. في ثانية واحدة، ما الفرق بين طول القوسين لمقاعد الركاب في الصف الخارجي ومقاعد الركاب في الصف الداخلي؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **التفكير النقدي** يكتب سعيد وأيوب تعبيرًا لقياس زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الموضحة على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



سعيد	أيوب
قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(x - 360)°$.	قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(360 - x)°$.

49. **التحدِ** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع محور x الموجب عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة لهذا المستقيم.

50. **الاستنتاج** عبّر عن $\frac{1}{8}$ الدورة بالدرجات والراديان. اشرح استنتاجك.

51. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم زاوية حادة في وضع قياسي مع تسميتها. أوجد زاويتين، إحداهما موجبة والأخرى سالبة، تشتركان في ضلع الانتهاء مع الزاوية.

52. **التبرير** برر صيغة طول القوس.

53. **الكتابة في الرياضيات** استخدم دائرة نصف قطرها r لوصف ما تمثله درجة واحدة وراديان واحد. ثم اشرح كيفية التحويل بين القياسين.

تدريب على الاختبار المعياري

54. الإجابة القصيرة إذا كان $(x+6)(x+8)-(x-7)(x-5)=0$، فأوجد قيمة x.

55. أي مما يلي يمثل تغيرًا عكسيًا؟

A

x	2	5	10	20	25	50
y	50	20	10	5	4	2

B

x	2	4	6	8	10	12
y	−4	−8	−12	−16	−20	−24

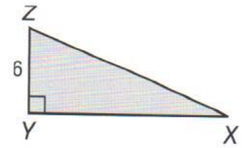
C

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

D

x	10	9	8	7	6	5
y	5	6	7	8	9	10

56. الهندسة إذا كانت مساحة الشكل هي 60 وحدة مربعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟



F $2\sqrt{34}$ **H** $4\sqrt{34}$

G $2\sqrt{109}$ **J** $4\sqrt{109}$

57. SAT/ACT الحد الأول من المتتالية هو 6−، وكل حد يأتي بعد الأول يكون أكبر بمقدار 8 من الحد السابق له مباشرة. ما قيمة الحد رقم 101؟

A 788 **D** 806

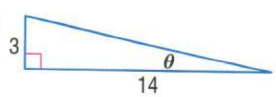
B 794 **E** 814

C 802

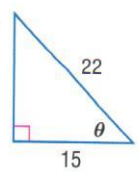
مراجعة شاملة

أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-11)

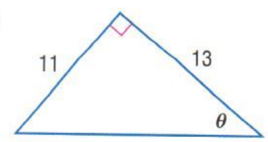
58.



59.



60.



حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة، ثم حدد العبارة التي تمثل الافتراض. (الدرس 6-11)

61. يشرب يوسف ما لا يقل عن ثمانية أكواب من الماء كل يوم.

62. تقول سها إن معها مظلتين في سيارتها.

63. التصنيع أحجام الأسطوانات المضغوطة التي تصنعها شركة ما يتم توزيعها طبيعيًا بانحراف معياري ملّيمتر واحد. من المفترض أن يبلغ قطر الأسطوانات المضغوطة 120 ملّيمترًا. وهي تُصنّع لمحركات أسطوانات عرضها 122 ملّيمترًا. (الدرس 2-11)

a. ما النسبة المئوية للأسطوانات المضغوطة التي تتوقع أن تكون أكبر من 120 ملّيمترًا؟

b. إذا كانت تصنع الشركة 1000 أسطوانة مضغوطة في الساعة، فكم عدد الأسطوانات التي تتوقع أن يكون قطرها 119 و 122 ملّيمترًا ضمن الأسطوانات التي تُصنع في ساعة واحدة؟

c. حوالي كم أسطوانة مضغوطة في الساعة ستكون أكبر من أن تكون ملاءمة لمحركات الأسطوانات؟

64. المعرفة المالية إذا كان معدل التضخم 2%. ويمكن إيجاد تكلفة سلعة ما في السنوات القادمة عن طريق تكرار المعادلة $c(x)=1.02x$. فأوجد تكلفة مشغل صوت رقمي سعره 70 AED بعد أربعة أعوام إذا ظل معدل التضخم ثابتًا.

مراجعة المهارات

استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر لكل مثلث قائم علمًا بأطوال الأضلاع المعطاة.

65. $a=12, b=15$

66. $a=8, b=17$

67. $a=14, b=11$

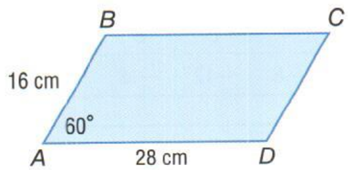
التوسع 11-2

مختبر الهندسة
مساحة متوازي الأضلاع

يمكن إيجاد مساحة أي مثلث باستخدام نسبة sine في المثلث. ويمكن استخدام عملية مشابهة لإيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

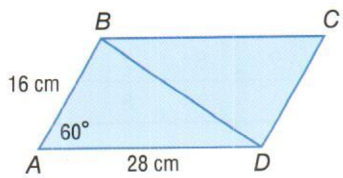
النشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ABCD.



الخطوة 1 ارسم القطر $\overline{BD}$

$\overline{BD}$ يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين، $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.



الخطوة 2 أوجد مساحة $\triangle ABD$.

استخدم نسبة sine لتحديد الارتفاع h من B إلى $\overline{AD}$.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ تعريف sine

$\sin\theta = \frac{h}{AB}$ $h = \text{opp}, AB = \text{hyp}$

$AB \sin\theta = h$ حل لإيجاد h.

إذًا، $h = AB\sin\theta$.

المساحة $= bh\frac{1}{2}$ مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(AD)(AB)\sin A$ $b = AD,\ h = AB\sin A$

$= \frac{1}{2}(28)(16)\sin 60°$ $AD = 28,\ AB = 16,\ A = 60°$

$= 224\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ اضرب وأوجد قيمة sin 60°.

$= 112\sqrt{3}$ بسّط.

الخطوة 3 أوجد مساحة $▱ABCD$.

مساحة $▱ABCD$ تساوي مجموع مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.
بما أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$، فإن مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ متساويتان.
إذًا، مساحة $▱ABCD$ تساوي ضعف مساحة $\triangle ABD$.

$2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3}$ أو حوالي 387.98 سنتيمترًا مربعًا.

التمارين

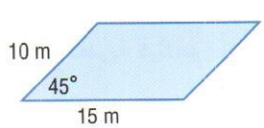
لكل شكل مما يلي،

a. أوجد مساحة كل متوازي أضلاع.

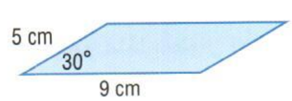
b. أوجد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة نصف القياس المُعطى.

c. أوجد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة ضعف القياس المُعطى.

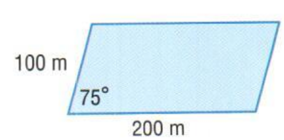
1.



2.

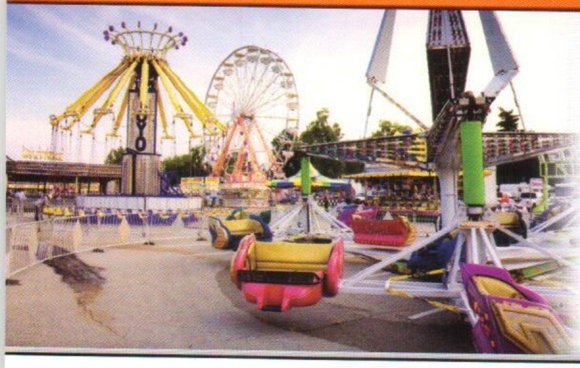


3.



الدرس 11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• أوجدتَ قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.	1 إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة. 2 إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.	• في لعبة الملاهي المبينة على اليسار، تدور السيارات ذهابًا وإيابًا حول نقطة مركزية. ويمكن وصف مواضع الأذرع التي تدعم السيارات، باستخدام زوايا مثلثية في الوضع القياسي مع جعل النقطة المركزية للعبة عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي.



المفردات الجديدة

زاوية ربعية
quadrantal angle

زاوية مرجع
reference angle

ممارسات في الرياضيات

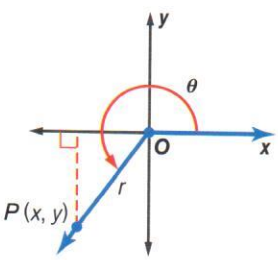
مراعاة الدقة.

1 النسب المثلثية للزوايا العامة

يمكنك إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الأكبر من $90°$ أو الأقل من $0°$.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية للزوايا العامة

افترض أن θ هي زاوية في وضع قياسي وأن $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء. باستخدام نظرية فيثاغورس، $r=\sqrt{x^2+y^2}$. النسب المثلثية الست للزاوية θ مُعرَّفة أدناه.

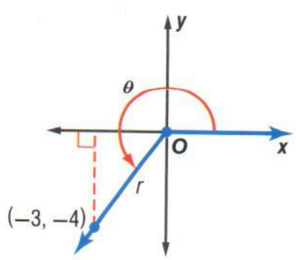


$\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}, x\neq 0$

$\csc\theta=\frac{r}{y}, y\neq 0$ $\quad$ $\sec\theta=\frac{r}{x}, x\neq 0$ $\quad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}, y\neq 0$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-3, -4)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



الخطوة 1 ارسم الزاوية، وأوجد قيمة r.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{25}=5$$

الخطوة 2 استخدم $x=-3$ و $y=-4$ و $r=5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$ $\quad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$ $\quad$ $\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$ $\quad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

تمرين موجّه

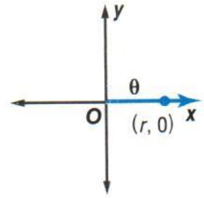
1. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-6, 2)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في وضع قياسي على المحور x أو y، فتُسمى الزاوية **زاوية ربعية**.

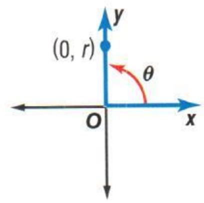
> **نصيحة دراسية**
>
> **الزوايا الربعية** قياس الزاوية الربعية هو مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية

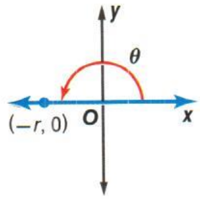
$\theta = 0°$ أو 0 راديان



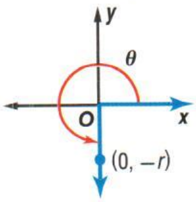
$\theta = 90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ راديان



$\theta = 180°$ أو π راديان

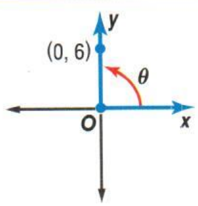


$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان



مثال 2 الزوايا الربعية

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(0, 6)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



النقطة عند $(0, 6)$ تقع عند محور y الموجب. إذًا، الزاوية الربعية θ هي $90°$. استخدم $x = 0$ و $y = 6$ و $r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{6}{0}} =$ غير مُعرَّفة

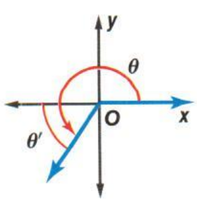
$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{6}{0}} =$ غير مُعرَّفة $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$

تمرين موجّه

2. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-2, 0)$. أوجد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

2 النسب المثلثية بزوايا المرجع

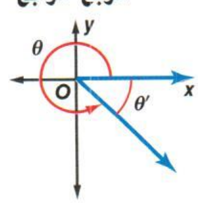
إذا θ كانت زاوية غير ربعية في وضع قياسي، فإن **زاوية المرجع** θ' لها تكون الزاوية الحادة التي يصنعها ضلع الانتهاء لـ θ مع المحور x. فيما يلي قواعد إيجاد قياسات زوايا المرجع حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



> **قراءة في الرياضيات**
>
> **زاوية ثيتا الأولية** θ' تُقرأ *ثيتا الأولية*.

المفهوم الأساسي زوايا المرجع

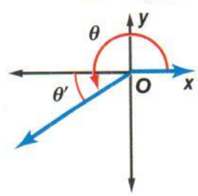
الربع الرابع



$\theta' = 360° - \theta$

$\theta' = 2\pi - \theta$

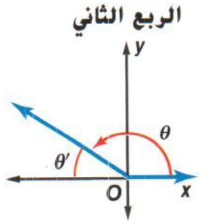
الربع الثالث



$\theta' = \theta - 180°$

$\theta' = \theta - \pi$

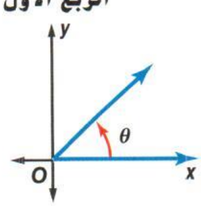
الربع الثاني



$\theta' = 180° - \theta$

$\theta' = \pi - \theta$

الربع الأول



$\theta' = \theta$

إذا كان قياس θ أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، فاستخدم إذًا زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء يكون قياسها موجب بين $0°$ و $360°$ لإيجاد زاوية المرجع.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية مما يلي، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

a. $210°$

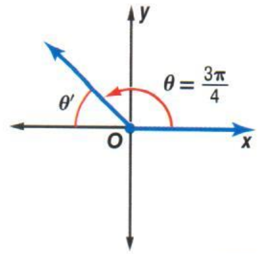
ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$210° - 180° = 30°$

b. $-\frac{5\pi}{4}$

زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء، $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع

يقع ضلع الانتهاء لـ $\frac{3\pi}{4}$

في الربع الثالث.

$\theta' = \pi - \theta =$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

تمرين موجّه

3A. $-110°$

3B. $\frac{2\pi}{3}$

نصيحة دراسية

تمثيل الزوايا بيانيًا يمكنك الرجوع إلى الرسم التخطيطي في ملخص المفهوم، الدرس 11-2 ليساعدك على رسم الزوايا.

يمكنك استخدام زوايا المرجع لإيجاد قيمة النسب المثلثية لأي زاوية θ. رمز النسبة يحدده الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. استخدم الخطوات التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيمة النسب المثلثية

الخطوة 1 أوجد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 أوجد قيمة النسبة المثلثية لـ θ'.

الخطوة 3 حدد رمز قيمة النسبة المثلثية. استخدم رمز الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لـ θ.

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: +	$\sin\theta, \csc\theta$: +
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: −	$\tan\theta, \cot\theta$: +
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: −	$\sin\theta, \csc\theta$: −
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: +	$\tan\theta, \cot\theta$: −

يمكنك استخدام القيم المثلثية للزوايا التي قياسها $30°$ و$45°$ و$60°$ التي تعلمتها في الدرس 11-1.

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

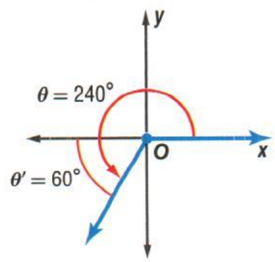
sine	cosine	Tangent	Cosecant	Secant	Cotangent
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال 4 استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة مثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

a. $\cos 240°$

ضلع الانتهاء لـ $240°$ يقع في الربع الثالث.



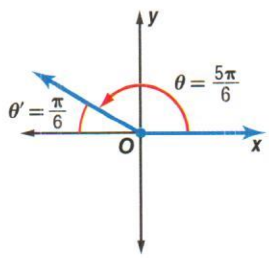
$\theta' = \theta - 180°$ أوجد قياس زاوية المرجع.

$= 240° - 180° = 60°$ $\theta = 240°$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ نسبة cosine سالبة في الربع الثالث.

b. $\csc \frac{5\pi}{6}$

ضلع الانتهاء لـ $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.



$\theta' = \pi - \theta$ أوجد قياس زاوية المرجع.

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$ نسبة cosecant موجبة في الربع الثاني.

$= \csc 30°$ $\frac{\pi}{6}$ راديان $= 30°$

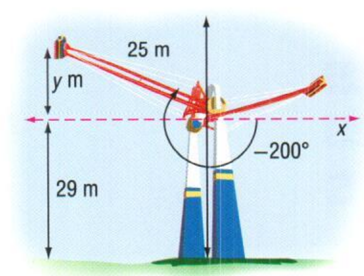
$= 2$ $\csc 30° = \frac{1}{\sin 30}$

تمرين موجّه

4A. $\cos 135°$

4B. $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام النسب المثلثية



ألعاب الملاهي الأذرع الدوارة للعبة الملاهي الموضحة على اليسار طولها 25 مترًا وارتفاع المحور الذي تتأرجح منه الذراع طوله 29 مترًا. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء: $-200° + 360° = 160°$

زاوية المرجع: $180° - 160° = 20°$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ نسبة sine

$\sin 20° = \frac{y}{25}$ $r = 25$ و $\theta = 20°$

$25 \sin 20° = y$ اضرب كل طرف في 25.

$8.6 \approx y$ استخدم آلة حاسبة لإيجاد y.

بما أن y يساوي 8.6 أمتار تقريبًا، فإن الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة لها هو 29 + 8.6 أو حوالي 37.6 مترًا.

تمرين موجّه

5. ألعاب الملاهي لعبة ملاهٍ مماثلة لها أذرع دوّارة أصغر طولها 22 مترًا. ارتفاع المحور الذي تتأرجح الذراع منه يساوي 26 مترًا، وزاوية الدوران من الوضع القياسي هي $-195°$. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

الربط بالحياة اليومية

على لعبة ملاهٍ دوّارة، اختبر الركاب انعدام الوزن كما في الهبوط الجانبي لقطار الملاهي تمامًا. دامت اللعبة لدقيقة وبلغت السرعة 96 كيلومترًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

المصدر: سيدار بوينت

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

1. $(1, 2)$ **2.** $(-8, -15)$ **3.** $(0, -4)$

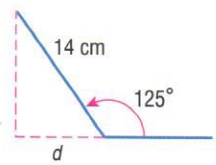
مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

4. $300°$ **5.** $115°$ **6.** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

7. $\sin \frac{3\pi}{4}$ **8.** $\tan \frac{5\pi}{3}$ **9.** $\sec 120°$ **10.** $\sin 300°$

مثال 5 **11. الترفيه** فتحت ميساء مشغل DVD المحمول بحيث يصنع زاوية °125. ويبلغ طول الشاشة 14 سنتيمترًا.



a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي.

b. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار d التي يمكن وضع مشغل DVD عندها.

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

12. $(5, 12)$ **13** $(-6, 8)$ **14.** $(3, 0)$

15. $(0, -7)$ **16.** $(4, -2)$ **17.** $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

18. $195°$ **19.** $285°$ **20.** $-250°$

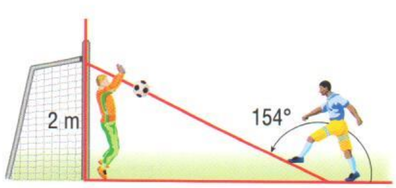
21. $\frac{7\pi}{4}$ **22.** $-\frac{\pi}{4}$ **23.** $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

24. $\sin 210°$ **25.** $\tan 315°$ **26.** $\cos 150°$ **27.** $\csc 225°$

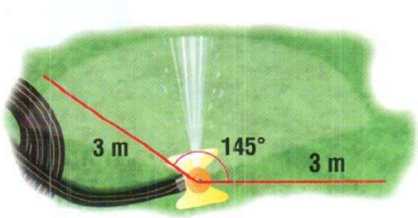
28. $\sin \frac{4\pi}{3}$ **29.** $\cos \frac{5\pi}{3}$ **30.** $\cot \frac{5\pi}{4}$ **31.** $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5 **32. الاستنتاج** يقف لاعب كرة قدم على بعد x أمتار من حارس المرمى، ركل الكرة صوب المرمى، كما هو موضح في الشكل. قفز حارس المرمى وأمسك بالكرة على ارتفاع مترين في الهواء.



a. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة بين حارس المرمى واللاعب عندما ركل الكرة.

b. كم المسافة تقريبًا بين حارس المرمى ولاعب كرة القدم؟



33 **آلة الرش** آلة رش تدور ذهابًا وإيابًا ترش المياه على مسافة 3 أمتار. من وضع أفقي. تدور الآلة $145°$ قبل أن تعكس اتجاهها. عند الزاوية $45°$. ما المسافة التقريبية التي تبلغها المياه على يسار آلة الرش؟

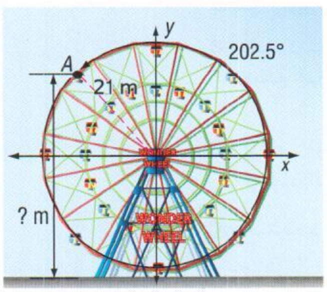
34. **كرة السلة** الصيغة $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$ تعطي مسافة ضربة كرة السلة بسرعة متجهة أولية V_0 متر في الثانية بزاوية θ مع الأرض.

a. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 7 أمتار في الثانية بزاوية $75°$. فما المسافة التي ستقطعها كرة السلة؟

b. إذا ضُربت كرة السلة بزاوية $65°$ وقطعت 3 أمتار. فكم كانت سرعتها المتجهة الأولية؟

c. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 9 أمتار في الثانية وقطعت 4 أمتار. فما زاوية ضرب الكرة؟

35. **الفيزياء** رُميت صخرة من حافة واد بمقلاع بزاوية $65°$ وسرعة متجهة أولية قدرها 6 أمتار في الثانية. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للصخرة x هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث v_0 هي السرعة المتجهة الأولية. و θ هي الزاوية التي ضُربت بها. و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 4 ثوانٍ؟



36. **عجلة فيريس** نصف قطر عجلة الملاهي فيريس 21 مترًا قريبًا وترتفع 4.5 أمتار عن الأرض. بعد أن يركب الشخص في العربة السفلية، تدور العجلة بزاوية $202.5°$ عكس اتجاه عقارب الساعة قبل أن تتوقف. كم كان ارتفاع هذه العربة فوق الأرض عندما توقفت العجلة؟

افترض أن θ زاوية في وضع قياسي ضلع الانتهاء لها في الربع المُعطى. لكل نسبة، أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

37. $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

38. $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

39. $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

40. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

41. $\cot 270°$ 0

42. $\csc 180°$

43. $\sin 570°$

44. $\tan \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

45. $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

46. $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

47. **التحدِ** بالنسبة للزاوية θ في وضع قياسي، $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$. هل يمكن أن تكون قيمة θ تساوي $225°$؟ برر استنتاجك.

48. **الفرضيات** حدد إذا ما كانت العبارة $3 \sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

49. **التبرير** استخدم دالتي sine و cosine واشرح لماذا تكون $180°$ غير مُعرَّفة.

50. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالاً لزاوية سالبة θ يكون فيها $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$.

51. **الكتابة في الرياضيات** صِف خطوات إيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ تكون أكبر من $90°$. أدرج وصفًا لزاوية المرجع.

تدريب على الاختبار المعياري

52. الإجابة الشبكية إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينهما 3. فما ناتج ضربهما؟

53. الهندسة D هي نقطة منتصف $\overline{BC}$، و A و E هما نقطتا منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$، على التوالي. إذا كان طول $\overline{AE}$ يساوي 12، فما طول $\overline{BC}$؟

A 6   **C** 24

B 12   **D** 48

54. التعبير $(-6 + i)^2$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟

F $-12i$ **H** $36 - 12i$

G $36 - i$ **J** $35 - 12i$

55. SAT/ACT ما الأقل فيما يلي؟

A $1 + \frac{1}{4}$ **D** $1 \times \frac{1}{4}$

B $1 - \frac{1}{4}$ **E** $\frac{1}{4} - 1$

C $1 \div \frac{1}{4}$

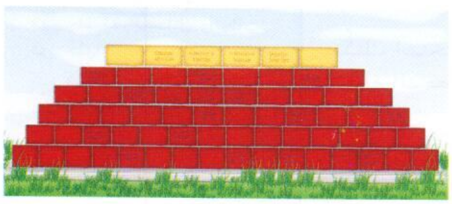
مراجعة شاملة

أعد كتابة كل قياس بالراديان بالدرجات. (الدرس 2-11)

56. $\frac{4}{3}\pi$ **57.** $\frac{11}{6}\pi$ **58.** $-\frac{17}{4}\pi$

حُـلّ المعادلات الآتية. (الدرس 1-11)

59. $\cos a = \frac{13}{17}$ **60.** $\sin 30 = \frac{b}{6}$ **61.** $\tan c = \frac{9}{4}$



62. العمارة الهندسية يتم إنشاء نصب تذكاري في حديقة بالمدينة. سيكون عبارة عن حائط طوبي يتكون فيه الصف العلوي من ست طوبات مطلية بالذهب محفور عليها أسماء ستة أشخاص محليين مشهورين. ويزيد كل صف بطوبتين عن الصف الذي يعلوه. أثبت أن عدد الطوب في أعلى n صفوف هو $n^2 + 5n$.

63. أساطير تقول الإسطورة إن ملكًا أراد مكافأة فتى على فعلٍ حسن، ولكنه منحه الاختيار. إما أن يحصل على AED 1,000,000 دفعةً واحدة، أو يحصل على مكافأة يومية لمدة شهر، بحيث يحصل على فلس واحد في اليوم الأول، وفلسين في اليوم الثاني، وهكذا. وبهذا يحصل على ضعف الفلسات كل يوم أكثر من اليوم السابق. كم ستكون قيمة الخيار الثاني؟

اكتب معادلة لكل دائرة علمًا بنقطتي نهاية القطر.

64. $(2, -4), (10, 2)$ **65.** $(-1, -10), (-7, 6)$ **66.** $(9, 0), (4, -7)$

بسّط كل تعبير مما يلي.

67. $\frac{5}{x^2 + 6x + 8} + \frac{x}{x^2 - 3x - 28}$ **68.** $\frac{3x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{6}{x^2 + 7x - 18}$ **69.** $\frac{4}{3x^2 + 12x} + \frac{2x}{x^2 - 2x - 24}$

حُـلّ كل معادلة أو متباينة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

70. $8^x = 30$ **71.** $5^x = 64$ **72.** $3^{x+2} = 41$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

73. $16^{-\frac{1}{4}}$ **74.** $27^{\frac{4}{3}}$ **75.** $25^{-\frac{5}{2}}$

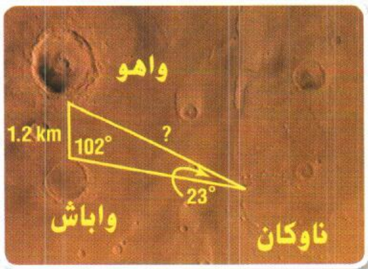
مراجعة المهارات

حُـلّ لإيجاد x.

76. $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$ **77.** $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$ **78.** $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

الدرس 11-4 قانون الـ Sine

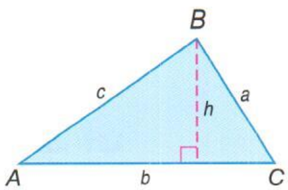
:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• لقد أوجدت أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية للمثلثات القائمة.	**1** • إيجاد مساحة مثلث باستخدام ضلعين وزاوية محصورة. **2** استخدام قانون الsine في حل المثلثات.	• يوجد في كوكب المريخ مئات الآلاف من الفوهات التي سميت بأسماء أشهر العلماء ومؤلفي قصص الخيال العلمي وأسماء المدن على كوكب الأرض. يوضح الشكل الفوهات "واهو" و"واباش" و"ناوكان". يمكنك استخدام حساب المثلثات في إيجاد المسافة بين "واهو" و"ناوكان"



المفردات الجديدة
قانون الـ Sines
Law of Sines
حل المثلث solving a triangle
حالة مبهمة ambiguous case

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 إيجاد مساحة مثلث
في المثلث الموجود على اليسار، $\sin A = \frac{h}{c}$. أو $h = c \sin A$.

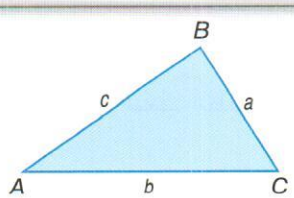


قانون مساحة المثلث	المساحة $= \frac{1}{2}bh$
استبدل بـ h $c \sin A$.	المساحة $= \frac{1}{2}b(c \sin A)$
بسّط.	المساحة $= \frac{1}{2}bc \sin A$

يمكنك استخدام هذه الصيغة وصيغتين أخريين في إيجاد مساحة المثلث إذا علمت طولي ضلعيه وقياس الزاوية المحصورة.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

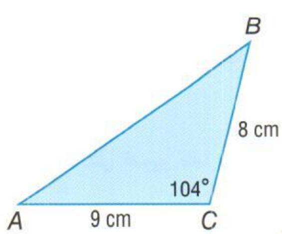
الشرح مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب ضلعين و sine الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز المساحة $= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث.

أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب عشرة.



في $\triangle ABC$، $a = 8$ و $b = 9$ و $C = 104°$.

بحسب القياسات المعلومة، استخدم صيغة المساحة الثالثة.	المساحة $= \frac{1}{2}ab \sin C$
التعويض	$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$
بسّط.	$\approx 34.9 \text{ cm}^2$

التحقق الذهني قرّب $104°$ sine إلى $90°$ sine لأن $90°$ sine يساوي 1.

$\frac{1}{2}(8)(9)\sin 90° = \frac{1}{2}(8)(9)(1) = 36$

وهذا قريب من الإجابة 34.9 سنتيمترًا مكعبًا.

تمرين موجّه

1. أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا كانت $A = 31°$، و $b = 18$ مترًا، و $c = 22$ مترًا.

2 استخدام قانون الsine في حل المثلثات

يمكنك استخدام صيغ المساحة في اشتقاق **قانون ال sine** الذي يبين العلاقات بين أطوال الأضلاع في المثلث وجيوب الزاوية المقابلة لها.

$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ اضبط صيغ المساحة المساوية لبعضها البعض.

$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$ اضرب كل تعبير في 2.

$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$ اقسم كل تعبير على abc.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ بسّط.

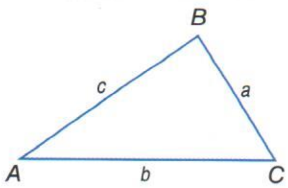
الربط بتاريخ الرياضيات

بولين سبيري (1885–1967) وضعت بولين سبيري كتابين مدرسيين خلال العقد الثاني من القرن العشرين، وهما *Short Course in Spherical Trigonometry* و *Plane Trigonometry*. وفي عام 1923 أصبحت أول امرأة تُرقى لمنصب أستاذ مساعد في قسم الرياضيات في جامعة كاليفورنيا، بيركلي.

المفهوم الأساسي قانون الـ Sine

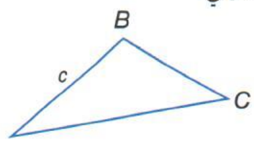
في المثلث $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C، على الترتيب، فإن الحل التالي صحيح.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

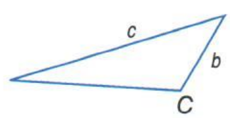


يمكنك استخدام قانون الـ Sine في حل مثلث إذا كنت تعرف أيًا مما يلي.

- قياس زاويتين وأي ضلع (الحالتان زاوية-زاوية-ضلع أو زاوية-ضلع-زاوية)



- قياس ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما (الحالة ضلع-ضلع-زاوية)



يُسمى استخدام القياسات المعطاة في إيجاد طول الضلع وقياسات الزاوية غير المعلومة في المثلث باسم **حل المثلث**.

نصيحة دراسية

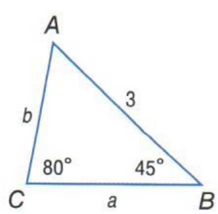
الاستنتاج يمكن أيضًا كتابة قانون الsine بالشكل $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

إذًا، يمكن أيضًا استخدام التعابير الموضحة أدناه في حل المثلث في المثال 2.

- $\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$
- $\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$

مثال 2 حل المثلث عند معرفة زاويتين وضلع

أوجد حل المثلث $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.



الخطوة 1 أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$m\angle A = 180 - (80 + 45)$ أو $55°$

الخطوة 2 استخدم قانون الsine في إيجاد طول الضلعين a و b. اكتب معادلة لإيجاد كل متغير.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون ال sine
$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$	التعويض
$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$	أوجد حل كل متغير.
$a \approx 2.5$	$b \approx 2.2$	استخدم حاسبة.

إذًا، $A = 55°$ و $a \approx 2.5$ و $b \approx 2.2$.

تمرين موجّه

2. أوجد حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 42°$ و$Q = 65°$ و $n = 5$.

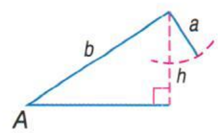
إذا علمت قياسات زاويتين وضلع، فسيمكنك حل مثلث واحد تحديدًا. ولكن، إذا علمت قياسات ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما، يمكن أن تحصل على صفر مثلث، أو مثلث واحد، أو اثنين. وتُعرف هذه الحالة باسم **الحالة المبهمة**. إذًا، عند حل مثلث باستخدام الحالة ضلع-ضلع-زاوية، يمكن الحصول على الحل صفر أو واحد أو اثنين.

> **نصيحة دراسية**
> **الحلان** يُطلق على الحالة عندما يوجد حلان للمثلث اسم *الحالة المبهمة*.

المفهوم الأساسي المثلثات المحتملة في حالة ضلع-ضلع-زاوية

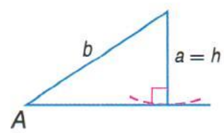
تأمل المثلث عند معرفة a و b و $m\angle A$.

$\angle A$ زاوية حادة.



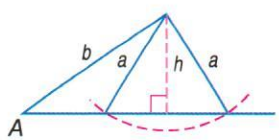
$a < h$

بلا حل



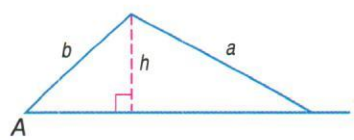
$a = h$

حل واحد



$h < a < b$

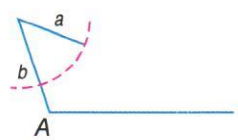
بلا حل



$a \geq b$

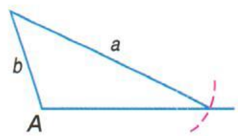
حل واحد

$\angle A$ زاوية قائمة أو منفرجة.



$a \leq b$

بلا حل



$a > b$

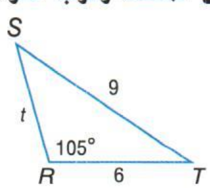
حل واحد

> **نصيحة دراسية**
> **A زاوية حادة** في الأشكال على اليسار، الارتفاع h يُقارن إلى a حيث h أقل مسافة من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادة.
> $\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
> $\sin A = \frac{h}{b}$

نظرًا لأن $\sin A = \frac{h}{b}$، يمكنك استخدام $h = b \sin A$ في إيجاد h في المثلثات الحادة.

مثال 3 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية

حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا حل*، أو له *حل واحد*، أو *حلين*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



a. في $\triangle RST$، $R = 105°$ و $r = 9$ و $s = 6$.

حيث إن $\angle R$ زاوية منفرجة و $6 < 9$، فلهذا تعلم أن هناك حلاً واحدًا للمثلث.

الخطوة 1 طبّق قانون الsine في إيجاد قيمة $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ اضرب كل طرف في 6.

$\sin S \approx 0.6440$ استخدم حاسبة.

$S \approx 40°$ استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle T$.

$m\angle T \approx 180 - (105 + 40)$ أو $= 35°$

الخطوة 3 طبّق قانون الsine لإيجاد قيمة t.

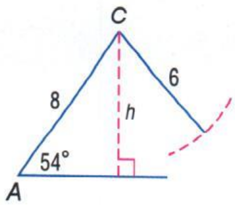
$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ حل لإيجاد t.

$t \approx 5.3$ استخدم الحاسبة.

إذًا، $T \approx 35°$ و $S \approx 40°$ و $t \approx 5.3$.

b. في $\triangle ABC$**،** $A = 54°$ **و** $a = 6$ **و** $b = 8$**.**



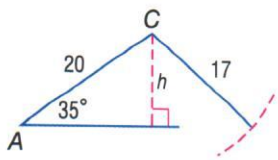
بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $6 < 8$، فأوجد h و قارنها بـــ a.

$b \sin A = 8 \sin 54°$ — $A = 54°$ و $b = 8$

≈ 6.5 — استخدم الحاسبة.

بما أن $6 \leq 6.5$ أو $h \leq a$، فليس هناك حل.

c. في المثلث $\triangle ABC$**،** $A = 35°$**، و** $a = 17$**، و** $b = 20$**.**



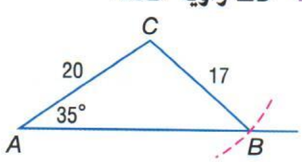
بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $20 > 17$، فأوجد h وقارنها بـــ a.

$b \sin A = 20 \sin 35°$ — $A = 35°$ و $b = 20$

≈ 11.5 — استخدم الحاسبة.

بما أن $20 > 17 > 11.5$ أو $h < a < b$، فهناك حلان. إذًا هناك مثلثان يمكن حلهما

الحالة 1 $\angle B$ **زاوية حادة.**



الخطوة 1 أوجد $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الـــ Sine

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ — أوجد sin B.

$\sin B \approx 0.6748$ — استخدم الحاسبة.

$B \approx 42°$ — أوجد $\sin^{-1} 0.6748$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 42)$ أو $103°$

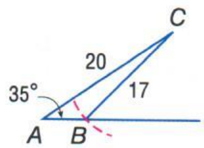
الخطوة 3 أوجد c.

$\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الـــ Sine

$c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ — أوجد قيمة c.

$c \approx 28.9$ — بسّط.

الحالة 2 $\angle B$ **زاوية منفرجة.**



الخطوة 1 أوجد $m\angle B$.

نسبة الـsine لها أيضًا قيمة موجبة في الربع الثاني. إذًا، أوجد زاوية حادة B قيمة sin لها $B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42°$ أو $= 138°$

الخطوة 2 أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 138)$ أو $= 7°$

الخطوة 3 أوجد c.

$\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الـــ Sine

$c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ — أوجد قيمة c.

$c \approx 28.9$ — بسّط.

إذًا، أحد الحلين هو $B \approx 42°$، و $C \approx 103°$، و $c \approx 28.9$. والحل الثاني هو $B \approx 138°$، و $C \approx 7°$، و $c \approx 3.6$.

نصيحة دراسية

زاوية مرجع ستستخدم في المثلث في الحالة 2 زاوية المرجع $42°$ لإيجاد القيمة الأخرى لـــ B.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل واحد، أو حلين. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

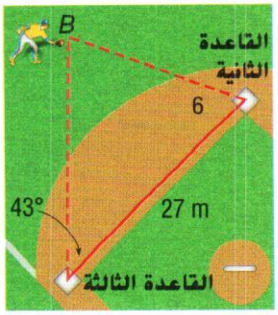
3A. في المثلث $\triangle RST$، $R = 95°$، و $r = 10$، و $s = 12$.

3B. في المثلث $\triangle MNP$، $N = 32°$، و $n = 7$، و $p = 4$.

3C. في $\triangle ABC$، $A = 47°$، و $a = 15$، و $b = 18$.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قانون الــ sine في حل المسألة

لعبة البيسبول تُضرب كرة البيسبول بين القاعدتين الثانية والثالثة وتُلتقط عند النقطة B، مثلما هو موضح في الشكل. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثانية؟



$$\frac{\sin 72^\circ}{27} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$$ قانون الــ Sine

$$x \sin 72^\circ = 27 \sin 43^\circ$$ الضرب التقاطعي

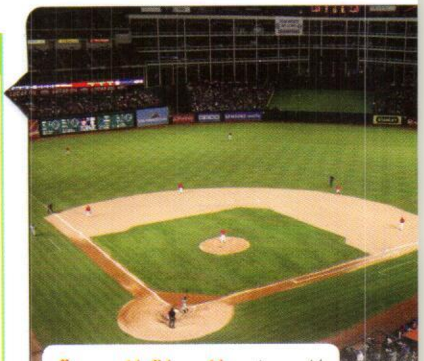
$$x = \frac{27 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$$ حل لإيجاد قيمة x.

$$x \approx 19.4$$ استخدم الحاسبة.

إذًا، تبعد المسافة 19.4 مترًا تقريبًا.

تمرين موجّه

4. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثالثة؟



الربط بالحياة اليومية

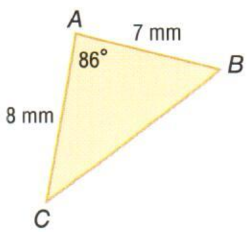
تشترك ملاعب البيسبول في المدرسة الثانوية والكلية في أبعاد الملعب الداخلي مثل ملاعب البيسبول للمحترفين. بينما تختلف أبعاد الملعب الخارجي اختلافًا كبيرًا.

المصدر: مجلة Baseball Digest Magazine

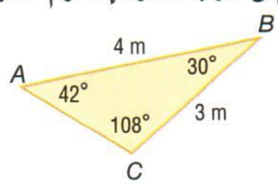
التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.

1.



2.

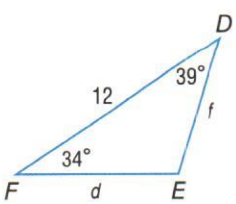


3 $A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

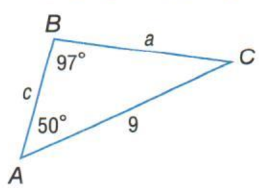
4. $B = 103^\circ, a = 20 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}$

مثال 2 حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

5.



6.



7. أوجد حل المثلث $\triangle FGH$. إذا كانت $G = 80^\circ$ و $H = 40^\circ$ و $g = 14$.

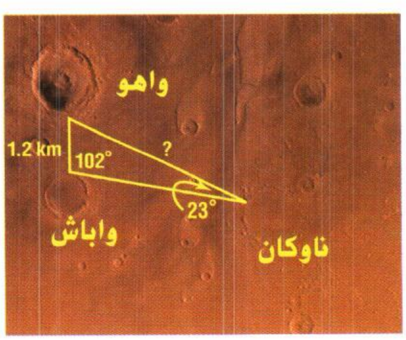
مثال 3 **المثابرة** حدد هل كل مثلث $\triangle ABC$ بلا حل، أم له حل واحد، أم له حلان. ثم أوجد حل المثلث. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

8. $A = 95^\circ, a = 19, b = 12$

9. $A = 60^\circ, a = 15, b = 24$

10. $A = 34^\circ, a = 8, b = 13$

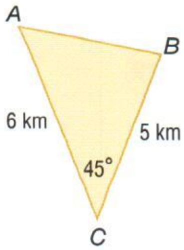
11. $A = 30^\circ, a = 3, b = 6$

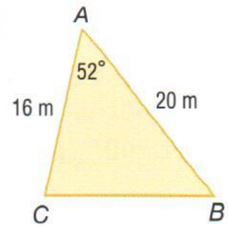


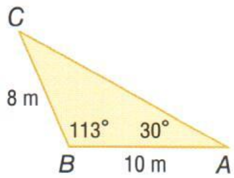
مثال 4 **12.** **الفضاء** راجع بداية الدرس. أوجد المسافة بين فوهة واهو وفوهة ناوكان على كوكب المريخ.

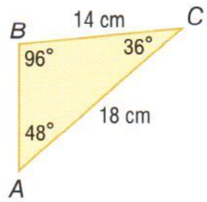
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.**

13.


14.


15.


16.


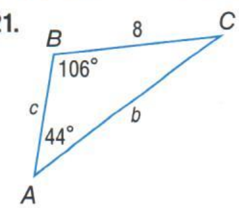
17. $C = 25°, a = 4 \text{ m}, b = 7 \text{ m}$

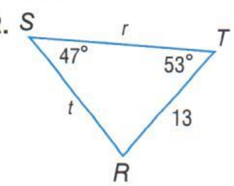
18. $A = 138°, b = 10 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm}$

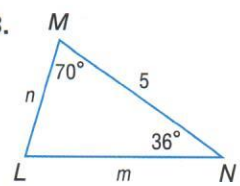
19. $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

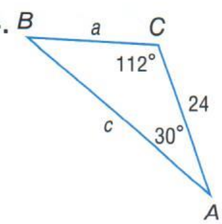
20. $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 **الاستنتاج حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

21.


22.


23.


24.


25. أوجد حل $\triangle HJK$ إذا كانت $H = 53°$، و $J = 20°$، و $h = 31$.

26. أوجد حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 109°$، و $Q = 57°$ و $n = 22$.

27. أوجد حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $A = 50°$، و$a = 2.5$، و $C = 67°$.

28. أوجد حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $B = 18°$، و$C = 142°$، و $b = 20$.

مثال 3 **حدد ما إذا كان كل مثلث $\triangle ABC$ *بلا حل*، أم له *واحد*، أم له *حلان*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

29. $A = 100°, a = 7, b = 3$

30. $A = 75°, a = 14, b = 11$

31. $A = 38°, a = 21, b = 18$

32. $A = 52°, a = 9, b = 20$

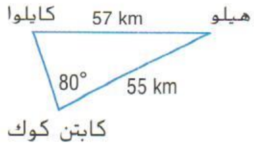
33. $A = 42°, a = 5, b = 6$

34. $A = 44°, a = 14, b = 19$

35. $A = 131°, a = 15, b = 32$

36. $A = 30°, a = 17, b = 34$

مثال 4 **الجغرافيا في مدينة هاواي، تقدر المسافة من "هيلو" إلى "كايلوا" بـ 57 كيلومترًا، والمسافة من "هيلو" إلى "كابتن كوك" بـ 55 كيلومترًا.**



37. ما قياس الزاوية المتكونة عند "هيلو"؟

38. ما المسافة بين "كايلوا" و"كابتن كوك"؟

39. **الأعاصير** تُكون صافرات إنذار الأعاصير A و B، و C منطقة مثلثية الشكل في إحدى مناطق المدينة. تبعد صافرتا الإنذار A و B عن بعضهما 8 كيلومترات، وقياس الزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار A تساوي $112°$، والزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار B تساوي $40°$. ما المسافة بين الصافرتين B و C؟

40. **الألغاز** مثلث برمودا هو منطقة في المحيط الأطلنطي بين برمودا، وميامي، وفلوريدا، وسان جوان، وبورتو ريكو. ولقد أشيع عنه أن السفن والطائرات تختفي فيه في ظروف غامضة.

a. ما المسافة بين ميامي وبرمودا؟

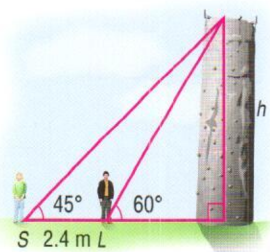
b. ما مساحة مثلث برمودا تقريبًا؟

41. **ركوب الدراجات** طول الضلع في مسار ركوب الدراجة المثلث الشكل يساوي 4 كيلو مترات. والزاوية المقابلة لهذا الضلع تساوي $64°$. ولقد تكونت زاوية أخرى في المسار المثلثي قياسها $66°$.

a. صمم رسمًا للموقف، وقم بتسمية الأضلاع الناقصة a و b.

b. اكتب المعادلات التي يمكن استخدامها في إيجاد أطوال الأضلاع الناقصة.

c. ما محيط المسار ؟



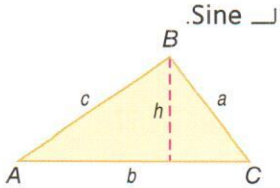
42. **تسلق الصخور** سعيد (المشار إليه بالرمز S) وماجد (المشار إليه بالرمز M) يقفان على مسافة 2.4 متر بعيدًا عن بعضهما البعض أمام حائط تسلق الصخور، مثلما هو موضح في الشكل على اليسار. ما ارتفاع الحائط؟ قرّب إلى أقرب عشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **التفكير النقدي** في المثلث $\triangle RST$، $R = 56°$ و $r = 24$ و $t = 12$. تستخدم ميسون ومها قانون الsine لإيجاد T. هل أي منهما على صواب؟ فسّر استنتاجك.

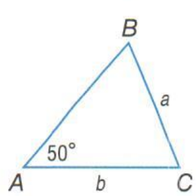
ميسون	مها
$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$	بما أن $r > t$. فلا يوجد حل.

44. **مسألة غير محددة** الإجابة ابتكر مسألة تطبيق تتضمن مثلثات قائمة الزاوية وقانون الـ Sine. ثم حل المسألة، وصمم رسمًا تخطيطيًا إذا لزم الأمر.



45. **التحدِ** مستخدمًا الشكل الموضح على اليسار، استنبط الصيغة $\text{المساحة} = \frac{1}{2} bc \sin A$.

46. **الاستنتاج** أوجد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC التي يمكن تكوينها إذا كانت $A = 55°$ و $C = 20°$.

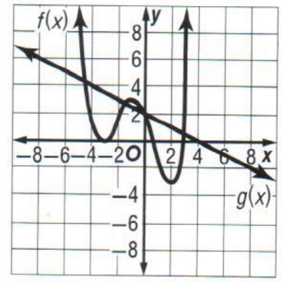


47. **الكتابة في الرياضيات** استخدم قانون الsine في توضيح لماذا a و b ليست لهما قيم مميزة في الشكل الموضح.

48. **مسألة غير محددة الإجابة** إذا علمت أن $E = 62°$ و $d = 38$. فأوجد قيمة e بحيث لا يوجد المثلث DEF. فسّر استنتاجك.

تدريب على الاختبار المعياري

49. الإجابة القصيرة مستخدمًا التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$، ما قيمة $f(g(4))$؟



50. الإحصاء إذا كان متوسط سبعة أعداد صحيحة فردية متتالية هو n، فما وسيط تلك الأعداد الصحيحة السبعة؟

A 0
B 7
C n
D $n - 2$

51. صفر واحد في $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ يساوي 4. ما الصيغة ذات العوامل للتعبير $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
H $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
J $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

52. SAT/ACT يُقسّم ثلاثة أشخاص AED 48,000 حسب النسبة 3 : 4 : 5. ما قيمة المبلغ صاحب النصيب الأكبر؟

A AED 12,000
B AED 16,000
C AED 20,000
D AED 24,000
E AED 30,000

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 3-11)

53. $\sin 210°$
54. $\cos \frac{3}{4}\pi$
55. $\cot 60°$

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية. (الدرس 2-11)

56. $125°$
57. $-32°$
58. $\frac{2}{3}\pi$

59. المبيعات يكسب مندوب المبيعات AED 10 في الساعة زائد عمولة بنسبة 10% على المبيعات. اكتب دالة تصف دخل مندوب المبيعات. إذا كان مندوب المبيعات يريد أن يكسب AED 1000 في أسبوع يعمل خلاله 40 ساعة، فما رقم المبيعات الذي ينبغي أن يحققه؟

60. $\sqrt{x-6} - \sqrt{x} = 3$
61. $\sqrt[3]{5m+2} = 3$
62. $(6n-5)^{\frac{1}{3}} + 3 = -2$

63. علم الفلك تبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 146.9 مليون كيلو متر عند أقرب نقطة لها. وتبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 151.8 مليون كيلو متر عند أبعد نقطة لها. اكتب معادلةً تصف مدار الأرض، معتبرًا أن مركز المدار هو نقطة الأصل وأن الشمس تقع على المحور x.

بسّط.

64. $\sqrt{(x-4)^2}$
65. $\sqrt{(y+2)^4}$
66. $\sqrt[3]{(a-b)^6}$

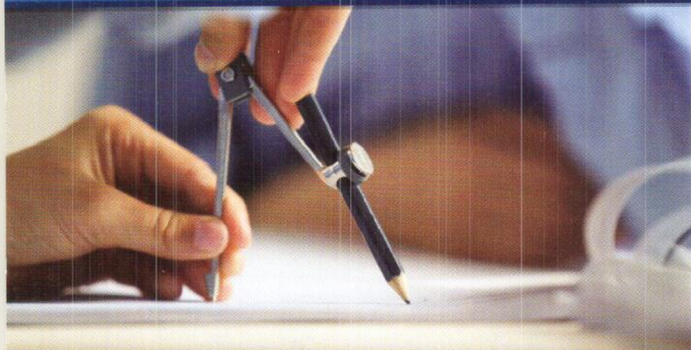
مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كانت $w = 6$، و $x = -4$، و $y = 1.5$، و $z = \frac{3}{4}$.

67. $w^2 + y^2 - 6xz$
68. $x^2 + z^2 + 5wy$
69. $wy + xz + w^2 - x^2$

التوسع 11-4

مختبر الهندسة
المضلعات المنتظمة



يمكنك استخدام الزوايا المركزية للدوائر لاستكشاف خواص المضلعات المنتظمة المحاطة بدائرة. تذكر أن المضلع المنتظم يكون محاطًا بدائرة إذا كان كل رأس من رؤوسه يقع على الدائرة.

النشاط جمع البيانات

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ نصف قطرها سنتيمتر واحد.

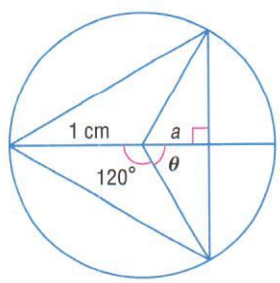
الخطوة 2 أحط مثلثًا متساوي الأضلاع بدائرة. وللقيام بذلك، استخدم منقلة لقياس ثلاث زوايا $120°$ في مركز الدائرة، حيث إن $120° = \frac{360°}{3}$.
ثم صِل النقاط حيث تتقاطع أضلاع الزوايا مع الدائرة باستخدام مسطرة.

الخطوة 3 **عامد** المضلع المنتظم هو قطعة مستقيمة مرسومة من مركز المضلع وتكون عمودية على أحد أضلاعه. استخدم cosine θ لإيجاد طول العامد، المُسمى a في الرسم التخطيطي.

النماذج والتحليل

1. أعد جدولاً مثل ذلك المبين أدناه ودوّن طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع. وأدخل كل مضلع منتظم مذكور في الجدول، في دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد. انسخ وأكمل الجدول.

عدد الأضلاع، n	θ	a	عدد الأضلاع، n	θ	a
3	60		7		
4	45		8		
5			9		
6			10		



2. ما الذي تلاحظه بشأن قياس θ مع تزايد عدد أضلاع المضلع المحاط؟

3. ما الذي تلاحظه بشأن قيمة a؟

4. **التخمين** افترض أنك أحطت مضلعًا منتظمًا من 30 ضلعًا بدائرة. أوجد قياس الزاوية θ.

5. اكتب القانون الذي يقدم قياس الزاوية θ لمضلع عدد أضلاع n.

6. اكتب قانونًا يعطي طول العامد لمضلع منتظم محاط بدائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.

7. كيف سيتغير القانون الذي كتبته في التدريب 6 إذا لم يكن نصف قطر الدائرة سنتيمترًا واحدًا؟

الدرس 11-5 قانون الـ Cosine

:: السابق

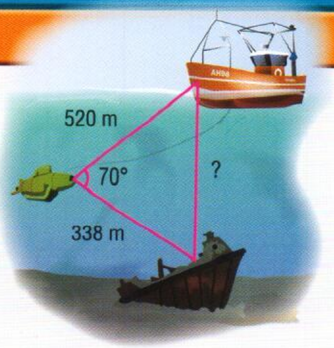
- أوجدت حل المثلثات باستخدام قانون الـ Sine.

:: الحالي

1. استخدام قانون cosine لحل المثلثات.
2. الاختيار بين طرق حل المثلثات.

:: لماذا؟

- *الغواصة* هي مركبة مائية تُستخدم في استكشاف أعماق المحيط. يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد المسافة من السفينة المستخدمة لإنزال الغواصة في المحيط وحطام السفينة الذي عثرت الغواصة عليه في قاع المحيط.



1 استخدام قانون cosine لحل المثلثات

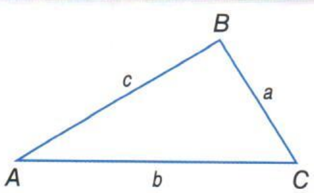
لا يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل مثلث مثل ذلك المبين أعلاه. ولكن يمكنك استخدام **قانون cosine** في حالة:

- معرفة قياسات ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (حالة ضلع-زاوية-ضلع).
- معرفة قياسات الأضلاع الثلاثة (حالة ضلع-ضلع-ضلع).

المفهوم الأساسي قانون الـ Cosine

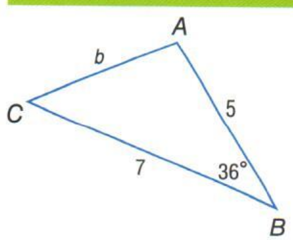
في $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي طولها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C، على التوالي، إذًا فينطبق ما يلي.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



مثال 1 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية محصورة بينهما

أوجد حل $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد طول الضلع المجهول.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	قانون الـ Cosine
$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$	$a = 7, c = 5, B = 36°$
$b^2 \approx 17.4$	استخدم آلة حاسبة للتبسيط.
$b \approx 4.2$	أوجد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

$\frac{\sin A}{7} \approx \frac{\sin 36°}{4.2}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$
$\sin A \approx \frac{7 \sin 36°}{4.2}$	اضرب كل طرف في 7.
$A \approx 78°$	استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 3 أوجد قياس الزاوية الأخرى.

$m\angle C \approx 180° - (36° + 78°)$ أو $= 66°$

إذًا، $b \approx 4.2$ و $A \approx 78°$ و $C \approx 466$.

تمرين موجّه

1. أوجد حل $\triangle FGH$ إذا كانت $G = 82°$ و $f = 6$ و $h = 4$.

المفردات الجديدة

قانون الـ Cosines
Law of Cosines

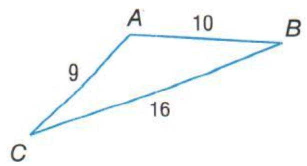
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

عندما تعلم فقط أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث، يمكنك حل المثلث باستخدام قانون الـ Cosine. تتمثل الخطوة الأولى في إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ويتم ذلك لضمان أن الزاويتين الأخريين حادتان عند استخدام قانون الـ Sine.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة الأضلاع الثلاثة

أوجد حل $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد قياس الزاوية الأكبر، $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون الـ Cosine
$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$	$a = 16$، $b = 9$، و $c = 10$
$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$	اطرح 9^2 و 10^2 من كل طرف.
$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$	اقسم كل طرف على $-2(9)(10)$.
$-0.4167 \approx \cos A$	استخدم آلة حاسبة للتبسيط.
$115° \approx A$	استخدم النسبة $\cos^{-1}$.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\sin B \approx \frac{9 \sin 115°}{16}$	اضرب كل طرف في 9.
$\sin B \approx 0.5098$	استخدم آلة حاسبة.
$B \approx 31°$	استخدم النسبة $\sin^{-1}$

الخطوة 3 أوجد قياس $\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°)$ أو حوالي $34°$

إذًا، $A \approx 115°$ و $B \approx 31°$ و $C \approx 34°$.

تمرين موجّه

2. أوجد حل $\triangle ABC$ إذا كان $a = 5$ و $b = 11$ و $c = 8$.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استخدام قانون cosine مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية الثانية.

2 اختيار طريقة لحل المثلثات

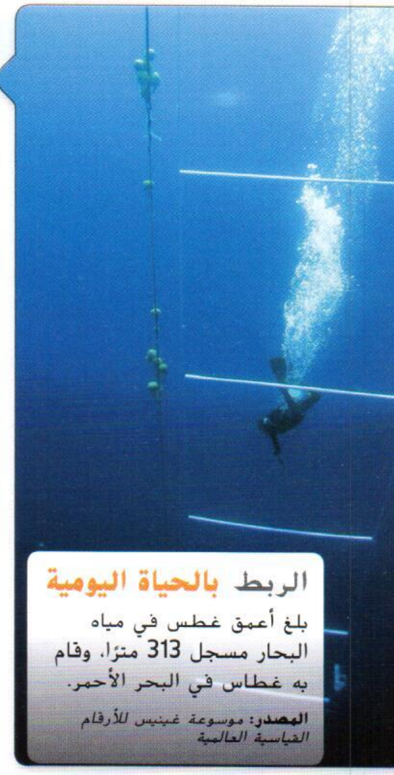
يمكنك استخدام قانون الـ Sine وقانون cosine لحل مسائل تشتمل على مثلثات مائلة. وتحتاج إلى معرفة قياس ضلع واحد على الأقل وأي جزأين آخرين. إذا كان المثلث له حل، فيجب أن تحدد ما إذا كنت ستستخدم قانون الـ Sine أم قانون cosine لحل المثلث.

مراجعة المفردات

مائل مثلث لا يتضمن زاوية قائمة

ملخص المفهوم حل المثلثات المائلة

المعطيات	ابدأ باستخدام
زاويتان وأي أضلاع	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية محصورة بينهما	قانون الـ Cosine
ثلاثة أضلاع	قانون الـ Cosine



الربط بالحياة اليومية

بلغ أعمق غطس في مياه البحار مسجل 313 مترًا، وقام به غطاس في البحر الأحمر.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ Cosine

الغطس نظر الغواص لأعلى بزاوية 20° ورأى سلحفاة على بعد 2.7 متر منه. ثم نظر لأسفل بزاوية 40° ورأى سمكة ببغائية زرقاء على بعد 3.6 أمتار منه. ما المسافة الفارقة بين السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء؟

الفهم أنت تعلم الزاويتين اللتين تشكلتا عندما نظر الغواص لأعلى ولأسفل. وتعلم أيضًا كم تبعد السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء عن الغواص.

التخطيط استخدم المعلومات لتصميم رسم تخطيطي وتسميته. بما أنه معلوم ضلعان وزاوية محصورة بينهما في المثلث، يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل المسألة.

الحل

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون cosine
$a^2 = 3.6^2 + 2.7^2 - 2(3.6)(2.7) \cos 60$	$A = 60$ و $c = 2.7$ و $b = 3.6$
$a^2 = 10.53$	استخدم آلة حاسبة.
$a \approx 3.2$	أوجد القيمة الموجبة لـ a.

إذًا، السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء تفصل بينهما مسافة حوالي 3.2 أمتار.

التحقق باستخدام قانون الـ Sine، يمكنك إيجاد أن $B \approx 74°$ و $C \approx 46°$. بما أن $B > A > C$ و $b > a > c$، فالحل منطقي.

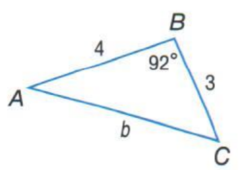
تمرين موجّه

3. **سباقات الماراثون** ركضت نهلة 6 كيلومترات في نفس الاتجاه. ثم انعطفت بزاوية 79° وركضت 7 كيلومترات. في نهاية السباق، ما المسافة التي تبعدها نهلة عن نقطة البداية لها؟

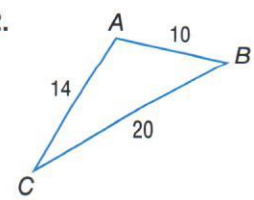
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

1.



2.

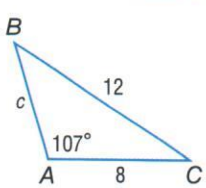


3. $a = 5, b = 8, c = 12$

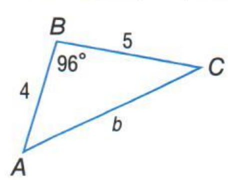
4. $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 **الدقة حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حل المثلث.**

5.



6.



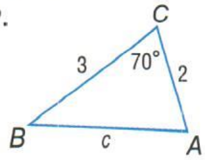
7. في $\triangle RST$، $R = 35°$ و $s = 16$ و $t = 9$.

8. **كرة القدم** في مباراة كرة قدم، يبعد حارس المرمى عن المدافع A بمسافة 20 مترًا. ودار بزاوية 40° لرؤية المدافع B الذي يبعد عنه بمسافة 16 مترًا. ما المسافة التي تفصل بين هذين المدافعين؟

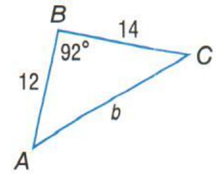
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

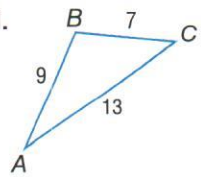
9.



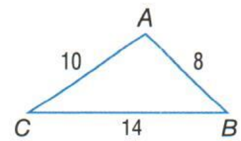
10.



11.



12.



13. $A = 116°, b = 5, c = 3$

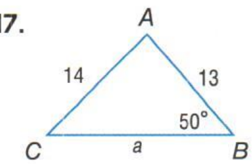
14. $C = 80°, a = 9, b = 2$

15. $f = 10, g = 11, h = 4$

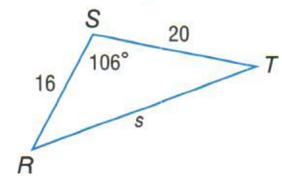
16. $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 **حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حل المثلث.**

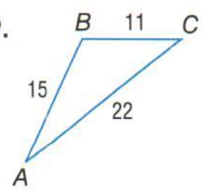
17.



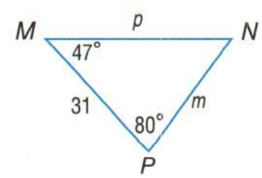
18.



19.

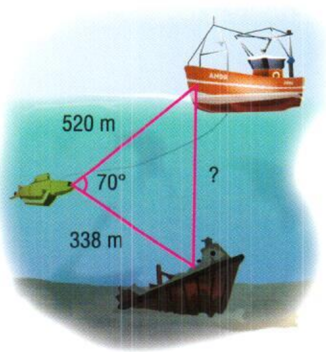


20.



21. في $\triangle ABC$، $C = 84°$ و $c = 7$ و $a = 2$.

22. في $\triangle HJK$، $h = 18$ و $j = 10$ و $k = 23$.



23. الاستكشاف أوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الموضحين في الرسم التخطيطي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

24. الهندسة متوازي أضلاع به ضلعان طولهما 8 سنتيمترات و 12 سنتيمترًا. وتوجد زاوية محصورة بينهما قياسها 42°. ما طول القطر الأقصر مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟

25. السباق مسار سباق ريفي على شكل مثلث أطوال أضلاعه هي 1.8 كيلومتر وكيلومتران و1.2 كيلومتر. ما الزوايا التي يشكلها كل زوج من الأضلاع؟

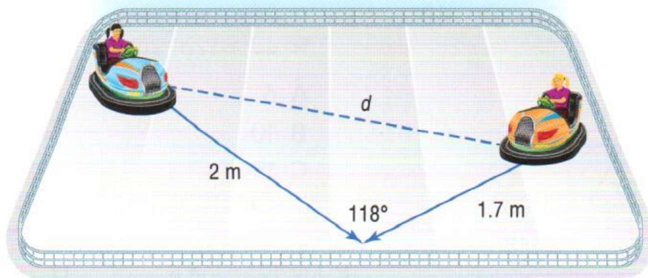
26. تمثيل النماذج مزرعة على قطعة أرض مثلثية الشكل قياسها 0.9 في 0.5 في 1.25 كيلومتر.

a. إذا كانت قطعة الأرض محاطة بسياج، فماذا سيكون قياس الزوايا التي تتلاقى أسياج الأضلاع الثلاثة عندها؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. ما مساحة قطعة الأرض؟

27. الأرض قطعة أرض على شكل مثلث. المسافات بين كل رأس في المثلث هي 140 m و 210 m و 300 m على التوالي. استخدم قانون cosine لإيجاد مساحة الأرض مع التقريب إلى أقرب متر مربع.

28. الملاهي سيارتان متصادمتان في لعبة ملاهٍ اصطدمتا على النحو أدناه.



a. ما المسافة d التي كانت تبعدها السيارتان قبل التصادم؟

b. قبل التصادم، كانت توجد سيارة ثالثة على بعد 3 أمتار من السيارة 1، و 4 أمتار من السيارة 2. صِف الزوايا التي شكلتها السيارات 1 و 2 و 3 قبل التصادم.

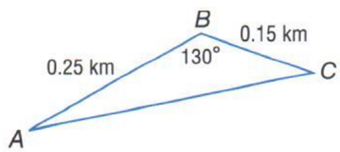
29. المتنزهات متنزه على شكل مثلث مساحته 11 مترًا في 14 مترًا في 10 أمتار.

a. ارسم مساحة المتنزه لتمثيلها مع تسميتها.

b. صِف كيف يمكنك إيجاد مساحة المتنزه.

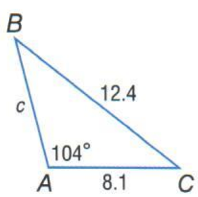
c. كم تبلغ المساحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

30. الرياضات المائية امرأة على زورق شخصي قامت برحلة من النقطة A إلى النقطة B إلى النقطة C وهي تقطع مسافة 28 كيلومترًا في الساعة. ثم عادت من النقطة C إلى نقطة البداية لها وهي تقطع مسافة 35 كيلومترًا في الساعة. فكم عدد الدقائق التي استغرقتها الرحلة بالكامل؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

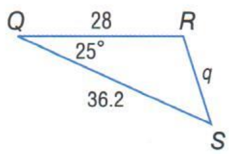


حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

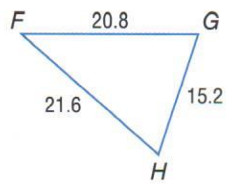
31.



32.

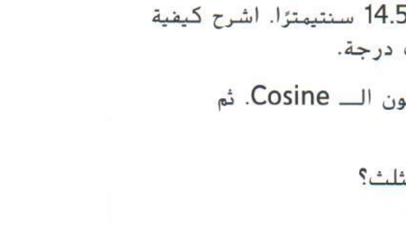


33.



34. التحدِ استعن بالشكل ونظرية فيثاغورس لاشتقاق قانون Cosines. استفد من الإرشادات أدناه.

- استخدم نظرية فيثاغورس أولًا لحل $\triangle DBC$.
- في $\triangle ADB$، $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$



35. الفرضيات مثلث أطوال أضلاعه هي 10.6 سنتيمترات و 8 سنتيمترات و 14.5 سنتيمترًا. اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ثم أوجد قياس هذه الزاوية مع التقريب إلى أقرب درجة.

36. مسألة غير محددة الإجابة ابتكر مسألة تطبيقية تتضمن مثلثات قائمة وقانون الـ Cosine. ثم حل مسألتك وصمم رسومًا تخطيطية إذا لزم الأمر.

37. الكتابة في الرياضيات كيف تحدد أي طريقة ينبغي استخدامها عند حل مثلث؟

تدريب على الاختبار المعياري

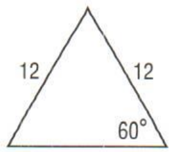
38. SAT/ACT إذا كان c و d عددين صحيحين موجبين و $4c + d = 26$، فما مجموع كل القيم الممكنة لـ c؟

A 6
B 10
C 15
D 21
E 28

39. إذا كان $6y = 21$، فما قيمة y؟

F $\log 12 - \log 6$
G $\frac{\log 21}{\log 6}$
H $\frac{\log 6}{\log 21}$
J $\log\left(\frac{6}{21}\right)$

40. الهندسة أوجد محيط الشكل.



A 24   B 30   C 36   D 48

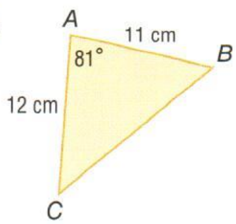
41. الإجابة القصيرة حُلّ المعادلة أدناه لإيجاد x.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$$

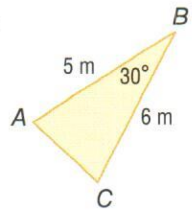
مراجعة شاملة

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 11-4)

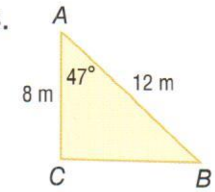
42.



43.



44.



ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 11-3)

45. $(8, 5)$

46. $(-4, -2)$

47. $(6, -9)$

48. الأحذية الرياضية أسعار عينة عشوائية من الأحذية الرياضية موضحة أدناه. (الدرس 11-2)

السعر (بالدرهم)				
70	300	400	250	250
150	120	250	100	70
150	160	200	170	300

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإنشاء مخطط رسم صندوقي، ثم صِف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

49. الأعمال خلال شهر يونيو، حققت شركة "الوسائط الدولية" عائدًا قدره AED 2700 من مبيعات مجموعة كاملة معينة من أسطوانات DVD. وخلال موسم تخفيضات شهر يوليو، كانت المجموعة معروضة بتخفيض AED 10. وبلغ العائد من بيع هذه المجموعة AED 3750 في يوليو مع بيع 30 مجموعة إضافية عما تم بيعه في يونيو. أوجد سعر مجموعة أسطوانات DVD لشهري يونيو ويوليو

بدون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، حدد إذا ما كان التمثيل البياني لكل معادلة *قطعًا مكافئًا* أم *دائرةً* أم *قطعًا ناقصًا* أم *قطعًا زائدًا*.

50. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$

51. $3x^2 - 2y^2 + 32y - 134 = 0$

52. $y^2 + 18y - 2x = -84$

مراجعة المهارات

ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

53. $245°$

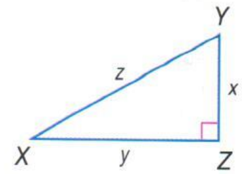
54. $-15°$

55. $\frac{5}{4}\pi$

الوحدة 11 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 1-11 إلى 5-11

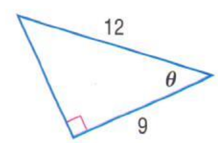
حُـلّ $\triangle XYZ$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 1-11)



1. $Y = 65°, x = 16$

2. $x = 25°, x = 8$

3. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-11)



4. ارسم زاوية قياسها $-80°$ في وضع قياسي. (الدرس 2-11)

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 2-11)

5. $215°$

6. $-350°$

7. $\frac{8\pi}{5}$

8. $\frac{9\pi}{2}$

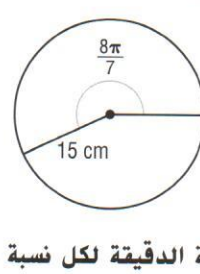
9. **الاختيار من متعدد** ما طول القوس أدناه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ (الدرس 2-11)

A 4.2 cm

B 17.1 cm

C 53.9 cm

D 2638.9 cm



أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 3-11)

10. $\tan \pi$

11. $\cos \frac{3\pi}{4}$

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ. (الدرس 3-11)

12. $(0, -5)$

13. $(6, 8)$

14. **الاختيار من متعدد** افترض أن θ زاوية في وضع قياسي حيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع/ أرباع يقع ضلع الانتهاء لـ θ؟ (الدرس 3-11)

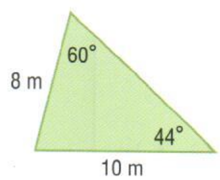
F الأول

G الثاني

H الثالث

J الأول والرابع

15. **الحديقة** لدى هالة حديقة على شكل مثلث كما هو موضح في الصورة أدناه. وهي تريد تغطية الحديقة بتربة سطحية. فما مساحة المثلث؟ (الدرس 4-11)



حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل واحد، أو حلّان. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-11)

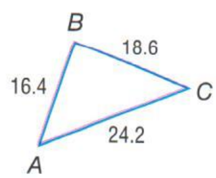
16. $A = 38°, a = 18, c = 25$

17. $A = 65°, a = 5, b = 7$

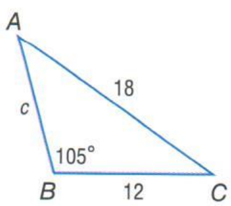
18. $A = 115°, a = 12, b = 8$

حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-11)

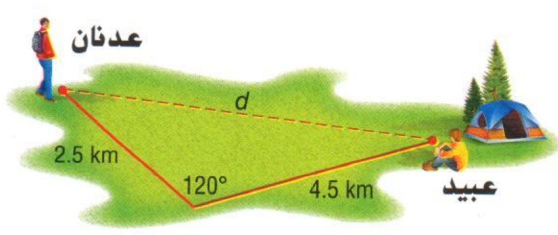
19.



20.



21. يخيم كل من عدنان وعبيد. ترك عدنان عبيد عند موقع التخييم وسار 4.5 كيلومترات. ثم انعطف بزاوية $120°$ وسار 2.5 كيلومتر. إذا سار عدنان مباشرة عائدًا إلى عبيد، فما المسافة التي سيقطعها مشيًا؟ (الدرس 5-11)



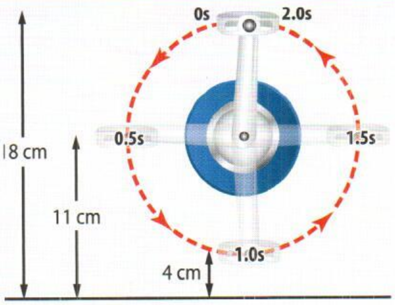
11-6 الدوال الدائرية والدورية

السابق
- قمت بإيجاد قيمة الدوال المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

الحالي
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.
2. استخدام خصائص الدوال الدورية لإيجاد قيمة الدوال المثلثية.

لماذا؟
- تدور دواسات الدراجة أثناء قيادتها. ويكون ارتفاع الدواسة دالة زمن، كما هو موضح بالشكل على اليسار.

لاحظ أن الدواسة تصنع دورة كاملة كل ثانيتين.



المفردات الجديدة
دائرة الوحدة unit circle
دالة دائرية circular function
دالة دورية periodic function
دورة cycle
فترة period

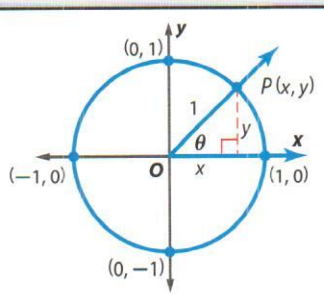
ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الدوال الدائرية

دائرة الوحدة هي دائرة يبلغ نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل على المستوى الإحداثي.
يمكنك استخدام النقطة P على دائرة الوحدة لتعميم دوال sine و cosine.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

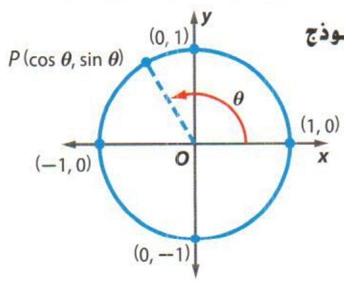
إذًا، قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$ هما الإحداثي y والإحداثي x، على التوالي، للنقطة التي يتقاطع فيها ضلع الانتهاء لـ θ مع دائرة الوحدة.



المفهوم الأساسي الدوال على دائرة وحدة

الشرح إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.

النموذج



الرموز $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال إذا كانت $\theta = 120°$، فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$.

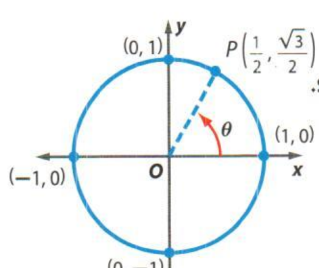
كل من $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$ دالة لـ θ. ولأنه تم تحديدهما باستخدام دائرة وحدة، فإنه يُطلق عليهما **دوال دائرية**.

مثال 1 إيجاد sine و cosine بدلالة نقطة على دائرة الوحدة

يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تمرين موجّه

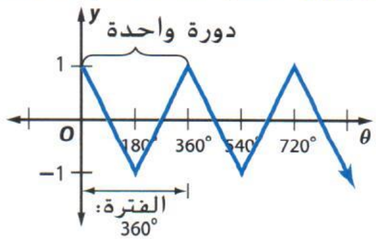
1. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

2 الدوال الدورية

تحتوي **الدالة الدورية** على قيم y التي تتكرر على فترات منتظمة. ويُسمى النمط الواحد المكتمل **دورة**. ويُسمى الطول الأفقي للدورة الواحدة **فترة**.

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل °360.



نصيحة دراسية

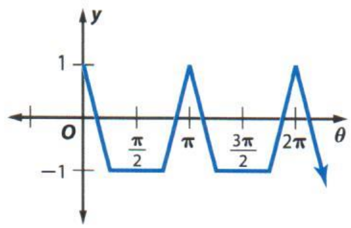
الدورات يمكن أن تبدأ الدورة من أي نقطة على التمثيل البياني للدالة الدورية. ففي المثال 2، إذا كانت بداية دائرة الوحدة عند النقطة $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط يتكرر عند $\frac{3\pi}{2}$. الفترة هي $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ أو π.

مثال 2 تحديد الفترة

حدد فترة الدالة.

يتكرر النمط عند 2π و π وهكذا.

إذًا، الفترة هي π.



تمرين موجّه

2. ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة لها فترة من 4.

يعد دوران العجلات والدواسات ودوامات الخيل بمدن الملاهي والأجسام في الفضاء دورانًا دوريًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية

قيادة الدراجات **راجع بداية الدرس. يختلف ارتفاع دواسة الدراجة دوريًا كدالة زمن، مثلما هو موضح في الشكل.**

a. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

بعد 0 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 18 سنتيمترًا.
وبعد 0.5 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 11 سنتيمترًا.
وبعد 1.0 ثانية، يكون الارتفاع 4 سنتيمترات وهكذا.

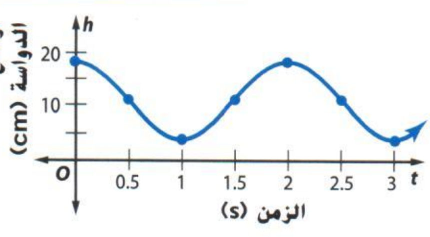
الزمن (s)	الطول (cm)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

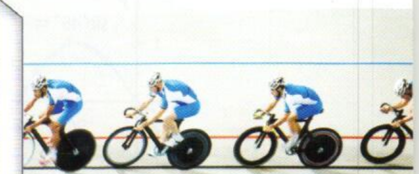
b. حدد فترة الدالة.

الفترة هي الوقت المستغرق لعمل لفّة واحدة كاملة. إذًا، الفترة هي ثانيتان.

c. مثّل الدالة بيانيًا. وافترض أن المحور الأفقي يمثل الوقت t والمحور الرأسي يمثل ارتفاع h الدواسة عن الأرض بالسنتيمترات.

أقصى ارتفاع للدواسة هو 18 سنتيمترًا، وأدنى ارتفاع هو 4 سنتيمترات. ولأن فترة الدالة ثانيتان، يتكرر نمط التمثيل البياني على فترات من ثانيتين.





الربط بالحياة اليومية

يقود معظم سائقي الدراجات المتنافسين دراجاتهم بمعدلات أكبر من 200 لفّة في الدقيقة. ويقود معظم الأشخاص الآخرين دراجاتهم بمعدل يتراوح بين 90 و 120 لفّة في الدقيقة.

المصدر: SpringerLink

تمرين موجّه

3. **قيادة الدراجات** يقود سائق آخر الدراجة ذاتها بمعدل لفّة واحدة كل ثانية.

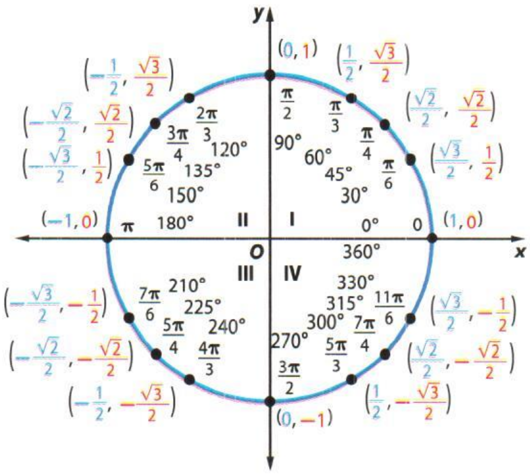
A. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

B. حدد الفترة ومثل الدالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

sine و cosine لمساعدتك على تذكر أنه بالنسبة إلى نقطة (x, y) على دائرة وحدة، فإن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$. لاحظ أن الحرف x يسبق الحرف y أبجديًا وكذلك *cosine* يسبق *sine* الزاوية.

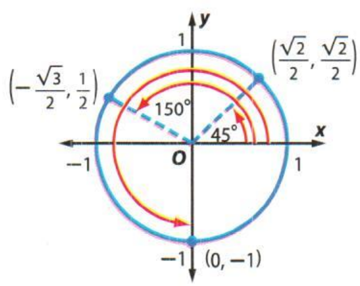
موضح على دائرة الوحدة المبينة على اليسار القيم الدقيقة لكل من $\cos\theta$ و $\sin\theta$ للزوايا الخاصة. وقيم cosine هي الإحداثي x للنقاط الواقعة على دائرة الوحدة. أما قيم sine فهي الإحداثي y.



يمكنك استخدام هذه المعلومات لتمثيل دوال sine الزاوية و cosine بيانيًا. وذلك بفرض أن المحور الأفقي يمثل قيم θ والمحور الرأسي يمثل قيم $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.

تتكرر دورة دوال sine و cosine كل $360°$. ولذا، فهي دوال دورية. وفترة كل دالة هي $360°$ أو 2π.

تأمل النقاط الواردة على دائرة الوحدة عندما تكون $\theta = 45°$، $\theta = 150°$، و $\theta = 270°$.



$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

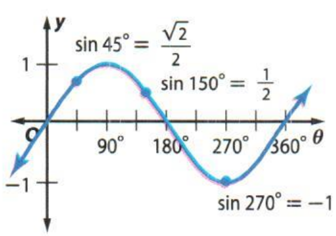
$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

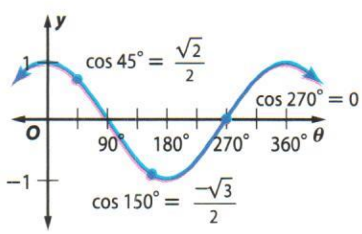
$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

نصيحة دراسية

الراديان يمكن تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا باستخدام الراديان باعتبارها الوحدات المستخدمة على المحور θ.

يمكن توضيح هذه النقاط أيضًا على تمثيلات بيانية لدوال sine و cosine.





حيث إن فترة دوال sine و cosine هي $360°$، فإن القيم تتكرر كل $360°$. إذًا $\sin(x + 360°) = \sin x$، و $\cos(x + 360°) = \cos x$.

مثال 4 إيجاد قيم التعابير المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b. $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرين موجّه

4A. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

4B. $\sin 420°$

التحقق من فهمك

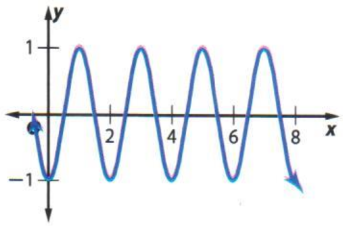
مثال 1 **البنية يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.**

1. $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

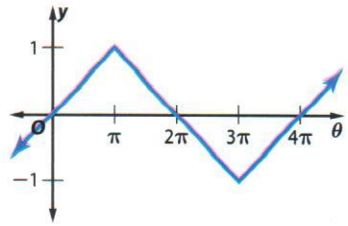
2. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 **حدد فترة كل دالة.**

3.



4.



مثال 3 **5. الأرجوحات** يتغير ارتفاع الأرجوحة دوريًا كدالة الزمن. فالأرجوحة تتحرك للأمام وتصل إلى نقطة بارتفاع 6 أمتار، ثم تعود للوراء وتصل إلى ارتفاع 6 أمتار مرة أخرى. وتبلغ أدنى نقطة لها 2 متر. والزمن المستغرق للتأرجح من أعلى نقطة إلى أدنى نقطة هو ثانية واحدة.

a. ما المدة التي تستغرقها الأرجوحة في الحركة إلى الأمام والخلف مرة واحدة؟

b. مثّل ارتفاع الأرجوحة h بيانيًا كدالة زمن t.

مثال 4 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

6. $\sin \frac{13\pi}{6}$

7. $\sin(-60°)$

8. $\cos 540°$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.**

9. $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

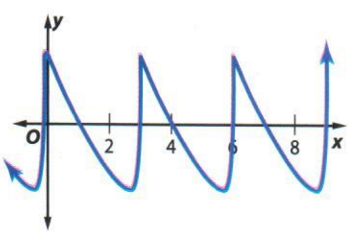
10. $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11. $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

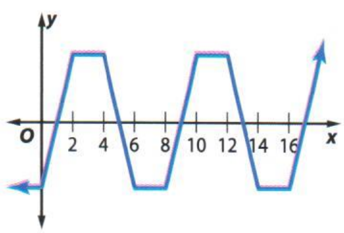
12. $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 **حدد فترة كل دالة.**

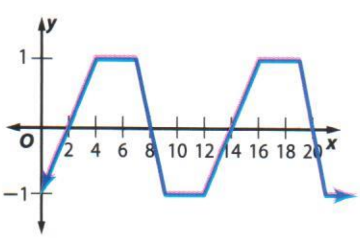
13.



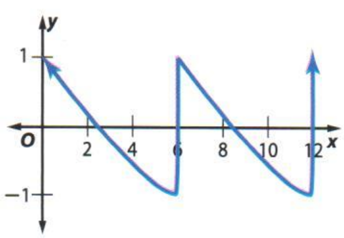
14.



15.

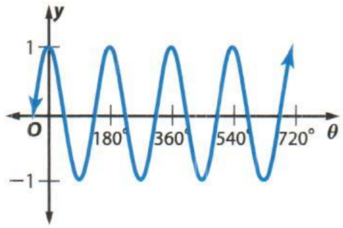


16.

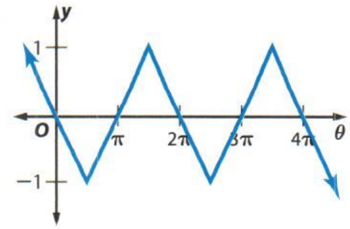


حدد فترة كل دالة.

17.



18.



مثال 3

19. **الطقس** موضح بالجدول متوسط درجة الحرارة العظمى في كل شهر لإحدى المدن.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة يمثل هذه الحالة.

b. صف فترة الدالة.

متوسط درجة الحرارة العظمى			
الشهر	درجة الحرارة (C°)	الشهر	درجة الحرارة (C°)
يناير	2	يوليو	29
فبراير	5	أغسطس	28
مارس	11	سبتمبر	26
أبريل	18	أكتوبر	19
مايو	23	نوفمبر	11
يونيو	28	ديسمبر	5

المصدر: The Weather Channel

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

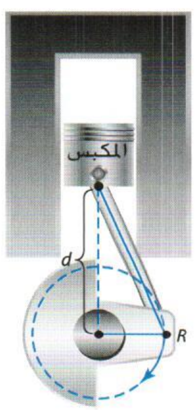
20. $\sin \frac{7\pi}{3}$ **21.** $\cos(-60°)$ **22.** $\cos 450°$

23. $\sin \frac{11\pi}{4}$ **24.** $\sin(-45°)$ **25.** $\cos 570°$

26. **الاستنتاج المنطقي** في صورة المحرك الموضحة على اليسار، تُسمى المسافة d الواقعة بين المكبس ومركز الدائرة العمود المرفقي، وهي عبارة عن دالة السرعة لعصا المكبس. وتدور النقطة R الواقعة على عصا المكبس 150 لفة في الثانية.

a. حدد فترة الدالة على هيئة جزء من الثانية.

b. إذا كانت أقصى مسافة d هي 0.5 سنتيمتر، وأطول مسافة هي 3.5 سنتيمترات. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t، والمحور الرأسي يمثل المسافة d.

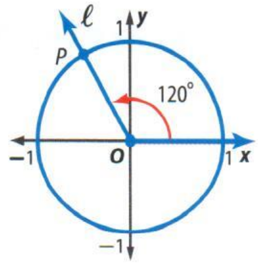


27. **الأعاصير** تصنع صافرة إنذار الأعاصير 2.5 لفّة في الدقيقة ويصل نصف قطر شعاع الصوت 1 كيلومتر. يقع منزل السيدة هدى على بُعد 1 كيلومتر من الصافرة. ويختلف بُعد الشعاع الصوتي عن منزلها دوريًا على هيئة دالة زمن.

a. حدد فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t من 0 ثانية حتى 60 ثانية، وفرض أن المحور الرأسي يمثل المسافة d بين الشعاع الصوتي ومنزل السيدة هدى في زمن t.

28. **عجلة فيريس الدوارة** يصل قطر عجلة دوارة في الصين إلى 155 مترًا تقريبًا. ويعد ارتفاع المقصورة h دالة للزمن t. ويستغرق عمل لفّة واحدة كاملة حوالي 30 ثانية. افترض أن الارتفاع عند مركز العجلة يمثل الارتفاع عند الزمن 0. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.



29. التمثيلات المتعددة يتقاطع ضلع الانتهاء لزاوية ما في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة P، كما هو موضح في الشكل.

a. هندسيًا انسخ الشكل. وارسم مستقيمات تمثل الزوايا $30°, 60°, 150°, 210°, 315°$.

b. جدوليًا استخدم جدول قيم لتوضيح ميل كل مستقيم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c. تحليليًا ما الاستنتاجات التي يمكنك الخلوص إليها عن العلاقة بين ضلع الانتهاء للزاوية والميل؟ اشرح استنتاجك.

30. عكاز البهلوان يقفز شخص لأعلى وأسفل على عكاز بهلوان بمعدل ثابت. والفرق بين أعلى وأدنى نقطتين له هو 60 سنتيمترًا. يقفز هذا الشخص 50 مرة في الدقيقة.

a. صف المتغير المستقل والمتغير التابع للدالة الدورية التي تمثل هذه الحالة. ثم اذكر فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يعبر عن تغير ارتفاع الشخص الواثب بالنسبة إلى نقطة البداية لديه. افترض أن نقطة البداية في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة له. وافترض أيضًا أن المحور الأفقي يمثل الزمن t بالثواني وأن المحور الرأسي يمثل الارتفاع h.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

31. $\cos 45° - \cos 30°$

32. $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

33. $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

34. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

35. $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

36. $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تعمل هداية ونجلاء على إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير $\cos \frac{-\pi}{3}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

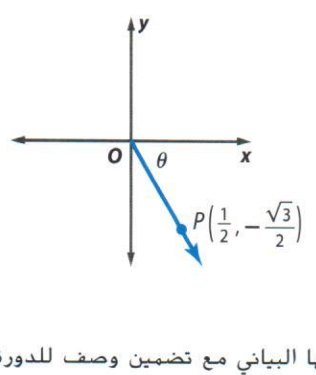
هداية

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نجلاء

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3}$$
$$= 0.5$$

38. التحدِ شعاع له نقطة طرفية عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، وتقع النقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على الشعاع. أوجد الزاوية θ التي كوّنها المحور x مع الشعاع.



39. التبرير هل تكون فترة منحنى sine من مضاعفات π أحيانًا، أم دائمًا، أم لا تكون أبدًا؟ برر استنتاجك.

40. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة دورية قيمتها العظمى 10 وقيمتها الصغرى 10−. صف فترة الدالة.

41. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقة تحديد فترة دالة دورية من تمثيلها البياني مع تضمين وصف للدورة.

تدريب على الاختبار المعياري

42. الإجابة القصيرة صف إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + 4)^2 - 3$.

43. يتم تمثيل التناقص في المعدل السكاني لمدينة هامبتون كوف بما يلي $P(t) = 24{,}000e^{-0.0064t}$، حيث t هو الزمن بالأعوام و24,000 هو عدد السكان الحالي. بعد كم عام سيكون تعداد السكان 10,000؟

A 14 **B** 104 **C** 137 **D** 375

44. SAT/ACT إذا كان $d^2 + 8 = 21$، فإن $d^2 - 8 =$

F 0 **G** 5 **H** 13 **J** 31 **K** 161

45. الإحصائيات إذا كان متوسط ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة هو 65، فما أكبر قيمة محتملة لواحد من هذه الأعداد الصحيحة؟

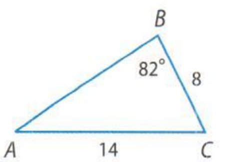
A 192 **B** 193 **C** 194 **D** 195

46. الإجابة الشبكية إذا كان $8xy + 3 = 3$، فما قيمة xy؟

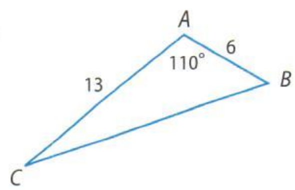
مراجعة شاملة

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 11-5)

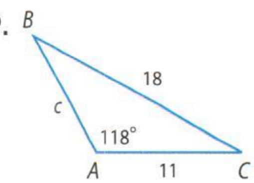
47.



48.



49.



حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا* حل، أو له حل *واحد*، أو *حلّان*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 11-4)

50. $A = 72°, a = 6, b = 11$

51. $A = 46°, a = 10, b = 8$

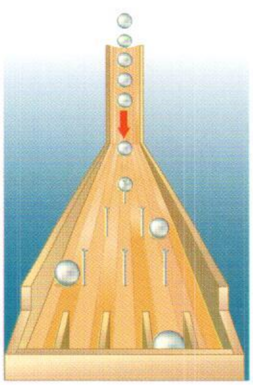
52. $A = 110°, a = 9, b = 5$

تصل نسبة نجاح التوزيع ذي حدين إلى 70%. وهناك 10 محاولات.

53. ما احتمال فشل 3 محاولات؟

54. ما احتمال نجاح 7 محاولات على الأقل؟

55. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟



56. الألعاب يوضح الرسم التخطيطي لوحة إحدى الألعاب التي يتم فيها إسقاط كرات من ممر مائل. وحسب نمط من المسامير والحواجز، تتجه الكرات في مسارات مختلفة إلى الأقسام السفلية. بالنسبة إلى كل قسم، كم عدد المسارات الموجودة باللوحة التي تؤدي إلى ذلك القسم؟

57. الرواتب يصل الراتب الحالي لفهد AED 40,000 في العام. ودائمًا ما تكون الزيادة السنوية في راتبه نسبة من الراتب في ذلك الوقت. فماذا سيكون راتبه إذا حصل على أربع زيادات متتالية نسبتها 4%؟

حُـلّ كل نظام من المعادلات.

58. $y = x + 2$
$y = x^2$

59. $4x + y^2 = 20$
$4x^2 + y^2 = 100$

مراجعة المهارات

بسّط كل تعبير.

60. $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

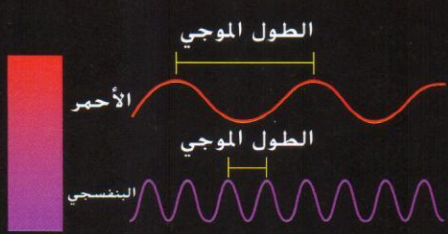
61. $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

62. $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

الدرس

11-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

∴ السابق	∴ الحالي	∴ لماذا؟
● لقد استكشفت الدوال الدورية.	1 وصف دوال sine و cosine وظل الزاوية وتمثيلها بيانيًا. 2 وصف الدوال المثلثية الأخرى وتمثيلها بيانيًا.	● موجات الضوء المرئي لها أطوال موجية أو فترات مختلفة. فالأحمر له أطول طول موجي والبنفسجي له أقصر طول موجي.



المفردات الجديدة

السعة amplitude

التردد frequency

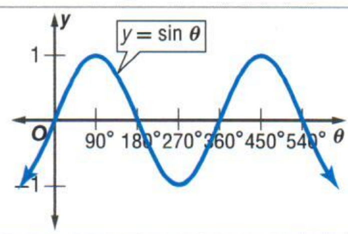
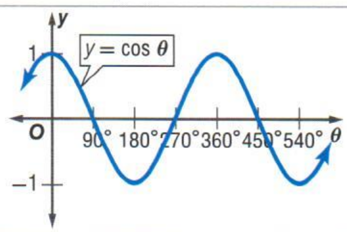
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 دوال sine و cosine و Tangent

من الممكن أيضًا تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا على المستوى الإحداثي. تذكر أن التمثيلات البيانية للدوال الدورية لها أنماط متكررة، أو دورات. يُسمى الطول الأفقي لكل دورة الفترة. وتساوي **سعة** التمثيل البياني لدالة sine أو cosine نصف الفارق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

المفهوم الأساسي دالة sine ودالة cosine

الدالة الأصلية	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
الفترة	360°	360°

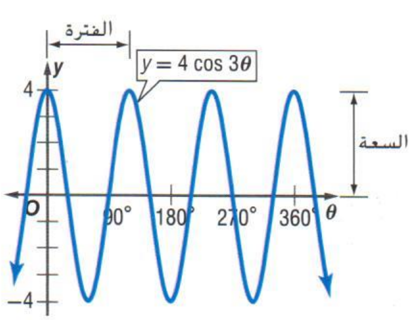
ومثلما هو الحال مع الدوال الأخرى، فإن الدوال المثلثية قابلة للتحويل. بالنسبة للتمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، فإن السعة $= |a|$ والفترة $= \frac{360°}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة والفترة

أوجد السعة والفترة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: $|a| = |4| = 4$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$



تمرين موجّه

أوجد السعة والفترة لكل دالة.

1A. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

1B. $y = 3 \sin 5\theta$

استخدم التمثيلات البيانية للدوال الأصلية لتمثيل $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ بيانيًا، ثم استخدم السعة والفترة لرسم المنحنيات الصحيحة لـ sine و cosine. يمكنك أيضًا استخدام نقاط تقاطع θ لمساعدتك على تمثيل الدوال بيانيًا.

نقاط تقاطع θ في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ في دورة واحدة هي كالآتي.

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$

نصيحة دراسية

الفترات في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، تمثل b عدد الدورات بـ $360°$. في المثال 1، يشير العدد 3 في $y = 4 \cos 3\theta$ إلى وجود ثلاث دورات بـ $360°$. إذًا، توجد دورة واحدة بـ $120°$.

مثال 2 التمثيل البياني لدالة sine ودالة cosine

مثِّل كل دالة بيانيًا.

a. $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة والفترة ونقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $a = 2$ و $b = 1$.

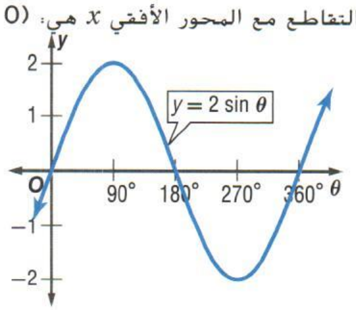
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← التمثيل البياني ممدد رأسيًا، ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة لها طول يساوي $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x هي: $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$$

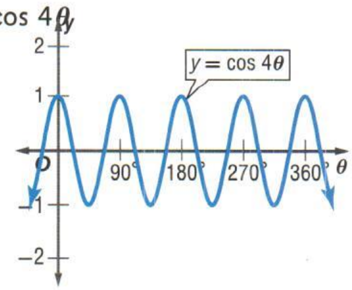
$$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$$



نصيحة دراسية

السعة التمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ والتي سعتها $|a|$ لها قيم عظمى عند $y = a$ وقيم صغرى عند $y = -a$.

b. $y = \cos 4\theta$



السعة: $|a| = |1| = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x:

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$$

تمرين موجّه

2A. $y = 3 \cos \theta$

2B. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل الحركة الدورية بالحياة اليومية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو الموجات الصوتية. وغالبًا ما توصف هذه الموجات باستخدام التردد. و**التردد** هو عدد الدورات في وحدة زمنية محددة.

وتردد التمثيل البياني للدالة هو المعكوس الضربي لفترة هذه الدالة.

إذًا، إذا كانت فترة الدالة تساوي $\frac{1}{100}$ من الثانية، فإن التردد يساوي 100 دورة في الثانية.

مثال 3 من الحياة اليومية تمثيل الحالات الدورية بالنماذج

الصوت يُعرف الصوت الذي يقل تردده عن نطاق أذن الإنسان باسم *الصوت دون السمعي*. تستطيع الأفيال سماع أصوات في المدى دون السمعي، بترددات منخفضة تصل إلى 5 هرتز (Hz)، أو 5 دورات في الثانية.

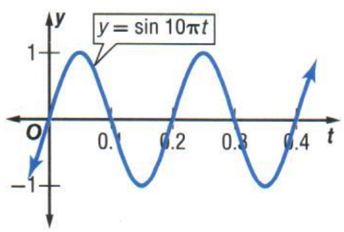
a. أوجد فترة الدالة التي تمثل الموجات الصوتية.

توجد 5 دورات في الثانية، والفترة هي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة.

إذًا، الفترة هي $\frac{1}{5}$ أو 0.2 ثانية.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل الموجات الصوتية y على هيئة دالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	اكتب العلاقة بين الفترة و b.
$0.2 = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	التعويض
$0.2\lvert b\rvert = 2\pi$	بضرب كل طرف في $\lvert b\rvert$.
$b = 10\pi$	بضرب كل طرف في 5؛ تكون b موجبة.
$y = a \sin b\theta$	اكتب المعادلة العامة لدالة sine.
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1$، $b = 10\pi$، و $\theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط.



تمرين موجّه

3. **الصوت** يستطيع الإنسان سماع أصوات بترددات منخفضة تصل إلى 20 هرتز.

A. أوجد فترة الدالة.

B. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة cosine لتمثيل الموجات الصوتية. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

تستطيع الأفيال سماع الصوت القادم من مسافة تبعد 8 كيلومترات. ويستطيع الإنسان سماع أصوات ينحصر ترددها بين 20 Hz و 20000 Hz.

المصدر: School for Champions

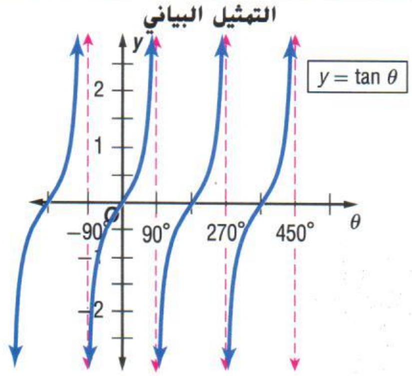
نصيحة دراسية

السعة والفترة لاحظ أن السعة تؤثر على المحور الرأسي بالتمثيل البياني، والفترة تؤثر على المحور الأفقي.

دالة tangent الزاوية هي إحدى الدوال المثلثية التي يوجد في تمثيلاتها البيانية خطوط مقاربة.

المفهوم الأساسي دالة tangent الزاوية

الدالة الأصلية	$y = \tan \theta$	**التمثيل البياني**
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n$، n عدد صحيح$\}$	
المدى	{جميع الأعداد الحقيقية}	
السعة	غير معرّفة	
الفترة	180°	
نقاط تقاطع θ في دورة واحدة	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	



بالنسبة للتمثيل البياني لـ $y = a \tan b\theta$، الفترة $= \frac{180°}{\lvert b\rvert}$. لا توجد سعة وخطوط المقاربة هي مضاعفات فردية لـ $\frac{180°}{2\lvert b\rvert}$.

> **نصيحة دراسية**
> **Tangent الزاوية** ليس لدالة Tangent الزاوية سعة لأنه ليس لها قيم عظمى أو صغرى.

مثال 4 تمثيل دوال Tangent الزاوية بيانيًا

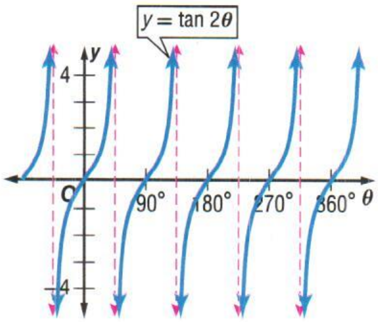
أوجد فترة $y = \tan 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًا.

الفترة: $\frac{180°}{|b|} = \frac{180°}{|2|} = 90°$

خطوط المقاربة: $\frac{180°}{2|b|} = \frac{180°}{2|2|} = 45°$

ارسم خطوط المقاربة عند $-1 \cdot 45°$ أو $-45°$، $1 \cdot 45°$ أو $45°$، $3 \cdot 45°$ أو $135°$، وهكذا.

استخدم $y = \tan\theta$، ولكن ارسم دورة واحدة كل $90°$.



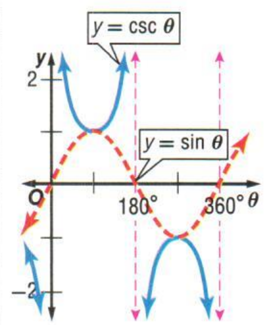
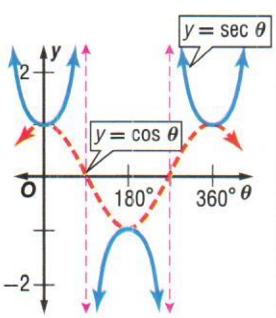
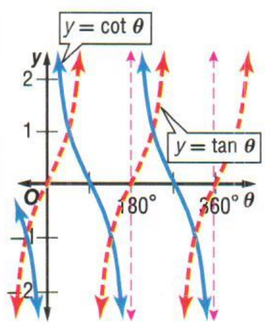
تمرين موجّه

4. أوجد فترة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًا.

2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى

ترتبط التمثيلات البيانية لدوال Tangent و secant و cotangent بالتمثيلات البيانية لدوال sine و cosine وظل الزاوية.

المفهوم الأساسي دوال Cosecant و Secant و Cotangent

الدالة الأصلية	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n$، n عدد صحيح$\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n$، n عدد صحيح$\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n$، n عدد صحيح$\}$
المدى	$\{y \mid -1 > y$ أو $y > 1\}$	$\{y \mid -1 > y$ أو $y > 1\}$	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
الفترة	360°	360°	180°

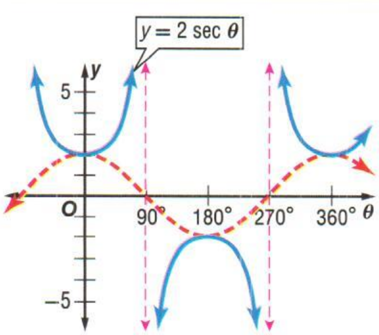
> **نصيحة دراسية**
> **الدوال العكسية**
> يمكنك استخدام التمثيلات البيانية لـ $y = \sin\theta$، و $y = \cos\theta$، و $y = \tan\theta$ لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا، إلا أن هذه التمثيلات البيانية لا تكون جزءًا من التمثيلات البيانية لدوال cosecant و secant و cotangent.

مثال 5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

أوجد الفترة $y = 2\sec\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًا.

حيث إن $2\sec\theta$ معكوس ضربي لـ $2\cos\theta$، إذًا فالتمثيلات البيانية لها الفترة نفسها: $360°$. وتحدث خطوط المقاربة الرأسية عند النقاط التي يكون فيها $2\cos\theta = 0$. إذًا، توجد خطوط المقاربة عندما تكون $\theta = 90°$ و $\theta = 270°$.

ارسم $y = 2\cos\theta$ واستخدمها لتمثيل $y = 2\sec\theta$ بيانيًا.



تمرين موجّه

5. أوجد فترة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

1. $y = 4 \sin \theta$

2. $y = \sin 3\theta$

3. $y = \cos 2\theta$

4. $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5. العناكب عند تعلق حشرة في شبكة عنكبوت، تهتز الشبكة بتردد 14 هرتز.

a. أوجد فترة الدالة.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل اهتزاز الشبكة y كدالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

المثالان 5–4 **أوجد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = 3 \tan \theta$

7. $y = 2 \csc \theta$

8. $y = \cot 2\theta$

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

9. $y = 2 \cos \theta$

10. $y = 3 \sin \theta$

11. $y = \sin 2\theta$

12. $y = \cos 3\theta$

13. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

14. $y = \sin 4\theta$

15. $y = \frac{3}{4} \cos \theta$

16. $y = \frac{3}{2} \sin \theta$

17 $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

18. $y = 4 \cos 2\theta$

19. $y = 3 \cos 2\theta$

20. $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

مثال 3

21. الاستنتاج قارب في البحيرة يترنح لأعلى ولأسفل مع الأمواج. والفرق بين أعلى نقطة وأسفل نقطة يصل إليها القارب هو 8 سنتيمترات. ويقع القارب عند نقطة التوازن عندما يكون في منتصف طريقه بين أعلى نقطة وأسفل نقطة. وكل دورة من دورات الحركة تستمر لمدة 3 ثوانٍ.

a. اكتب معادلة تمثل حركة القارب. وافرض أن h تمثل أعلى نقطة مقاسة بالسنتيمترات وافرض أن t تمثل الزمن مقاسًا بالثواني. بفرض أن القارب يكون عند نقطة توازنه عندما $t = 0$ ثانية.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع القارب في صورة دالة الزمن.

22. الكهرباء الجهد المتوفر في أحد المنافذ الكهربية عبارة عن دالة دورية يتذبذب، أو يتأرجح أعلى وأسفل، بين 165– فولت و 165 فولت بتردد 50 دورة في الثانية.

a. اكتب معادلة تمثل الجهد V في صورة دالة للزمن t. افرض أنه عندما يكون $t = 0$ ثانية، فإن التيار يساوي 165 فولت.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

المثالان 5–4 **أوجد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

23. $y = \tan \frac{1}{2}\theta$

24. $y = 3 \sec \theta$

25. $y = 2 \cot \theta$

26. $y = \csc \frac{1}{2}\theta$

27. $y = 2 \tan \theta$

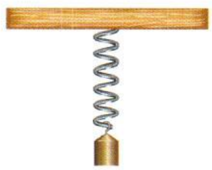
28. $y = \sec \frac{1}{3}\theta$

29 **الزلازل** رصدت محطة لرصد الزلازل موجة زلزال ترددها 0.5 هرتز وسعتها 1 متر.

a. اكتب معادلة تتضمن sine لتمثيل ارتفاع الموجة h في صورة دالة للزمن t. افرض أن نقطة توازن الموجة، $h = 0$، عند نقطة المنتصف بين أعلى نقطة وأسفل نقطة.

b. مثل الدالة بيانيًا. ثم حدد ارتفاع الموجة بعد مرور 20.5 ثانية.

30. **المثابرة** جسم معلق في زنبرك كما هو موضح على اليسار. وهو يتذبذب حسب المعادلة $y = 20 \cos \pi t$، حيث تكون y هي المسافة مقاسة بالسنتيمترات من موضع نقطة التوازن في الزمن t.



a. صف حركة الجسم بإيجاد ما يلي: السعة مقاسة بالسنتيمترات، والتردد مقاس بعدد الاهتزازات في الثانية الواحدة، والفترة مقاسة بالثواني.

b. أوجد المسافة التي يقطعها الجسم من نقطة توازنه عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثانية.

c. المعادلة $v = (-20 \text{ cm})(\pi \text{ rad/s}) \cdot \sin(\pi \text{ rad/s} \cdot t)$ تمثل سرعة v الجسم في زمن t. أوجد السرعة عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثوانٍ.

31. **البيانو** تهتز أوتار البيانو بتردد 130 هرتز.

a. اكتب معادلة باستخدام cosine ومثلها بيانيًا لتمثيل اهتزاز الوتر y في صورة دالة للزمن t. وافرض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

b. افرض أن تردد الاهتزاز قد تضاعف. فهل تظل السعة والفترة كما هي أم تزيد أم تقل؟ اشرح.

أوجد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

32. $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

33. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

34. $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

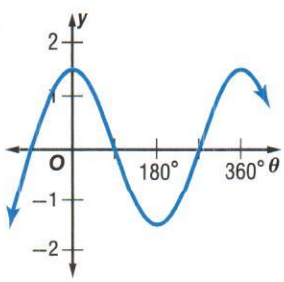
35. $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

36. $y = 5 \csc 3\theta$

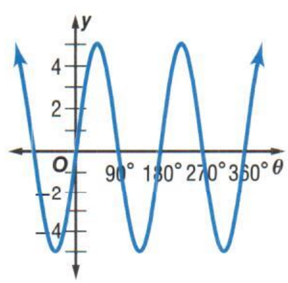
37. $y = 2 \cot 6\theta$

حدد فترة التمثيل البياني واكتب معادلة كل دالة.

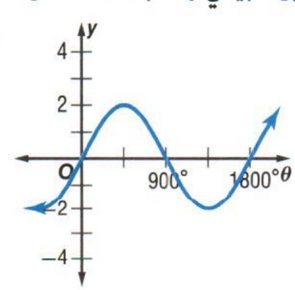
38.



39.



40.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **التحدِ** صف مجال ومدى $y = a \cos \theta$ و $y = a \sec \theta$، حيث a هي أي عدد حقيقي موجب.

42. **الاستنتاج** قارن بين التمثيلات البيانية لـ $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $y = \sin \frac{1}{2}\theta$.

43. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة مثلثية لها سعة 3 وفترة °180. ثم مثل الدالة بيانيًا.

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خواص دالة مثلثية من أجل رسم تمثيلها البياني؟

تدريب على الاختبار المعياري

45. الإجابة القصيرة أوجد الحد رقم 100,001 في التسلسل.

13, 20, 27, 34, 41, ...

46. الإحصاء لعبت خمس جولات في البولينج وكانت النتيجة كالآتي: 156 ,133 ,167 ,171 ,143. فماذا كان متوسطك؟

A 147 **B** 153 **C** 154 **D** 156

47. بلغ التعداد السكاني في مدينتك 312,430 منذ عشرة أعوام. فإذا كان التعداد الحالي هو 418,270، فما نسبة النمو على مدار 10 أعوام ماضية؟

F 25% **G** 34% **H** 66% **J** 75%

48. SAT/ACT إذا كان $h + 4 = b - 3$. فإن $(h-2)^2 =$

A $h^2 + 4$

B $b^2 - 6b + 3$

C $b^2 - 18b + 81$

D $b^2 - 14b + 49$

E $b^2 - 10b + 25$

مراجعة شاملة

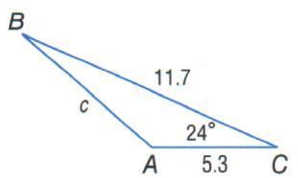
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 11-2)

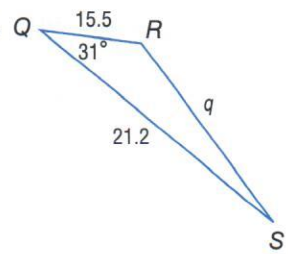
49. $\cos 120° - \sin 30°$

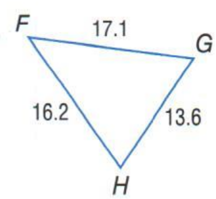
50. $3(\sin 45°)(\sin 60°)$

51. $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 11-5)

52.


53.


54.


تصل نسبة نجاح التوزيع ذي الحدين إلى 40%. وهناك 12 محاولة.

55. ما احتمال فشل 5 محاولات؟

56. ما احتمال نجاح 8 محاولات على الأقل؟

57. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

58. خدمات مصرفية أودعت نورا AED 1000 في حساب مصرفي. وبنهاية كل عام يصدر المصرف مرابحة إلى حسابها بمقدار 3% من الرصيد، ثم يخصم رسومًا سنوية قيمتها AED 10.

a. افرض أن b_0 هو المبلغ الذي أودعته نورا. اكتب معادلة تكرارية للرصيد b_n الذي سيكون في حسابها بنهاية عدد n من الأعوام.

b. أوجد الرصيد المودع في الحساب بعد أربعة أعوام.

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة شروط مما يلي.

59. يقع المركز عند (3 ,6)، وإحدى بؤرتيه عند (3 ,2)، ويقع الرأس المرافق عند (1 ,6)

60. تقع البؤرتان عند (1 ,2) و (13 ,2)، ويقع الرأس المرافق عند (7 ,5)

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًّا.

61. $y = 2(x-3)^2 - 4$

62. $y = \frac{1}{3}(x+5)^2 + 2$

63. $y = -3(x+6)^2 + 7$

استكشاف

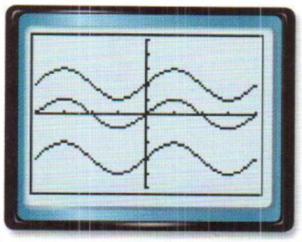
11-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيلات البيانية المثلثية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 k في $y = \sin \theta + k$

مثّل بيانيًا $y = \sin \theta$ و $y = \sin \theta + 2$ و $y = \sin \theta - 3$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

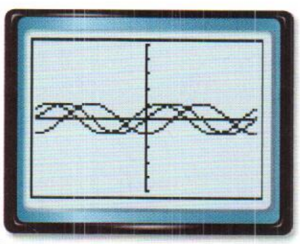
اضبط نافذة العرض لتطابق النافذة الموضحة على اليسار.
وافترض أن $\mathbf{Y1} = \sin \theta$ و $\mathbf{Y2} = \sin \theta + 2$ و $\mathbf{Y3} = \sin \theta - 3$.

خطوات العملية على الحاسبة: [Y=] [SIN] [X,T,θ,n] [)] [ENTER]
[SIN] [X,T,θ,n] [)] [+] 2 [ENTER]
[SIN] [X,T,θ,n] [)] [−] 3 [GRAPH]

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع رأسية مختلفة.

النشاط 2 h في $y = \sin (\theta - h)$

مثّل بيانيًا $y = \sin \theta$ و $y = \sin (\theta + 45°)$ و $y = \sin (\theta - 90°)$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

افرض أن $\mathbf{Y1} = \sin \theta$ و $\mathbf{Y2} = \sin (\theta + 45)$ و $\mathbf{Y3} = \sin (\theta - 90)$.
تأكد من مسح الإدخالات التي وضعتها من النشاط 1.

خطوات العملية على الحاسبة: [Y=] [SIN] [X,T,θ,n] [)] [ENTER]
[SIN] [X,T,θ,n] [+] 45 [)] [ENTER]
[SIN] [X,T,θ,n] [−] 90 [)] [GRAPH]

التمثيلات البيانية لها شكل واحد ولكن بمواضع أفقية مختلفة.

النموذج والتحليل

كرر الأنشطة مع دالة cosine ودالة tangent الزاوية.

1. ما مجال الدوال الواردة في النشاطين 1 و 2 ومداها؟

2. ما تأثير إضافة ثابت إلى دالة مثلثية؟

3. ما تأثير إضافة ثابت إلى θ في الدالة المثلثية؟

كرر الأنشطة مع كل مما يلي. صف العلاقة بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

4. $y = \sin \theta + 4$
$y = \sin (2\theta) + 4$

5. $y = \cos \left(\frac{1}{2}\theta\right)$
$y = \cos \frac{1}{2}(\theta + 45°)$

6. $y = 2 \sin \theta$
$y = 2 \sin \theta - 1$

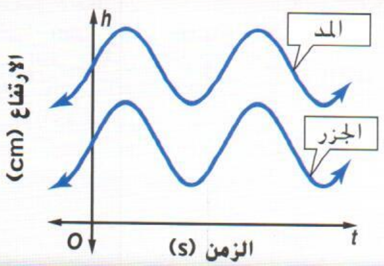
7. $y = \cos \theta - 3$
$y = \cos (\theta - 90°) - 3$

8. اكتب معادلة عامة لدوال sine و cosine و tangent الزاوية بعد التغيرات في السعة a والفترة b، والموضع الأفقي h، والموضع الرأسي k.

الدرس 11-8

إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• لقد قمت بإزاحة الدوال الأسية.	1 تمثيل الإزاحة الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية وتقوم بإيجاد إزاحات الطور. 2 تمثيل الإزاحة الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية.	• تعبر التمثيلات البيانية الموضحة على اليسار عن الأمواج في أحد الخلجان أثناء تيارات المد والجزر. لاحظ أن شكل الأمواج لا يتغير.



المفردات الجديدة
إزاحة الطور
phase shift
إزاحة رأسية
vertical shift
خط متوسط midline

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

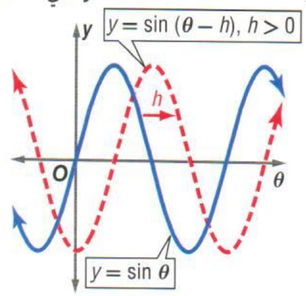
1 الإزاحة الأفقية

تذكر أن الإزاحة تحدث عندما يتحرك الشكل من مكان إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغير اتجاهه. وتُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية باسم **إزاحة الطور**.

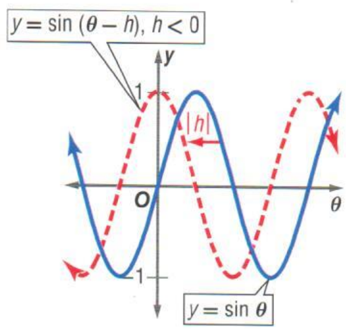
المفهوم الأساسي إزاحة الطور

الشرح إزاحة الطور للدوال $y = a \sin b(\theta - h)$ و $y = a \cos b(\theta - h)$ و $y = a \tan b(\theta - h)$ هي h، حيث $b > 0$.

النماذج



إذا كان $h > 0$، فإن الإزاحة تكون h وحدات إلى اليمين.



إذا كان $h < 0$، فإن الإزاحة تكون $|h|$ وحدات إلى اليسار.

أمثلة

إزاحة الطور 90° إلى اليمين. $y = \cos(\theta - 90°)$

إزاحة الطور 30° إلى اليسار. $y = \tan(\theta + 30°)$

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

مثال 1 التمثيل البياني لإزاحة الطور

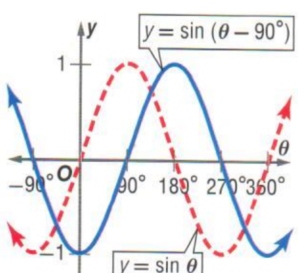
اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = \sin(\theta - 90°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $a = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{1} = 360°$

إزاحة الطور: $h = 90°$

مثّل $y = \sin\theta$ بيانيًا بعد إزاحتها 90° إلى اليمين.



تمرين موجّه

1. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2\cos(\theta + 45°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

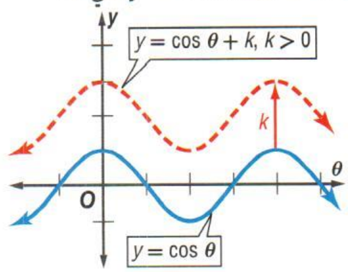
2 الإزاحة الرأسية

الإزاحة الرأسية تذكر أن التمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 5$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = x^2$ مزاحًا 5 وحدات لأعلى. وبالمثل، يمكن إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية رأسيًا باستخدام **الإزاحة الرأسية**.

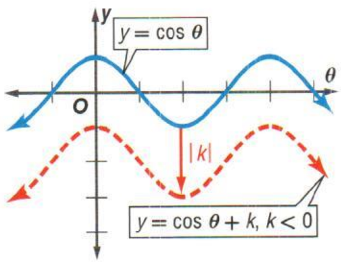
المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية

الشرح الإزاحة الرأسية للدوال $y = a \sin b\theta + k$ و $y = a \cos b\theta + k$ و $y = a \tan b\theta + k$ هي k.

النماذج



إذا كانت $k > 0$، فإن الإزاحة تكون عدد k من الوحدات لأعلى.



إذا كانت $k < 0$، فإن الإزاحة تكون عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.

أمثلة

$y = \sin \theta + 4$ الإزاحة الرأسية تكون 4 وحدات لأعلى.

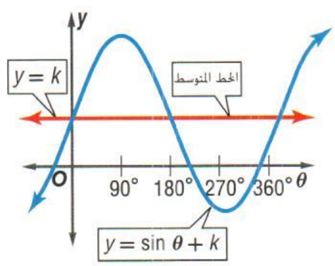
$y = \tan \theta - 3$ الإزاحة الرأسية تكون 3 وحدات لأسفل.

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

نصيحة دراسية

الترميز لاحظ أن $\sin(\theta + x) \neq \sin \theta + x$. يشير التعبير الأول إلى إزاحة الطور. ويشير التعبير الثاني إلى الإزاحة الرأسية.

عند إزاحة دالة مثلثية رأسيًا عدد k من الوحدات، يكون المستقيم $y = k$ المحور الأفقي الجديد الذي يتحرك التمثيل البياني حوله. ويسمى هذا المستقيم **الخط المتوسط**. ويمكن استخدامه للمساعدة في رسم الإزاحة الرأسية.



مثال 2 التمثيل البياني للإزاحات الرأسية

اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

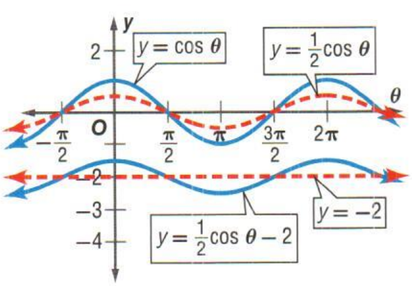
السعة: $|a| = \frac{1}{2}$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

الإزاحة الرأسية: $k = -2$

الخط المتوسط: $y = -2$

لتمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$ بيانيًا، ارسم أولاً الخط المتوسط. ثم استخدمه في تمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ بيانيًا بعد إزاحة وحدتين لأسفل.



نصيحة دراسية

استخدام الألوان قد يساعدك تمثيل الدالة الأصلية بيانيًا بلون، ثم تطبيق الإزاحة الرأسية والتمثيل البياني للدالة بلون آخر. وبعد ذلك تطبيق التغير في السعة والتمثيل البياني للدالة بلون ثالث.

تمرين موجّه

2. اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \tan \theta + 3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

يمكنك استخدام الخطوات التالية في التمثيل البياني للدوال المثلثية المتضمنة إزاحات طور وإزاحات رأسية.

ملخص المفهوم التمثيل البياني للدوال المثلثية

السعة، الفترة

$$y = a \sin b(\theta - h) + k$$

إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية

الخطوة 1 تحديد الإزاحة الرأسية وتمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 تحديد السعة إن وجدت. واستخدام المستقيمات المتقطعة للإشارة إلى القيمتين العظمى والصغرى للدالة.

الخطوة 3 تحديد فترة الدالة وتمثيل الدالة الصحيحة بيانيًا.

الخطوة 4 تحديد إزاحة الطور وإزاحة التمثيل البياني وفقًا لها.

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}(\theta - \pi) + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = 3$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$ تشير الفترة إلى أن التمثيل البياني سوف يتمدد.

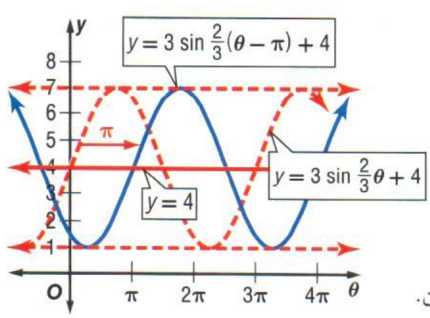
إزاحة الطور: $h = \pi$ سوف تتم إزاحة التمثيل البياني π إلى اليمين.

الإزاحة الرأسية: $k = 4$ سوف تتم إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لأعلى.

الخط المتوسط: $y = 4$ سوف يتحرك التمثيل البياني حول المستقيم $y = 4$.

الخطوة 1 تمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 بما أن السعة تساوي 3، فارسم مستقيمات متقطعة أعلى الخط المتوسط بمقدار 3 وحدات وأسفله بمقدار 3 وحدات.



الخطوة 3 التمثيل البياني للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta + 4$ باستخدام الخط المتوسط باعتباره مرجعًا.

الخطوة 4 إزاحة التمثيل البياني عدد π وحدات إلى اليمين.

التحقق يمكنك التحقق من دقة تحويلك عن طريق إيجاد قيمة الدالة مع القيم المختلفة لـ θ وتأكيد أماكنها على التمثيل البياني.

نصيحة دراسية

التحقق من التمثيل البياني بعد رسم التمثيل البياني لدالة مثلثية، اختر قيم θ وأوجد قيمها في المعادلة للتحقق من التمثيل البياني.

تمرين موجّه

3. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 2 \cos \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

تحدث الموجة الجيبية sine غالبًا في الفيزياء ومعالجة الإشارات والموسيقى والهندسة الكهربية والعديد من المجالات الأخرى.

مثال 4 من الحياة اليومية   تمثيل الدوال الدورية

حمام السباحة يتذبذب ارتفاع الماء في حمام السباحة بين قيمة عظمى قدرها 13 مترًا وقيمة صغرى قدرها 5 أمتار. ويضخ مولد الموجات 6 موجات في الدقيقة. اكتب دالة sine التي تمثل ارتفاع الماء في الزمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

الخطوة 1 اكتب معادلة للخط المتوسط، وحدد الإزاحة الرأسية.

$$y = \frac{13+5}{2} = 9$$ يقع خط الوسط في المنتصف بين القيمتين العظمى والصغرى.

بما أن الخط المتوسط هو $y = 9$، فإن الإزاحة الرأسية تساوي $k = 9$.

الخطوة 2 أوجد السعة.

$$|a| = |13 - 9| = 4$$ أوجد الفرق بين قيمة الخط المتوسط والقيمة العظمى.

إذًا، $a = 4$.

الخطوة 3 أوجد الفترة.

بما أنه يتم توليد 6 موجات في الدقيقة، فهناك موجة واحدة كل 10 ثوانٍ. إذًا، الفترة هي 10 ثوانٍ.

$$10 = \frac{2\pi}{|b|}$$ الفترة $= \frac{\pi 2}{|b|}$

$$|b| = \frac{2\pi}{10}$$ أوجد الحل لـ $|b|$.

$$b = \pm\frac{\pi}{5}$$ بسّط.

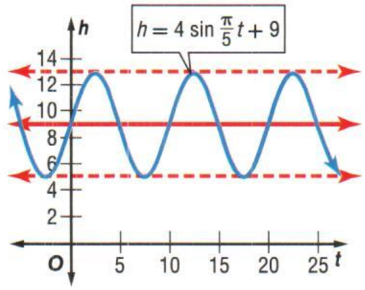
الخطوة 4 اكتب معادلة للدالة.

$$h = a \sin b(t - h) + k$$ اكتب معادلة snie التي تربط بين الارتفاع h والزمن t.

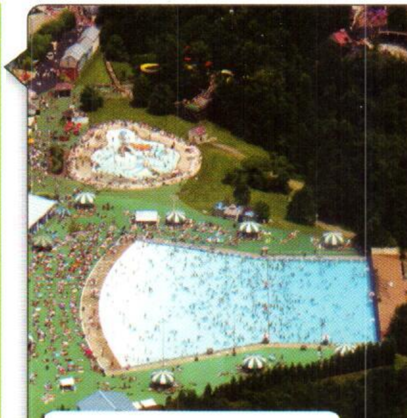
$$= 4 \sin \frac{\pi}{5}(t - 0) + 9$$ التعويض: $a = 4,\ b = \frac{\pi}{5},\ h = 0,\ k = 9$

$$= 4 \sin \frac{\pi}{5}t + 9$$ بسّط.

ثم مثّل الدالة بيانيًا.



الربط بالحياة اليومية



في بعض مسابح الأمواج الاصطناعية، يستطيع المتزحلقون على المياه ركوب أمواج يصل ارتفاعها إلى 70 مترًا.

المصدر: Orlando Wave Pool

انتبه!

الدوال الأصلية غالبًا ما يمكن تمثيل الدالة المثلثية بأكثر من معادلة. على سبيل المثال، التمثيلات البيانية للدالة $y = \cos\theta$ والدالة $y = \sin(\theta + 90°)$ هي نفسها.

تمرين موجّه

4. مسبح أمواج اصطناعية يتردد ارتفاع الماء في مسبح أمواج اصطناعية بين 14 مترًا كحد أقصى و 6 أمتار كحد أدنى. تضخ ماكينة توليد الأمواج 5 موجات في الدقيقة. اكتب دالة cosine التي تمثل ارتفاع الماء في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

1. $y = \sin(\theta - 180°)$

2. $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

3. $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

4. $y = \frac{1}{2}\cos(\theta + 90°)$

مثال 2 **اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

5. $y = \cos\theta + 4$

6. $y = \sin\theta - 2$

7. $y = \frac{1}{2}\tan\theta + 1$

8. $y = \sec\theta - 5$

مثال 3 **الانتظام اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

9. $y = 2\sin(\theta + 45°) + 1$

10. $y = \cos 3(\theta - \pi) - 4$

11. $y = \frac{1}{4}\tan 2(\theta + 30°) + 3$

12. $y = 4\sin\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5$

مثال 4 **13. تدريب** عند ممارسة نشاط جسدي متوسط، يتراوح ضغط الدم عند الإنسان ما بين قيمة عظمى قدرها 130 وقيمة صغرى قدرها 90. ومعدل ضربات قلب الإنسان يساوي 90 ضربة في الدقيقة. اكتب معادلة sine التي تمثل ضغط دم الإنسان P في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

14. $y = \cos(\theta + 180°)$

15. $y = \tan(\theta - 90°)$

16. $y = \sin(\theta + \pi)$

17. $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \tan\frac{1}{2}(\theta + 30°)$

19. $y = 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

مثال 2 **اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

20. $y = \cos\theta + 3$

21. $y = \tan\theta - 1$

22. $y = \tan\theta + \frac{1}{2}$

23. $y = 2\cos\theta - 5$

24. $y = 2\sin\theta - 4$

25. $y = \frac{1}{3}\sin\theta + 7$

مثال 3 **اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

26. $y = 4\sin(\theta - 60°) - 1$

27. $y = \cos\frac{1}{2}(\theta - 90°) + 2$

28. $y = \tan(\theta + 30°) - 2$

29. $y = 2\tan 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 5$

30. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4$

31. $y = \cos 3(\theta - 45°) + \frac{1}{2}$

32. $y = 3 + 5\sin 2(\theta - \pi)$

33. $y = -2 + 3\sin\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 4 **34. المد والجزر** يرتفع مستوى الماء في إحدى الموانئ إلى أقصى ارتفاع له عند 15 مترًا في تمام الساعة 6:00 مساءً ثم ينخفض بعدها إلى أقل مستوى قدره 3 أمتار في تمام 3:00 صباحًا. يمكن تمثيل مستوى الماء بدالة sine. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h الذي يصل إليه الماء في زمن t ساعات بعد الظهيرة في اليوم الأول.

35. البحيرات عوامة تحدد مساحة السباحة في إحدى البحيرات تترنح كلما مر بها قارب سريع. ومسافتها d مقاسة بالأمتار من قاع البحيرة ممثلة بالمعادلة

$d = 1.8 \sin \frac{3\pi}{4}t + 12$، حيث إن t هي الوقت مقاس بالثواني. مثّل الدالة بيانيًّا. صف أقصى مسافة وأقل مسافة للعوامة من قاع البحيرة عندما يمر بها القارب.

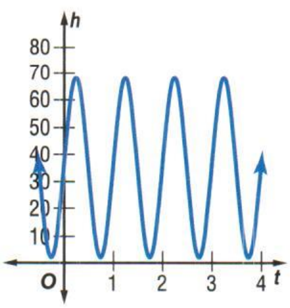
36. الأرجوحة الدوارة افرض أن الأرجوحة الدوارة لها قطر قياسه 520 مترًا تقريبًا وتصنع دورة كاملة خلال 30 ثانية. افرض أن العربة السفلية في الأرجوحة تبعد مسافة 5 أمتار من الأرض. افرض أن الارتفاع أعلى قمة الأرجوحة يمثل الارتفاع عندما يكون الزمن 0. اكتب معادلة لارتفاع العربة h في صورة دالة للزمن t دقيقة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

اكتب معادلة لكل إزاحة.

37. $y = \sin x$، 4 وحدات إلى اليمين و 3 وحدات لأعلى

38. $y = \cos x$، 5 وحدات إلى اليسار ووحدتين لأسفل

39. $y = \tan x$، π من الوحدات إلى اليمين و 2.5 وحدة لأعلى



40. حبل القفز التمثيل البياني الموضح على اليسار يقرّب ارتفاع حبل القفز h مقاسًا بالسنتيمترات في صورة دالة للزمن t مقاسًا بالثواني. أعلى نقطة على التمثيل البياني هي (1.25, 68)، وأسفل نقطة هي (2.75, 2).

a. صف ما تعنيه أقصى نقطة وأسفل نقطة في سياق الموقف.

b. ما معادلة الخط المتوسط والسعة والفترة للدالة؟

c. اكتب معادلة للدالة.

41. لعبة الدوّارات حصان في لعبة الدوّارات يعلو ويدنو 3 مرات كلما أتمت لعبة الدوّارات دورة كاملة. وأقصى ارتفاع يصل إليه الحصان هو 55 سم، وأقل ارتفاع هو 37 سم. وتدور لعبة الدوّارات مرة كل 21 ثانية. افرض أن الحصان يبدأ ويتوقف عند ارتفاعه المتوسط.

a. اكتب معادلة لتمثيل ارتفاع الحصان h في صورة دالة للزمن t ثانية.

b. مثّل الدالّة بيانيًّا.

c. استخدم تمثيلك البياني لتقدير ارتفاع الحصان بعد 8 ثوان. ثم استخدم الحاسبة لإيجاد الارتفاع مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

42. الاستنتاج خلال شهر واحد، تتراوح درجة الحرارة في الخارج بين 40°C و 50°C. يقرّب منحنى cosine التغيير الحاصل في درجة الحرارة، مع ارتفاع يصل إلى 50°C يتحقق كل أربعة أيام.

a. صف السعة والفترة والخط المتوسط في الدالة التي تقرّب درجة الحرارة y في اليوم d.

b. اكتب دالة cosine لتقدير درجة الحرارة y في اليوم d.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

d. قدر درجة الحرارة في اليوم السابع من الشهر.

أوجد الإحداثي الذي يمثل قيمة عظمى لكل تمثيل بياني.

43. $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

45. $y = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

46. $y = -3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4$

قارن بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

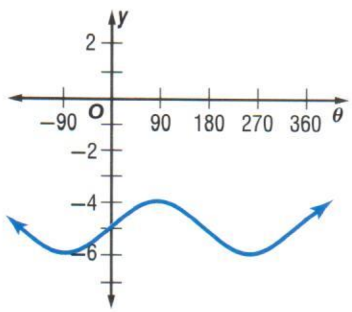
.47 $y = -\cos 3\theta$ و $y = \sin 3(\theta - 90°)$

.48 $y = 2 + 0.5 \tan \theta$ و $y = 2 + 0.5 \tan (\theta + \pi)$

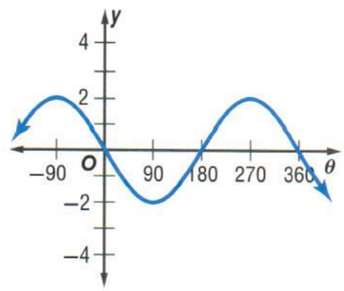
.49 $y = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ و $y = -2 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$

حدد فترة كل دالة. ثم اكتب معادلة للتمثيل البياني باستخدام الدالة المثلثية المحددة.

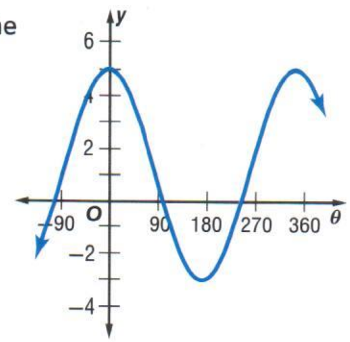
50. sine



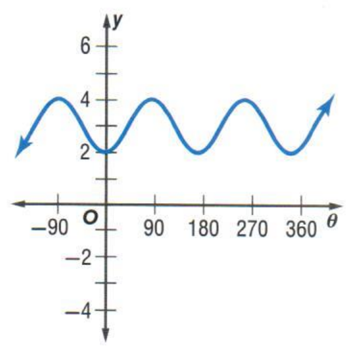
51. cosine



52. cosine



53 sine



اذكر الفترة، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية ثم مثّل الدالة بيانيًا.

54. $y = \csc (\theta + \pi)$

55. $y = \cot \theta + 6$

56. $y = \cot \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

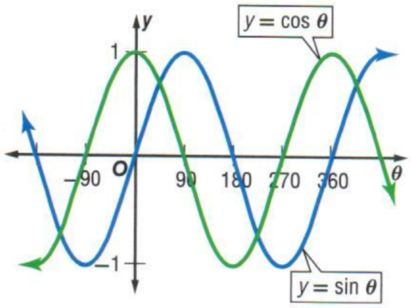
57. $y = \frac{1}{2} \csc 3(\theta - 45°) + 1$

58. $y = 2 \sec \frac{1}{2}(\theta - 90°)$

59. $y = 4 \sec 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

.60 الفرضيات إذا أعطيت السعة والفترة لدالة cosine. فهل من الممكن *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير ممكن *أبدًا* إيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة. اشرح استنتاجك.

.61 الاستنتاج صف وجه اختلاف التمثيل البياني لـ $y = 3 \sin 2\theta + 1$ عن $y = \sin \theta$.



.62 الكتابة في الرياضيات صف إزاحتي طور مختلفتين من شأنهما إزاحة منحنى sine على منحنى cosine الموضح على اليسار. ثم اكتب معادلة لمنحنى sine الجديد باستخدام كل إزاحة طور.

.63 مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة دورية سعتها تساوي 2 والخط المتوسط عند $y = -3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

.64 التبرير ما عدد التمثيلات البيانية المختلفة لـ sine التي تمر بنقطة الأصل $(n\pi, 0)$؟ اشرح استنتاجك.

تدريب على الاختبار المعياري

65. الإجابة الشبكية ما مقدار زيادة التعبير $\frac{3x-1}{4} + \frac{x+6}{4}$ عن x؟

66. فكّك $(a-b)^4$.

A $a^4 - b^4$

B $a^4 - 4ab + b^4$

C $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

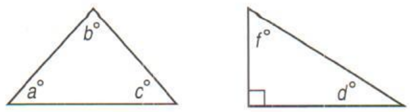
D $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

67. أوجد حل $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$.

F 7 **H** 7, 13

G 0, 7 **J** لا يوجد حل

68. الهندسة باستخدام الأشكال الموضحة أدناه، ما متوسط f و d و c و b و a؟



A 21 **B** 45 **C** 50 **D** 54

مراجعة شاملة

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 3-11)

69. $y = 2\cos\theta$ **70.** $y = 3\sin\theta$ **71.** $y = \sin 2\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 2-11)

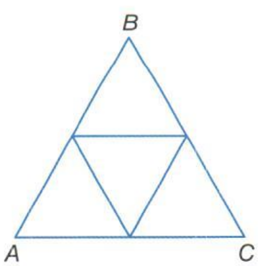
72. $\sin\frac{4\pi}{3}$ **73.** $\sin(-30°)$ **74.** $\cos 405°$

حدد ما إذا كان كل موقف يصف *استطلاع رأي* أو *تجربة* أو *دراسة وصفية*. ثم حدد العينة، واقترح مجتمعًا إحصائيًا يتم الاختيار منه.

75. انقسمت مجموعة مكونة من 220 بالغًا بطريقة عشوائية إلى مجموعتين. مجموعة تمارس التمارين لمدة ساعة في اليوم والأخرى لا تتمرن. وتمت مقارنة مؤشرات كتلة الجسم حينئذ.

76. اختار مدرب كرة القدم بعضًا من لاعبيه بشكل عشوائي وقدم لهم استبيانًا يسألهم فيه عن عاداتهم اليومية في النوم.

77. اختار معلم 100 طالب بشكل عشوائي يعملون في وظائف بدوام جزئي وقارن درجاتهم.



78. الهندسة مثلث متساوي الأضلاع ABC محيطه 39 سم. إذا كانت نقاط المنتصف في جميع الأضلاع متصلة، نتج مثلث متساوي الأضلاع أصغر. افرض أن عملية اتصال نقاط المنتصف في الأضلاع ورسم مثلثات جديدة مستمرة بلا انقطاع.

a. اكتب متسلسلة لا نهائية لتمثيل مجموع محيطات جميع المثلثات.

b. أوجد مجموع محيطات جميع المثلثات.

79. البناء تتعرض إحدى شركات البناء لدفع غرامة عن كل يوم تتأخر فيه عن إكمال الجسر. وسوف تكون الغرامة اليومية قدرها AED 4000 عن اليوم الأول ثم تزيد بمقدار AED 1000 كل يوم. وبحسب الميزانية، لا يمكن للشركة دفع تكلفة غرامات أكثر من AED 60000 إجمالاً. فما أقصى عدد من الأيام يمكنها أن تتأخره؟

مراجعة المهارات

أوجد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب درجة.

80. $\sin\theta = \frac{7}{8}$ **81.** $\tan\theta = \frac{9}{10}$ **82.** $\cos\theta = \frac{1}{4}$

83. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ **84.** $\sin\theta = \frac{5}{6}$ **85.** $\tan\theta = \frac{2}{7}$

الدرس 11-9 الدوال المثلثية العكسية

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
• قمتَ بتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.	**1** إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية. **2** إيجاد حل المعادلات باستخدام الدوال المثلثية العكسية.	• يبلغ طول رف الكتب المائل الموجود إلى اليسار 40 سنتيمترًا من الجدار ويصل إلى ارتفاع 200 سنتيمتر. في الدرس 1-13، تعلمت كيفية استخدام معكوس الدالة المثلثية لإيجاد قياس الزاوية الحادة θ.

$\tan \theta = \frac{15}{75}$ أو 0.2   استخدم دالة tangent.

أوجد زاوية تساوي tan 0.2.

[2nd] [TAN⁻¹] .2 [ENTER] 11.30993247

إذًا فقياس θ يساوي حوالي $11°$.

المفردات الجديدة

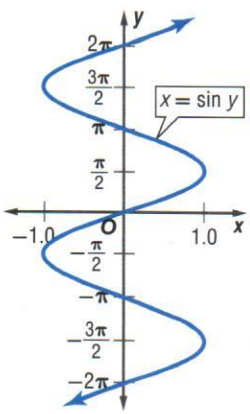
قيم أساسية
principal values
دالة قوس الجيب
Arcsine function
دالة قوس جيب التمام
Arccosine function
دالة قوس الظل
Arctangent function

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الدوال المثلثية العكسية

إذا عرفت قيمة نسبة مثلثية لزاوية يمكنك استخدام معكوسها لإيجاد الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي يكون فيها جميع قيم x و y معكوسة. معكوس $y = \sin x$, $x = \sin y$. ممثل بيانيًا إلى اليسار.



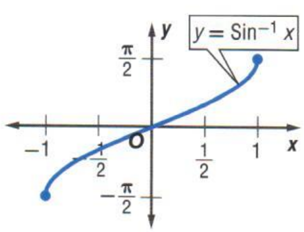
لاحظ أن المعكوس ليس بدالة، حيث يوجد الكثير من قيم y لكل قيمة من قيم x. وإذا قيّدت مجال دالة sine بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، يصبح المعكوس دالة.

يطلق على قيم المجال المقيد **القيم الأساسية**. توضح الدوال المثلثية ذات المجالات المقيدة بحروف كبيرة.

- $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ و $0 \leq x \leq \pi$.
- $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ و $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

يمكنك استخدام الدوال ذات المجالات المقيدة لتحديد الدوال المثلثية العكسية. ويعتبر معكوس دوال sine وCosine و tangent هي دالة **قوس Arcsine** و**قوس Arccosine** و**قوس Arctan** على التوالي.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

دالة عكسية	الرموز	المجال	المدى	النموذج
قوس sine	y = Arcsin x $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90° \leq y \leq 90°$	
قوس cosine	y = Arccos x $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$ $0° \leq y \leq 180°$	
قوس Arctan	y = Arctan x $y = \text{Tan}^{-1} x$	جميع الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90° \leq y \leq 90°$	

مراجعة المفردات

الدوال العكسية إذا كان f و f^{-1} دالتين عكسيتين، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

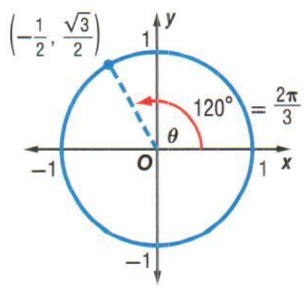
في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كان $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ و $300°$ وجميع الزوايا التي تشترك في ضلع الانتهاء مع هذه الزوايا. في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$، إذا كان $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مثال 1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية

أوجد كل قيمة مما يلي. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

a. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

أوجد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة Cosine لها $-\frac{1}{2}$.



الطريقة 1 استخدام دائرة الوحدة.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة تكون قيمة إحداثي x لها هي $-\frac{1}{2}$.

عندما تكون $\theta = 120°$، فإن $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: [2nd] [COS⁻¹] [(−)] 1 [÷] 2 [)] [ENTER] 120

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

b. **Arctan 1**

أوجد الزاوية θ حيث $-90° \le \theta \le 90°$ التي تساوي قيمة ظلها 1.

خطوات العملية على الحاسبة: [2nd] [TAN⁻¹] 1 [ENTER] **45**   إذًا، $\text{Arctan } 1 = 45°$ أو $\frac{\pi}{4}$.

نصيحة دراسية

قياس الزاوية تذكر أنه عند إيجاد قيمة دالة مثلثية عكسية، ستكون النتيجة قياس زاوية.

تمرين موجّه

1A. $\text{Cos}^{-1} 0$

1B. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند إيجاد قيمة مع وجود عدة دوال مثلثية، استخدم ترتيب العمليات للحل.

مثال 2 إيجاد القيمة المثلثية

أوجد $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرب إلى أقرب جزء من مئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: [TAN] [2nd] [COS⁻¹] 1 [÷] 2 [)] [)] [ENTER] **1.732050808**

إذًا، $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

التحقق $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°$ و $\tan 60° \approx 1.73$. إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

2A. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

2B. $\cos\left(\text{Arccos } -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2 إيجاد حل المعادلة باستخدام المعكوس يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية بالحل لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على الاختبار المعياري إيجاد قياس الزاوية

إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فأوجد θ.

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

قراءة فقرة الاختبار

θ sine هو -0.35. يمكن كتابة ذلك في الصورة $\text{Arcsin}\ (-0.35) = \theta$.

حَل فقرة الاختبار

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [SIN⁻¹] (–) .35 ENTER -20.48731511

إذًا، $\theta \approx -20.5°$. الإجابة هي A.

نصيحة عند حل الاختبار

تقدير الاحتمالات تقيّد دالة sin قياسات الزوايا المحتملة إلى الربع الأول أو الرابع، ولأن -0.35 سالبة، فابحث عن قياس الزاوية في الربع الرابع.

تمرين موجّه

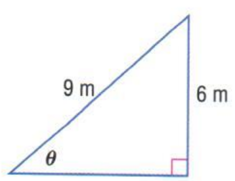
3. إذا كان $\text{Tan}\ \theta = 1.8$، فأوجد θ.

F $0.03°$ **G** $29.1°$ **H** $60.9°$ **J** لا يوجد حل

يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية لتحديد قياس زوايا الميل والانخفاض والارتفاع.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية العكسية

التزلج على المياه يبلغ ارتفاع منحدر تزلج على المياه 6 أمتار وطوله 9 أمتار كما هو مبين على اليسار. أوجد الدالة المثلثية العكسية التي يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المنحدر مع المياه. ثم أوجد قياس الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



نظرًا لمعرفة قياسي الضلع المقابل والوتر، يمكن استخدام دالة sine.

$\sin\theta = \frac{6}{9}$ دالة sine

$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{6}{9}$ دالة معكوس sine

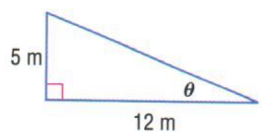
$\theta \approx 41.8°$ استخدم حاسبة.

إذًا، فإن زاوية المنحدر تساوي حوالي $41.8°$.

التحقق باستخدام حاسبتك، $\frac{6}{9} \approx 0.66653 \approx \sin 41.8$.
إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

4. التزلج موضح على اليسار مسار تزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المسار مع أرض الوادي. ثم أوجد الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



مهنة من الحياة اليومية

مسؤول علوم التربية الرياضية يقدم مسؤول علوم التربية الرياضية معلومات التربية الرياضية إلى اللاعبين والمدربين وأولياء الأمور. وينفذ برامج بالاختبار والتدريب والعلاج للرياضيين. ويحبذ لهذه الوظيفة الحصول على درجة الماجستير في علم التربية الرياضية.

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

1. $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$ **2.** $\mathrm{Arctan}\,(-\sqrt{3})$ **3.** $\mathrm{Arccos}\,(-1)$

مثال 2 **أوجد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

4. $\cos\left(\mathrm{Arcsin}\,\frac{4}{5}\right)$ **5.** $\tan\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,1)$ **6.** $\sin\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

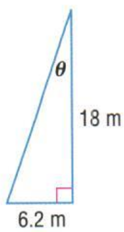
مثال 3 **7. الاختيار من متعدد** إذا كان $\mathrm{Sin}\ \theta = 0.422$، فأوجد θ.

A 25° **B** 42° **C** 48° **D** 65°

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

8. $\mathrm{Cos}\ \theta = 0.9$ **9.** $\mathrm{Sin}\ \theta = -0.46$ **10.** $\mathrm{Tan}\ \theta = 2.1$

مثال 4 **11. التزحلق على الجليد** يوضح إلى اليسار مقطع عرضي لأنبوب ضخم للتزحلق على الجليد. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ؛ الزاوية التي تصف انحدار الأنبوب الضخم. بعد ذلك، أوجد قياس الزاوية لأقرب درجة.



التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

12. $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **13** $\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **14.** $\mathrm{Sin}^{-1}\,(-1)$

15. $\mathrm{Tan}^{-1}\,\sqrt{3}$ **16.** $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **17.** $\mathrm{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 **أوجد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

18. $\tan\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,1)$ **19.** $\tan\left[\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **20.** $\cos\left(\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{3}{5}\right)$

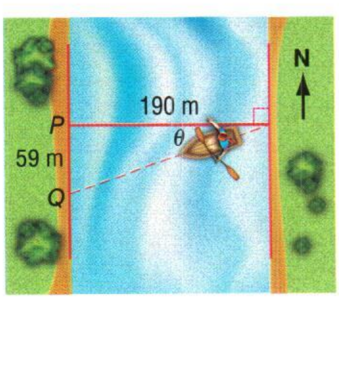
21. $\sin\,(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3})$ **22.** $\cos\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{4}{9}\right)$ **23.** $\sin\left[\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

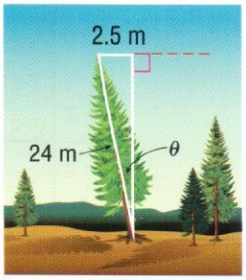
حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

24. $\mathrm{Tan}\ \theta = 3.8$ **25.** $\mathrm{Sin}\ \theta = 0.9$ **26.** $\mathrm{Sin}\ \theta = -2.5$

27. $\mathrm{Cos}\ \theta = -0.25$ **28.** $\mathrm{Cos}\ \theta = 0.56$ **29.** $\mathrm{Tan}\ \theta = -0.2$

مثال 4 **30. الاستنتاج المنطقي** يتحرك قارب غربًا عبر نهر يبلغ عرضه 190 مترًا. وبسبب التيار، انتهى بالقارب المطاف عند النقطة Q والتي تبعد 59 مترًا عن نقطة وجهته P. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي انحرف بها القارب جنوب المحور الأفقي. ثم أوجد قياس الزاوية بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة.





31. الأشجار تميل شجرة طولها 24 مترًا بمقدار 2.5 يسار المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ، الزاوية التي تميل بها الشجرة. ثم أوجد قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة.

32. القيادة منحنى فرعي على الطريق السريع يبلغ نصف قطره 52 مترًا وصمم لحركة السيارات بأمان بسرعة 45 كيلومترًا في الساعة (أو 12.5 مترًا في الثانية). تمثل المعادلة أدناه زاوية θ للمنحنى. ما قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة؟

$$\tan\theta = \frac{(12.5\ \text{m/s})^2}{(52\ \text{m})(9.8\ \text{m/s}^2)}$$

33. ألعاب القوى يقوم رامي الكرة الحديدية برمي كرة بسرعة مبدئية مقدارها 15 مترًا في الثانية. ويمثل التعبير $\frac{15\ \text{m/s}\ (\sin x)}{9.8\ \text{m/s}^2}$ الزمن بالثانية الذي بلغت فيه الكرة الحديدية أقصى ارتفاع لها. في التعبير، تمثل x الزاوية التي رميت بها الكرة الحديدية. وإذا كانت الكرة قد بلغت أقصى ارتفاع في 1.0 ثانية. فما قياس الزاوية التي رميت بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد حل كل معادلة حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

34. $\csc\theta = 1$ **35.** $\sec\theta = -1$ **36.** $\sec\theta = 1$

37. $\csc\theta = \frac{1}{2}$ **38.** $\cot\theta = 1$ **39.** $\sec\theta = 2$

40. التمثيلات المتعددة افرض أن $y = \text{Cos}^{-1}\ x$.

a. بيانيًا ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة. واذكر المجال والمدى.

b. رمزيًا اكتب الدالة باستخدام رموز مختلفة.

c. عدديًا اختر قيمة للمتغير x بين 1− و 0. ثم أوجد قيمة دالة معكوس Cosine. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. تحليليًا قارن التمثيلات البيانية لكل من $y = \cos x$ و $y = \text{Cos}^{-1}\ x$.

41. التحدٍ حدد ما إذا كان $\cos(\text{Arccos}\ x) = x$ لجميع قيم x صحيحًا أم خطأ. وإذا كان خطأ، فقدم مثالاً عكسيًا.

42. التفكير النقدي تحل كل من نجاة ونسرين $\cos\theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. هل أي منهما على صواب. اشرح استنتاجك.

نجاة	نسرين
$\cos\theta = 0.3$	$\cos\theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$

43. التبرير اشرح العلاقة بين مجال $y = \text{Sin}^{-1}\ x$ ومدى $y = \text{Sin}\ x$.

44. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة بدالة قوس الجيب ومعادلة بدالة sine تتضمن كلاهما نفس قياس الزاوية.

45. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين العلاقتين $y = \tan^{-1}\ x$ و $y = \text{Tan}^{-1}\ x$. اذكر معلومات حول المجال والمدى.

46. التبرير اشرح كيف يكون $\text{Sin}^{-1}\ 8$ و $\text{Cos}^{-1}\ 8$ غير معرّفين بينما يكون $\text{Tan}^{-1}\ 8$ معرفًا.

تدريب على الاختبار المعياري

47. بسّط $\dfrac{\frac{2}{x}+2}{\frac{2}{x}-2}$.

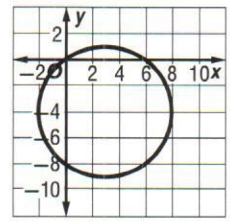
A $\dfrac{1+x}{1-x}$

B $\dfrac{2}{x}$

C $\dfrac{1-x}{1+x}$

D $-x$

48. الإجابة القصيرة ما معادلة التمثيل البياني أدناه؟



49. إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x,\ g(x) = 4 - 2x$. فما $g[f(x)]$؟

F $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

G $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

H $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

J $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

50. إذا كان g عددًا موجبًا، فأي مما يلي يساوي $12g$؟

A $\sqrt{144g}$

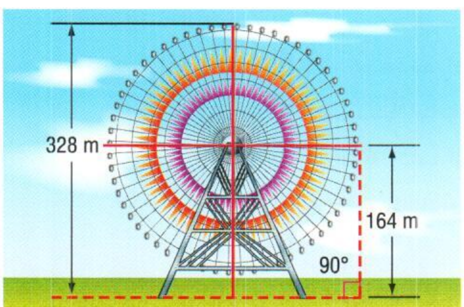
B $\sqrt{12g^2}$

C $\sqrt{24g^2}$

D $6\sqrt{4g^2}$

مراجعة شاملة

51. ألعاب الملاهي كوزمو كلوك 21 هي عجلة دوارة ضخمة بمدينة ملاهي في اليابان يبلغ قطرها 328 مترًا. افترض أن راكبًا دخلها عند ارتفاع 0 متر، ثم دار بزيادات $90°$ عكس اتجاه الساعة. يوضح الجدول قياسات زوايا الدوران وارتفاع الراكب بالأمتار عن مستوى الأرض. (الدرس 8-11)



الزاوية	الارتفاع	الزاوية	الارتفاع
0°	0	450°	164
90°	164	540°	328
180°	328	630°	164
270°	164	720°	0
360°	0		

a. إن الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 164 \cdot [\sin (x - 90°)] + 164$. حدد الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة باستخدام sine تمثل موقع الراكب على عجلة فيينا العملاقة في النمسا، والتي يبلغ قطرها 200 متر. تحقق بتعيين النقاط والمعادلة بحاسبة تمثيل بياني.

52. المد والجزر يحدث أقصى ارتفاع مسجل يبلغه المد في حوض ميناس، بنوفا سكوشا في كندا، حيث يبلغ مدى المد والجزر 16.4 مترًا. ويكون المد والجزر في موضع توازنه عندما يكون بمستواه الطبيعي أي بمنتصف أدنى نقطة وأقصى نقطة له. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h للمد والجزر. افترض أن المد والجزر يكون عند موضع توازنه عند $t = 0$ التي يبدأ عندها المد، وأن المد يكمل دورة كاملة في 12 ساعة. (الدرس 7-11)

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

53. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$

54. $\log_4 a + \log_4 9 = \log_4 27$

55. $\log_{10} 16 - \log_{10} 2t = \log_{10} 2$

56. $\log_7 24 - \log_7 (y + 5) = \log_3 8$

مراجعة المهارات

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

57. $\cos 3\pi$

58. $\tan 120°$

59. $\sin 300°$

60. $\sec \frac{7\pi}{6}$

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

النسب المثلثية في المثلثات القائمة (الدرس 1-11)

- $\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}},$
  $\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}, \sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}, \cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

قياسات الزوايا والنسب المثلثية للزوايا العامة
(الدرسان 2-11 و 3-11)

- يحدد قياس الزاوية بمقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لست دوال مثلثية لـ θ، بافتراض إحداثيات نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الـ Sines وقانون الـ Cosines (الدرسان 4-11 و 5-11)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

الدوال المثلثية العكسية والدائرية (الدرسان 6-11 و 9-11)

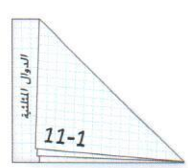
- إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos \theta = x$ و $\sin \theta = y$.
- $y = \text{Sin } x$ إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا (الدرس 7-11)

- للدوال المثلثية بالصيغة $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، تكون السعة $|a|$ والفترة $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{b}$.
- فترة $y = a \tan b\theta$ هي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

- حالة مبهمة ambiguous case
- السعة amplitude
- زاوية الانخفاض angle of depression
- زاوية الارتفاع angle of elevation
- دالة قوس جيب التمام Arccosine function
- دالة قوس الجيب Arcsine function
- دالة قوس الظل Arctangent function
- الزاوية المركزية central angle
- دالة دائرية circular function
- قاطع التمام cosecant
- cosine
- ظل التمام cotangent
- زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء coterminal angles
- دورة cycle
- التردد frequency
- ضلع الابتداء initial side
- قانون الـ Cosines Law of Cosines
- قانون الـ Sines Law of Sines
- خط متوسط midline
- فترة period
- دالة دورية periodic function
- إزاحة الطور phase shift
- قيم أساسية principal values
- زاوية ربعية quadrantal angle
- راديان radian
- زاوية مرجع reference angle
- القاطع secant
- sine
- حل المثلث solving a triangle
- الوضع القياسي standard position
- ظل الزاوية tangent
- ضلع الانتهاء terminal side
- دالة مثلثية trigonometric function
- النسبة المثلثية trigonometric ratio
- حساب المثلثات trigonometry
- دائرة الوحدة unit circle
- إزاحة رأسية vertical shift

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صواب* أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

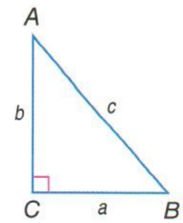
1. يستخدم <u>قانون الـ Cosines</u> في حل المثلثات عند معرفة قيم زاويتين وأي أضلاع.
2. الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في <u>الوضع القياسي</u> إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على المحور الأفقي x الموجب.
3. <u>الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء</u> هي زوايا في الوضع القياسي لها نفس ضلع الانتهاء.
4. يطلق على الإزاحة الأفقية لدالة دورية <u>إزاحة الطور</u>.
5. معكوس دالة sine هو <u>دالة cosecant</u>.
6. تساوي <u>دورة</u> التمثيل البياني لدالة sine أو دالة Cosine نصف الفارق بين القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للدالة.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

أوجد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



7. $c = 12, b = 5$

8. $a = 10, B = 55°$

9. $B = 75°, b = 15$

10. $B = 45°, c = 16$

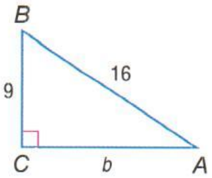
11. $A = 35°, c = 22$

12. $\sin A = \frac{2}{3}, a = 6$

13. **شاحنات** يرتفع ظهر شاحنة متحركة مترًا عن الأرض. ما الطول الذي يفترض أن يكون عليه المنحدر الممتد من ظهر الشاحنة لتكون زاوية ارتفاع المنحدر $20°$؟

مثال 1

أوجد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



أوجد قيمة b.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$9^2 + b^2 = 16^2$$
$$b = \sqrt{16^2 - 9^2}$$
$$b \approx 13.2$$

أوجد قيمة A. $\sin A = \frac{9}{16}$

استخدم حاسبة.

قياس الزاوية إلى أقرب درجة. $A = 34°$.

أوجد قيمة B. $34° + B \approx 90°$

$$B \approx 56°$$

إذًا، $b \approx 13.2$، $A \approx 34°$ و $B \approx 56°$.

11-2 الزوايا وقياس الزاوية

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

14. $215°$ **15.** $\frac{5\pi}{2}$

16. -3π **17.** $-315°$

أوجد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء.

18. $265°$ **19.** $-65°$ **20.** $\frac{7\pi}{2}$

21. **الدراجة** يؤدي إطار دراجة 8 لفات في الثانية الواحدة. ويبلغ نصف قطر الإطار 38 سنتيمترًا. أوجد الزاوية θ التي يدور من خلالها الإطار في الثانية الواحدة بمقياس الراديان.

مثال 2

أعد كتابة $160°$ بالراديان.

$$160° = 160°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$$
$$= \frac{160\pi}{180} \text{ راديان} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 3

أوجد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء لزاوية $150°$.

زاوية موجبة:

$150° + 360° = 510°$ **اجمع** $360°$.

زاوية سالبة:

$150° - 360° = -210°$ **اطرح** $360°$.

11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

22. $\cos 135°$

23. $\tan 150°$

24. $\sin 2\pi$

25. $\cos \frac{3\pi}{2}$

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة لست دوال مثلثية للزاوية θ.

26. $P(-4, 3)$

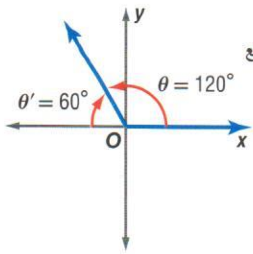
27. $P(5, 12)$

28. $P(16, -12)$

29. **الكرة** رُميت كرة من أعلى مبنى بزاوية $70°$ وسرعة متجهة أولية قدرها 5 أمتار في الثانية. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للكرة x هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث إن v_0 هي السرعة الأولية وθ هي الزاوية التي ضُربت بها و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التقريبية التي ستقطعها الكرة تقريبًا بعد 10 ثوانٍ؟

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



حيث إن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني. فإن زاوية المرجع θ' هي $120° - 180°$ أو $60°$.

دالة sine موجبة في الربع الثاني.

إذًا $\sin 120° = \sin 60°$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 5

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي النقطة عند $(6, 5)$. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ أو $\frac{5\sqrt{61}}{61}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ أو $\frac{6\sqrt{61}}{61}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{6}$

$\csc \theta = \frac{r}{y}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{5}$

$\sec \theta = \frac{r}{x}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{6}$

$\cot \theta = \frac{x}{y}$ أو $\frac{6}{5}$

11-4 قانون الـ Sines

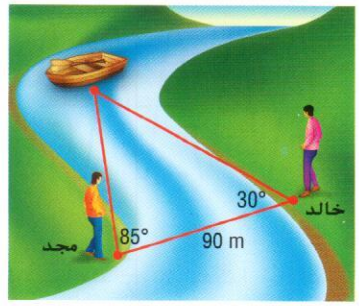
حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا* حل، أم له حل *واحد*، أم له حلان. ثم أوجد حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

30. $C = 118°, c = 10, a = 4$

31. $A = 25°, a = 15, c = 18$

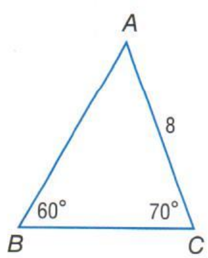
32. $A = 70°, a = 5, c = 16$

33. **القارب** يقف خالد ومجد على الضفاف المتقابلة لنهر. كم يبعد خالد عن القارب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



مثال 6

أوجد حل $\triangle ABC$.



أولاً. أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$60° + 70° + a = 180°$$
$$A = 50°$$

والآن استخدم قانون الـ Sines وأوجد a و c. اكتب معادلتين، كل منها بمتغير واحد.

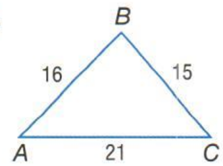
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$
$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$$
$$a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°}$$
$$a \approx 7.1$$

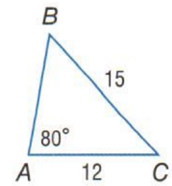
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$$
$$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°}$$
$$c \approx 8.7$$

إذًا، $A = 50°$ و $c \approx 8.7$ و $a \approx 7.1$.

11-5 قانون الـ Cosines

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر البدء بقانون الـ *Sines* أو قانون الـ *Cosines*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

34. 

35. 

36. $C = 75°, a = 5, b = 7$

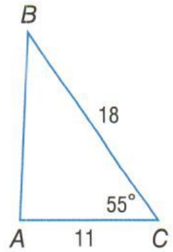
37. $A = 42°, a = 9, b = 13$

38. $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

39. الزراعة يرغب مزارع في إحاطة قطعة من أرضه بسياج. ويبلغ طول ضلعين من أضلاع حقله المثلث الشكل 120 مترًا و 325 مترًا ويبلغ قياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. ما قدر السياج التي سيحتاجه المزارع؟

مثال 7

أوجد حل $\triangle ABC$ حيث $C = 55°$ و $b = 11$ و $a = 18$.



تذكر لك المعطيات قياس ضلعين وزاوية محصورة. ابدأ بتصميم رسم تخطيطي واستخدام قانون الـ Cosines لتحديد c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 182 + 112 - 2(18)(11) \cos 55°$$

$$c^2 \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثانيًا، يمكنك استخدام قانون الـ Sines لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$$

$\sin A \approx \frac{18 \sin 55°}{14.8}$ أو A تساوي حوالي $85.0°$

يساوي قياس الزاوية B تقريبًا
$180 - (85.0 + 55) = 40.0°$

وبالتالي، $c \approx 14.8$ و $A \approx 85.0°$ و $B \approx 40.0°$.

11-6 الدوال الدائرية والدورية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة.

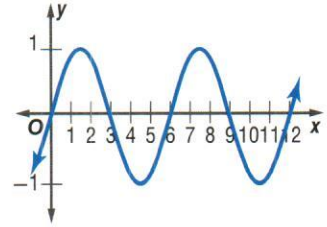
40. $\cos(-210°)$

41. $(\cos 45°)(\cos 210°)$

42. $\sin -\frac{7\pi}{4}$

43. $\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$

44. حدد فترة الدالة.



45. تكمل عجلة قطرها 18 سنتيمترًا 4 دورات في دقيقة واحدة. ما فترة الدالة التي تصف ارتفاع بقعة على الحافة الخارجية للعجلة كدالة للزمن؟

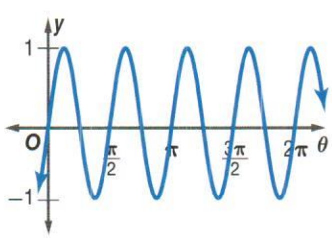
مثال 8

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 9

حدد فترة الدالة أدناه.



يتكرر النمط نفسه عند $\frac{\pi}{2}$، π، وهكذا. إذًا، الفترة هي $\frac{\pi}{2}$.

11-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

أوجد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

46. $y = 4 \sin 2\theta$

47. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

48. $y = 3 \csc \theta$

49. $y = 3 \sec \theta$

50. $y = \tan 2\theta$

51. $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

52. عندما تقفز هناء على منصّة قفز تهتز المنصة بتردد 10 هرتز. افترض أن السعة تساوي 1.5 متر. اكتب معادلة sine لتمثيل تردد منصة القفز y كدالة للزمن t.

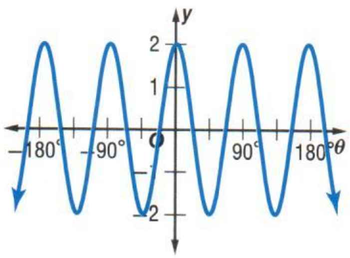
مثال 10

أوجد سعة وفترة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2|$ أو 2. التمثيل البياني ممدد رأسيًا. ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



11-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

اذكر الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

53. $y = 3 \sin [2(\theta - 90°)] + 1$

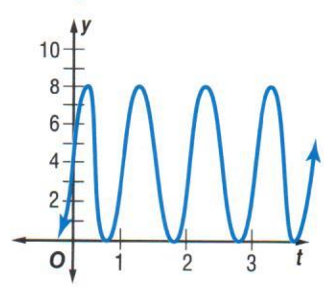
54. $y = \frac{1}{2} \tan [2(\theta - 30°)] - 3$

55. $y = 2 \sec \left[3\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2$

56. $y = \frac{1}{2} \cos \left[\frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$

57. $y = \frac{1}{3} \sin \left[\frac{1}{3}(\theta - 90°)\right] + 2$

58. يبين التمثيل البياني أدناه قيمة تقريبية للارتفاع y لحبل يقوم شخصان بتدويره كدالة للزمن t بالثواني. اكتب معادلة للدالة.



مثال 11

اذكر الإزاحة الرأسية السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \sin \left[3\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

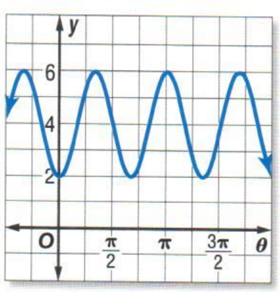
حدد قيم k و a و b و h.

$k = 4$. إذًا الإزاحة الرأسية تساوي 4.

$a = 2$. إذًا تساوي السعة 2.

$b = 3$. إذًا الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

$h = -\frac{\pi}{2}$. تساوي إزاحة الطور $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار.



دليل الدراسة والمراجعة تابع

11-9 الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل دالة مثلثية عكسية. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

59. $\text{Sin}^{-1}(1)$

60. $\text{Arctan}\,(0)$

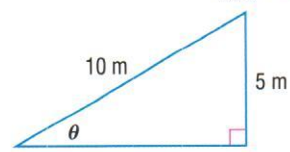
61. $\text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

62. $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\text{Tan}^{-1}1$

64. $\text{Arccos}\ 0$

65. **المنحدرات** يبلغ ارتفاع منحدر دراجات 5 أمتار ويبلغ طوله 10 أمتار كما هو موضح أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ وهي الزاوية التي يشكلها المنحدر مع الأرض. ثم أوجد الزاوية.



أوجد قيم كل دالة مثلثية عكسية. قرب إلى أقرب جزء من المئة إذا لزم الأمر.

66. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

67. $\sin\left(\text{Arcsin}\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

68. $\sin\,(\text{Tan}^{-1}0)$

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

69. $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

70. $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

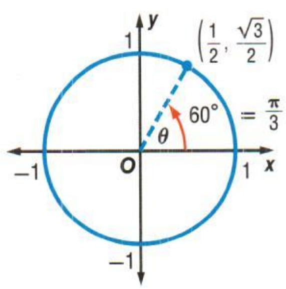
71. $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

أوجد الزاوية θ لـ $0° \leq \theta \leq 180°$ التي تساوي قيمة cosine لها $\frac{1}{2}$.

استخدام دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة التي يكون الإحداثي x لها يساوي $\frac{1}{2}$. عندما يكون $\theta = 60°$، $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1} = 60°$ أو $\frac{\pi}{3}$.

مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة:

SIN 2nd [TAN^{-1}] 1 ÷ 2))
ENTER **0.4472135955**

إذًا، $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$، فأوجد θ.

استخدم حاسبة.

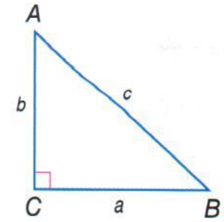
خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [COS^{-1}] .72) ENTER **43.9455195623**

إذًا، $\theta \approx 43.9°$.

الوحدة 11 تدريب على الاختبار

حُلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



1. $A = 36°, c = 9$
2. $a = 12, A = 58°$
3. $B = 85°, b = 8$
4. $a = 9, c = 12$

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

5. $325°$
6. $-175°$
7. $\frac{9\pi}{4}$
8. $-\frac{5\pi}{6}$

9. حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ الذي يحتوي على الزوايا $A = 110°$ و $a = 16$ و $b = 21$ لا يوجد له حل أم حل واحد أم حلان. ثم أوجد حل المثلث إن أمكن. وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. اكتب قياس الزوايا بالدرجات.

10. $\cos(-90°)$
11. $\sin 585°$
12. $\cot \frac{4\pi}{3}$
13. $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
14. $\tan\left(\text{Cos}^{-1} \frac{4}{5}\right)$
15. $\text{Arccos}\, \frac{1}{2}$

16. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

17. **الاختيار من متعدد** ما الزاوية التي تكون قيمة ظلها وقيمة sine سالبتين؟

A 65°

B 120°

C 265°

D 310°

18. **الملاحة** تقيس الطائرات والسفن المسافة بالأميال البحرية. ويمكن استخدام القانون 1 ميل بحري $= 6077 - 31 \cos 2\theta$ قدم، حيث θ هي خط العرض بالدرجات، في إيجاد الطول التقريبي للميل البحري عند خط عرض معين. أوجد طول الميل البحري عندما يكون خط العرض يساوي $120°$.

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

19. $y = 2 \sin 3\theta$
20. $y = \frac{1}{2} \cos 2\theta$

21. **الاختيار من متعدد** ما فترة الدالة $y = 3 \cot \theta$؟

F 120°

G 180°

H 360°

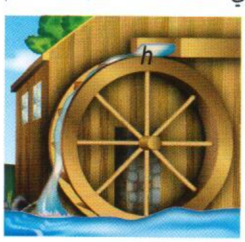
J 1080°

22. حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ $\triangle XYZ$ الذي معطياته $y = 15$ و $z = 9$ و $X = 105°$ عبر البدء بقانون الـ Sines أم قانون الـ Cosines. ثم حلّ المثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

23. $y = \cos(\theta + 180)$
24. $y = \frac{1}{2} \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

25. **العجلات** ساقية مياه قطرها 20 مترًا. وتكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن الارتفاع عند أعلى الساقية يمثل الارتفاع عندما يساوي الزمن 0. اكتب معادلة ارتفاع النقطة h في الرسم التخطيطي أدناه كدالة للزمن t. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية

تعتبر الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني من الأدوات الفعالة لحل المسائل. وكما رأيت، تتضمن بعض مسائل الاختبارات التي تواجهها خطوات أو عمليات حسابية تتطلب استخدام حاسبة علمية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها.

- **الرمز العلمي**—لحساب الأعداد الكبيرة
- **الدوال الأسيّة واللوغاريتمية**—مسائل النمو والاضمحلال والمرابحة المركبة
- **الدوال المثلثية**—المسائل المتعلقة بالزوايا والمثلثات ومسائل القياسات غير المباشرة
- **الجذور التربيعية والجذور النونية** ***n***—المسافة على المستوى الإحداثي، نظرية فيثاغورث

الخطوة 2

استخدم الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر الحل بأكبر قدر ممكن من الكفاءة. فيمكن إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما في خطوات أخرى يجب استخدام الحاسبة.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

عندما تقف خديجة على مسافة 18 مترًا من قاعدة شجرة، فإنها تشكل زاوية مقدارها 57° من أعلى الشجرة. فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب جزء من عشرة؟

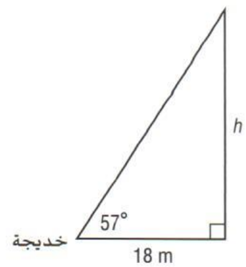
A 27.7 m

B 28.5 m

C 29.2 m

D 30.1 m

اقرأ المسألة بعناية. أعطيت بعض القياسات وطلب منك إيجاد ارتفاع الشجرة. قد يكون من المفيد أن ترسم أولاً نموذجًا للمسألة.



استخدم دالة مثلثية لربط الأطوال وقياس الزاوية في المثلث القائم.

تعريف نسبة tangent	$\text{tangent } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
التعويض.	$\tan 57° = \frac{h}{18}$

تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$ في الحل لإيجاد قيمة ارتفاع الشجرة h. استخدم حاسبة علمية.

استخدم حاسبة.	$1.53986 \approx \frac{h}{18}$
اضرب كل طرف في 18.	$27.71748 \approx h$

يبلغ ارتفاع الشجرة حوالي 27.7 مترًا. الإجابة الصحيحة هي *A*.

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. تقلع طائرة وترتفع بسرعة ثابتة. بعد التحرك 800 متر أفقيًا، ارتفعت الطائرة 285 مترًا رأسيًا. ما زاوية الارتفاع للطائرة أثناء الإقلاع والارتفاع المبدئي؟

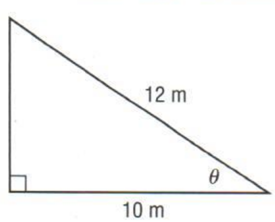
A 15.6°

B 18.4°

C 19.6°

D 22.3°

2. ما قياس زاوية منحدر الدراجات أدناه؟



F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

الوحدة 11

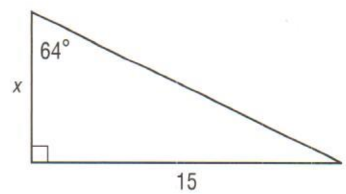
تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 11

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما قيمة x؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2. يقود حسام دراجته بسرعة 21 كيلومترًا في الساعة ويمكنه قطع حلقة التدريب 10 مرات في الوقت الذي يستغرقه أخوه الأصغر لقطع حلقة التدريب 8 مرات. ما التقدير المنطقي لسرعة الأخ الأصغر لحسام؟

F بين 14 kmph و 15 kmph

G بين 15 kmph و 16 kmph

H بين 16 kmph و 17 kmph

J بين 17 kmph و 18 kmph

3. افرض أن محيط عجلة دوارة يبلغ 68 مترًا. وتدور العجلة 12° في كل مرة يتم التقاط راكب جديد بها. فكم تكون المسافة التي تتحركها عندما تدور العجلة 12°؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

A 7.1 m	C 7.8 m
B 7.5 m	D 14.2 m

4. ما ميل المستقيم الموازي لـ $y - 2 = 4(x + 1)$؟

F -4	H $\frac{1}{4}$
G $-\frac{1}{4}$	J 4

5. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	C $\frac{\sqrt{2}}{3}$
B $-\frac{1}{2}$	D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. ما حل نظام المعادلات المبين أدناه؟

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

F (0, 3, 3)	H لا يوجد حل
G (2, 5, 3)	J عدد لا نهائي من الحلول

7. أوجد قيمة m في المثلث MNO إذا كان $n = 12.4$ سنتيمترًا و $M = 35°$ و $N = 74°$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm	C 14.6 cm
B 8.5 cm	D 35.9 cm

8. تُرتب نتائج اقتراع حديث في المصفوفة.

$$\begin{array}{c} \\ \text{المقترح 1} \\ \text{المقترح 2} \\ \text{المقترح 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{لصالح} & \text{ضد} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1553 & 771 \\ 689 & 1633 \\ 2088 & 229 \end{bmatrix} \end{array}$$

بناء على هذه النتائج، أي النتائج لا تكون صالحة؟

F يوجد 771 تصويتًا ضد المقترح 1.

G عدد المصوتين ضد المقترح 1 أكبر من عدد المصوتين للمقترح 2.

H فرصة فوز المقترح 2 ضئيلة.

J عدد المصوتين للمقترح 1 أكثر من عدد المصوتين للمقترح 3.

9. أي من التمثيلات البيانية للمعادلات التالية يكون متناظرًا حول المحور الرأسي y؟

A $y = x^2 + 3x - 1$	C $y = 6x^2 + 9$
B $y = -x^2 + x$	D $y = 3x^2 - 3x + 1$

10. ما الباقي عند قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

F -11 G -1 H 1 J 11

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 7 استخدم قانون الـ Sines في حل مسألة المثلث.

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

11. يُمكن تمثيل السرعة التي تقطعها أمواج تسونامي، أو موجة المد، بالمعادلة $s = 356\sqrt{d}$ ، حيث s تمثل السرعة بالكيلومترات في الساعة و d تمثل متوسط عمق المياه بالكيلومترات. وقد توصلنا إلى أن أمواج تسونامي تقطع 145 كيلومترًا في الساعة. ما متوسط عمق المياه؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

12. الإجابة الشبكية افرض أنك أودعت مبلغ AED 500 في حساب يدفع نسبة مرابحة مركبة نصف سنوية قدرها 5.4%. أوجد قيمة الحساب بالدرهم مقربًا إلى أقرب فلس بعد 10 سنوات.

13. لكي يظل الحصان بصحة جيدة، يحتاج إلى تناول 5 كيلوجرامات من التبن كل يوم.

a. اكتب معادلة لتمثيل مقدار التبن اللازم للحفاظ على صحة x من الأحصنة لعدد d من الأيام.

b. هل تمثل معادلتك تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ اشرح سبب اختيارك.

c. ما مقدار التبن الذي تحتاجه ثلاثة من الأحصنة في شهر يوليو؟

14. الإجابة الشبكية ما نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 28 = 0$؟

15. تتدرب بدرية لتجري سباق 10 كيلومترات. ويوضح الجدول أدناه الأزمنة التي حققتها في العديد من سباقات طولها 1 كيلومتر. وترد الأزمنة بالدقائق. صِف المركز وفكك البيانات باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

8.10	7.25
6.75	7.40
7.35	7.20
7.25	7.10
7.45	8.00

16. الإجابة الشبكية يستمر نمط المربعات أدناه إلى ما لا نهاية، مع إضافة مزيد من المربعات في كل خطوة. فكم عدد المربعات في الخطوة العاشرة؟

الخطوة 1 **الخطوة 2** **الخطوة 3**

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

17. توضح ساعات حمدة بوظيفتها الصيفية لأسبوع واحد في الجدول أدناه. وتحصل على AED 6 في الساعة.

ساعات عمل حمدة	
الأحد	6
الاثنين	6
الثلاثاء	4
الأربعاء	0
الخميس	2
الجمعة	0
السبت	8

a. اكتب تعبيرًا لإجمالي ما تكسبه حمدة أسبوعيًا.

b. أوجد قيمة التعبير من الجزء a باستخدام خاصية التوزيع.

c. تعمل أمل مع حمدة وتحصل أيضًا على AED 6 في الساعة. فإذا كان إجمالي ما ربحته أمل هذا الأسبوع AED 192 اكتب معادلة وحلها لإيجاد عدد الساعات الإضافية التي عملت بها أمل أكثر من حمدة.

الوحدة 12

المتطابقات والمعادلات المثلثية

السابق

لقد مثّلت الدوال المثلثية بيانيًا وحددت الفترة والسعة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استخدام المتطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
- استخدام متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينها.
- استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية.

لماذا؟ ▲

الإلكترونيات يمكن تمثيل الكثير من النواحي الخاصة بالإلكترونيات باستخدام الدوال المثلثية. تنقل أجهزة المذياع والتلفاز والهاتف الخلوي إضافةً إلى الإنترنت اللاسلكي إشاراتها جميعًا باستخدام أمواج لا سلكية تمثّلها دوال مثلثية. ويمكن إيجاد مقدار الطاقة في أداةٍ إلكترونيةٍ عبر استخدام معادلةٍ مثلثية.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

1. $-16a^2 + 4a$

2. $5x^2 - 20$

3. $x^3 + 9$

4. $2y^2 - y - 15$

5. **الهندسة** تساوي مساحة قطعةٍ مستطيلةٍ من الورق المقوى $x^2 + 6x + 8$ سنتيمترات مربعة. فإذا كان طول قطعة الورق المقوى $(x + 4)$ سنتيمترًا، فكم يساوي عرضها؟

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

6. $x^2 + 6x = 0$

7. $x^2 + 2x - 35 = 0$

8. $x^2 - 9 = 0$

9. $x^2 - 7x + 12 = 0$

10. **البستنة** تبني خديجة حوضًا للأزهار في الفناء الخلفي. وتنوي أن تكون مساحة الحوض 42 مترًا مربعًا. أوجد القيم الممكنة لـ x.

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

11. $\sin 45°$

12. $\cos 225°$

13. $\tan 150°$

14. $\sin 120°$

15. **ألعاب الملاهي** يمكن إيجاد المسافة من أعلى نقطةٍ في الأرجوحة الدوارة وبين سطح الأرض عبر ضرب 30 مترًا في $\sin 90°$. فما ارتفاع الأرجوحة الدوارة حين تكون عند منتصف المسافة بين أعلى نقطةٍ وبين الأرض؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حلّل $x^3 + 2x^2 - 24x$ إلى عواملها الأولية.

$x^3 + 2x^2 - 24x = x(x^2 + 2x - 24)$

من المفترض أن ناتج ضرب معاملات حدود x يساوي -24، ومن المفترض أن يساوي مجموعها 2. ناتج ضرب العددين 6 و -4 يساوي -24 ويساوي مجموعهما 2.

$x(x^2 + 2x - 24) = x(x + 6)(x - 4)$

مثال 2

حُـلّ المعادلة التالية $x^2 + 6x + 5 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

المعادلة الأصلية	$x^2 + 6x + 5 = 0$
التحليل إلى العوامل.	$(x + 5)(x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \qquad x + 5 = 0$

$x = -1 \qquad x = -5$

مجموعة الحلول هي $\{-1, -5\}$.

مثال 3

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 135°$.

زاوية المرجع تساوي $180° - 135°$ أو $45°$.

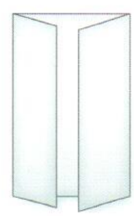
$\cos 45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. بما أن الزاوية $135°$ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

البدء في هذه الوحدة

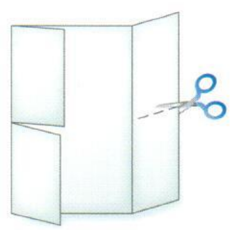
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 12. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات® منظّم الدراسة

المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 12 حول المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية. ابدأ بورقةٍ قياسها ″17 × ″11 وأربع أوراق رسم بياني.

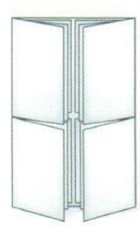


1 **اطوِ** الأضلاع القصيرة للورقة التي قياسها ″17 × ″11 لتلتقي بمنتصف الورقة.



2 **قُصّ** كل لسانٍ إلى نصفين كما هو موضح.

3 **قُصّ** أربع أوراقٍ من ورقة الرسم البياني إلى نصفين واطوِ كل نصف ورقة إلى نصفين.



4 **أدخل** النصفين المطويين تحت كلٍ من الألسنة الأربعة وضع دبابيس على طول الطيّة. سَمِّ كل لسانٍ كما هو موضح.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية	trigonometric identity
متطابقة ناتج القسمة	quotient identity
متطابقة عكسية	reciprocal identity
متطابقة فيثاغورس	Pythagorean identity
متطابقة الزاويتين المتتامتين	cofunction identity
متطابقة الزاوية السالبة	negative angle identity
معادلة مثلثية	trigonometric equation

مراجعة المفردات

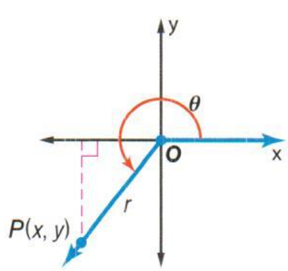
القانون هو جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

المتطابقة هي معادلة تبقى صحيحةً لجميع قيم المتغيرات التي تضمها

النسب المثلثية لكل زاوية قياسها θ هناك نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء، بحيث يكون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. والنسبالمثلثية للزاوية θ هي كالتالي.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$



الدرس 12-1

المتطابقات المثلثية

.. السابق

- لقد أوجدت قيم دوال مثلثية.

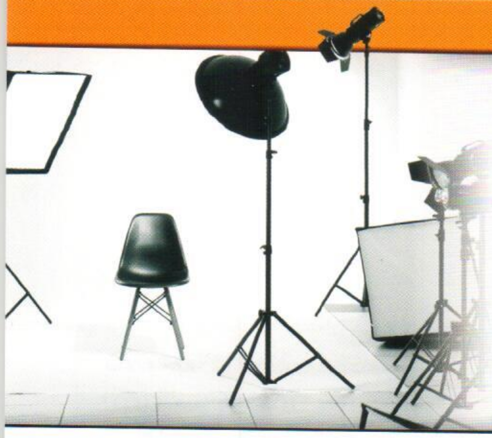
.. الحالي

1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية.

2 استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

.. لماذا؟

- تدعى كمية الضوء التي يقدّمها مصدرٌ لسطحٍ *بالاستضاءة*. وترتبط الاستضاءة E – مقدرةً بوحدة "قدم شمعة" على سطحٍ ما – ببعد السطح R عن مصدر الضوء. يمكن استخدام القانون $\frac{I}{ER^2} = \theta$ حيث تمثل I شدّة مصدر الضوء مقدرة بالشمعة وتمثل θ الزاوية بين حزمة الضوء ومستقيم عمودي على السطح – في الحالات التي تكون الإضاءة فيها مهمة، كالتصوير الضوئي.



المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية
trigonometric identity

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 إيجاد القيم المثلثية

يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصورة $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$. هذا مثال عن متطابقة مثلثية. **المتطابقة المثلثية** معادلة تحتوي على نسبة مثلثية، أو أكثر وهي صحيحةٌ لكلّ القيم التي يكون فيها كل تعبيرٍ في المعادلة معرّفًا.

إذا كنت تستطيع أن تثبت أن قيمةً محددةً للمتغير في المعادلة تجعل المعادلة خاطئة، إذًا فعليك أن تقدم مثالاً مضادًا. ويكفي مثالٌ مضادٌ واحدٌ لإثبات أن معادلةً ما ليست متطابقة.

المفهوم الأساسي المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات ناتج القسمة		
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$		$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$
المتطابقات العكسية		
$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\csc \theta \neq 0$		$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$
$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, $\sec \theta \neq 0$		$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$
$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$, $\cot \theta \neq 0$		$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, $\tan \theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس		
$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$
متطابقات الزوايا السالبة		
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$

يطلق على متطابقات الزوايا السالبة في بعض الأحيان اسم متطابقات الدوال الزوجية والفردية.

المتطابقة $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ صحيحة إلا من أجل قياسات زوايا من قبيل $90°$ و $270°$ و ... و $90° + k180°$، حيث k عدد صحيح. يساوي cosine لكلٍّ من قياسات هذه الزوايا. إذًا $\tan \theta$ ليس معرفًا عندما $\cos \theta = 0$. وثمّة متطابقةٌ مشابهةٌ لذلك هي $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية. ويمكنك إيجاد قيمٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 1 استخدام المتطابقات المثلثية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ θ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	متطابقة فيثاغورس
$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$	بطرح $\sin^2 \theta$ من كل طرف.
$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin \theta$.
$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$	بتربيع $\frac{1}{4}$
$\cos^2 \theta = \frac{15}{16}$	اطرح: $\frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$	أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن θ سالبة. ولذلك، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد إجابةٍ تقريبية.

الخطوة 1 أوجد $\text{Arcsin } \frac{1}{4}$.

$\sin^{-1} \frac{1}{4} \approx 14.48°$ استخدم حاسبة.

نظرًا إلى أن $90° < \theta < 180°$. فإن $\theta \approx 180° - 14.48°$ أو حوالي $165.52°$.

الخطوة 2 أوجد $\cos \theta$.

عوّض θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3 قارن مع القيم الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} 0.97$

$0.97 \approx -0.968$ ✓

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc \theta$ إذا كانت $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ و $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	متطابقة فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2 \theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot \theta$.
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2 \theta$	بالتربيع $-\frac{3}{5}$.
$\frac{34}{25} = \csc^2 \theta$	اجمع: $\frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm \frac{\sqrt{34}}{5} = \csc \theta$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc \theta$ سالبة. وهكذا فإن $\csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تمرين موجّه

1A. أوجد $\sin \theta$ إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{3}$ و $270° < \theta < 360°$.

1B. أوجد $\sec \theta$ إذا كانت $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ و $180° < \theta < 270°$.

نصيحة دراسية

الأرباع فيما يلي جدول لمساعدتك في تذكّر أيّ القيم تكون موجبةً وأيّها تكون سالبةً في كل ربع.

الدالة	+	−
$\sin \theta$	1, 2	3, 4
$\cos \theta$	1, 4	2, 3
$\tan \theta$	1, 3	2, 4
$\csc \theta$	1, 2	3, 4
$\sec \theta$	1, 4	2, 3
$\cot \theta$	1, 3	2, 4

2 تبسيط التعابير

تبسيط التعابير يعني تبسيط تعبيرٍ يضمّ نسب مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيمةٍ عدديةٍ بدلالة نسبةٍ مثلثيةٍ واحدةٍ في حال كان ذلك ممكنًا.

مثال 2 تبسيط التعابير

بسّط التعبير $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ و } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

بسّط كل تعبير مما يلي.

2A. $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$

ويمكن أن يكون تبسيط التعابير المثلثية مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية تبسيط التعابير واستخدامها

الإضاءة راجع بداية الدرس.

a. أكتب الصيغة بدلالة E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2\sec\theta = I \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } RE^2.$$

$$ER^2\frac{1}{\cos\theta} = I \qquad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{E}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كل طرف في } \theta.$$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ اشرح.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } E.$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط.}$$

لا؛ ليست المعادلتان متكافئتين. تُبسَّط المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ إلى $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$.

تمرين موجّه

3. أعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

نصيحة دراسية

التبسيط من الأسهل في أغلب الأحيان كتابة جميع التعابير بدلالة sine و/أو cosine.

الربط بتاريخ الرياضيات

أريابهاتا (476-550 ميلادي)
لعلّ أريابهاتا هو الأشهر من بين علماء الرياضيات الهنود. وقد ارتبط اسمه بصورةٍ وثيقةٍ بموضوع الحساب المثلثي. إذ كان أول من أدخل الدوال المثلثية العكسية وحساب المثلثات الكروية، كما حسب أريابهاتا أيضًا القيم التقريبية للعدد باي إضافةً للدوال المثلثية.

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.**

1. إذا كانت $\cot \theta = 2$. فأوجد $\tan \theta$.

2. إذا كانت $\sin \theta = \frac{4}{5}$. فأوجد $\cos \theta$.

3. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$. فأوجد $\sin \theta$.

4. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$. فأوجد $\csc \theta$.

مثال 2 **بسّط كلاً من التعابير التالية.**

5. $\tan \theta \cos^2 \theta$

6. $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$

7. $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$

مثال 3 **8. المثابرة** عندما يمرّ ضوء غير مستقطب عبر عدسة نظارةٍ شمسيةٍ مستقطبة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ الضوء بعد ذلك عبر عدسةٍ مستقطبةٍ أخرى يقع محورها عند زاوية θ بالنسبة للعدسة الأولى، فإن شدّة الضوء تنخفض مرةً أخرى. ويمكن إيجاد شدّة الضوء الخارج باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$،

وفيها I_0 هي شدّة الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة الثانية، و I هي شدّة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين محوري الاستقطاب.

a. بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$.

b. استخدم الصيغة المبسّطة لتحديد شدّة الضوء المارّ عبر عدسة استقطابٍ ثانيةٍ يشكّل محورها زاويةً قياسها $30°$ بالنسبة للعدسة الأصلية.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.**

9. إذا كانت $\cos \theta = \frac{3}{5}$. فأوجد $\csc \theta$.

10. إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$. فأوجد $\tan \theta$.

11. إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$. فأوجد $\cos \theta$.

12. إذا كانت $\tan \theta = 2$. فأوجد $\sec \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $180° < \theta < 270°$.

13. إذا كانت $\cos \theta = -\frac{3}{5}$. فأوجد $\csc \theta$.

14. إذا كانت $\sec \theta = -3$. فأوجد $\tan \theta$.

15 إذا كانت $\cot \theta = \frac{1}{4}$. فأوجد $\csc \theta$.

16. إذا كانت $\sin \theta = -\frac{1}{2}$. فأوجد $\cos \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $270° < \theta < 360°$.

17. إذا كانت $\cos \theta = \frac{5}{13}$. فأوجد $\sin \theta$.

18. إذا كانت $\tan \theta = -1$. فأوجد $\sec \theta$.

19. إذا كانت $\sec \theta = \frac{5}{3}$. فأوجد $\cos \theta$.

20. إذا كانت $\csc \theta = -\frac{5}{3}$. فأوجد $\cos \theta$.

مثال 2 **بسّط كلاً من التعابير التالية.**

21. $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$

22. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot \theta$

23. $\cot \theta \sec \theta$

24. $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$

25. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec \theta$

26. $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

مثال 3

27 **الإلكترونيات** عندما يمرّ تيارٌ كهربائيٌ في سلكٍ موضوعٍ ضمنَ حقلٍ مغناطيسي، كما في مجفف الشعر، تتولّد قوةٌ تؤثّر في السلك. ويمكن تحديد قوة الحقل المغناطيسي باستخدام القانون $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$.
حيث تمثل F القوة المؤثرة في السلك، وتمثل I شدّة التيار المار بالسلك، وتمثل ℓ طول السلك، وتمثل θ الزاوية التي يصنعها السلك مع الحقل المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة $\sin \theta$. (تلميح: حُلّ لإيجاد F.)

بسّط كلا مِن التعابير التالية.

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

29. $\tan \theta \csc \theta$

30. $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$

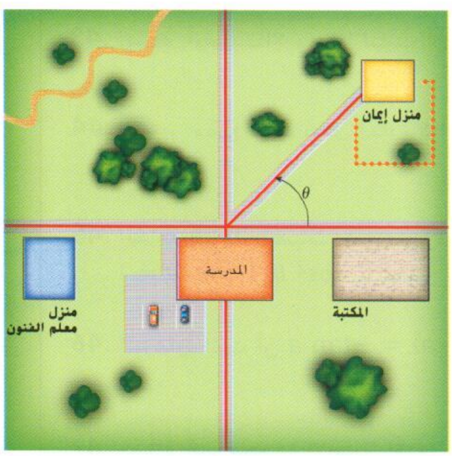
32. $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

33. $2 - 2 \sin^2 \theta$

34. **الشمس** تتعلق قدرة جسمٍ على امتصاص الطاقة بعاملٍ يدعى انبعاثية الجسم e. يمكن حساب الانبعاثية باستخدام القانون $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$، حيث تمثل W معدّل امتصاص بشرة شخصٍ للطاقة الصادرة عن الشمس، وتمثل S الطاقة الصادرة عن الشمس مقدرةً بالواط لكل متر مربع، وتمثل A مساحة السطح المعرّض للشمس، وتمثل θ الزاوية بين الإشعاعات الشمسية وخطٍ عموديٍ على الجسم.

a. حُلّ المعادلة لإيجاد W. واكتب إجابتك باستخدام $\sin \theta$ أو $\cos \theta$ فقط.

b. أوجد قيمة W إذ كان $e = 0.80$، و $\theta = 40°$، و $A = 0.75 \text{ m}^2$، و $S = 1000 \ W/m^2$. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئة.



35. **تمثيل النماذج** تعرض الخريطة بعضًا من المباني في حيّ إيمان، والتي تزورها بصورةٍ دورية. يساوي $\sin \theta$ المتشكّلة بين الطرق التي تربط بين المكتبة والمدرسة ومنزل إيمان $\frac{4}{9}$.

a. ما cosine للزاوية؟

b. ما ظل الزاوية؟

c. ما sine المتشكلة من الطرقات التي تربط بين منزل معلّم الفنون والمدرسة ومنزل إيمان وما cosine وظلّها؟

36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ متطابقةً مثلثية. تأمل المتطابقة الهندسية $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$.

a. **جدوليًا** انسخ الجدول أدناه وأكمله.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$				
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$				

b. **بيانيًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني من أجل تمثيل $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ في صورة دالتين منفصلتين. وارسم التمثيل البياني.

c. **تحليليًا** إذا لم يكن التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين، إذًا فالمعادلة ليست متطابقة. هل يتطابق التمثيلان البيانيان؟

d. **تحليليًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إن كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة. (تحقق من ضبط حاسبتك على نمط الدرجات).

37. التزلج يهبط متزلجٌ كتلته m على تلةٍ زاويتها θ درجةً بسرعة ثابتة. وعند تطبيق قوانين نيوتن على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي: $F_n - mg\cos\theta = 0$ و $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$. حيث تمثل g التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية، وتمثل F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، وتمثل μ_k معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد μ_k بوصفها دالة لــ θ.

بسّط كل تعبير

38. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta}{1 - \csc^2\theta}$

39. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)}$

40. $\dfrac{\sec\theta\sin\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sec\theta}$

41. $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\tan(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي يتناقش إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبهم المنزلي متطابقة. حيث يقول إبراهيم إنه ونظرًا لتجربيه عشر قيمٍ محددةٍ وإلى أنّها جميعًا كانت صالحة، فلا بدّ أنها متطابقة. في حين يقول أحمد إنه لا يمكن استخدام سوى قيمٍ محددةٍ بمثابة أمثلةٍ مضادةٍ لإثبات عدم كون معادلةٍ متطابقة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

43. التحدِ أوجد مثالاً مضادًا لتثبت أن $1 - \sin x = \cos x$ ليست متطابقة.

44. التبرير وضّح كيف يمكن إعادة كتابة قانون الاستضاءة الوارد في بداية هذا الدرس لإثبات أن $\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$.

45. الكتابة في الرياضيات تعود شهرة العالم فيثاغورس في جلّها إلى نظرية فيثاغورس. وتعدّ المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثالاً عن متطابقات فيثاغورس. فلِمَ تصنّف هذه المتطابقة كذلك برأيك؟

46. البرهان أثبت أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.

47. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرين مكافئين لــ $\tan\theta\sin\theta$.

48. التبرير اشرح كيف يمكنك استخدام القسمة لإعادة كتابة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ بالصورة $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

49. التحدِ أوجد $\cot\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $90° \leq \theta < 180°$.

50. تحليل الخطأ تبسّط إيمان وأسماء $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إيمان

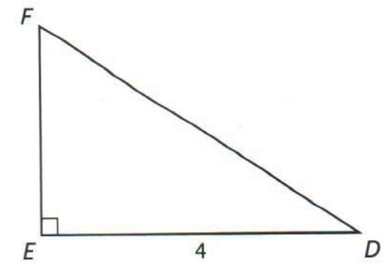
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta + 1$$
$$= \sec^2\theta$$

أسماء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$= \sin^2\theta$$

تدريب على الاختبار المعياري

51. استعن بالشكل الموضح أدناه. إذا كان $\cos D = 0.8$. فما طول $\overline{DF}$؟



A 5 **B** 4 **C** 3.2 **D** $\frac{4}{5}$

52. الاحتمالات يحتوي وعاءٌ على 16 كرة زجاجية خضراء و كرتين زجاجيتين حمراوين و 6 كرات زجاجية صفراء. فكم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تنبغي إضافتها إلى الوعاء من أجل مضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟

F 4 **G** 6 **H** 8 **J** 12

53. SAT/ACT تصغر أماني أمل بـ 6 سنوات. ويساوي عمر آمنة ضعف عمر أمل. ويساوي مجموع أعمارهنّ جميعًا 54. فأيّ معادلةٍ مما يلي يمكن استخدامها لإيجاد عمر أمل؟

A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$

B $x - 6x + (x + 2) = 54$

C $x - 6 + 2x = 54$

D $x + (x - 6) + 2x = 54$

E $2(x + 6) + (x + 6) + x = 54$

54. أيّ من الدّوال التالية تمثّل نموًا أسيًا؟

F $y = (0.3)^x$

G $y = (1.3)^x$

H $y = x^3$

J $y = x^{\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

أوجد كل قيمةٍ مما يلي، واكتب قياسات الزوايا بالراديان، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

55. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

56. $\text{Sin}^{-1}\ \frac{\pi}{2}$

57. $\text{Arctan}\ \frac{\sqrt{3}}{3}$

58. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\ \frac{6}{7}\right)$

59. $\sin\left(\text{Arctan}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

60. $\cos\left(\text{Arcsin}\ \frac{3}{5}\right)$

61. الفيزياء يربط ثقلٌ إلى نابضٍ ويعلّق من السقف. وفي حالة التوازن، يتوضّع الثقل على ارتفاع 4 أمتارٍ فوق الأرضية. يُسحب الثقل إلى الأسفل مسافة 1 مترٍ ثمّ يُحرّر. اكتب معادلة بعد d الثقل الموجود فوق سطح الأرضية بصورة دالة للزمن t ثانية على فرض أن الثّقل يعود إلى وضعيته الدنيا كلّ 4 ثوان.

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

62. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4} \cdot 2^{k-1}$

63. $\sum_{k=1}^{7} 81\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

64. $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{3} \cdot 5^{k-1}$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

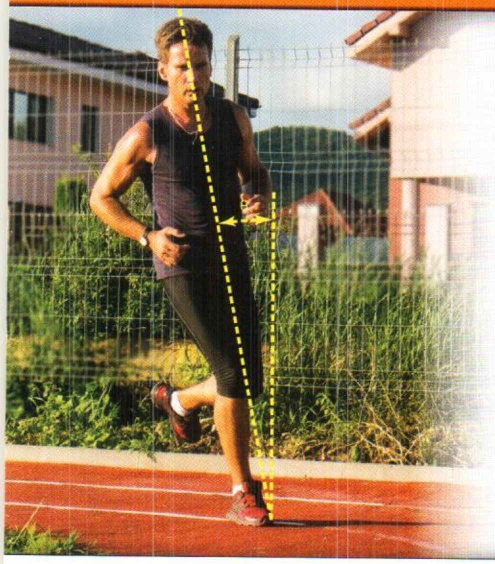
65. $a + 1 = \frac{6}{a}$

66. $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$

67. $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

الدرس 12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

:. السابق	:. الحالي	:. لماذا؟
● لقد استخدمت المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.	1 ● إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى صيغة الطرف الآخر. 2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل كل طرفٍ في المتطابقة إلى الصيغة نفسها.	● حين كان خالد يركض على مضمارٍ دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديًا على الأرض، بل كان يميل بعيدًا عن الوضعية الرأسية. وتد. الزاوية الحادة غير السالبة θ التي يصنعها جد خالد مع الشاقول باسم *زاوية الميل* وتوصف بالمعادلة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$. هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة الدوال المثلثية. فهناك معادلةٌ أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin\theta = \cos\frac{v^2}{gR}\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$. هل هاتان المعادلتان مستقلتان تمامًا بعضهما عن بعض أم أنهما نسختان مختلفتان عن علاقةٍ واحدة؟



1 تحويل أحد طرفي متطابقة

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافةً إلى تعاريف النسب المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقةٍ ما، فيتعين عليك إثبات صحتها من أجل جميع قيم θ.

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

المفهوم الأساسي إثبات المتطابقات عبر تحويل طرفٍ واحد

الخطوة 1 بسّط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

مثال 1 تحويل طرف واحد في متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$.

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$$ اضرب البسط والمقام بـ $1+\cos\theta$.

$$\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$$ $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$

$$\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$$ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$1+\cos\theta = 1+\cos\theta \ \checkmark$$ بقسمة البسط والمقام على $\sin^2\theta$.

تمرين موجّه

1. أثبت صحة المتطابقة $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

عندما تثبت صحة متطابقةٍ مثلثية، فإنك في الحقيقة تحلّ بترتيبٍ عكسي. ففي المثال 1، خذ الخطوة الأخيرة $1 + \cos\theta = 1 + \cos\theta$ بما أن تلك الخطوة صحيحةٌ بوضوح، فيمكنك أن تستنتج أن الخطوة قبل الأخيرة صحيحةٌ أيضًا، وهكذا دواليك بالعودة إلى المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على الاختبار المعياري تبسيط التعابير

$\dfrac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} =$

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

قراءة فقرة الاختبار

أوجد تعبيرًا يساوي على الدوال التعبير المعطى. ولاحظ أن خيارات الإجابات جميعها إما تضمّ $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. ولذلك حُلّ باتجاه اختزال النسب المثلثية الأخرى.

حَل فقرة الاختبار

حوّل التعبير المعطى ليطابق أحد الخيارات.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ و } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب.}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام والضرب.}$$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{بالضرب.}$$

الإجابة هي C.

انتبه!

المثابرة
يشبه إثبات صحة متطابقةٍ التحقق من حل معادلة. يجب عليك تبسيط أحد الطرفين أو كليهما بصورةٍ منفصلةٍ إلى أن يصبحا متماثلين.

نصيحة عند حل الاختبار

التحقق من الإجابات تحقق من صحة إجابتك عبر اختيار قيمٍ لـ θ. ثم أوجد قيمة التعبير الأصلي وقارنه مع إجابتك المختارة.

تمرين موجّه

2. $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta) =$

F $\cot^2\theta$ **G** $\tan^2\theta$ **H** $\cos^2\theta$ **J** $\sin^2\theta$

2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

من الأسهل أحيانًا تحويل كل طرفٍ من طرفي المتطابقة بصورةٍ منفصلة إلى صيغةٍ مشتركة. ومن شأن الاقتراحات التالية أن تساعدك في إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

المفهوم الأساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- عوّض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل إلى العوامل أو اضرب حسب الضرورة. وقد يتعيّن عليك ضرب البسط والمقام بالتعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كلاً من طرفي المتطابقة بدلالة الـ Sine و Cosine فقط. ثم بسّط كلاً من الطرفين قدر الإمكان.
- لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تقم بإجراء العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

مثال 3 الإثبات بتحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$.

$1 - \tan^4 \theta \stackrel{?}{=} 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$ المعادلة الأصلية

$(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \stackrel{?}{=} \sec^2 \theta (2 - \sec^2 \theta)$ بتحليل كل طرف إلى العوامل.

$[1 - (\sec^2 \theta - 1)] \sec^2 \theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

$(2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta = (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$ ✓ بسّط.

تمرين موجّه

3. أثبت صحة المتطابقة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$.

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:.**

1. $\cot \theta + \tan \theta = \dfrac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$

2. $\cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

3. $\sin \theta = \dfrac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$

4. $\tan^2 \theta = \dfrac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

5. $\tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$

6. $\tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$

مثال 2 **7** **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقةٍ فيها $\dfrac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$؟

A $\sin^2 \theta$ **B** $\cos^2 \theta$ **C** $\tan^2 \theta$ **D** $\csc^2 \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:.**

8. $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$

9. $\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta$

10. $1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$

11. $\sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1$

12. $\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2$

13. $\dfrac{1 - 2\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$

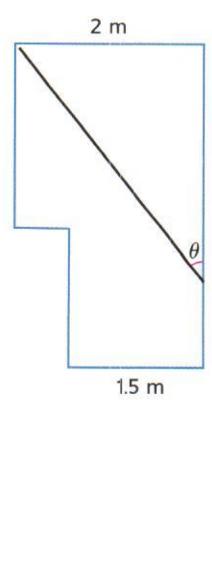
14. $\tan \theta = \dfrac{\sec \theta}{\csc \theta}$

15. $\cos \theta = \sin \theta \cot \theta$

16. $(\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta$

17. $\cos \theta \cos (-\theta) - \sin \theta \sin (-\theta) = 1$

مثال 2 **18.** **السلّم** استنتج بعض الطلاب تعبيرًا لحساب طول سلّم، علمًا أنه حين يُحمل بصورةٍ مسطحةٍ فإنه يمكن أن يشغل زاويةً بحيث يمتدّ من رواقٍ عرضه 1.5 مترًا إلى رواقٍ عرضه متران كما هو موضح. وقد حدّدوا أن الطول الأقصى ℓ لسلمٍ يشغل هذا الركن يعطى بالعلاقة $\ell(\theta) = \dfrac{2 \sin \theta + 1.5 \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$. وعندما حلّت المعلمة المسألة، استنتجت أن $\ell(\theta) = 2 \sec \theta + 1.5 \csc \theta$. فهل التعبيران متكافئان؟



مثال 3

أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:

19. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20. $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21. $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25. $\csc\theta - 1 = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

26. $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

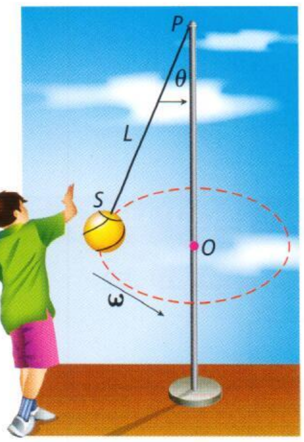
28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30. $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$



33. **التبرير المنطقي** يمثل الرسم التخطيطي على الجهة اليسرى لعبة كرة الحبل. حين تدور الكرة حول العمود، تمسح القطعة المستقيمة $\overline{SP}$ سطحًا مخروطيًا. تعطى الصيغة التي تعبر عن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية التي يشكلها الحبل مع العمود θ بالمعادلة $L = \frac{g\sec\theta}{\omega^2}$. هل $L = \frac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا معادلةٌ تعبر عن العلاقة بين L و θ؟

34. **الجري** يأخذ جزء من مضمار سباقٍ شكل قوسٍ دائري نصف قطره 16.7 مترًا. وعندما تجري عدّاءةٌ على طول القوس، فإن Sine زاوية ميل جسدها θ يساوي $\frac{1}{4}$. أوجد سرعة العدّاءة. واستخدم صيغة زاوية الميل الواردة في بداية الوحدة، $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث $g = 9.8$ و R تمثل نصف القطر. (إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولاً.)

عند تبسيط التعبير، فهل يساوي 1 أم 1−؟

35. $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

36. $\sin\theta\csc(-\theta)$

37. $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

38. $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

39. $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

40. $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

بسّط التعبير إلى ثابتٍ أو إلى نسبة مثلثيةٍ أساسية.

41. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

42. $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

43. $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

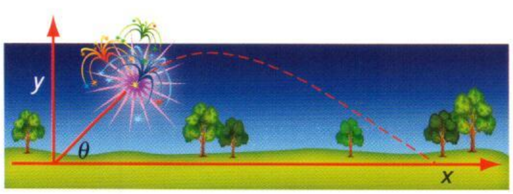
44. $\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

45. $\tan\theta\cos\theta$

46. $\cot\theta\tan\theta$

47. $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

48. $\frac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$



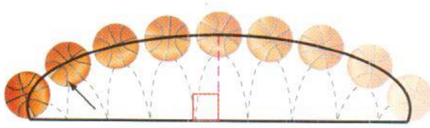
49. **فيزياء** عند إطلاق إحدى الألعاب النارية من سطح الأرض، يرتبط ارتفاعها y وإزاحتها الأفقية x بالمعادلة $y = \frac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث تمثل v_0 السرعة البدائية للمقذوف، وتمثل θ زاوية إطلاق المقذوف، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

.50 الإلكترونيات عند مرور تيارٍ متناوبٍ تردده f وذروته I_0 عبر مقاومة R، فإن القدرة التي تبلغ المقاومة عند الزمن t ثانية تعطى بالعلاقة $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi ft$.

a. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

b. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

51 رمي كرة في هذه المسألة، سوف تستكشف مسار الكرة الذي تمثّله المعادلة $h = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث تمثل θ قياس الزاوية بين الأرض ومسار الكرة، وتمثل v_0 سرعتها المبدئية بالأمتار في الثانية، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. قيمة g تساوي 9.8 m/s^2.



a. إذا كانت السرعة البدائية للكرة تساوي 47 مترًا في الثانية، أوجد ارتفاع الكرةعند الزوايا $30°$ و $45°$ و $60°$ و $90°$. قرّب إلىأقرب جزءٍ من عشرة.

b. مثّل المعادلة بيانيًا على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

c. أثبت أن الصيغة $h = \frac{v_0{}^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصيغة المعطاة أعلاه.

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

.52 الفرضيات حدّد المتطابقة التي لا تنتمي إلى المتطابقات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

.53 التحدي حوّل الطرف الأيمن من $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ لتثبت أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

.54 الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا لا يمكنك تربيع كلا طرفي معادلةٍ عندما تثبت صحة متطابقة مثلثية.

.55 التبرير اشرح سبب كون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة في حين $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست كذلك.

.56 كتابة سؤال يعاني أحد الزملاء في الصف من صعوبةٍ أثناء محاولة إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ تتضمن العديد من النسب المثلثية لزوايا لها درجات متعددة. اكتب معادلةً لمساعدته في حلّ المسألة.

.57 الكتابة في الرياضيات لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالبًا بدلالة الـ Sine وقانون الـ Cosine؟

.58 التحدي لتكن $x = \frac{1}{2} \tan \theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. اكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ بدلالة دالة مثلثيةواحدة لـ θ.

.59 التبرير برّر المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة.

تدريب على الاختبار المعياري

SAT/ACT .60 يضطر صاحب إحدى الشركات الصغيرة إلى توظيف عمّال موسميين حينما تقتضي الحاجة ذلك. توضح القائمة التالية عدد العاملين الذين تم توظيفهم شهريًا على مدى 5 أشهر.

5, 14, 6, 8, 12

إذا كان متوسط هذه البيانات يساوي 9، فما هو الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي لهذه البيانات؟ (قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة)

A 3.5
B 3.9
C 5.7
D 8.6
E 12.3

.61 أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x-4)^2 + y^2 - 16 = 0$.

F $C(-4, 0);\ r = 4$ وحدات
G $C(-4, 0);\ r = 16$ وحدة
H $C(4, 0);\ r = 4$ وحدات
J $C(4, 0);\ r = 16$ وحدة

.62 الهندسة يساوي محيط مثلث قائم الزاوية 36 سنتيمترًا. فإذا علمت أن طول الساق الأطول ناقصًا منه ضعف طول الساق الأقصر يساوي 6 سنتيمترات، فما أطوال أضلاع المثلث الثلاثة جميعها؟

A 3 cm., 4 cm., 5 cm.
B 6 cm., 8 cm., 10 cm.
C 9 cm., 12 cm., 15 cm.
D 12 cm., 16 cm., 20 cm.

.63 بسّط $128^{\frac{1}{4}}$.

F $2\sqrt[4]{2}$
G $2\sqrt[4]{8}$
H 4
J $4\sqrt[4]{2}$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-12)

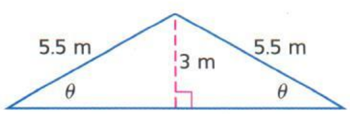
.64 $\tan\theta$. إذا كان $\cot\theta = 2$؛ $0° \le \theta < 90°$

.65 $\sin\theta$. إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$؛ $0° \le \theta < 90°$

.66 $\csc\theta$. إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$؛ $90° < \theta < 180°$

.67 $\cos\theta$. إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$

.68 الهندسة المعمارية للدعامة الخاصة بسقفٍ شكل مثلثين قائمين كما هو موضح في الشكل على الجهة اليسرى. أوجد θ.



.69 وجبات سريعة يعرض الجدول التوزيع الاحتمالي لوجبات التوفير التي طلبت في أحد المطاعم أيّام الأحد صباحًا. استخدم المعلومات لتحديد قيمة توقع الوجبات المطلوبة.

وجبات التوفير المطلوبة				
الوجبات	AED 3	AED 4	AED 5	AED 6
الاحتمال	0.5	0.2	0.1	0.2

أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطع الزائدٍ له المعادلة المعطاة. ثمّ مثّل القطع بيانيًا.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

71. $\frac{(y+6)^2}{20} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

72. $x^2 - 36y^2 = 36$

مراجعة المهارات

بسّط.

73. $\frac{2+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

74. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

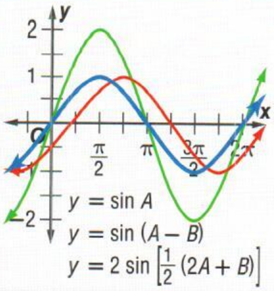
75. $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

76. $\frac{-2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

الدرس 12-3

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• أوجدتَ قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.	1 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق. 2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق.	• هل سبق أن استخدمت مزودًا لاسلكيًا لشبكة الإنترنت وفقدت الإشارة مؤقتًا؟ يسبّب مرور أمواجٍ في مكانٍ واحدٍ وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجةٍ سعتها أكبر أو أصغر من أيٍّ من الموجتين المركّبتين لها.



ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات المجموع والفرق

لاحظ أن المعادلة الثالثة المبيّنة أعلاه تتضمن مجموع A و B. من المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لــ $\sin 15°$ عبر إيجاد قيمة $\sin(60° - 45°)$. توجد صيغٌ يمكن استخدامها لإيجاد قيم تعابير مثل $\sin(A - B)$ أو $\cos(A + B)$.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan(A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	• $\tan(A - B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية المجهولة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin 105°$

استخدم المتطابقة $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$\sin 105° = \sin(60° + 45°)$ — $A = 60°$ و $B = 45°$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — أوجد قيمة كل تعبير.

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — اضرب.

b. $\cos(-120°)$

استخدم المتطابقة $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$\cos(-120) = \cos(60° - 180°)$ — $A = 60°$ و $B = 180°$

$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$ — متطابقة الفرق

$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$ — أوجد قيمة كل تعبير.

$= -\frac{1}{2}$ — اضرب.

تمرين موجّه

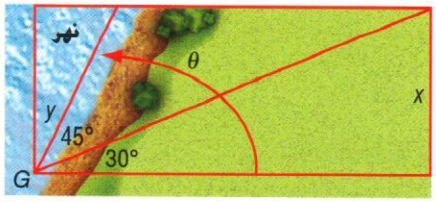
1A. $\sin 15°$

1B. $\cos(-15°)$

يمكنك استخدام متطابقات مجموع الزوايا وفرقها لحلّ تطبيقاتٍ من الحياة اليومية.

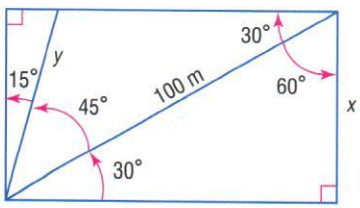
مثال 2 من الحياة اليومية متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تقيس عالمة جيولوجيا الزاوية بين ضلع في قطعة أرض مستطيلة الشكل وبين المستقيم الممتدّ من موضعها إلى الزاوية المقابلة في قطعة الأرض تلك، لتجد أنها تساوي °30. ثمّ تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الذي يصل بالنقطة التي يمر بها النهر على ذلك العقار، لتجد أنها تساوي °45. تقف العالمة على بعد 100 مترٍ من الزاوية المقابلة للعقار. فكم تبعد عن نقطة مرور النهر بالعقار؟



الفهم تطلب المسألة إيجاد المسافة بين عالمة الجيولوجيا ونقطة مرور النهر بخط العقار، أي y.

التخطيط ارسم صورةً توضح المعطيات التي تعرفها من خلال المعلومات المعطاة.



الحل حُلّ لإيجاد x.

$$\sin 30° = \frac{x}{100}$$ تعريف sine

$$x = 100 \sin 30°$$

$$x = 50$$ بما أن قطعة الأرض مستطيلة، فكل ضلعين متقابلين متساويان.

انظر الآن إلى المثلث في أقصى الجهة اليسرى وحُلّ لإيجاد y.

$$\cos 15° = \frac{50}{y}$$ تعريف cosine

$$\cos(45° - 30°) = \frac{50}{y}$$ $15 = 45 - 30$

$$\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{50}{y}$$ متطابقة الفرق

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{y}$$ أوجد القيمة.

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{50}{y}$$ بسّـــط.

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})y = 200$$ الضرب التقاطعي

$$y = \frac{200}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$y = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$y = 50\sqrt{6} - 50\sqrt{2} = 51.8$$ تقريبًا

تبعد عالمة الجيولوجيا حوالي 51.8 مترًا عن نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد معكوس Cosine تمام $\frac{50}{51.8} \approx 15°$. ✓

تمرين موجّه

2. يمكن وصف الحركة التوافقية لجسمٍ ما بالعلاقة $x = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$، حيث تمثل x البعد عن نقطة التوازن بالسنتيمتر وتمثل t الزمن بالدقائق. أوجد المسافة الدقيقة عن نقطة التوازن بعد 45 ثانية.

نصيحة في حل المسائل

تشكيل نموذج شكّل نموذجًا لتصوير حالات المسائل. ويمكن أن يكون النموذج رسمًا أو شكلًا معدًّا من أجسام مختلفة، كالقطع الجبرية أو المطويات الورقية.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية يمكنك أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات.

نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي اصنع قائمة بالقيم المثلثية للزوايا التي يتراوح قياسها بين $0°$ و $360°$ والتي يسهل فيها استخدام متطابقات المجموع والفرق. استخدم قائمتك بمثابة مرجع.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

a. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$ المعادلة الأصلية

$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$ متطابقة المجموع

$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$ بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\sin\theta = \sin\theta$ ✓ بسّط.

b. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos\theta$ متطابقة المجموع

$\sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos\theta$ بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓ بسّط.

تمرين موجّه

3A. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

1. $\cos 165°$
2. $\cos 105°$
3. $\cos 75°$
4. $\sin(-30°)$
5. $\sin 135°$
6. $\sin(-210°)$

مثال 2

7. تمثيل النماذج عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البنّاء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجةً سعتها أكبر من سعة أيٍّ من الموجتين المركّبتين لها. ويحدث التداخل الهدّام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا موجةً لها سعة أصغر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20 \sin(3\theta + 45°)$. بينما يمكن تمثيل الإشارة الثانية بالمعادلة $y = 20 \sin(3\theta + 225°)$.

a. أوجد مجموع الدالتين.

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثّلتان بالمعادلتين؟

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.**

8. $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

10. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

11. $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

12. $\sin 165°$

13. $\cos 135°$

14. $\cos \frac{7\pi}{12}$

15. $\sin \frac{\pi}{12}$

16. $\tan 195°$

17. $\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right)$

مثال 2

18. **الإلكترونيات** في دارةٍ يمرّ بها تيارٌ متناوب، يمكن استخدام الصيغة $c = 2 \sin (120t)$ لإيجاد شدة التيار c بالأمبير بعد مرور t ثانية.

a. أعد كتابة الصيغة باستخدام مجموع زاويتين.

b. استخدم صيغة مجموع الزاويتين لإيجاد الشدة الدقيقة للتيار عند $t = 1$ ثانية.

مثال 3

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

19. $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$

20. $\cos (60° + \theta) = \sin (30° - \theta)$

21. $\cos (180° + \theta) = -\cos \theta$

22. $\tan (\theta + 45°) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$

23. **التبرير** يمكن تمثيل درجات الحرارة العظمى في مدينة مينيابوليس بولاية مينيسوتا بالمعادلة $y = 31.65 \sin \left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث تمثّل الأشهر x بأعدادٍ متسلسلة على النحو التالي: يناير = 1، فبراير = 2، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة الصغرى في مدينة مينيابوليس بالمعادلة $y = 30.15 \sin \left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$.

a. اكتب متباينةً جديدةً عبر جمع التعابير على الجهة اليسرى في كل معادلة وقسمة الناتج على 2.

b. ما معنى الدالة التي كتبتها في الجزء **a**؟

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

24. $\tan 165°$

25. $\sec 1275°$

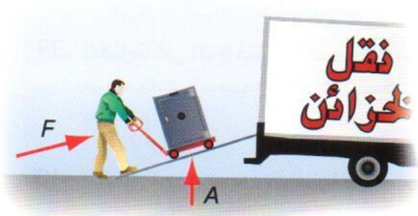
26. $\sin 735°$

27. $\tan \frac{23\pi}{12}$

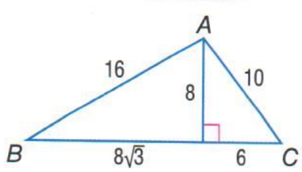
28. $\csc \frac{5\pi}{12}$

29. $\cot \frac{113\pi}{12}$

30. **القوة** في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى، تعطى القوة F اللازمة لتثبيت خزنة في موضعها على منحدرٍ بالعلاقة التالية $F = \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$. حيث W هو وزن الخزنة و $\mu = \tan \theta$. أثبت أن $F = W \tan (A + \theta)$.



31 **خياطة اللحاف** كجزءٍ من خياطة لحاف، يضع الخيّاط حاملين كلٌّ منهما على شكل مثلث قائم معًا لتشكيل قطعة مثلثة جديدة. أطوال أضلاع أحد الحاملين هي 6 سنتيمترات و 8 سنتيمترات و 10 سنتيمترات. ويضم الحامل الثاني أضلاعًا أطوالها 8 سنتيمترات و $8\sqrt{3}$ سنتيمترات و 16 سنتيمترًا. يوضع الحاملان بحيث يتقابل الضلعان اللذان طول كل منهما ثمانية سنتيمترات، كما هو موضح في الشكل ليتشكّل المثلث ABC.

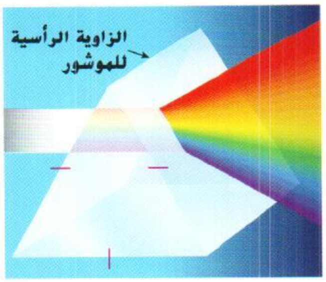


a. ما القيمة الدقيقة لـ sine الخاص بالزاوية BAC؟

b. ما القيمة الدقيقة لـ cosine الخاص بالزاوية BAC؟

c. ما قياس الزاوية BAC؟

d. هل المثلث المتشكل من المثلثين قائم أيضًا؟



32. البصريات عندما يمرّ الضوء بصورةٍ متماثلةٍ عبر منشور، فإن معامل انكسار الزجاج n بالنسبة للهواء يساوي $n = \dfrac{\sin \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin \frac{b}{2}}$، حيث تمثل a قياس زاوية الانحراف، وتمثل b قياس الزاوية الرأسية للمنشور.

a. أثبت في المنشور الموضح أن: $n = \sqrt{3} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$.

b. أوجد قيمة n في المنشور الموضح.

33. التمثيلات المتعددة عليك أن تنفي في هذه المسألة الفرضية القائلة إن $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

a. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
60°	45°				
90°	30°				

b. بيانيًا افترض أن B أقل دائمًا بمقدار 15° من A. استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل $y = \sin (x + x - 15)$ و $y = \sin x + \sin (x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c. تحليليًا حدّد ما إذا كانت $\cos (A + B) = \cos A + \cos B$ متطابقة. واشرح استنتاجك.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:**

34. $\sin (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35 $\cos (A + B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36. $\sec (A - B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37. $\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا   مسائل مهارات التفكير العليا

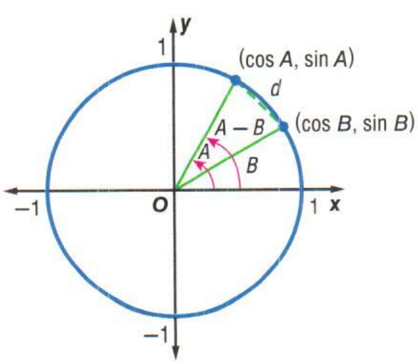
38. الاستنتاج بسّط التعبير التالي دون تفكيك أي من المجاميع أو الفروق.

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

39. الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام متطابقات المجموع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. أضف شرحًا للفرق بين التداخل البنّاء والهدّام.

40. التحدٍ اشتقّ متطابقةً لـ $\cot (A + B)$ بدلالة $\cot A$ و $\cot B$.

41. الفرضيات يعرض الشكل زاويتين A و B في موضعيهما القياسيين على الدائرة الواحدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ و $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$.



42. مسألة غير محددة الإجابة تأمل النظرية التالية. إذا كانت A و B و C زوايا مثلث مائل، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لـ A و B و C. وتحقق من أن الاستنتاج صحيحٌ من أجل قيمك المحدّدة.

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة الشبكية يساوي متوسط سبعة أعداد 0. ويساوي مجموع ثلاثة من هذه الأعداد -9. فما مجموع بقية الأعداد؟

44. المتغيرات a و b و c و d و f و أعداد صحيحة في متتالية فيها $a = 2$ و $b = 12$. لإيجاد الحدّ التالي، ضاعف الحدّ الأخير واجمع ذلك الناتج إلى الحدّ الذي يسبق الحدّ الأخير منقوصًا منه واحد. فعلى سبيل المثال، $c = 25$ لأن $2(12) = 24$ و $2 - 1 = 1$ و $24 + 1 = 25$. ما قيمة f؟

A 74

B 144

C 146

D 256

45. SAT/ACT حُلّ $x^2 - 5x < 14$.

F $\{x|-7 < x < 2\}$

G $\{x|x < -7$ أو $x > 2\}$

H $\{x|-2 < x < 7\}$

J $\{x|x < -2$ أو $x > 7\}$

K $\{x|x > -2$ و $x < 7\}$

46. الاحتمالات توزّع معلّمةٌ عشوائيًا 15 قلمًا أصفر و 10 أقلام خضراء. فما احتمال أن يكون القلم الأول الذي توزعه أصفر والقلم الثاني أخضر؟

A $\frac{1}{24}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{2}{5}$

D $\frac{23}{25}$

مراجعة شاملة

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.** (الدرس 2-12)

47. $\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

48. $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

بسّـــط كل تعبير مما يلي. (الدرس 1-12)

49. $\sin\theta\csc\theta - \cos^2\theta$

50. $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$

51. $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$

52. **الجيتار** عند ضرب وتر الجيتار، فإنه يزاح عن نقطةٍ ثابتةٍ في المنتصف ويهتزّ جيئةً وذهابًا ليصدر نغمةً موسيقية. وتعتمد النغمة المحددة على التردد، أو عدد دورات اهتزاز الوتر في الثانية. لإصدار النغمة A، فإن التردد يساوي 440 دورةً في الثانية، أو 440 هرتز (Hz).

a. أوجد دور هذه الدالة.

b. مثّل بيانيًا ارتفاع النقطة الثابتة على الوتر عن موضع سكونها بدلالة الزمن. وافترض أن للمسافة القصوى فوق موضع السكون قيمة 1 وحدة، وافترض أن المسافة الصغرى تحت هذا الموقع تساوي 1 وحدة.

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

53. $4^n - 1$ مقسومةً على 3.

54. $5^n + 3$ مقسومةً على 4.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

55. $7 + \sqrt{4x + 8} = 9$

56. $\sqrt{y + 21} - 1 = \sqrt{y + 12}$

57. $\sqrt{4z + 1} = 3 + \sqrt{4z - 2}$

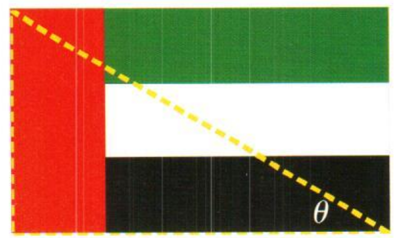
الوحدة 12 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 1-12 إلى 3-12

بسّط كل تعبير مما يلي. (الدرس 1-12)

1. $\cot\theta \sec\theta$
2. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$
3. $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$

5. **التاريخ** في عام 1971، تم اعتماد علم الإمارات العربية المتحدة. وفي هذا العلم، $\tan\theta = \frac{31.5}{51}$. أوجد قيمة $\sin\theta$.



أوجد قيمة كل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-12)

6. $\sin\theta$. إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5};\ 0° < \theta < 90°$
7. $\csc\theta$. إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2};\ 270° < \theta < 360°$
8. $\tan\theta$. إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3};\ 0° < \theta < 90°$

9. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يكافئ $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 1-12)

A $\cos\theta$

B $\csc\theta$

C $\tan\theta$

D $\sec\theta$

10. **مدن الملاهي** افترض أن طفلاً يجلس على الحصان الخارجي في دوامة الخيول. ويبلغ قطر دوامة الخيول 16 مترًا. وتُعطى زاوية ميلها بالمعادلة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R هو نصف قطر المسار الدائري و v هي السرعة بالمتر في الثانية و g تساوي 9.8 أمتار في الثانية المربعة. (الدرس 1-12)

   a. إذا كان Sine زاوية ميل الطفل يساوي $\frac{1}{5}$، فما زاوية الميل التي يصنعها الطفل؟

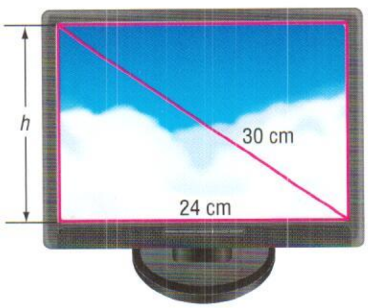
   b. ما السرعة المتجهة لدوامة الخيول؟

   c. إذا كانت سرعة دوامة الخيول 3.6 أمتار في الثانية، فما قيمة زاوية ميل الراكب؟

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 2-12)

11. $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$
12. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$
13. $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$
14. $\tan\theta(1-\sin\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

15. **الحاسوب** يُقاس الوجه الأمامي لشاشة الحاسوب عادةً بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 2-12)



   a. أوجد قيمة h.

   b. استعن بالرسم التخطيطي الموضح لإثبات أن $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 2-12)

16. $\tan^2\theta + 1 = \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$
17. $\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$
18. $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
19. $\cot\theta(1-\cos\theta) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 3-12)

20. $\cos 105°$
21. $\sin(-135°)$
22. $\tan 15°$
23. $\cot 75°$

24. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3-12)

F $\sqrt{2}$

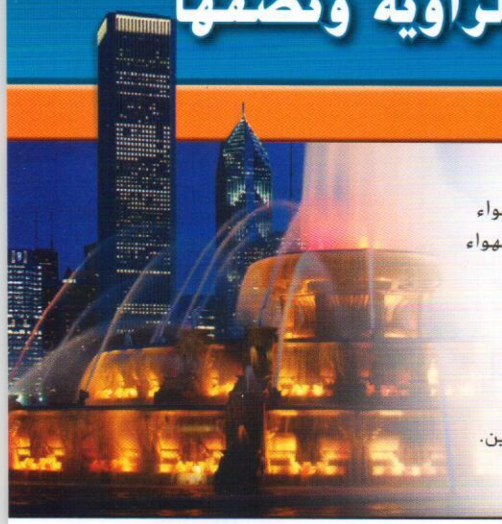
G $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

H $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

J $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25. أثبت أن $\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta = \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$ عبارة عن متطابقة. (الدرس 3-12)

الدرس 12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها



.. السابق

- أوجدت قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

.. الحالي

1. إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات ضعف الزاوية..
2. إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات نصف الزوايا.

.. لماذا؟

- تضمّ نافورة باكنغهام في شيكاغو أنابيب نفّاثة موضوعة عند زوايا محددة لقذف الماء في الهواء وتشكيل أقواس. عند قذف تيارٍ من الماء في الهواء بسرعة متجهة v وزاوية θ مع المحور الأفقي، يتوقع النموذج أن الماء سيقطع مسافة أفقية تساوي $D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$ ويبلغ ارتفاعًا أقصى يساوي $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$. تساعد نسبة H إلى D على تحديد ارتفاع النافورة وعرضها الكليين. عبّر عن $\frac{H}{D}$ في صورة دالة للزاوية θ.

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات ضعف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة دالةٍ لضعف زاويةٍ أو نصفها.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

مثال 1 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

الخطوة 1 استخدم المتطابقة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ لإيجاد قيمة $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ — $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ — اطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الأول، فإن cosine موجب. لذلك، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2 أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ — متطابقة الزاوية المزدوجة

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب.

تمرين موجّه

1. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

مثال 2 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\cos \theta$ و $\sin \theta$، فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد cosine. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \sin \theta = \frac{2}{3}$$

b. $\tan 2\theta$

الخطوة 1 أوجد $\tan \theta$ لاستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \text{تعريف الـ tan}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \qquad \sin \theta = \frac{2}{3} \text{ و } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{إنطاق المقام.}$$

الخطوة 2 أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \qquad \tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \qquad \text{تربيع المقام.}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \qquad \text{بسّط.}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

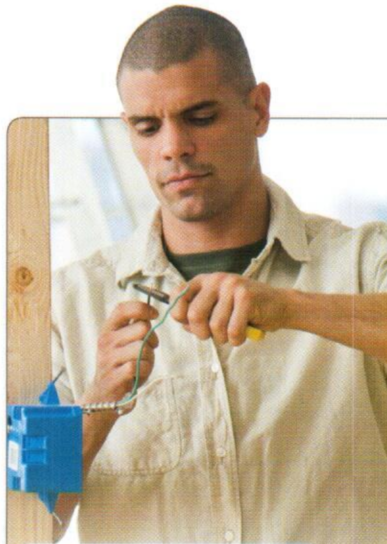
تمرين موجّه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

2A. $\cos 2\theta$ **2B.** $\tan 2\theta$

نصيحة دراسية

اشتقاق الصيغ
يمكنك استخدام متطابقة $\sin (A + B)$ لإيجاد Sine ضعف زاوية θ و $\sin 2\theta$، ومتطابقة $\cos (A + B)$ لإيجاد cosine لضعف زاوية θ و $\cos 2\theta$.



مهنة من الحياة اليومية

الكهربائي يختصّ الكهربائي في توصيل الأجزاء الكهربائية. ويخضع الكهربائيون لتدريبٍ يدوم مدة 3-5 سنوات. وهم بحاجةٍ إلى تعلّم المبادئ النظرية للكهرباء وأكواد البناء. كما أن نيل الشهادة يتطلب خبرةً عمليةً واجتياز اختبارٍ كتابي.

2 متطابقات نصف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة نسبة نصف زاوية.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \qquad \cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \qquad \tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

مثال 3 متطابقات نصف الزاوية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ و θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — استخدم متطابقة لفيثاغورس لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ — $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$ — أوجد قيمة الأس.

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$ — اطرح.

$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$ — أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ — $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ — بسّط.

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ — إنطاق المقام.

إذا كانت الزاوية θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. فإذًا، $\cos\frac{\theta}{2}$ هو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$ — $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$ — $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $67.5°$ تقع في الربع الأول؛ إذًا القيمة موجبة.

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — اطرح الكسور.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ — $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ — اضرب.

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ — $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — بسّط.

تمرين موجّه

3. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع في الربع الثاني.

نصيحة دراسية

اختيار العلامة قد تحتاج في الخطوة الأولى للحل إلى تحديد الربع الذي سيقع فيه ضلع الانتهاء لـ $\frac{\theta}{2}$. وبعدها يمكنك استخدام العلامة الصحيحة بدءًا من ذلك فصاعدًا.

قراءة في الرياضيات

زائد أم ناقص تُقرأ العلامة الأولى لمتطابقة نصف الزاوية *زائد أو ناقص*. وبعكس متطابقات الزوايا المضاعفة، فيجب عليك تحديد العلامة.

مثال 4 من الحياة اليومية التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

النافورة راجع بداية الدرس. أوجد $\frac{H}{D}$

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط البسط والمقام.

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط.

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط.

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

الربط بالحياة اليومية

نافورة حديقة سيتي هول بارك في نيويورك تقع في قلب مانهاتن أمام دار البلدية.

المصدر: Fodor's

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135°$

4B. $\cos\frac{7\pi}{8}$

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضًا استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها لإثبات المتطابقات.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ المتطابقة الأصلية

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب البسط والمقام في $\sin\theta$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب الطرف الأيمن في 1.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ بسّط.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

تمرين موجّه

5. أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

1. $\sin\theta = \frac{1}{4};\ 0° < \theta < 90°$

2. $\sin\theta = \frac{4}{5};\ 90° < \theta < 180°$

3. $\cos\theta = -\frac{5}{13};\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

4. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ 270° < \theta < 360°$

5. $\tan\theta = -\frac{8}{15};\ 90° < \theta < 180°$

6. $\tan\theta = \frac{5}{12};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

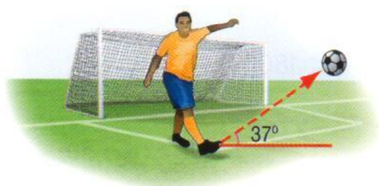
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

7. $\sin\frac{\pi}{8}$

8. $\cos 15°$

مثال 4

9. **كرة القدم** يركل لاعب كرةً بزاوية قياسها 37° مع الأرض وسرعة متجهة أولية قيمتها 16 مترًا في الثانية. تُعطى المسافة d التي تقطعها الكرة في الهواء دون أن يعترضها أي عائق بالمعادلة $d=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$. في هذه الصيغة، g هي التسارع بفعل الجاذبية الأرضية ويساوي 10 أمتار في الثانية المربعة، و v هي السرعة المتجهة الأولية.



a. بسّط هذه الصيغة باستخدام متطابقة زاوية مضاعفة.

b. باستخدام الصيغة المبسطة، ما المسافة التي ستقطعها هذه الكرة؟

مثال 5 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.**

10. $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

11. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

التدريب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.**

12. $\sin\theta = \frac{2}{3};\ 90° < \theta < 180°$

13. $\sin\theta = -\frac{15}{17};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

14. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

15. $\cos\theta = \frac{1}{5};\ 270° < \theta < 360°$

16. $\tan\theta = \frac{4}{3};\ 180° < \theta < 270°$

17. $\tan\theta = -2;\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

18. $\sin 75°$

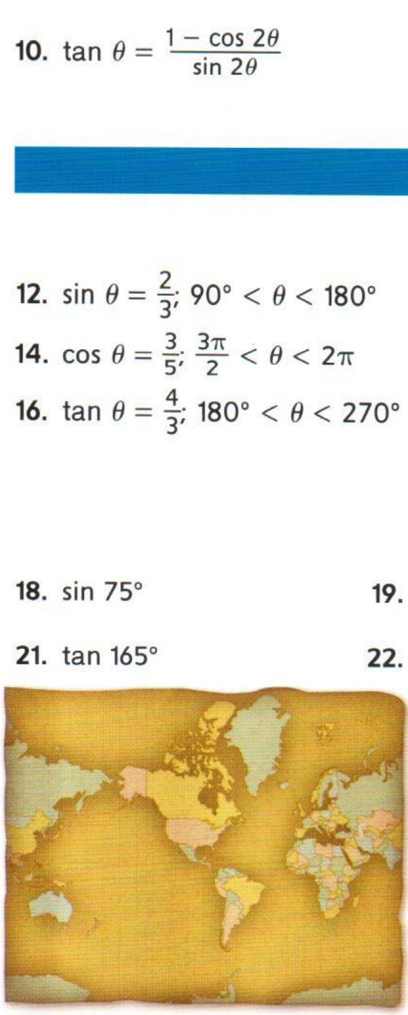
19. $\sin\frac{3\pi}{8}$

20. $\cos\frac{7\pi}{12}$

21. $\tan 165°$

22. $\tan\frac{5\pi}{12}$

23. $\tan 22.5°$



24. **الجغرافيا** إن إسقاط مركاتور للكرة الأرضية هو طريقةٌ للإسقاط تزداد فيها المسافة بين خطوط العرض بزيادة بعدها عن خط الاستواء. ويُحسب موقع نقطةٍ في هذا الإسقاط باستخدام التعبير $\tan\left(45° + \frac{L}{2}\right)$، حيث L هو خط عرض هذه النقطة.

a. اكتب التعبير التالي بدلالة الدالة المثلثية لـ L.

b. خط عرض مدينة تالاهاسي في فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية هو 30° شمالاً. أوجد قيمة التعبير إذا كانت $L = 30°$.

مثال 4 **25** **الإلكترونيات** تأمل دارة تيار متردد تتألف من منبع للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدارة عند الزمن t تساوي $I_0 \sin t\theta$، إذًا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$، حيث R هي قيمة المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

مثال 5 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:**

26. $\tan 2\theta = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

27. $1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta = \dfrac{\sec\theta + \sin\theta}{\sec\theta}$

28. $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$

29. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

30. **كرة القدم** افترض أن حارس مرمى يركل كرةً بثباتٍ بسرعة متجهة أولية قدرها 30 مترًا في الثانية. أثبت أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما تكون $\theta = 45° + A$ كما هي عندما $\theta = 45° - A$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9.

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

31. $\cos\theta = \frac{4}{5};\ 0° < \theta < 90°$

32. $\sin\theta = \frac{1}{3};\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

33. $\tan\theta = -3;\ 90° < \theta < 180°$

34. $\sec\theta = -\frac{4}{3};\ 90° < \theta < 180°$

35. $\csc\theta = -\frac{5}{2};\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

36. $\cot\theta = \frac{3}{2};\ 180° < \theta < 270°$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

37. **التفكير النقدي** تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر .

بثينة

$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\sin(45 - 30) = \sin 45\cos 30 - \cos 45\sin 30$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{4}}{4}$

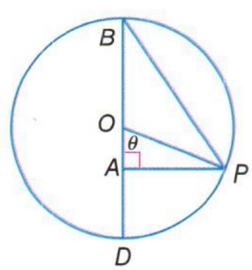
بدرية

$\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

$\sin\dfrac{30}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

38. **التحدِّ** الدائرة O هي دائرة وحدة. استعن بالشكل لإثبات أن $\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.



39. **الكتابة في الرياضيات** اكتب موضوعًا قصيرًا عن الشروط التي يمكنك بموجبها استخدام كلٍ من المتطابقات الثلاث للزاوية $\cos 2\theta$.

40. **البرهان** استخدم صيغة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\sin 2\theta$. واستخدم صيغة $\cos(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.

41. **الاستنتاج** اشتقّ متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعفها.

42. **مسألة غير محددة الإجابة** افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثباتٍ بحيث تغادر القاعدة بسرعة متجهة أولية قدرها 35 مترًا في الثانية وأن $d = \dfrac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$. اشرح السبب في بلوغ المسافة القصوى عندما تكون $\theta = 45°$.

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة القصيرة الزاويتان C و D متكاملتان. قياس الزاوية C يساوي سبعة أضعاف قياس الزاوية D. أوجد قياس الزاوية D بالدرجات.

44. SAT/ACT لدى الآنسة منى قائمةٌ بالرواتب السنوية للعاملين في دائرتها. فأي مقياسٍ للبيانات يصف قيمة الدخل الوسطى للرواتب؟

A المتوسط
B الوسيط
C المنوال
D المدى
E الانحراف المعياري

45. حدّد مجال الدالة التالية ومداها: $f(x) = |4x + 1| - 8$.

F $D = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$، $R = \{y \mid y \ge -8\}$
G $D =$ {كل الأعداد الحقيقية}، $R = \{y \mid y \ge -8\}$
H $D = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$، $R =$ {كل الأعداد الحقيقية}
J $D =$ {كل الأعداد الحقيقية}، $R =$ {كل الأعداد الحقيقية}

46. الهندسة يرصُف جمال ممرًا حجريًا حول بركة ماءٍ دائرية. ولديه ما يكفي من الأحجار لعمل ممر يبلغ 144 مترًا طولاً. فإذا استهلك جميع الأحجار لإحاطة البركة، فما نصف قطر البركة؟

A $\frac{12}{\pi}$ m
B $\frac{72}{\pi}$ m
C 72π m
D 144π m

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-3)

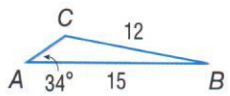
47. $\sin 135°$
48. $\cos 105°$
49. $\sin 285°$
50. $\cos(-30°)$
51. $\sin(-240°)$
52. $\cos(-120°)$

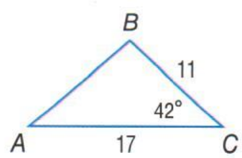
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 12-2)

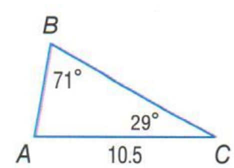
53. $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر الشروع بقانون *sine* أو قانون *cosine*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 12-4)

55.


56.


57.


مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

58. $x^2 + 5x - 24 = 0$
59. $x^2 - 3x - 28 = 0$
60. $x^2 - 4x = 21$

استكشاف 12-5

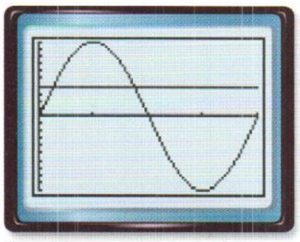
مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات المثلثية

يتركب التمثيل البياني للدالة المثلثية من نقاط تمثل جميع القيم التي تحقق الدالة. ولحل معادلةٍ مثلثية، فإن عليك حساب جميع قيم المتغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني لحل المعادلات المثلثية عبر التمثيل البياني لكل طرفٍ من المعادلة في صورة دالةٍ ومن ثم تحديد نقاط التقاطع.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الحلول الحقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\sin x = 0.4$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.


[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثّلهما بيانيًا. وأعد كتابة المعادلة في صورة معادلتين $Y1 = \sin x$ و $Y2 = 0.4$. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا. نظرًا إلى أن الفترة بالدرجات، فاضبط حاسبتك على نمط الدرجات.

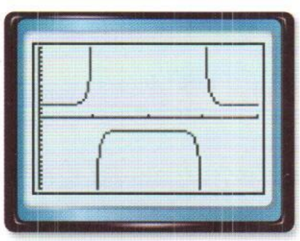
خطوات العملية على الحاسبة: MODE ▼ ▼ ▶ ENTER
Y= SIN X,T,θ,n)
ENTER 0.4 ENTER GRAPH

الخطوة 2 تقريب الحلول. بناءً على التمثيل البياني، يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطع ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استخدم خاصية **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

الحلّان هما $x \approx 23.57°$ و $x \approx 156.4°$.

النشاط 2 عدم وجود حلول حقيقية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.


[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثلهما بيانيًا. المعادلتان المرتبطتان اللتان يتعين تمثيلهما بيانيًا هما $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ و $y_2 = 0$.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= TAN X,T,θ,n) x^2 COS
X,T,θ,n) + 3) X,T,θ,n
) ENTER 0 ENTER

الخطوة 2 لا تتقاطع هاتان الدالتان.

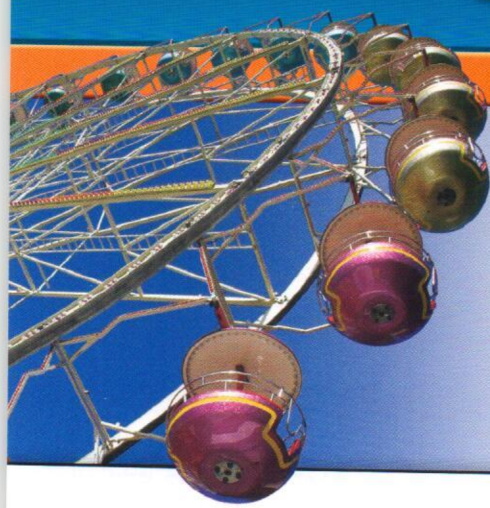
ولذلك ليس للدالة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ أي حلول حقيقية.

التمارين

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحل كلٍ من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7;\ 0° \le x < 360°$
2. $\tan x = \cos x;\ 0° \le x < 360°$
3. $3 \cos x + 4 = 0.5;\ 0° \le x < 360°$
4. $0.25 \cos x = 3.4;\ -720° \le x < 720°$
5. $\sin 2x = \sin x;\ 0° \le x < 360°$
6. $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ إذا كانت $-360° \le x < 360°$

الدرس 12-5 حل المعادلات المثلثية



:: السابق

- تحققت من صحة المتطابقات المثلثية.

:: الحالي

1. حل المعادلات المثلثية.
2. إيجاد الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

:: لماذا؟

- عندما تركب أرجوحةً دوارةً قطرها 40 مترًا وتدور بسرعة 1.5 دورة في الدقيقة، يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق الأرض بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t.$$

بعد تشغيل الأرجوحة، كم يستغرق الأمر قبل أن يصبح مقعدك على ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض لأول مرة؟

المفردات الجديدة
المعادلات المثلثية
trigonometric equations

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات المثلثية

قد درسنا حتى الآن في هذه الوحدة نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية يدعى المتطابقة. والمتطابقات المثلثية هي معادلاتٌ صحيحةٌ لكل قيم المتغير المُعرَّف فيه الطرفان. في هذا الدرس، سوف ندرس **معادلات مثلثية** لا تكون صحيحة إلا بالنسبة لقيم محددةٍ للمتغير. ويشبه حل هذه المعادلات حل المعادلات الجبرية.

مثال 1 حل المعادلات عند معرفة الفترة

حُـلّ $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلل إلى العوامل.

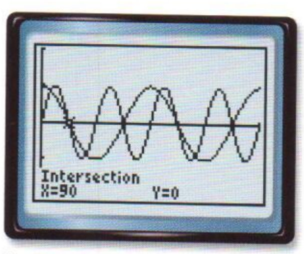
$\cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\theta = 90°$ $\quad \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30° = 150°$

الحلول هي $30°$ و $90°$ و $150°$.

التحقق يمكنك التحقق من حلك بالتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta \cos \theta$ و $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ في المستوى الإحداثي نفسه على حاسبة التمثيل البياني. ثمّ أوجد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. يمكنك أن ترى أن هناك عددًا غير منتهٍ من هذه النقاط، ولكن اهتمامنا ينصب فقط على النقاط الواقعة بين $0°$ و $180°$.



[0, 720] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.5

تمرين موجّه

1. أوجد جميع حلول $\sin 2\theta = \cos \theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

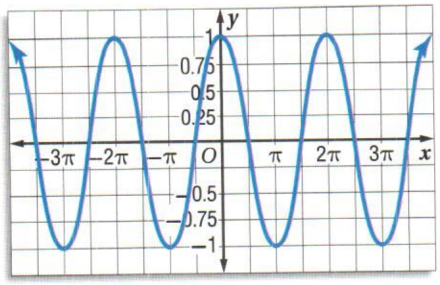
تُحلّ المعادلات المثلثية عادةً لإيجاد قيم المتغير الواقعة بين $0°$ و $360°$ أو بين 0 راديان و 2π راديان. وهناك حلولٌ خارج تلك الفترة. وتختلف هذه الحلول الأخرى بفروقٍ تساوي مضاعفاتٍ صحيحةً لفترة الدالة.

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ $\cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لــ $y = \cos\theta$ لإيجاد حلول $\cos\theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك $-\pi$ و -3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في الفترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π. فترة دالة cosine هي 2π راديان. إذًا فيمكن كتابة الحلول في الصورة $\pi + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

نصيحة دراسية

التعبير عن الحلول في صيغة مضاعفات إن التعبير $\pi + 2k\pi$ يتضمن 3π ومضاعفاته، ولذلك فليس من الضرورة إدراجهما بصورة منفصلة.

تمرين موجّه

2A. حُلّ $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

2B. حُلّ $2\sin\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

غالبًا ما تُستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية حل المعادلات المثلثية

حدائق الملاهي راجع بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$ المعادلة الأصلية

$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$ عوّض عن h بـــ 31.

$10 = -20\cos 3\pi t$ اطرح 21 من كل طرف.

$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$ اقسم كل طرف على 20−.

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$ أوجد معكوس cosine.

$\frac{2\pi}{3} = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} = 3\pi t$ معكوس cosine $-\frac{1}{2}$ هو $\frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ k هو أي عدد صحيح.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\quad$ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ اقسم كل طرف على 3π.

يُحصَل على القيمة الموجبة الصغرى لــ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو حوالي 13 ثانية.

تمرين موجّه

3. كم من الوقت يستغرق الأمر كي يبلغ مقعدك ارتفاع 41 مترًا فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟

2 الحلول الدخيلة

الحلول الدخيلة بعض الدوال المثلثية ليس لها حل. على سبيل المثال، ليس للدالة $\cos\theta = 4$ حل لأن قيم $\cos\theta$ تقع بين -1 و 1 متضمنًا هذين العددين. لذا، تكون مجموعة حلول $\cos\theta = 4$ خالية.

مثال 4 تحديد ما إذا كان هناك حل

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ **إذا كانت** $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\sin\theta - 2 = 0$ أو $2\sin\theta + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin\theta = 2$ ، $2\sin\theta = -1$

هذا ليس حلاً بما أن جميع قيم $\sin\theta$ تقع بين -1 و 1، مشتملاً على القيمتين الطرفيتين.

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

الحلول هي $\frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

التحقق

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$2\sin\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

b. $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ **إذا كانت** $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ تربيع كل طرف.

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ، $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ ضع الطرف الأيسر مساويًا لـ 0.

$0 = 2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$ حلل إلى العوامل.

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ ، $\cos\theta = 0$

$\theta = 180$ ، $\theta = 90° = 270°$

التحقق

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$$
$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$1 = 1 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \times$$

الحلّان هما °90 و °180.

تمرين موجّه

4A. $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$

4B. $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

نصيحة في حل المسائل

الانتظام ابحث عن الأنماط في حلولك، وابحث عن أزواج من الحلول التي يساوي الفرق بينها π أو 2π بالتحديد واكتب حلولك بأبسط نمط ممكن.

إذا لم تكن المعادلة قابلةً للحل بسهولةٍ باستخدام تحليل العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير باستخدام المتطابقات المثلثية. ولكن استخدام المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع، قد يعطي حلولاً دخيلة. إذًا فمن الضروري التحقق من حلك باستخدام المعادلة الأصلية.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حُـلّ $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ بوضع طرفٍ واحدٍ مساويًا للصفر 0.

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\tan^2\theta = 3$ $\quad$ $\tan^2\theta = -1$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ $\quad$ لا يعطي هذا الجزء أي حلولٍ نظرًا إلى أن $\tan^2\theta$ ليست سالبةً على الإطلاق.

$\theta = 60° + 180°k$ و $\theta = -60° + 180°k$. حيث k أي عددٍ صحيح. الحلّان هما $60° + 180°k$ و $-60° + 180°k$.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

5A. $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B. $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

نصيحة دراسية

حل المعادلات المثلثية تذكر أن حل *معادلة مثلثية* يعني الحلّ لإيجاد جميع قيم المتغير.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الانتظام** **حُلّ كل معادلة مما يلي إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$.**

1. $2\sin\theta + 1 = 0$
2. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$
3. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$
4. $2\cos\theta = 1$
5. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$
8. $\sin\theta + \cos\theta = 1$

مثال 2 **حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.**

9. $4\sin^2\theta - 1 = 0$
10. $2\cos^2\theta = 1$
11. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$
12. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$
13. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$
14. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

15. $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$
16. $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$
17. $2\sin^2\theta - 1 = 0$
18. $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$
19. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$
20. $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$

مثال 3 **21. الضوء** يمكن تقدير عدد ساعات النهار d في هارتفورد، كونيتيكت. باستخدام المعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$. حيث t هو عدد الأيام بعد 21 مارس.

a. ما الأيام التي يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات بالتحديد؟

b. باستخدام النتائج في الجزء a. اذكر ما أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. واشرح كيف عرفت ذلك.

المثالان 4-5 حُـلّ كلاً من المعادلات التالية.

22. $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

23. $\tan^2 \theta + 2\tan \theta + 1 = 0$

24. $\cos^2 \theta + 3\cos \theta = -2$

25. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$

26. $\tan \theta = 1$

27. $\cos 8\theta = 1$

28. $\sin \theta + 1 = \cos 2\theta$

29. $2\cos^2 \theta = \cos \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حُـلّ كل معادلة مما يلي عند الفترة المعطاة.

30. $\cos^2 \theta = \frac{1}{4};\ 0° \le \theta \le 360°$

31. $2\sin^2 \theta = 1;\ 90° < \theta < 270°$

32. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

33. $3\sin^2 \theta = \cos^2 \theta;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

34. $2\sin \theta + \sqrt{3} = 0;\ 180° < \theta < 360°$

35. $4\sin^2 \theta - 1 = 0;\ 180° < \theta < 360°$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

36. $\cos 2\theta + 3\cos \theta = 1$

37. $2\sin^2 \theta = \cos \theta + 1$

38. $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\cos \theta$

39. $3\cos \theta - \cos \theta = 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

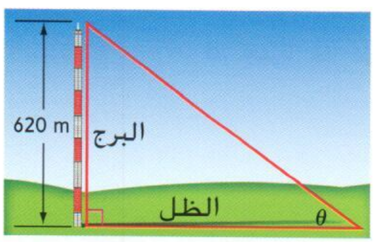
40. $\sin \theta - \cos \theta = 0$

41. $\tan \theta - \sin \theta = 0$

42. $\sin^2 \theta = 2\sin \theta + 3$

43. $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$

مثال 3 44. **الإلكترونيات** من أعلى الأبنية في العالم أحد أبراج النقل التلفزيوني بالقرب من فارغو في داكوتا الشمالية بالولايات المتحدة. وارتفاعه 620 مترًا. فما قياس الزاوية θ إذا كان طول ظل البرج 1.6 كيلومتر؟



حُـلّ كل من المعادلات التالية.

45. $2\sin^2 \theta = 3\sin \theta + 2$

46. $2\cos^2 \theta + 3\sin \theta = 3$

47. $\sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta$

48. $2\cos^2 \theta = -\cos \theta$

49. **الاستنتاج المنطقي** نظرًا إلى المدّ والجزر في المحيط، يتغير عمق y نهر التايمز في لندن، بالأمتار، مع دالة sine لـ x التي تمثل الساعة في اليوم. وفي يوم محدد، كانت تلك الدالة تساوي $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ تقابل 12:00 منتصف الليل، 1:00 صباحًا، 2:00 صباحًا، .... 12:00 منتصف ليل الليلة التالية.

a. ما العمق الأقصى لنهر التايمز في ذلك اليوم؟

b. في أي وقتٍ حدث ذلك العمق الأقصى؟

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

50. $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2\sin \theta + 2 = 0$

51. $2\sin^2 \theta + (\sqrt{2} - 1)\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

52. $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$

53. $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$

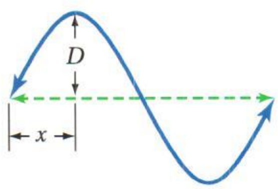
55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$

56. الماس حسب قانون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 هي قرينة انكسار الوسط الذي يدخله الضوء. و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية الانكسار بالدرجات.

a. تساوي قرينة انكسار الماس 2.42، وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. فإذا أصابت حزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي 35°، فما زاوية الانكسار؟

b. اشرح كيف يمكن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعةٌ من الألماس أصلية.

57. المثابرة يمكن تمثيل موجةٍ في وتر جيتارٍ باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin (6.5x) \sin (2500t)$، وفيها D هي الإزاحة بالملّيمتر عند الموضع x ملّيمترًا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t ثانية. أوجد أول زمنٍ موجبٍ يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 0.5 متر من الطرف الأيسر إزاحةٌ مسافتها 0.01 ملّيمتر.



58. التمثيلات المتعددة تأمل المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

a. جدوليًا أنشئ جدول قيم حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي تجعل $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ ؟

b. بيانيًا مثّل $y = \sin \theta$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي يكون عندها التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ ؟

c. تحليليًا بناءً على إجاباتك عن الجزأين a و b، حُلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ لإيجاد كل قيم θ.

d. جبريًا حُلّ كل متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360°$. ثم حُلّ كلاً منها لإيجاد كل قيم θ.

i. $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$

iii. $-\sin \theta \geq 0$

iv. $\cos \theta - 1 < -\frac{1}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

59. التحدِ حُلّ $\sin 2x < \sin x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

60. التبرير قارن وبيّن الفرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما التقنيات المتماثلة؟ وما التقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟

61. الكتابة في الرياضيات لماذا يكون للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول في أغلب الأحيان؟

62. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مثالاً لمعادلةٍ مثلثيةٍ يكون لها حلّان بالضبط إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$.

63. التحدِ كم عدد الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$ لـ $a \sin (b\theta + c) = d$. إذا كان $a \neq 0$ و b عددًا صحيحًا موجبًا؟

تدريب على الاختبار المعياري

64. الإجابة الموسّعة حصل بلال على AED 2500 بمثابة مكافأة لتخرّجه. وقد أودع المبلغ في حسابٍ للتوفير كانت نسبة المرابحة فيه 5.5% في العام.

a. فكم أصبح في حساب التوفير بعد 5 سنواتٍ إذا لم يقم بأيّ إيداعات أو سحوبات إضافية؟

b. بعد كم عامٍ سيكون المبلغ المودعُ في حسابه قد تضاعف؟

65. الاحتمال أوجد احتمال الحصول على العدد 3 ثلاث مرات متتالية إذا رُمي مكعب أعداد ثلاث مرات.

A $\frac{1}{216}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{36}$ **D** $\frac{1}{4}$

66. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه.

$$f(x) = x^4 + 10x^2 + x + 8$$

F 62 **H** 30

G 38 **J** 8

67. SAT/ACT يستمرّ نمط النقاط المبين أدناه إلى ما لا نهاية. بحيث تضاف نقاطٌ إضافيةٌ في كل خطوة.

ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة رقم n؟

A $2n$ **D** $2(n + 2)$

B $n(n + 2)$ **E** $2(n + 1)$

C $n(n + 1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 4-12)

68. $\cos 165°$

69. $\sin 22\frac{1}{2}°$

70. $\sin \frac{7\pi}{8}$

71. $\cos \frac{7\pi}{12}$

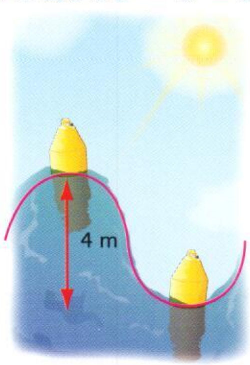
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 2-12)

72. $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$

73. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

74. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

75. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$



76. السلامة في الماء ترتفع عوّامةٌ في الميناء وتنخفض مع حركة الأمواج. تساوي المسافة بين النقطة العليا والسفلى 4 أمتار. وتتحرك العوامة من نقطتها العليا إلى نقطتها الدنيا وعودةً إلى نقطتها العليا كل 10 ثوان.

a. اكتب معادلةً لتمثيل حركة العوّامة. وافترض أنها في وضع التوازن عند $t = 0$ وأنها في طريقها إلى الأعلى من مستوى الماء الطبيعي.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع العوّامة بدلالة الزمن.

c. ما ارتفاع العوّامة بعد 12 ثانية؟

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلةٍ حسابيةٍ مما يلي.

77. $a_1 = 17,\ a_n = 197,\ S_n = 2247$

78. $a_1 = -13,\ a_n = 427,\ S_n = 18{,}423$

79. $n = 31,\ a_n = 78,\ S_n = 1023$

80. $n = 19,\ a_n = 103,\ S_n = 1102$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة نسبيّة بيانيًا.

81. $f(x) = \frac{1}{(x + 3)^2}$

82. $f(x) = \frac{x + 4}{x - 1}$

83. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

الوحدة 12 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5-12 و 2-12 و 1-12)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقات بين الدوال المثلثية.
- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط المعادلات والتعابير المثلثية وإثباتها وحلّها.

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3-12)

- بالنسبة لجميع قيم A و B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4-12)

- متطابقات أضعاف:

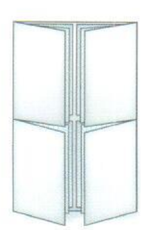
$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

المطويات® منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

- متطابقة الزاويتين المتتامتين cofunction identity
- متطابقة الزاوية السالبة negative angle identity
- متطابقة فيثاغورس Pythagorean identity
- متطابقة ناتج القسمة quotient identity
- متطابقة عكسية reciprocal identity
- معادلة مثلثية trigonometric equation
- متطابقة مثلثية trigonometric identity

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. يمكن استخدام ________ لإيجاد sine 75° و Cosine إذا كان sine 90° و cosine 15° معروفين.
2. المتطابقتان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هما مثالان على ________.
3. ________ هي معادلةٌ تضم متطابقاتٍ مثلثية، وهي صحيحةٌ لجميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معرّفة.
4. يمكن استخدام ________ لإيجاد sin 60° باستخدام الزاوية 30° بمثابة مرجع.
5. تكون ________ صحيحةً فقط عند قيم محددة للمتغير.
6. يمكن استخدام صيغة ________ لإيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.
7. المتطابقتان $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ و $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ هما مثالان على ________
8. يمكن استخدام ________ لإيجاد sine 120° أو Cosine إذا كان sine 90° و cosine 30° معروفين.
9. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي مثال على ________.

مراجعة درس بدرس

12-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

10. $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $270° < \theta < 360°$

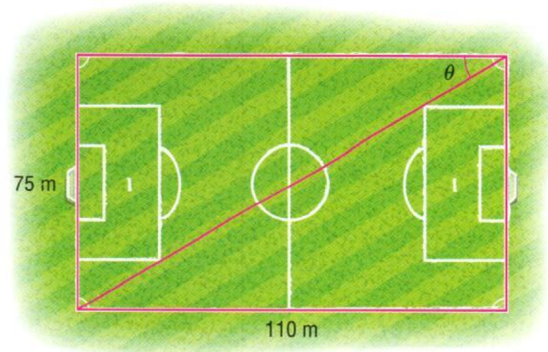
11. $\sec\theta$ إذا كانت $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$

12. $\tan\theta$ إذا كانت $\cot\theta = 2$ و $0° < \theta < 90°$

13. $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ و $180° < \theta < 270°$

14. $\csc\theta$ إذا كانت $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ and $270° < \theta < 360°$

15. كرة القدم في مباريات كرة القدم الدولية. يساوي البعدان الأعظمان لأرض الملعب 110 أمتار في 75 مترًا. أوجد $\sin\theta$.



بسّط كل تعبير.

16. $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$

17. $\tan\theta\csc\theta$

18. $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$

19. $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ و $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقة مثلثية

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ — اطرح $\cos^2\theta$ من كل طرف.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ — عوّض عن $\cos\theta$ بـ $\frac{3}{4}$.

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ — تربيع $\frac{3}{4}$.

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ — اطرح.

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ — أوجد الجذر التربيعي لكلٍ من الطرفين.

نظرًا إلى أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة. وبالتالي، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cot\theta$$

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

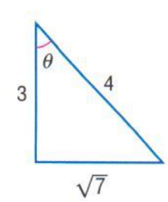
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22. $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

23. الهندسة يستخدم المثلث القائم الموضح على اليسار في صناعة نوع من الألحفة. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتثبت أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$ — المتطابقة الأصلية

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$ — بسّط.

$\cot\theta + \csc\theta = \cot\theta + \csc\theta$ ✓ — بسّط.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب الآتية:.

24. $\cos(-135°)$
25. $\cos 15°$
26. $\sin 210°$
27. $\sin 105°$
28. $\tan 75°$
29. $\cos 105°$

أثبت صحة كلاً من المتطابقات.

30. $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32. $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استخدم $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$
$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$، و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍ مما يلي.

33. $\cos\theta = \frac{4}{5};\ 0° < \theta < 90°$

34. $\sin\theta = -\frac{1}{4};\ 180° < \theta < 270°$

35. $\cos\theta = -\frac{2}{3};\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36. **البيسبول** الملعب الداخلي للعبة البيسبول هو عبارة عن مربع طول ضلعه 27 مترًا.

a. أوجد طول القطر.

b. اكتب النسبة الخاصة بـ $\sin 45°$ باستخدام أطوال ملعب البيسبول الداخلي.

c. استخدم الصيغة $\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ لإثبات صحة النسبة التي كتبتها في الجزء b.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و θ تقع في الربع الثاني.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \text{متطابقة نصف الزاوية}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \quad \cos\theta = -\frac{3}{5}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \quad \text{اطرح.}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \quad \text{اقسم.}$$
$$= \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{بسّط.}$$

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

12-5 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول لكل معادلة مما يلي بالفترة المعطاة.

37. $2\cos\theta - 1 = 0;\ 0° \le \theta < 360°$

38. $4\cos^2\theta - 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

39. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0;\ 0° \le \theta < 360°$

40. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3;\ 0° \le \theta < 360°$

41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

أوجد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$.

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0 \quad \text{المتطابقة الأصلية}$$
$$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$
$$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0 \quad \text{بالتحليل إلى العوامل.}$$

$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2};\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

الوحدة 12 تدريب على الاختبار

1. **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟

A $\cot\theta$
B $\tan\theta$
C $\sec\theta$
D $\csc\theta$

2. أثبت صحة المتطابقة $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3. أثبت صحة المتطابقة $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت $90° < \theta < 180°$؟

F $\frac{5}{3}$
G $\frac{\sqrt{34}}{8}$
H $-\frac{4}{5}$
J $\frac{4}{5}$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

5. $\cot\theta$، إذا كانت $\sec\theta = \frac{4}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$

6. $\tan\theta$، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{2}$؛ $90° < \theta < 180°$

7. $\sec\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -2$؛ $180° < \theta < 270°$

8. $\cot\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$

9. $\sec\theta$، إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$؛ $0° \le \theta < 90°$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

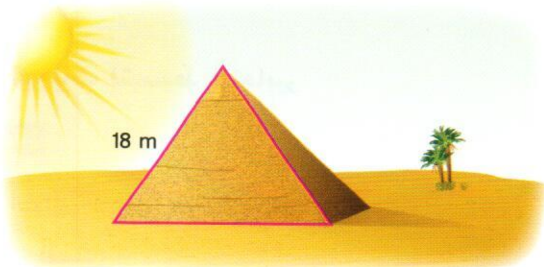
13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

14. $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$
B $\sqrt{2} - 1$
C $1 - \sqrt{2}$
D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16. **التاريخ** يعتقد بعض الباحثين أن بنّائي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأكبر، لربما حاولوا بناء أوجه الأهرامات على هيئة مثلثاتٍ متساوية الأضلاع. ولكنهم اضطروا بعد ذلك إلى تغييرها إلى أشكالٍ أخرى. افترض أنّ هرمًا يشيّد بحيث يكون وجهه مثلثًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 مترًا.



a. أوجد ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع.

b. استخدم الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وقياسات المثلث متساوي الأضلاع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$. أوجد القيم الدقيقة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

17. $\cos(-225°)$

18. $\sin 480°$

19. $\cos 75°$

20. $\sin 165°$

21. **الصواريخ** يُطلق نموذج صاروخ بسرعةٍ متجهة ابتدائية تساوي 20 مترًا في الثانية. ويُمكن إيجاد مدى المقذوف باستخدام الصيغة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$، حيث يمثل R المدى، ويمثل v السرعة المتجهة الابتدائي، ويمثل g تسارع الجاذبية الأرضية أو 9.8 أمتار في الثانية تربيع، وتمثل θ زاوية الإطلاق . فما الزاوية المطلوبة لكي يبلغ مدى الصاروخ 25 مترًا؟

حُـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ بالراديان.

22. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

23. $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُـلّ كل معادلة مما يلي بالفترة $0° \le \theta \le 360°$ إذا كانت θ بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

25. $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الوحدة 12

التحضير للاختبارات المعيارية

تحويل التعابير لأبسط صورة

تطلب منك بعض الأسئلة الاختيارية استخدام خواصّ الجبر لتبسيط التعابير. اتّبع الخطوات المبينة أدناه لمساعدتك في التحضير لحلّ هذه الأنواع من المعادلات.

إستراتيجيات لتبسيط التعابير

الخطوة 1

ادرس التعابير التي يُطلب منك تبسيطها.

اسأل نفسك:

- هل هناك أيّة عملياتٍ رياضيةٍ يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟
- هل هناك أية قوانين أو متطابقاتٍ يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟

الخطوة 2

حل المسألة وتحقق من حلولك.

- استخدم ترتيب العمليات.
- جمّع الحدود وحلّل إلى العوامل حسب الاقتضاء.
- طبّق القوانين والمتطابقات.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- راجع الخطوات التي اتّبعتها في حلّك للتحقق من أنك أجبت عن السؤال بصورةٍ تامةٍ ودقيقة.
- يمكنك أحيانًا عند الحاجة استخدام حاسبتك العلمية لمساعدتك في التحقق من حلّك. أوجد قيمة التعبير الأصلي وإجابتك من أجل قيمةٍ ما وتحقق من أنهما متماثلان.

مثال على الاختبار المعياري

حل المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

بسّط التعبير المثلثي الموضح أدناه عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$. واكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

$$\frac{\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$$

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتمّ تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة خاطئة ولكن التفسير صحيح.	1
بدون درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

اقرأ عبارة المسألة بعناية. لديك تعبيرٌ مثلثيٌ وعليك تبسيطه عبر كتابته بدلالة $\sin\theta$. حيث يجب أن تتضمن إجابتك النهائية فقط أعدادًا وحدودًا تضم $\sin\theta$. اكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

مثال على إجابة من نقطتين:

استخدم متطابقاتٍ مثلثيةً لتبسيط التعبير.

$$\frac{\cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$ تعريف $\sec\theta$ و $\tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}}$$ بسّــــط المقام.

$$= \frac{\cos^2\theta}{1 + \sin\theta}$$ بسّــــط الكسر المركب.

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{1 + \sin\theta}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{1 + \sin\theta}$$ حلل إلى العوامل.

$$= 1 - \sin\theta$$ بسّــــط.

التعبير المبسّط هو $1 - \sin\theta$.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والاستنتاج. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

حُـلّ كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. بسّط التعبير $\frac{\sec\theta}{\cot\theta + \tan\theta}$ بكتابته بدلالة $\sin\theta$.

2. ما ناتج $\frac{10a^{-3}}{29b^4} \div \frac{5a^{-5}}{16b^{-7}}$؟

3. اكتب $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y+2}{y-2} + \frac{y}{y^2 - 3y + 2}$ في أبسط صورة.

4. بسّط $\frac{\cot^2\theta - \csc^2\theta}{\tan^2\theta - \sec^2\theta}$ بكتابته في صورة ثابت.

5. اضرب $(2i)(6 - i)(4 + 3i + -5)$.

6. بسّط $(\cot\theta + 1)^2 - 2\cot\theta$ بكتابته بدلالة $\csc\theta$.

7. عبّر عن $\frac{4 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ في أبسط صورة.

الوحدة 12

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 12

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. يمكن تمثيل الربح p الذي يحققه متجر حصّة للقمصان في اليوم الواحد باستخدام المتباينة $10t + 200 < p < 15t + 250$، حيث يمثل t عدد القمصان المبيعة. فإذا باع المتجر 45 قميصًا يوم الجمعة، فأيّ مما يلي يمثل مبلغًا منطقيًا لما حققه المتجر من مكسب؟

A AED 200 **B** AED 625 **C** AED 850 **D** AED 950

2. استخدم متطابقةَ الفرق بين زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos 75°$.

F $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **H** $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

G $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ **J** $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3. استخدم الجدول لتحديد التعبير الذي يمثّل بشكل أفضل قياس زاويةٍ داخليةٍ لمضلع منتظم فيه n ضلعاً بالدرجات.

المضلع	عدد الأضلاع	قياس الزاوية
مثلث	3	60
رباعي الأضلاع	4	90
خماسي أضلاع	5	108
سداسي أضلاع	6	120
سباعي الأضلاع	7	128.5
ثماني الأضلاع	8	135

A $(180 + n) \div n$

B $\dfrac{180}{n}$

C $[180(n - 2)] \div n$

D $30(n - 1)$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبةٍ علمية. أوجد $\cos 75°$ وقارنه بقيمة إجابتك.

4. أي مما يلي يصف التمثيلين البيانيين لـ $y = 3x - 5$ و $4y = 12x + 16$؟

F للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y نفسها.

G للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x نفسها.

H المستقيمان متعامدان.

J المستقيمان متوازيان.

5. كيف يمكنك التعبير عن $\cos\theta \csc\theta \cot\theta$ بدلالة $\sin\theta$؟

A $\dfrac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ **C** $\dfrac{\sin^2\theta}{2}$

B $\dfrac{1 + \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ **D** $\dfrac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}$

6. تبلغ مساحة مستطيلٍ $25a^4 - 16b^2$. فما العاملان اللذان يمكن أن يمثلا الطول مضروبًا في العرض؟

F $(5a^2 + 4b)(5a^2 + 4b)$ **H** $(5a - 4b)(5a - 4b)$

G $(5a^2 + 4b)(5a^2 - 4b)$ **J** $(5a + 4b)(5a - 4b)$

7. ما مجال $f(x) = \sqrt{5x - 3}$؟

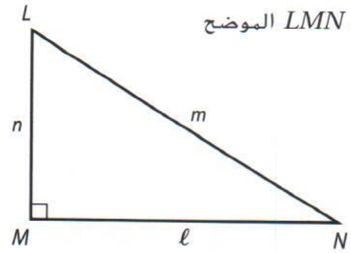
A $\left\{x \,\middle|\, x > \frac{3}{5}\right\}$ **C** $\left\{x \,\middle|\, x \geq \frac{3}{5}\right\}$

B $\left\{x \,\middle|\, x > -\frac{3}{5}\right\}$ **D** $\left\{x \,\middle|\, x \geq -\frac{3}{5}\right\}$

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

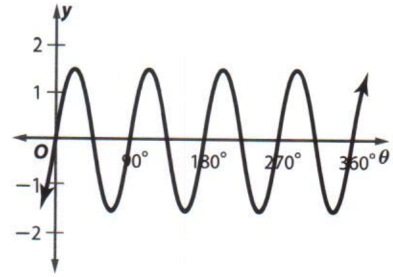
8. استخدم المثلث قائم الزاوية LMN الموضح على اليسار لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.



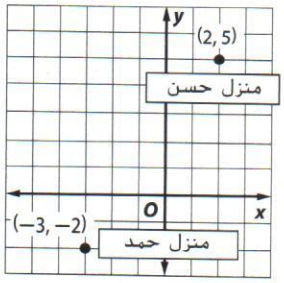
9. الإجابة الشبكية حلّ المعادلة المثلثية أدناه في الفترة من 0 إلى 2π. وقرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة عند الحاجة.

$$3 \cos \frac{t}{3} = 2$$

10. حدّد سعة الدالة الممثلة بيانيًا أدناه وفترتها. ثم اكتب معادلةً للدالة.



11. الإجابة الشبكية A عند وضع شبكة إحداثية فوق خريطة، نجد أن منزل حمد يقع عند النقطة $(-3, -2)$. ويقع منزل حسن عند النقطة $(2, 5)$. يمثّل ضلع كل مربع مجموعة سكنية واحدة. فما المسافة التقريبية بين منزل حمد ومنزل حسن؟



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

12. يبلغ راتب منى السنوي AED 50,000. وتحصل على زيادة في الراتب بنسبة 6% كل عام.

a. كم سيصبح راتبها في غضون أربعة أعوام مقربًا إلى أقرب درهم؟

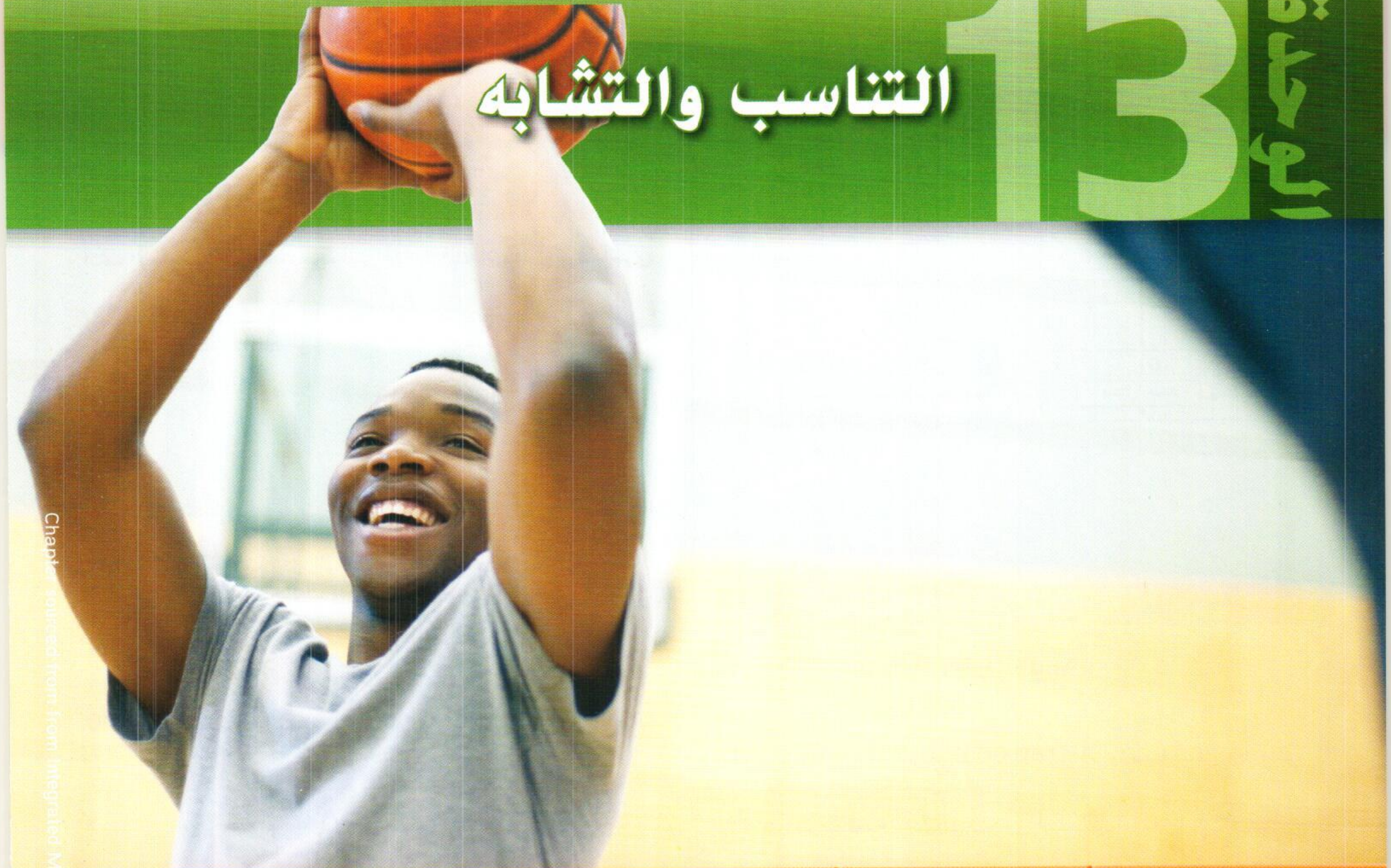
b. كم سيصبح راتبها في غضون عشر سنواتٍ مقربًا إلى أقرب درهم؟

13. الأقراص المدمجة أشار استطلاعٌ جرى مؤخرًا إلى أن 91% من طلاب المدارس الثانوية لا يشترون أقراصًا مدمجة. وقد اختير 8 طلابٍ عشوائيًا.

a. حدّد الاحتمالات المرافقة لعدد الطلاب الذين لا يشترون أقراصًا مدمجةً عبر حساب التوزيع الاحتمالي.

b. ما احتمال أن يكون 7 من أصل 8 طلاب على الأقل لا يشترون أقراصًا مدمجة؟

c. كم عدد الطلاب الذين تتوقع أنهم يشترون أقراصًا مدمجة؟



الوحدة 13
التناسب والتشابه

السابق

لقد درست موضوع النسبة والتناسب واستخدمته في تطبيقات من الحياة اليومية.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استخدام المضلعات المتشابهة واستخدام النسبة والتناسب في حل المسائل.
- تحديد تحويلات التشابه واستخدامها.
- استخدام النماذج المقياسية/المصغرة والرسومات ذات المقياس النسبي في حل المسائل.

لماذا؟ ▲

الرياضة يمكن استخدام المثلثات المتشابهة في الرياضة لوصف مسار كرة، مثل التمريرة المرتدة التي تنتقل من شخص لآخر.

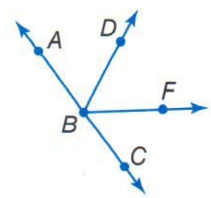
الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

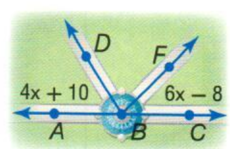
حُـلّ كل معادلة مما يلي.

1. $\frac{3x}{8}=\frac{6}{x}$
2. $\frac{7}{3}=\frac{x-4}{6}$
3. $\frac{x+9}{2}=\frac{3x-1}{8}$
4. $\frac{3}{2x}=\frac{3x}{8}$
5. **التعليم** نسبة الطلاب إلى المعلمين في إحدى المدارس الثانوية هي 17 إلى 1. فإذا كان عدد الطلاب في المدرسة هو 1088 طالبًا. فكم يبلغ عدد المعلمين؟

الجبر في الشكل التالي، $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ هما شعاعان متقابلان و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$.



6. إذا كان $m\angle ABF = 3x - 8$ و $m\angle ABD = x + 14$. فأوجد $m\angle ABD$.
7. إذا كان $m\angle FBC = 2x + 25$ و $m\angle ABF = 10x - 1$. فأوجد $m\angle DBF$.
8. **المناظر الطبيعية** يخطط مهندس مناظر طبيعية لإضافة أرصفة حول نافورة كما هو مبين في الشكل التالي. إذا كان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاعان متقابلان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$. فأوجد $m\angle FBC$.



مراجعة سريعة

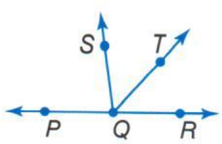
مثال 1

حُـلّ المعادلة $\frac{4x-3}{5}=\frac{2x+11}{3}$.

$\frac{4x-3}{5}=\frac{2x+11}{3}$	المعادلة الأصلية
$3(4x-3)=5(2x+11)$	الضرب التبادلي
$12x-9=10x+55$	خاصية التوزيع
$2x=64$	اجمع.
$x=32$	بسّــط.

مثال 2

في الشكل، $\overrightarrow{QP}$ و $\overrightarrow{QR}$ ضلعان متقابلان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$. إذا كان $m\angle SQR = 6x + 8$ و $m\angle TQR = 4x - 14$، فأوجد $m\angle SQT$.



بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$.

$m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$	تعريف منصف الزاوية
$6x+8=2(4x-14)$	التعويض
$6x+8=8x-28$	خاصية التوزيع
$-2x=-36$	اطرح.
$x=18$	بسّط.

بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQT = m\angle TQR$.

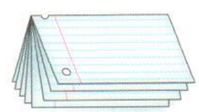
$m\angle SQT = m\angle TQR$	تعريف منصف $\angle$
$m\angle SQT = 4x - 14$	التعويض
$m\angle SQT = 58$	$x = 18$

البدء في هذه الوحدة

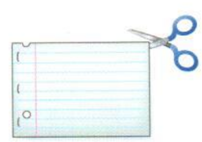
ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك للوحدة 13. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

مطويات® منظّم الدراسة

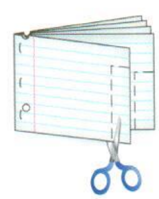
التناسب والتشابه يساعدك تكوين هذه المطوية في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 13 عن التناسب والمضلعات المتماثلة والتشابه والتحويلات. ابدأ بأربع صفحات من الدفتر.



1 اطوِ الورقات الأربع عند المنتصف.



2 اقطع بطول قمة الورق. ودبّس الورق من الداخل لعمل كتاب.



3 اقطع الجانب الأيمن من كل ورقة لعمل تبويب لكل فصل .

4 اكتب على كل تبويب رقم الدرس، كما هو موضح.

المفردات الجديدة

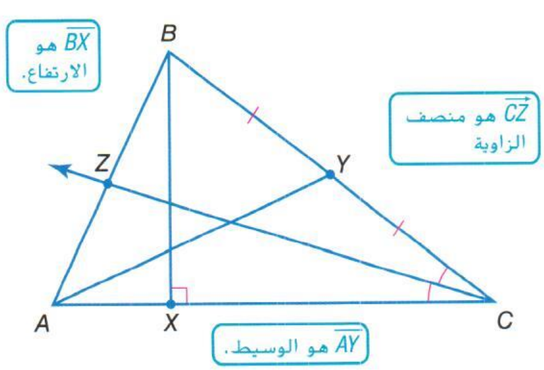
نسبة	ratio
تناسب	proportion
طرفا التناسب	extremes
وسطا التناسب	means
ضرب تبادلي	cross products
تغيير الأبعاد (التمدّد)	dilation
تشابه	similarity
تحويل	transformation
تكبير	enlargement
تصغير	reduction
نموذج بمقياس نسبي	scale model
مقياس رسم نسبي	scale drawing

مراجعة المفردات

الارتفاع هو عبارة عن قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث وعمودية على المستقيم المتر بالضلع المقابل للرأس

منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسّم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين

المتوسط هو عبارة عن قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث وتصل إلى منتصف الضلع المقابل للرأس



النسب والتناسب

السابق

- لقد قمت بحل المسائل بكتابة معادلات وحلها.

الحالي

1 كتابة النسبة.

2 كتابة التناسبات وإيجاد حلها.

لماذا؟

- نسبة البعدين في شاشة التلفاز أو الحاسوب هي عرض الشاشة مقسوما على طولها. تبلغ نسبة البعدين في شاشة التليفزيون القياسية $\frac{4}{3}$ أو 4:3. بينما في شاشة التلفاز عالية الدقة (HDTV)، تبلغ نسبة البعدين 16:9.

المفردات الجديدة

- نسبة ratio
- نسب موسعة extended ratios
- تناسب proportion
- طرفا التناسب extremes
- وسطا التناسب means
- ضرب تبادلي cross products

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 كتابة النسب واستخدامها

النسبة هي عبارة عن مقارنة كميتين باستخدام القسمة. يُمكن التعبير عن نسبة الكميتين a و b في صورة a إلى b أو $a:b$ أو $\frac{a}{b}$، حيث $b \neq 0$. وعادة ما يتم التعبير عن النسب في أبسط صورة.

نسبة البعدين 32:18 و16:9 متساوية.

$$\frac{\text{عرض الشاشة}}{\text{طول الشاشة}} = \frac{32 \text{ in.}}{18 \text{ in.}}$$ قسمة الوحدات.

$$= \frac{32 \div 2}{18 \div 2} \text{ أو } \frac{16}{9}$$ القسمة على العوامل المشتركة.

مثال 1 من الحياة اليومية كتابة النسب وتحويلها لأبسط صورة

الألعاب الرياضية متوسط عدد ضربات لاعب البيسبول يساوي نسبة عدد ضربات القاعدة إلى عدد ضربات المضرب، ولا يتضمن ذلك السير بالكرة. وقد حقّق جو ماور، لاعب فريق مينيسوتا توينز أعلى متوسط للضربات في بطولة البيسبول الكبرى عام 2006. إذا أحرز جو 521 ضربة رسمية بالمضرب و 181 ضربة عادية، أحسب متوسط ضربات جو.

اقسم عدد الضربات العادية على عدد الضربات بالمضرب.

$$\frac{\text{عدد الضربات العادية}}{\text{عدد الضربات بالمضرب}} = \frac{181}{521}$$

$$\approx \frac{0.347}{1}$$

النسبة التي تبلغ فيها قيمة المقام 1 تسمى *نسبة الوحدة*.

فيصبح متوسط ضربات جو هو 0.347.

تمرين موجّه

1. **المدرسة** في مدرسة لوجان الثانوية، يوجد 190 معلمًا و 2650 طالبًا. ما النسبة التقريبية للطلاب إلى المعلمين في هذه المدرسة؟

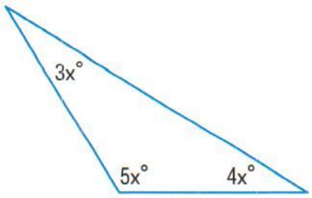
يُمكن استخدام **النسب الموسّعة** للمقارنة بين ثلاث كميات أو أكثر. التعبير $a:b:c$ يعني أن نسبة أول كميتين هي $a:b$، ونسبة آخر كميتين هي $b:c$، ونسبة الكمية الأولى إلى الأخيرة هي $a:c$.

مثال 2 استخدام النسب الموسعة

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا في مثلث هي 3:4:5، فأوجد قياسات هذه الزوايا.

نظرًا لأن النسبة $\frac{3}{4}$ أو 3:4 مساوية للنسبة $\frac{3x}{4x}$ أو $3x{:}4x$. إذًا يمكن كتابة النسبة الموسعة 3:4:5 كالآتي $3x{:}4x{:}5x$.

ارسم المثلث، واكتب قياسات الزوايا. ثم اكتب معادلة وحلها لإيجاد قيمة x.



$3x + 4x + 5x = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$12x = 180$ اجمع الحدود المتشابهة.

$x = 15$ اقسم الطرفين على 12.

إذًا قياسات الزوايا هي 3(15) أو 45، و 4(15) أو 60، و 5(15) أو 75.

تحقق مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180.

$45 + 60 + 75 = 180$ ✓

تمرين موجّه

2. في مثلث، تبلغ نسبة قياسات أضلاعه 3:3:8، ويبلغ قياس محيطه 392 سنتيمترًا. أوجد طول الضلع الأطول في المثلث.

قراءة في الرياضيات

التناسب عندما تتم كتابة تناسب باستخدام النقطتين، نقرؤه باستخدام كلمة *إلى* بدلاً من النقطتين. على سبيل المثال، 2:3 تُقرأ *2 إلى 3*. وسطا التناسب هما العددان الداخليان، وطرفا التناسب هما العددان الخارجيان.

2 استخدام خواص التناسبات

يُطلق على المعادلة التي توضح أن النسبتين متساويتان **التناسب**. في التناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، يُطلق على العددين a و d **طرفا** التناسب، بينما يُطلق على العددين b و c **وسطا** التناسب.

$$\text{طرف } \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftarrow \text{ وسط}$$
(وسط b، طرف d)

يُطلق على ناتج ضرب طرفي التناسب ad وناتج ضرب وسطي التناسب bc **الضرب التبادلي**.

المفهوم الرئيسي خاصية الضرب التبادلي

الشرح	في التناسب، ناتج ضرب الطرفين يساوي ناتج ضرب الوسطين.
الرموز	إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ عند $b \neq 0$ و $d \neq 0$، فإن $ad = bc$.
مثال	إذا كان $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$، فإن $4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$.

ستُثبت خاصية الضرب التبادلي في التدريب 41.

معكوس خاصية الضرب التبادلي صحيح أيضًا. إذا كان $ad = bc$، و $b \neq 0$، و $d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. بمعنى أن $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ يكوّنان تناسبًا. ويُمكنك استخدام خاصية الضرب التبادلي لإيجاد حل التناسب.

مثال 3 استخدام الضرب التبادلي لحل التناسبات

حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.

a. $\frac{6}{x} = \frac{21}{31.5}$ b. $\frac{x+3}{2} = \frac{4x}{5}$

a		b
$\frac{6}{x} = \frac{21}{31.5}$	التناسب الأصلي	$\frac{x+3}{2} = \frac{4x}{5}$
$6(31.5) = x(21)$	خاصية الضرب التبادلي	$(x+3)5 = 2(4x)$
$189 = 21x$	بسّط.	$5x + 15 = 8x$
$9 = x$	أوجد قيمة x.	$15 = 3x$
		$5 = x$

نصيحة دراسية

المثابرة يُمكن حل المثال 3b أيضًا عن طريق ضرب طرفي المعادلة في 10. وهو المقام المشترك الأصغر.

$$10\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{4x}{5}(10)$$
$$5(x+3) = 2(4x)$$
$$5x + 15 = 8x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

تمرين موجّه

3A. $\frac{x}{4} = \frac{11}{-6}$ 3B. $\frac{-4}{7} = \frac{6}{2y+5}$ 3C. $\frac{7}{z-1} = \frac{9}{z+4}$

يمكن استخدام التناسب لعمل توقعات.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التناسب لعمل توقعات

امتلاك سيارة أجرى جمال دراسة استقصائية على 50 طالبًا يذهبون إلى المدرسة بالسيارة ووجد أن 28 طالبًا منهم يمتلكون سيارات. إذا كان عدد الطلاب الذين يذهبون إلى مدارسهم بالسيارة هو 755 طالبًا، فتوقع إجمالي عدد الطلاب الذين يمتلكون سيارة.

اكتب وأوجد حل التناسب الذي يقارن عدد الطلاب الذين يمتلكون سيارات إلى عدد الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة بالسيارة.

$\frac{28}{50} = \frac{x}{755}$ ← الطلاب الذين يمتلكون سيارات / ← الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة بالسيارة

$28 \cdot 755 = 50 \cdot x$	خاصية الضرب التبادلي
$21{,}140 = 50x$	بسّط.
$422.8 = x$	اقسم الطرفين على 50.

بناءً على دراسة جمال، حوالي 423 طالبًا في مدرسته يمتلكون سيارة.

تمرين موجّه

4. الأحياء في إحدى التجارب، اصطاد الطلاب بعض الفراشات، وسجلوا أرقامًا على أجنحتها، ثم أطلقوا سراحها. اصطاد الطلاب 48 فراشة منها ثلاث فراشات بعلامات على أجنحتها. توقع عدد الفراشات التي ستحمل علامات على أجنحتها عند اصطياد 100 فراشة.

الربط بالحياة اليومية

النسبة المئوية لقائدي السيارات من المراهقين (الفئة العمرية من 15 إلى 20) باستخدام سياراتهم الخاصة تضاعفت تقريبًا في كل أنحاء البلاد من 22 في المئة في عام 1985 إلى 42 في المئة في عام 2003.

المصدر: شركة سي إن دبليو لأبحاث الأسواق

لا يُعد التناسب الموضح في المثال 4 هو التناسب الوحيد الصحيح لهذا الموقف. وذلك لأن كل صيغ التناسب المتكافئة لها نواتج ضرب تبادلي متطابقة.

المفهوم الرئيسي التناسبات المتكافئة

الرموز التناسبات التالية متكافئة.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

أمثلة $\frac{28}{50} = \frac{x}{755}, \frac{50}{28} = \frac{755}{x}, \frac{28}{x} = \frac{50}{755}, \frac{x}{28} = \frac{755}{50}$

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الحيوانات الأليفة** في دراسة شملت 1000 أسرة، وجد أن منهم 460 أسرة تقتني على الأقل طائرًا واحدًا أو قطة كحيوان أليف . ما نسبة مالكي الحيوانات الأليفة إلى عدد الأسر؟

2. **الألعاب الرياضية** تتنافس ثلاثون فتاة على 15 مركزًا في فريق كرة السلة. ما نسبة المراكز المتاحة إلى الفتيات المتنافسات؟

مثال 2

3. نسبة قياسات ثلاثة أضلاع في مثلث هي 2:5:4، ومحيطه يساوي 165 وحدة. أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

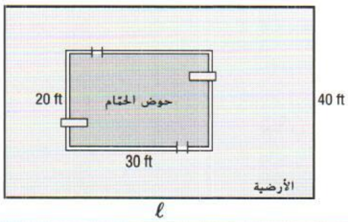
4. نسب قياسات ثلاث زوايا في مثلث هي 4:6:8. أوجد قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

مثال 3

حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.

مثال 4

9. توجد حول حمام سباحة أرضية خشبية مماثلة له. وفق الرسم التخطيطي، ما النسبة التي يُمكن استخدامها لإيجاد الطول ℓ للأرضية الخشبية المحيطة بحمام السباحة؟



التدريب وحل المسائل

10. في عينة عشوائية لخمسين طالبًا من مدرسة ثانوية، كان هناك طالبان فقط مهتمان بإنشاء نادٍ للتصوير. إذا كان يوجد بالمدرسة 875 طالبًا، فكم طالبًا سيكون مهتمًا بهذا النادي؟

11. تضم مدرسة 1,200 طالب. وفي دراسة عشوائية لأربعة وأربعين طالبًا، حصل 11 فقط على شهادات في الامتياز الدراسي. كم طالبًا في المدرسة بأكملها سيحصل على هذه الشهادات؟

12. تضم مدرسة 500 طالب، وتدرس إضافة عناصر جديدة لماكينات البيع الموجودة بالمدرسة. وأجرى مدير المدرسة دراسة على 25 طالبًا لتحديد العنصر الذي يفضله كل طالب وفق الجدول الموضح. كم طالبًا في المدرسة سيفضل فشار الميكروويف؟

عناصر البيع الجديدة	عدد الطلاب
ألواح الطاقة	7
فشار الميكروويف	12
المعجنات المحمصة	6

13. يحتوي صندوق على قطع فاكهة كما هو موضح في الجدول أدناه. إذا تم اختيار قطعة فاكهة بشكل عشوائي من الصندوق، ثم تم اختيار قطعة ثانية بشكل عشوائي، دون استبدال القطعة الأولى. أوجد احتمال اختيار قطعة تفاح ثم قطعة موز.

الفاكهة	العدد
التفاح	5
الموز	3
البرتقال	2

14. تبيع وفاء أكواب نادرة على موقعها الإلكتروني Mugs.com، وتتعقب مبيعاتها وفق الجدول أدناه.

إذا استمرت وفاء في بيع الأكواب بنفس السعر، فكم ستجني نظير بيع 2500 كوب؟

عدد الأكواب المبيعة	الربح
45	AED 146.25
112	AED 364.00
256	AED 832.00

15. يبلغ طول سباق تكساس السريع للدراجات 2.4 كيلومتر. يوضح الجدول الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء عدد من الدورات خلال جولة تدريبية.

رقم الدورة	الوقت (sec)
1	28.06
2	56.12
3	84.18
4	112.24

إذا استمر سائق بهذه الوتيرة، فما مقدار الوقت الذي يلزمه لإنهاء 35 دورة؟

16. بدأت هنا عملها الخاص في بيع الشمع المنزلي على الإنترنت. لجميع الشموع نفس مساحة القاعدة. يوضح الجدول أدناه العلاقة بين كمية الشمع اللازمة لكل شمعة وارتفاعها.

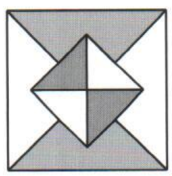
ارتفاع الشمعة (بالسنتيمتر)	كمية الشمع اللازمة (kg)
10	1.25
14	1.625
15	1.875
25	3.125

إذا قررت إضافة شمعة بارتفاع 22 سنتيمترًا إلى قائمة منتجاتها. فما كمية الشمع الذي ستحتاج إلى شرائه لكل شمعة يبلغ ارتفاعها 22 سنتيمترًا؟

17. لم يحضر إلى المسرحية المدرسية سوى $\frac{2}{5}$ من طلاب الصف السابع. إذا كان هناك 475 طالبًا في الصف السابع في الفصل الدراسي، فكم عدد الطلاب الذين حضروا المسرحية؟

18. يوجد 450 طالبًا في الصف العاشر بالمدرسة الثانوية. وحضر الأسبوع الماضي $\frac{3}{5}$ من طلاب الصف العاشر مباراة كرة القدم. كم عدد طلاب الصف العاشر الذين حضروا مباراة كرة القدم؟

19. ما نسبة عدد قطع الزجاج الملون إلى عدد قطع الزجاج غير الملون في النافذة؟



20. كرة يُرمز إلى قطرها بالرمز r. إذا كان $r = 2$، فإن مساحة سطحها تساوي $4\pi(2)^2$ وحجمها يساوي $\frac{4}{3}\pi(2)^3$. ما نسبة مساحة السطح إلى الحجم في صورة كسر اعتيادي بأقل عدد من الحدود؟

21. تحتاج وصفة لتحضير خمس رزم من البسكويت إلى $2\frac{3}{4}$ كوب دقيق. ويحتاج خلف إلى تحضير 12 رزمة من البسكويت باستخدام هذه الوصفة من أجل الاحتفال بتخرج شقيقته خديجة. كم كوبًا من الدقيق سيحتاج إليه خلف؟

22. تبلغ نسبة كبار المعلمين إلى المعلمين الجدد في مدرسة ثانوية عامة خلال عام 2003-2004 الدراسي 2 إلى 3. إذا كان هناك 75 معلمًا في المدرسة هذا العام، فكم عدد المعلمين الجدد؟

23. يتناسب وزن أي جسم على المريخ تناسبًا طرديًا مع وزنه على الأرض. يبلغ وزن راشد 90 كيلوجرامًا على الأرض، لكنه سوف يزن 34.2 كيلوجرامًا على المريخ. ويزن صديقه عبيد 64 كيلوجرامًا على الأرض. كم سيكون وزن عبيد على المريخ بالكيلوجرام مقربًا إلى أقرب جزء من العشرة؟

24. تريد لمياء استبدال 165 دولارًا كنديًا بدولارات أمريكية. إذا كان الدولار الأمريكي يساوي 0.66 من الدولار الكندي، فكم المقابل الذي ستحصل عليه لمياء من الدولارات الأمريكية؟

A 108.90 دولار أمريكي **B** 231.00 دولار أمريكي **C** 250.00 دولار أمريكي **D** 825.00 دولار أمريكي

25. يستطيع عامل طلاء 20 مترًا مربعًا في 60 دقيقة. بهذا المعدل، كم سيستغرق هذا العامل في طلاء 130 مترًا مربعًا؟

A $43\frac{1}{3}$ دقيقة **B** 65 دقيقة **C** 120 دقيقة **D** 390 دقيقة

26. نسبة خلط تربة صالحة للزراعة هي 7 أجزاء من التربة إلى جزأين من السماد. إذا تم استخدام 8 كيلوجرامات من السماد، فما كمية التربة التي نحتاج إليها؟

27. أوجد حل: $\frac{x-3}{4} = \frac{2x-1}{5}$

28. بفرض أن متوسط عدد الصيادين بطول شاطئ ساندي هوك باي يتنوع طرديًا بالنسبة إلى عدد السمك الذي يتم اصطياده هناك يوميًا. إذا كان ثابت التغير هو 7 أسماك لكل شخصين، فكم سمكة يتم اصطيادها يوميًا في اليوم عند وجود 26 صيادًا؟

A 76 سمكة

B 91 سمكة

C 101 سمكة

D 118 سمكة

29. يوضح الجدول مقدار اليابسة إلى الماء في فلوريدا.
ما نسبة الماء إلى اليابسة مقربًا إلى أقرب جزء من المئة؟

	المساحة (km^2)
اليابسة	13.90×10^5
الماء	3.10×10^4

A 0.02

B 0.22

C 4.48

D 44.80

30. تستخدم ليلى برنامج نشر مكتبي لإنشاء كتب أنشطة للرياضيات.
ويُمكنها إنشاء $5\frac{3}{4}$ صفحة كل ساعة. بهذا المعدل، كم ستستغرق ليلى لإنشاء كتاب يتكون من 70 صفحة؟

A 402 hr 30 min

B 14 hr 44 min

C 14 hr

D 12 hr 10 min

E 11 hr 40 min

تدريب على الاختبار المعياري

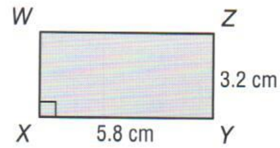
31. حُـلّ التناسب التالي.

$$\frac{x}{-8} = \frac{12}{6}$$

A -12 **C** -16

B -14 **D** -18

32. ما مساحة المستطيل $WXYZ$؟



F $18.6\ \text{cm}^2$ **H** $21.2\ \text{cm}^2$

G $20.4\ \text{cm}^2$ **J** $22.8\ \text{cm}^2$

33. الإجابة الشبكية يبلغ قياس حجرة نوم السيدة شيخة التي على شكل مستطيل 4 أمتار في 3 أمتار. وتريد شراء سجادة لغرفة النوم بتكلفة AED 25.6 لكل متر مربع شاملاً الضريبة. ما المبلغ الذي ستنفقه بالدرهم على فرش غرفة نومها بالسجاد؟

SAT/ACT .34 لدى فوزية عدد أسطوانة DVD أكثر من علياء بمقدار 4 مرات بالإضافة إلى 5. إذا كان لدى علياء عدد x من أسطوانات DVD. فكم أسطوانة لدى فوزية بدلالة x؟

A $4(x+5)$ **D** $4x+5$

B $4(x+3)$ **E** $5x+4$

C $9x$

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

35. $\sqrt{x+5} - 3 = 0$

36. $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

37. $\sqrt[4]{2x-1} = 2$

38. $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

39. $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$

40. $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

41. المعرض الوطني يصنع محلاً لمنتجات الألبان ثلاثة أنواع من الجبن - جبن شيدر، وجبن مونتري جاك، والجبن السويسري — ويبيع الجبن في ثلاثة منافذ بالمعرض الوطني. في بداية اليوم الأول، استلم المنفذ الأول x كيلوجرام من كل نوع من الجبن، واستلم المنفذ الثاني y كيلوجرام من كل نوع من الجبن، واستلم المنفذ الثالث z كيلوجرام من كل نوع من الجبن. في نهاية اليوم، باع محل منتجات الألبان 131 كيلوجرامًا من جبن الشيدر، و 291 كيلوجرامًا من جبن مونتري جاك، و 232 كيلوجرامًا من الجبن السويسري. يوضح الجدول أدناه النسبة المئوية للجبن الذي تم استلامه صباحًا وتم بيعه في كل منفذ. ما مقدار جبن الشيدر الذي يستلمه كل منفذ في الصباح؟

النوع	منفذ 1	منفذ 2	منفذ 3
جبن الشيدر	40%	30%	10%
جبن مونتري جاك	40%	90%	80%
الجبن السويسري	30%	70%	70%

مراجعة المهارات

أوجد $[g \circ h](x)$ **و** $[h \circ g](x)$.

42. $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

43. $h(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x - 3$

44. $h(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -2x + 1$

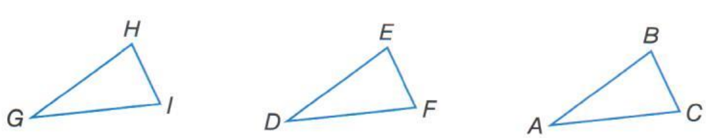
45. $h(x) = -5x$
$g(x) = 3x - 5$

46. $h(x) = x^3$
$g(x) = x - 2$

47. $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

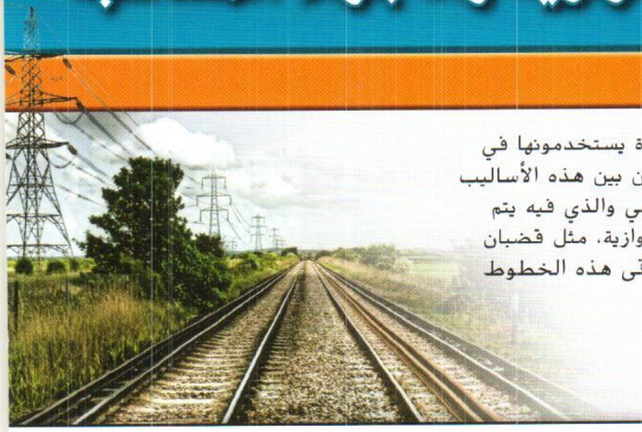
اكتب فقرة برهان.

48. المعطيات: $\triangle ABC \cong \triangle DEF;\ \triangle DEF \cong \triangle GHI$
المطلوب إثباته: $\triangle ABC \cong \triangle GHI$



الدرس 13-2

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة



:: السابق

- لقد استخدمت التناسب في حل المسائل بين المثلثات المتشابهة.

:: الحالي

1. استخدام الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات.
2. استخدام الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية.

:: لماذا؟

- أمام المصورين أساليب عديدة يستخدمونها في إضافة التشويق إلى الصور. من بين هذه الأساليب استخدام منظور نقطة التلاشي والذي فيه يتم التقاط صورة بها خطوط متوازية، مثل قضبان السكك الحديدية، بحيث تتلاقى هذه الخطوط عند نقطة بالأفق.

المفردات الجديدة

منصف ساقي المثلث
midsegment of a triangle

ممارسات في الرياضيات

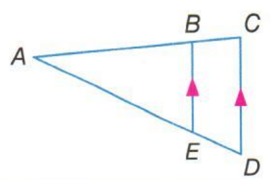
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات

عندما يحتوي مثلث على مستقيم يوازي أحد أضلاعه، فيمكن باستخدام مسلمة تشابه الزوايا إثبات تشابه المثلثين المتكونين. بما أن المثلثين متشابهان، فإن أضلاعهما متناسبة.

النظرية 13.1 نظرية تناسب المثلثات

إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع المثلث وكان ينصف الضلعين الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.

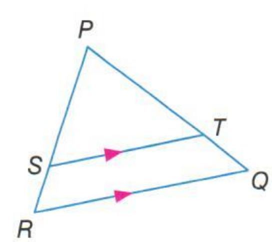


مثال إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.

مثال 1 إيجاد طول الضلع

في $\triangle PQR$، $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$. إذا كان $PT = 7.5$, $TQ = 3$، و $SR = 2.5$، فأوجد PS.

استخدم نظرية تناسب المثلثات.



$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$	نظرية تناسب المثلثات
$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$	عوّض.
$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$	خاصية الضرب التبادلي
$3PS = 18.75$	اضرب.
$PS = 6.25$	اقسم الطرفين على 3.

تمرين موجّه

1. إذا كان $PS = 12.5$، و $SR = 5$، و $PT = 15$، فأوجد TQ.

عكس النظرية 13.1 صحيح أيضًا ويمكن إثباته باستخدام الأجزاء المتناسبة في المثلث.

الربط بتاريخ لرياضيات

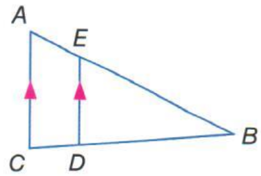
جاليليو جاليلي (1564–1642)

ولد جاليليو في مدينة بيزا بإيطاليا. وقد درس الفلسفة والفضاء والرياضيات. وقدم إسهامات كبيرة في المجالات الثلاثة جميعًا.

المصدر: الموسوعة البريطانية

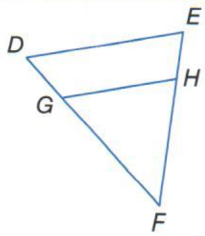
النظرية 13.2 عكس نظرية تناسب المثلثات

إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسّم الضلعين إلى قطع مستقيمة متناظرة متناسبة. فإن هذا المستقيم يكون موازيًا للضلع الثالث في المثلث.



مثال إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$.

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا



في $\triangle DEF$، $EH = 3$، و $HF = 9$، و DG تمثل ثلث طول $\overline{GF}$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟

باستخدام عكس نظرية تناسب المثلثات،
ولإثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$، يجب أن نثبت أن $\frac{EH}{HF} = \frac{DG}{GF}$.

أوجد كل نسبة وبسّطها. افترض أن $DG = x$.
بما أن DG ثلث GF، فإن $GF = 3x$.

$\frac{DG}{GF} = \frac{x}{3x}$ أو $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{EH}{HF} = \frac{3}{9}$ أو $\frac{1}{3}$

وبما أن $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$، والأضلاع متناسبة فإن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$.

تمرين موجّه

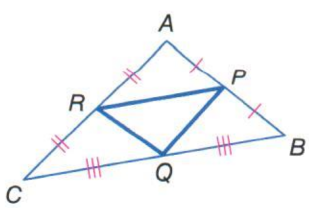
2. DG يمثل نصف طول $\overline{GF}$، و $EH = 6$، و $HF = 10$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟

نصيحة دراسية

منصف ساقي المثلث

تكوّن منصفات سيقان المثلث الثلاثة *مثلث المنصفات*.

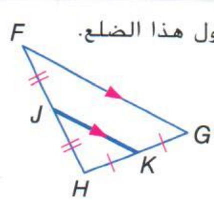
منصف ساقي المثلث هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على نقطتي منتصف ساقي المثلث. يوجد في كل مثلث ثلاثة منصفات للسيقان. منصفات السيقان في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}$، و $\overline{PQ}$، و $\overline{RQ}$.



نظرية تناسب منصفات سيقان المثلثات هي حالة خاصة من نظرية تناسب المثلثات.

النظرية 13.3 نظرية منصفات سيقان المثلثات

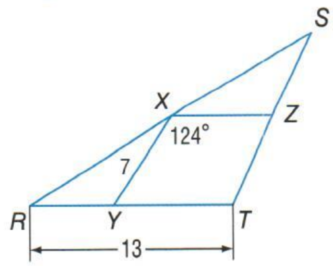
يكون منصف ساقي المثلث موازيًا لأحد أضلاع المثلث، ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.



مثال إذا كان J و K نقطتا المنتصف للضلعين $\overline{FH}$ و $\overline{HG}$، على الترتيب، فإن $\overline{JK} \parallel \overline{FG}$ و $JK = \frac{1}{2}FG$.

مثال 3 استخدام نظرية منصفات المثلث

في الشكل، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ هما منصفان لسيقان $\triangle RST$. أوجد كل قياس مما يلي.



a. XZ

$XZ = \frac{1}{2}RT$ نظرية منصفات سيقان المثلثات

$XZ = \frac{1}{2}(13)$ عوّض

$XZ = 6.5$ بسّط.

b. ST

$XY = \frac{1}{2}ST$ نظرية منصفات سيقان المثلثات

$7 = \frac{1}{2}ST$ عوّض

$14 = ST$ اضرب الطرفين في 2.

c. $m\angle RYX$

باستخدام نظرية منصفات سيقان المثلثات، $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

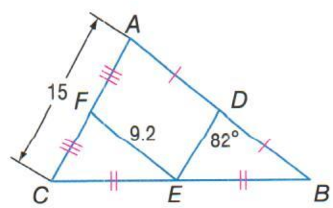
$\angle RYX \cong \angle YXZ$ نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة

$m\angle RYX = m\angle YXZ$ تعريف التطابق

$m\angle RYX = 124$ عوّض

تمرين موجّه

أوجد قياس كل مما يلي.



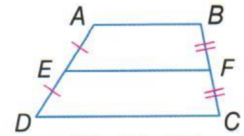
3A. DE

3B. DB

3C. $m\angle FED$

نصيحة دراسية

منصف الساقين نظرية منصفات سيقان المثلث تشبه نظرية منصف ساقي شبه المنحرف والتي تنص على أن منصف ساقي شبه المنحرف يوازي القاعدتين ويبلغ طوله نصف مجموع طولي القاعدتين. (الدرس 6-6)

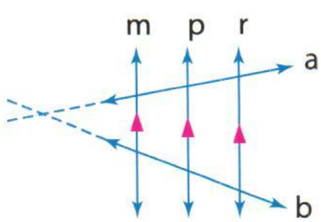


$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

2 الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية

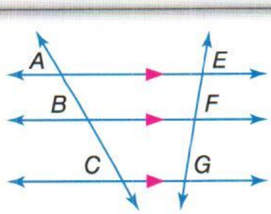
هي حالة خاصة أخرى من نظرية تناسب المثلثات وتتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر يقطعها قاطعان. لاحظ أنه عند مد القاطعين a و b، فإنهما يكوّنان مثلثات مع المستقيمات المتوازية.



النتيجة 13.1 الأجزاء المتناسبة للمستقيمات المتوازية

عند تقاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع قاطعين فإنها تقسّم القاطعين إلى أجزاء متناسبة.

مثال إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

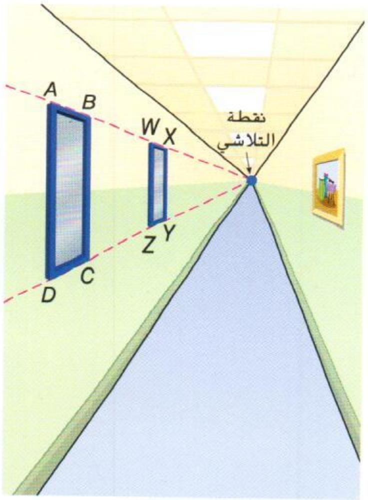


نصيحة دراسية

تناسبات أخرى يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال في النتيجة 13.1.

$\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$ و $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتناسبة للقاطعين



الفن ترسم غاية رواقًا بمنظور النقطة الواحدة. وتستخدم الخطوط التوجيهية الموضحة لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة $\overline{AD}$، و $\overline{BC}$، و $\overline{WZ}$، و $\overline{XY}$ جميعًا متوازية، و $AB = 8$ سنتيمترات، و $DC = 9$ سنتيمترات، و $ZY = 5$ سنتيمترات، فأوجد WX.

وفق النتيجة 13.1، إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$،

فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$.

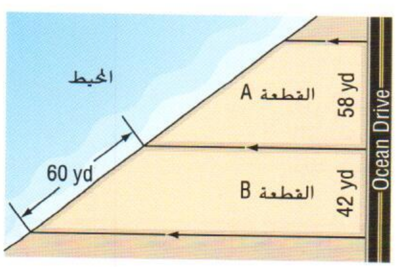
$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$	النتيجة 13.1
$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$	عوّض.
$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$	خاصية الضرب التبادلي
$9WX = 40$	بسّط.
$WX = \frac{40}{9}$	اقسم الطرفين على 4.

من المفترض للمسافة بين W و X أن تكون $\frac{40}{9}$ أو حوالي 4.4 سنتيمترات.

التحقق نسبة DC إلى ZY تساوي 9 إلى 5، يساوي 10 إلى 5 تقريبًا أو 2 إلى 1.
نسبة AB إلى WX تساوي 8 إلى 4.4 أو حوالي 8 إلى 4 أو 2 إلى 1 أيضًا؛
إذًا، الإجابة منطقية. ✓

تمرين موجّه

4. العقارات *الواجهة* هي قياس طول حد العقار الذي يطل على منظر معين مثل شارع أو بحيرة أو محيط أو نهر. أوجد طول واجهة المحيط للقطعة A مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.



الربط بالحياة اليومية

لكي يظهر الرسم ثنائي الأبعاد ثلاثي الأبعاد، يقدم فنان عدة إشارات تصورية.

- *الحجم* – الأشياء البعيدة تبدو أقرب
- *الوضوح* – الأشياء الأقرب تبدو أكثر تركيزًا
- *التفاصيل* – الأشياء القريبة يكون لها هيئة وشكل بينما الأشياء البعيدة تكون تقريبًا مخططة

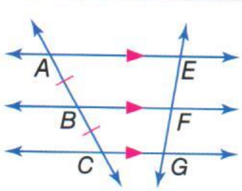
المصدر: مركز المعرفة الإعلامية

إذا كان معامل القياس للقطع المستقيمة المتناسبة هو 1، فإنها تقسم القاطعين إلى أجزاء متطابقة.

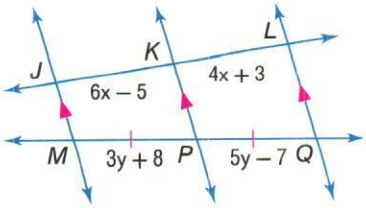
النتيجة 13.2 الأجزاء المتطابقة للمستقيمات المتوازية

إذا أحدثت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع ما، فإنها تحدث قطعًا مستقيمة متطابقة على كل القواطع.

مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ وكان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$،
فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.



مثال 5 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتطابقة للقاطعين



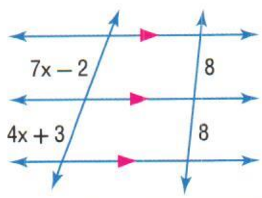
الجبر أوجد قيمة x و y.

بما أن $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$ و $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$.
فإن $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 7.2.

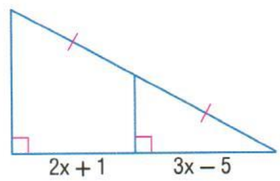
$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x - 5 = 4x + 3$	عوّض
$2x - 5 = 3$	اطرح $4x$ من الطرفين.
$2x = 8$	اجمع 5 إلى الطرفين.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 2.
$MP = PQ$	تعريف التطابق
$3y + 8 = 5y - 7$	عوّض
$8 = 2y - 7$	اطرح $3y$ من الطرفين.
$15 = 2y$	اجمع 7 إلى الطرفين.
$7.5 = y$	اقسم 2 على الطرفين.

تمرين موجّه

5A.



5B.

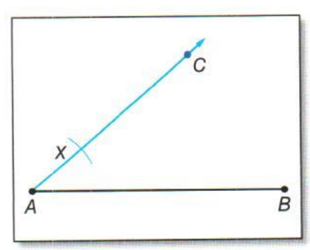


من الممكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين عن طريق إنشاء منصف عمودي على القطعة المستقيمة. إلا أنه لا يمكن تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة بإنشاء منصفات عمودية. ولفعل ذلك، يجب عليك استخدام المستقيمات المتوازية والنتيجة 13.2.

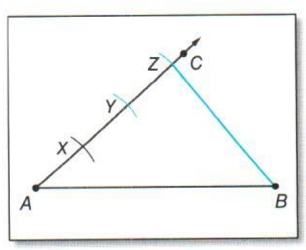
الإنشاء تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء

ارسم القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. ثم استخدم النتيجة 13.2 لتقسيم $\overline{AB}$ إلى ثلاثة أجزاء.

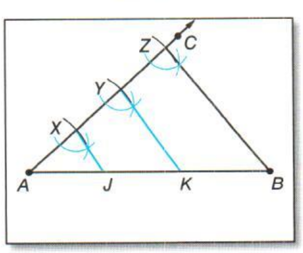
الخطوة 1 ارسم $\overline{AC}$. ثم ضع الفرجار على A، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AC}$عند X.



الخطوة 2 استخدم نفس وضعية الفرجار لرسم Y, Z بحيث يكون $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$. ثم ارسم ZB.



الخطوة 3 ارسم مستقيمين يربطان بين Y و X بحيث يوازيان $\overline{ZB}$. اكتب على نقطتي التقاطع على $\overline{AB}$ الحرفين J و K.

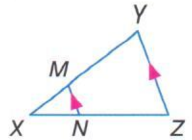


الاستنتاج: بما أن المستقيمين المتوازيين يقطعان قطعتين مستقيمتين متطابقتين على القاطعين، فإن $\overline{AJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KB}$.

التحقق من فهمك

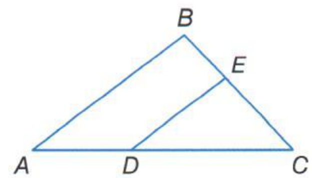
مثال 1

1. إذا كان $XM = 4$، $XN = 6$، و $NZ = 9$، فأوجد XY.
2. إذا كان $XN = 6$، $XM = 2$، و $XY = 10$، فأوجد NZ.

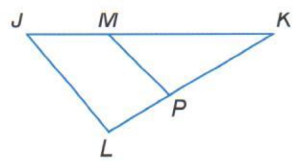


مثال 2

3. في $\triangle ABC$، $BC = 15$، و$BE = 6$، و $DC = 12$، و $AD = 8$. حدد ما إذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. برر استنتاجك. برر استنتاجك.



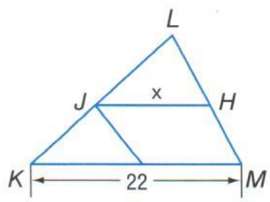
4. في $\triangle JKL$، $JK = 15$، و$JM = 5$، و $LK = 13$، و $PK = 9$. حدد ما إذا كان $\overline{JL} \parallel \overline{MP}$.



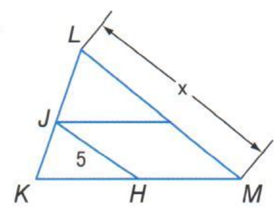
مثال 3

$\overline{JH}$ هو منصف ساقي $\triangle KLM$. أوجد قيمة x.

5.

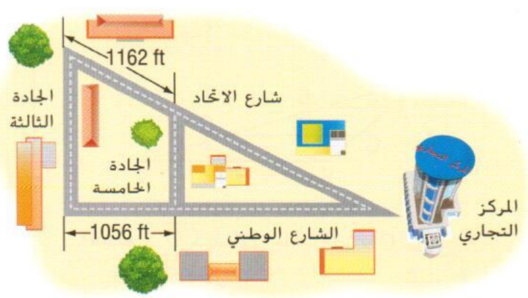


6.



مثال 4

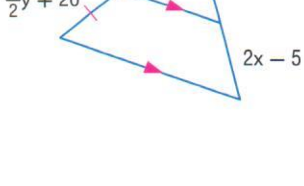
7. **الخرائط** راجع الخريطة الموجودة على اليسار. الطريق الثالث والطريق الخامس متوازيان. إذا كانت المسافة من الطريق الثالث إلى المركز التجاري مرورًا بالشارع الوطني هي 3201 متر، فأوجد المسافة بين الشارع الخامس والمركز التجاري مرورًا بشارع الاتحاد. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



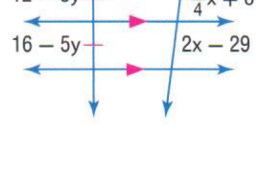
مثال 5

الجبر **أوجد قيمة x و y.**

8.

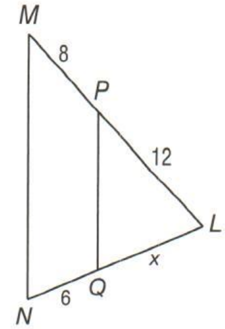


9.

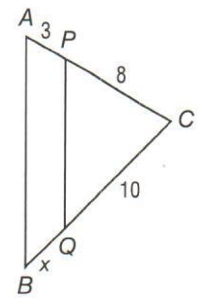


التدريب وحل المسائل

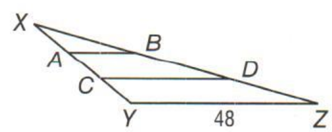
10. في الشكل الموضح على اليسار، $\overline{MN}$ يوازي $\overline{PQ}$. أوجد قيمة x.



12. في المثلث الموضح أدناه، PQ يوازي AB.
ما طول BQ؟



13. يوضّح الرسم التخطيطي أدناه نقطتين تقسمان $\overline{XY}$ إلى ثلاث قطع مستقيمة متطابقة، ونقطتين تقطعان $\overline{XZ}$ إلى ثلاث قطع مستقيمة متطابقة. وكلٌ من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يوازيان $\overline{YZ}$. أي من العبارات التالية صحيحة؟



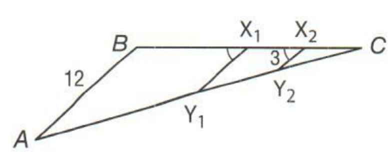
A طول $\overline{CD}$ يساوي ثلث طول $\overline{AB}$.

B طول $\overline{AB}$ يساوي نصف طول $\overline{YZ}$.

C طول $\overline{AB}$ طول يساوي ثلث طول $\overline{YZ}$.

D طول $\overline{AB}$ يساوي ثلثي طول $\overline{YZ}$.

14. في الرسم التخطيطي أدناه، $\overline{BA}\|\overline{X_1Y_1}\|\overline{X_2Y_2}$. و $BX_1 = 0.5(BC)$، و $X_1X_2 = 0.5(BX_1)$. أي العبارات التالية غير صحيحة؟



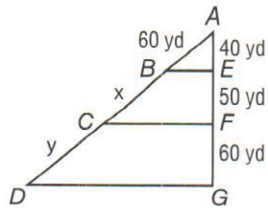
A $AY_1 = 0.5\,(AC)$

B $Y_1Y_2 = 0.5(AY_1)$

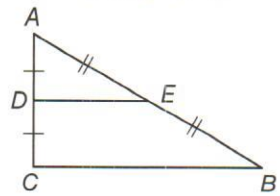
C $Y_1Y_2 = 0.25(AC)$

D $AY_2 = 0.8(AC)$

11. تم تقسيم قطعة أرض كما هو موضح على اليسار. القطع المستقيمة الأفقية الحدودية $\overline{BE}$، و $\overline{CF}$، و $\overline{DG}$ جميعًا متوازية. أوجد الطولين المجهولين. x و y.



15. ما العبارة التي تتناول الرسم التخطيطي أدناه ولا يُمكن إثباتها؟



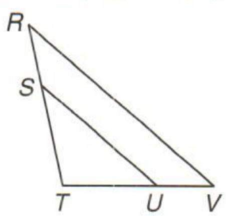
A $\overline{DE} \| \overline{CB}$

B $\overline{DE} \cong \overline{AC}$

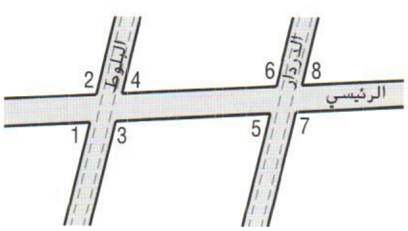
C $DE = \frac{1}{2}\,CB$

D $EB = \frac{1}{2}\,AB$

16. في الشكل، $\angle VRT \cong \angle UST$، و $SU = 5$، و $RV = 8$، و $RS = 2$. ما طول $\overline{ST}$؟



17. يقطع الشارع الرئيسي شارع البلوط وشارع الدردار. أي العلاقات التالية لا تكفي لإثبات أن شارع البلوط يوازي شارع الدردار؟



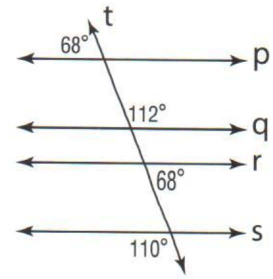
A $\angle 1 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 8$

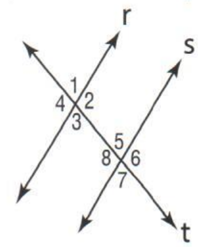
C $\angle 2 \cong \angle 3$

D $\angle 4$ و $\angle 6$ زاويتان متكاملتان.

18. المستقيم tهو قاطع مستعرض للمستقيمات p و q و r. وs لا يوازي المستقيمات الثلاثة الأخرى؟



19. المستقيم t هو عبارة عن قاطع مستعرض. أي من العبارات التالية تثبت أن $r \parallel s$؟



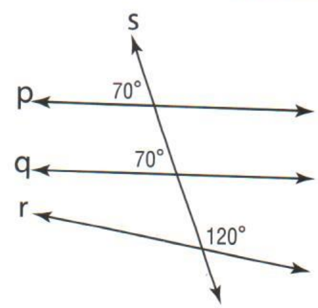
A $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

B $m\angle 3 = m\angle 5$

C $m\angle 5 + m\angle 8 = 180°$

D $m\angle 2 = m\angle 4$

20. المستقيم s هو عبارة عن قاطع مستعرض. أي عبارة حول المستقيمات p و q و r يجب أن تكون صحيحة؟



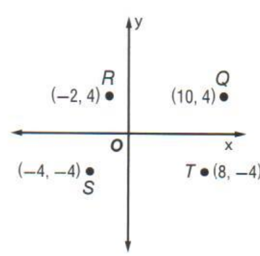
A $p \parallel q \parallel r$

B $q \parallel r$ فقط

C $p \parallel r$ فقط

D $p \parallel q$ فقط

21. $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{QT}$ يمثلان مستقيمين في المستوى. أي عبارة يُمكن استخدامها لإثبات أن $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{QT}$؟



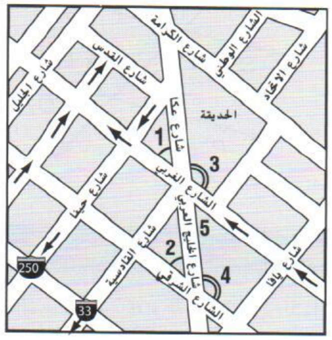
A ميل $\overleftrightarrow{RS}$ = ميل $\overleftrightarrow{QT}$

B ميل $\overleftrightarrow{RQ}$ = ميل $\overleftrightarrow{ST}$

C $RS = QT$

D نقطة المنتصف $RS = (-3, 0)$؛ ونقطة المنتصف $QT = (9, 0)$

22. يدرس طالب في الهندسة المعمارية تكوين الطرق قرب الحديقة في المدينة. أي عبارة لا يُمكن استخدامها لتوضيح أن الشارع الغربي يوازي الشارع الشرقي؟



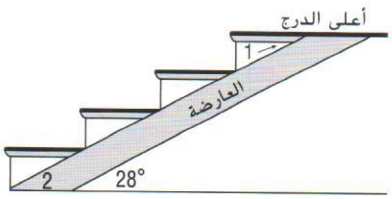
A $\angle 1 \cong \angle 2$

B $\angle 1$ و $\angle 3$ هما زاويتان متكاملتان.

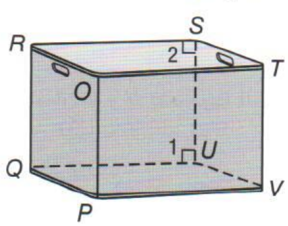
C $\angle 3 \cong \angle 4$

D $\angle 4$ و $\angle 5$ هما زاويتان متكاملتان.

23. على درجات السلم أدناه، طرفا العارضة الداعمة متوازيان. ما القياس الذي يجب أن تكون عليه $\angle 1$ حتى تكون قمة السلم موازية للأرض؟



24. لدى سهيلة صندوق تخزين. ما العبارات التي يُمكن استخدامها لإثبات أن $\overline{RS} \parallel \overline{QU}$؟



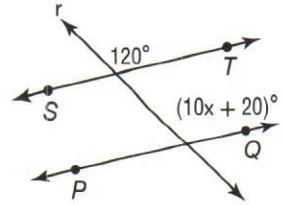
A $m\angle 1 = 90°$
$m\angle 2 = 90°$
$\angle 1$ متكاملة مع $\angle 2$.
$\overline{RS} \parallel \overline{QU}$

B $m\angle 1 = 90°$
$m\angle 2 = 90°$
$m\angle 1 = m\angle 2$
$\overline{RS} \parallel \overline{QU}$

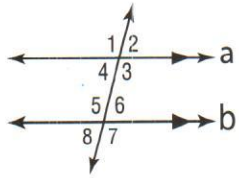
C $m\angle 1 = m\angle 2$
$m\angle 1 = 90°$
$\overline{RS} \parallel \overline{QU}$

D $m\angle 1 = m\angle 2$
$m\angle 2 = 90°$
$\overline{RS} \parallel \overline{QU}$

25. القاطع r يتقاطع مع $\overleftrightarrow{ST}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ كما هو موضح. ما قيمة x التي تجعل $\overleftrightarrow{ST} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$

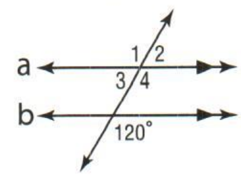


26. في الشكل أدناه، المستقيمان a و b متوازيان. ما الزاوية المتطابقة مع $\angle 1$؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

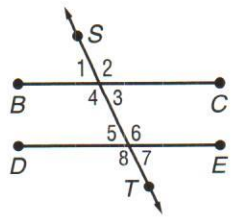
27. المستقيمان a و b متوازيان. أكمل كل عبارة فيما يلي.



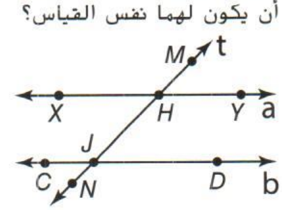
$m\angle 1 =$ ______ $m\angle 3 =$ ______

$m\angle 2 =$ ______ $m\angle 4 =$ ______

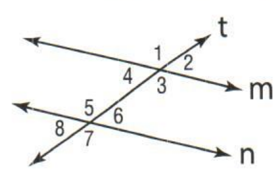
28. ما الذي يُمكننا استنتاجه من الرسم وحقيقة أن القاطع $\overline{ST}$ يقطع $\overline{BC}$ و $\overline{DE}$ وأن $\angle 6 \cong \angle 4$؟



29. المستقيمان a و b يقطعهما القاطع t. أي زاويتين يجب أن يكون لهما نفس القياس؟



30. القاطع t يقطع المستقيمين m و n. أي مما يلي يثبت أن m وn متوازيان؟



A $m\angle 4 + m\angle 6 = 180°$ **C** $m\angle 3 + m\angle 6 = 180°$

B $m\angle 2 + m\angle 8 = 90°$ **D** $m\angle 2 + m\angle 6 = 180°$

31. أي مما يلي يضمن أن مستقيمين على نفس المستوى ويقطعهما نفس القاطع يكونان متوازيين؟

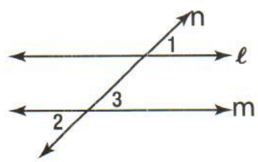
A زاويتان من الزوايا الداخلية المتبادلة متكاملتان.

B زاويتان من الزوايا الخارجية المتبادلة متكاملتان.

C زاويتان من الزوايا الداخلية المتتالية متكاملتان.

D زاويتان من الزوايا المتناظرة متكاملتان.

32. في الشكل الموضح، ℓ و m يقطعهما المستقيم القاطع n. و $\angle 2 \cong \angle 1$.

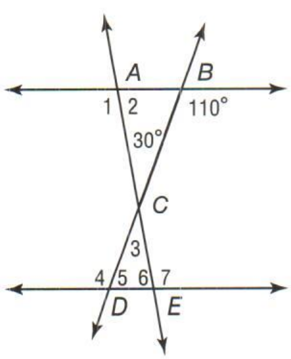


A ما العلاقة بين $\angle 2$ و $\angle 3$؟ اشرح.

B ما العلاقة بين $\angle 1$ و $\angle 3$؟ اشرح.

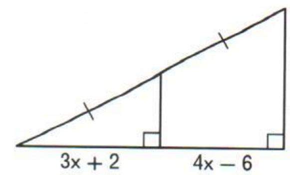
C اكتب فقرة إثبات لتوضيح أن المستقيمين ℓ و m متوازيان.

33. في الشكل الموضح أدناه، $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. ما هو قياس $\angle 6$؟



تدريب على الاختبار المعياري

34. الإجابة المختصرة ما قيمة x؟



35. إذا كانت رؤوس المثلث JKL هي (0 ,0) و (0, 10) و (10 ,10)، فإن مساحة المثلث JKL هي

A 20 وحدة^2 | C 40 وحدة^2

B 30 وحدة^2 | D 50 وحدة^2

36. الجبر تبلغ نسبة حبوب الأرز والقمح والشوفان المكونة لوجبة إفطار 1:4:2. إذا كانت الجهة المصنعة تصنع خليطًا به 110 كيلوجرامات من القمح، فما عدد كيلوجرامات الأرز المستخدمة؟

F 120 kg | H 240 kg

G 220 kg | J 440 kg

37. SAT/ACT إذا كانت مساحة الدائرة تبلغ 16 مترًا مربعًا، فما طول نصف القطر بالمتر؟

A $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}$ | D 12π

B $\frac{8}{\pi}$ | E 16π

C $\frac{16}{\pi}$

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من المعادلات الآتية:

38. $\sqrt{x+5}-3=0$

39. $\sqrt{3t-5}-3=4$

40. $\sqrt[4]{2x-1}=2$

41. $(5x+7)^{\frac{1}{5}}+3=5$

42. $(3x-2)^{\frac{1}{5}}+6=5$

43. $(7x-1)^{\frac{1}{3}}+4=2$

44. المعرض الوطني يصنع محل لمنتجات الألبان ثلاثة أنواع من الجبن – جبن شيدر، وجبن مونتري جاك، والجبن السويسري – ويبيع الجبن في ثلاثة منافذ بالمعرض الوطني. في بداية اليوم الأول، استلم المنفذ الأول x كيلوجرام من كل نوع من الجبن، واستلم المنفذ الثاني y كيلوجرام من كل نوع من الجبن، واستلم المنفذ الثالث z كيلوجرام من كل نوع من الجبن. في نهاية اليوم، باع محل منتجات الألبان 131 كيلوجرامًا من جبن الشيدر، و291 كيلوجرامًا من جبن مونتري جاك، و232 كيلوجرامًا من الجبن السويسري. يوضح الجدول أدناه النسبة المئوية للجبن الذي تم استلامه صباحًا وتم بيعه في كل منفذ. ما مقدار جبن الشيدر الذي يستلمه كل منفذ في الصباح؟

النوع	منفذ 1	منفذ 2	منفذ 3
جبن الشيدر	40%	30%	10%
جبن مونتري جاك	40%	90%	80%
الجبن السويسري	30%	70%	70%

مراجعة المهارات

أوجد قيمتي $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$.

45. $h(x)=2x-1$
$g(x)=3x+4$

46. $h(x)=x^2+2$
$g(x)=x-3$

47. $h(x)=x^2+1$
$g(x)=-2x+1$

48. $h(x)=-5x$
$g(x)=3x-5$

49. $h(x)=x^3$
$g(x)=x-2$

50. $h(x)=x+4$
$g(x)=|x|$

اختبار نصف الوحدة

الدرسان 1-13 و 2-13

حُـلّ كل من التناسبات الآتية. (الدرس 1-13)

1. $\frac{2}{5} = \frac{x}{25}$

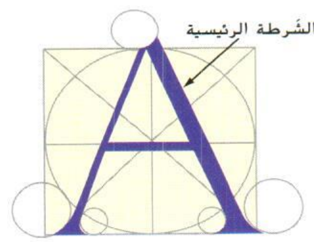
2. $\frac{10}{3} = \frac{7}{x}$

3. $\frac{y+4}{11} = \frac{y-2}{9}$

4. $\frac{z-1}{3} = \frac{8}{z+1}$

5. **البيسبول** متوسط الجولات المحرزة لضارب بيسبول هو ناتج ضرب 9 في النسبة بين الجولات المحرزة التي سمح بها الضارب وعدد الأشواط التي لعبت. في موسم 2007، سمح جون سانتانا بفريق مينيسوتا توينز بإحراز 81 جولة من 219 شوطًا. أوجد متوسط جولاته المحرزة مقربًا لأقرب جزء من مائة. (الدرس 1-13)

6. **التاريخ** في القرن الخامس عشر، حاول علماء الرياضيات والفنانون رسم الحرف المثالي. تم استخدام مربع كإطار لتصميم الحرف "A"، كما هو موضح أدناه. كان سُمك الشَّرطة الرئيسية للحرف $\frac{1}{12}$ ارتفاع الحرف. (الدرس 2-13)

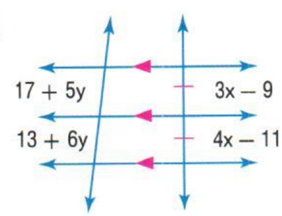


a. اشرح لمَ يمثّل الشريط المار بمنتصف الحرف A نصف المسافة بين الزاويتين الخارجيتين السفليتين لجانبي الحرف.

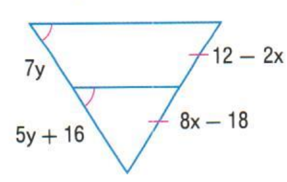
b. إذا كان ارتفاع الحرف 3 سنتيمترات، فكم يبلغ سُمك الشرطة الرئيسية؟

الجبر أوجد قيمتي x و y. (الدرس 2-13)

7.

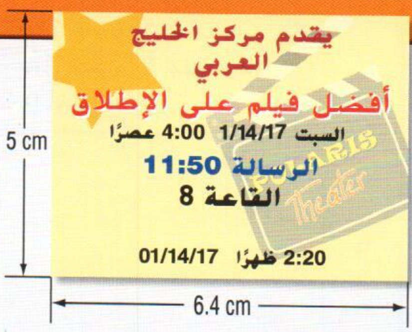


8.



الدرس 13-3 تحويلات التشابه

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
• لقد تعرفت على تحويلات التطابق.	**1** تحديد تحويلات التشابه. **2** التحقق من التشابه بعد إجراء تحويل تشابه.	• تستخدم فاطمة آلة تصوير مستندات لتكبير تذكرة فيلم لاستخدامها كخلفية لإحدى صفحات كتيب قصاصات تذاكر الأفلام الخاص بها. تضع فاطمة التذكرة على زجاج آلة التصوير، ثم يتعين عليها إدخال نسبة مئوية تحددها لعمل صورة أكبر بثلاث مرات من حجم التذكرة الأصلي.



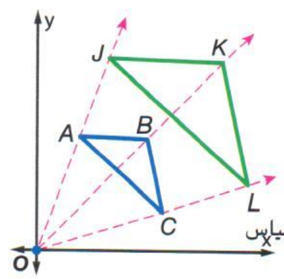
المفردات الجديدة

تغيير الأبعاد أو التمدد dilation
تحويل التشابه similarity transformation
مركز تغيير الأبعاد أو التمدد center of dilation
معامل مقياس تغيير الأبعاد(التمدد) scale factor of a dilation
تكبير enlargement
تصغير reduction

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 تحديد تحويلات التشابه

تذكر من الدرس 7-4 أن *التحويل* هو عملية رسم الشكل الأصلي، *الصورة الأصلية*، إلى شكل جديد يُسمى *الصورة*.



تغيير الأبعاد أو التمدد عبارة عن تحويل يؤدي إلى تكبير الشكل الأصلي أو تصغيره نسبيًا. وحيث إن تغيير الأبعاد ينتج عنه شكل مماثل، فإنه يعد أحد أنواع **تحويلات التشابه**.

يحدث تغيير الأبعاد حول نقطة ثابتة تُسمى **مركز تغيير الأبعاد**.

ويوضح **معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدّد)** مدى هذا التغير. فمعامل المقياس هو النسبة بين أحد الأطوال بالصورة والطول الموافق له بالصورة الأصلية.

$\triangle JKL$ عبارة عن تغيير في أبعاد $\triangle ABC$. مركز تغيير الأبعاد: $(0, 0)$
معامل المقياس: $\frac{JK}{AB}$

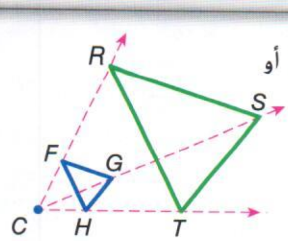
عادة ما يمثل الحرف k معامل مقياس تغيير الأبعاد. وتحدد قيمة k ما إذا كان التغيير في الأبعاد تكبيرًا أم تصغيرًا.

ملخص المفهوم أنواع تغييرات الأبعاد(التمدد)

يكون تغيير الأبعاد (التمدّد) الذي له معامل مقياس أكبر من 1 **تكبيرًا**، أو صورة أكبر من الشكل الأصلي.

الرموز إذا كان $k > 1$، فإن التغيير في الأبعاد تكبير.

مثال تم تغيير $\triangle FGH$ بمعامل مقياس يساوي 3، فنتج عنه $\triangle RST$. وبما أن $3 > 1$، فإن $\triangle RST$ تكبير لـ $\triangle FGH$.

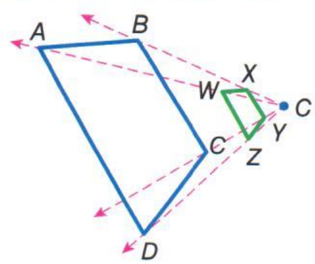


$k > 1$

يكون تغيير الأبعاد (التمدّد) الذي له معامل مقياس بين 0 و 1 **تصغيرًا**، أي صورة أصغر من الشكل الأصلي.

الرموز إذا كان $0 < k < 1$، فإن تغيير الأبعاد تصغير.

مثال تم تغيير أبعاد $ABCD$ بعامل مقياس يساوي $\frac{1}{4}$ فنتج عنه $WXYZ$. وبما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$، فإن $WXYZ$ هو تصغير $ABCD$.

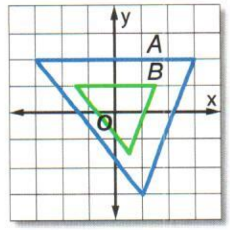


$0 < k < 1$

مثال 1 تحديد تغيير الأبعاد وإيجاد معامل المقياس له

حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

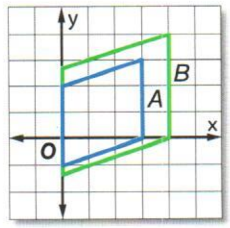
a.



B أصغر من A، إذًا فتغيير الأبعاد تصغير.

المسافة بين الرأسين عند $(-3, 2)$ و $(3, 2)$ بالنسبة إلى A هي 6 ومن الرأسين عند $(-1.5, 1)$ و $(1.5, 1)$ بالنسبة إلى B هي 3. إذًا، عوامل القياس هي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$.

b.



B أكبر من A، لذا فتغيير الأبعاد تكبير.

المسافة بين الرأسين عند $(3, 3)$ و $(3, 0)$ بالنسبة إلى A هي 3 وبين الرأسين عند $(4, 4)$ و $(4, 0)$ بالنسبة إلى B هي 4. إذًا معامل المقياس هو $\frac{4}{3}$.

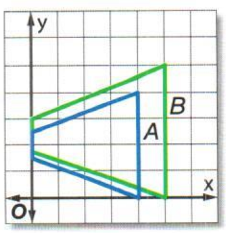
نصيحة دراسية

التمثيلات المتعددة

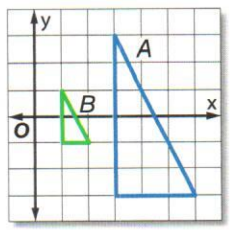
يمكن تمثيل معامل مقياس تغيير الأبعاد على هيئة كسر عشري أو نسبة مئوية. على سبيل المثال، يمكن كتابة معامل المقياس $\frac{2}{5}$ على هيئة 0.4 أو 40%.

تمرين موجّه

1A.



1B.



تُستخدم تغييرات الأبعاد وعوامل القياس في العديد من مواقف الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد معامل المقياس واستخدامه

التجميع راجع بداية الدرس. ما النسبة المئوية التي ينبغي على فاطمة تكبير التذكرة بحيث تكون أبعاد الصورة أكبر 3 مرات من الصورة الأصلية؟ ماذا ستكون أبعاد الصورة المكبرة؟

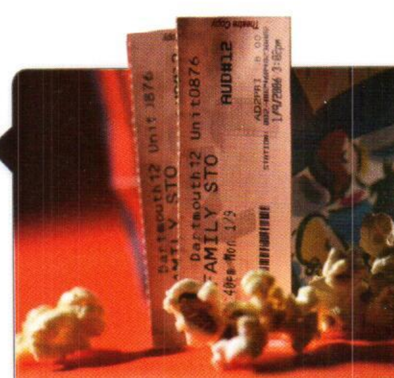
تريد فاطمة عمل صورة مغيرة الأبعاد لتذكرتها باستخدام آلة التصوير. معامل المقياس للتكبير 3. كان معامل المقياس المكتوب في هيئة نسبة مئوية يساوي $(3 \cdot 100)\%$ أو 300%. أوجد الآن أبعاد الصورة المكبرة باستخدام معامل المقياس.

العرض: $5 \text{ cm} \cdot 300\% = 15 \text{ cm}$ الطول: $6.4 \text{ cm} \cdot 300\% = 19.2 \text{ cm}$

ستكون صورة التذكرة المكبرة 15 سنتيمترًا في 19.2 سنتيمترًا.

تمرين موجّه

2. إذا كانت صورة التذكرة الناتجة يبلغ عرضها 1.5 سنتيمتر وطولها حوالي 1.9 سنتيمتر، فما النسبة المئوية التي استخدمتها فاطمة بالخطأ لتغيير أبعاد الصورة الأصلية؟ اشرح استنتاجك.



الربط بالحياة اليومية

قَبِل شخص يُدعى هيو وينغ فات تحدي في منافسة لجمع أكبر عدد من التذاكر لفيلم خيالي شهير، فجمع 6561 تذكرة في 38 يومًا!

المصدر: *سلسلة منشورات بوث نو*

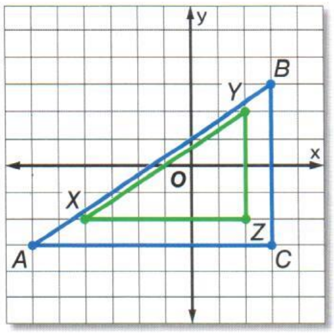
2 التحقق من التشابه

التحقق من التشابه يمكنك التحقق من أن التغيير في الأبعاد نتج عنه شكلاً مماثلاً بمقارنة الأضلاع والزوايا المتناظرة. بالنسبة للمثلثات، يمكنك أيضًا استخدام التشابه بين ضلعين وزاوية محصورة.

مثال 3 التحقق من التشابه بعد تغيير الأبعاد

مثّل بيانيًا الشكل الأصلي وصورته بعد تغيير الأبعاد، ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد عبارة عن تحويل تشابه.

a. الشكل الأصلي: $A(-6, -3), B(3, 3), C(3, -3)$؛ **الصورة:** $X(-4, -2), Y(2, 2), Z(2, -2)$



مثّل كل شكل بيانيًا. بما أن $\angle C$ و $\angle Z$ زاويتان قائمتان، فإن $\angle C \cong \angle Z$. اثبت أن طولي الضلعين اللذين يحصران الزاويتين $\angle C$ و $\angle Z$ متناسبان.

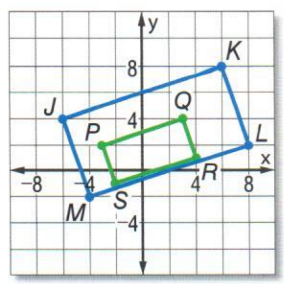
استخدم الشبكة الإحداثية لإيجاد أطوال الأضلاع.

$\frac{XZ}{AC} = \frac{6}{9}$ أو $\frac{2}{3}$، و $\frac{YZ}{BC} = \frac{4}{6}$ أو $\frac{2}{3}$، إذًا $\frac{XZ}{AC} = \frac{YZ}{BC}$.

بما أن طولي الضلعين اللذين يحصران $\angle C$ و $\angle Z$ متناسبان، فإن $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ حسب التشابه بين الضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

b. الشكل الأصلي: $J(-6, 4), K(6, 8), L(8, 2), M(-4, -2)$
الصورة: $P(-3, 2), Q(3, 4), R(4, 1), S(-2, -1)$

استخدم قانون المسافة لإيجاد طول كل ضلع.



$$JK = \sqrt{[6-(-6)]^2 + (8-4)^2} = \sqrt{160} \text{ أو } 4\sqrt{10}$$

$$PQ = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} \text{ أو } 2\sqrt{10}$$

$$KL = \sqrt{(8-6)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40} \text{ أو } 2\sqrt{10}$$

$$QR = \sqrt{(4-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$$

$$LM = \sqrt{(-4-8)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{160} \text{ أو } 4\sqrt{10}$$

$$RS = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{40} \text{ أو } 2\sqrt{10}$$

$$MJ = \sqrt{[-6-(-4)]^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{40} \text{ أو } 2\sqrt{10}$$

$$SP = \sqrt{[-3-(-2)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{10}$$

أوجد النسب بين الأضلاع المتناظرة وقارن بينها.

$$\frac{SP}{MJ} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \text{ أو } \frac{1}{2} \qquad \frac{RS}{LM} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}} \text{ أو } \frac{1}{2} \qquad \frac{QR}{KL} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \text{ أو } \frac{1}{2} \qquad \frac{PQ}{JK} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}} \text{ أو } \frac{1}{2}$$

$PQRS$ و $JKLM$ مستطيلان. ويمكن برهنة ذلك بإثبات أن الأقطار $\overline{JL} \cong \overline{KM}$ و $\overline{SQ} \cong \overline{PR}$ متطابقة باستخدام قانون المسافة. وبما أنهما مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

بما أن $\frac{PQ}{JK} = \frac{QR}{KL} = \frac{RS}{LM} = \frac{SP}{MJ}$ والزوايا المتناظرة متطابقة، فإن $PQRS \sim JKLM$.

تمرين موجّه

3A. الشكل الأصلي: $A(2, 3), B(0, 1), C(3, 0)$
الصورة: $D(4, 6), F(0, 2), G(6, 0)$

3B. الشكل الأصلي: $H(0, 0), J(6, 0), K(6, 4), L(0, 4)$
الصورة: $W(0, 0), X(3, 0), Y(3, 2), Z(0, 2)$

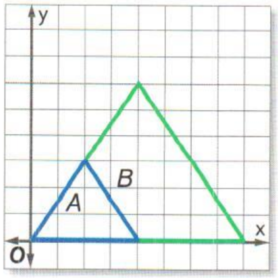
نصيحة دراسية

مركز تغيير الأبعاد
جميع تغييرات الأبعاد على المستوى الإحداثي تستخدم الشكل الأصلي كمركز تغيير البُعد، ما لم يُذكر خلاف ذلك.

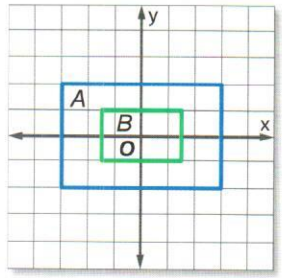
التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.**

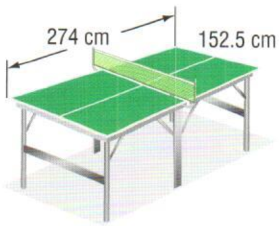
1.



2.

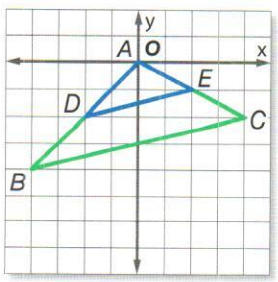


مثال 2 **3.** **ألعاب** أبعاد ملعب تنس مستطيل هي 810 سنتيمترًا في 2340 سنتيمترًا. وأبعاد طاولة تنس الطاولة هي 152.5 سنتيمترًا في 274 سنتيمترًا. فهل طاولة تنس الطاولة عبارة عن تغير في أبعاد ملعب التنس؟ إذا كان كذلك، فما معامل المقياس؟ اشرح.

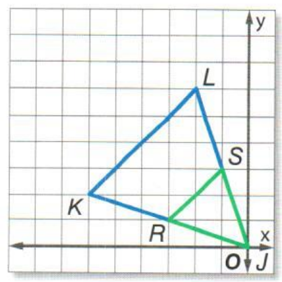


مثال 3 **فرضيات** تحقق من أن تغيير الأبعاد عبارة عن تحويل تشابه.

4.

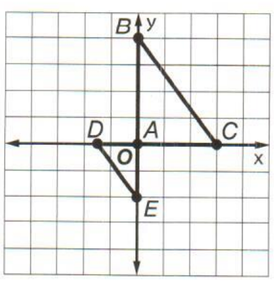


5.



التدريب وحل المسائل

6. أي العبارات الصحيحة تعد كافية لإثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle AED$؟



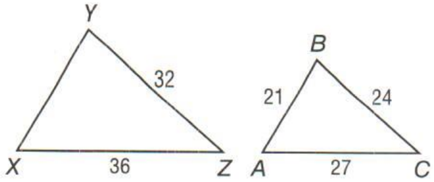
A $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$; $m\angle BAC = m\angle EAD$

B $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

C $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED}$

D $m\angle BAC = m\angle EAD$

7. بالإضافة إلى المعلومات المقدمة من الرسم، أي عبارة تكفي لإثبات أن $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$؟



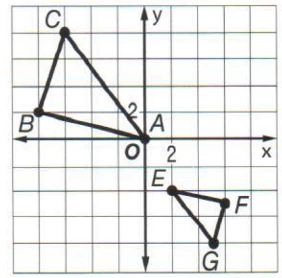
A $\angle X \cong \angle A$

B $\angle Y \cong \angle B$

C $\frac{YZ}{BC} = \frac{XZ}{AC}$

D $XY = 28$

8. بالرسم مثلثان موضحة إحداثياتهما، فأي مجموعة من العبارات الصحيحة يمكن استخدامها لإثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$؟



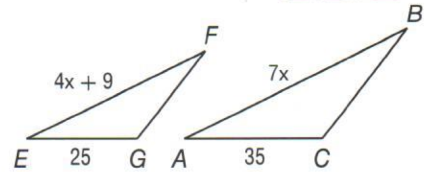
A $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}; \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}; \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$

B $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$

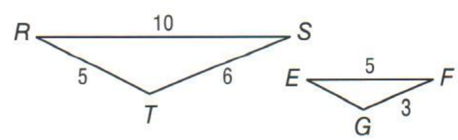
C $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}; m\angle B = m\angle F$

D $\frac{AC}{EG} = \frac{BG}{FG}; m\angle B = m\angle F$

9. مع أي قيم x سيكون $\triangle EFG$ مشابهًا لـ $\triangle ABC$؟



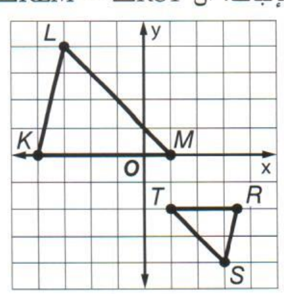
10. بالإضافة إلى المعلومات المقدمة من الرسم، أي عبارة يمكن استخدامها لإثبات أن $\triangle RST \sim \triangle EFG$؟



A $\angle R = \angle E$ **C** $EG = 4$

B $\angle T = \angle G$ **D** $EG = 2.5$

11. بدلالة $\triangle KLM$ و $\triangle RST$ الموضحان، أي مجموعة من العبارات الصحيحة تكفي لإثبات، أن $\triangle KLM \sim \triangle RST$؟



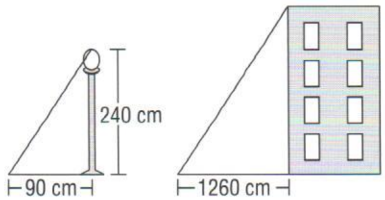
A $\frac{KL}{RS} = \frac{KM}{RT}; \frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}; \frac{KM}{RT} = \frac{LM}{ST}$

B $\frac{KL}{RS} = \frac{KM}{RT}$

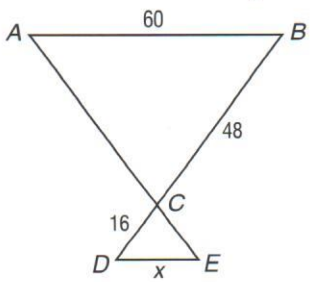
C $\frac{KL}{RS} = \frac{KM}{RT}; m\angle L = m\angle S$

D $\frac{KM}{RT} = \frac{LM}{ST}; m\angle L = m\angle S$

12. عمود إنارة بأحد الشوارع ارتفاعه 240 سنتيمترًا بالقرب من بناية لها ظل طوله تسعين سنتيمترًا. في الوقت نفسه، هناك بناية لها ظل طوله 1260 سنتيمترًا. فكم طول البناية؟

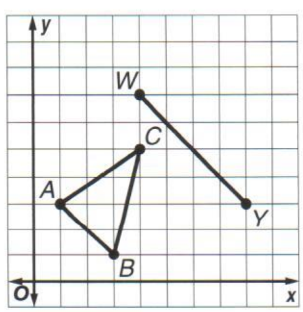


13. إذا كان المثلث ABC مشابهًا للمثلث EDC. فما قيمة x؟

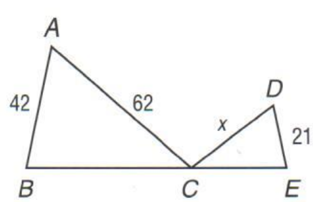


14. يوضح التمثيل البياني $\triangle ABC$ ورؤوس زواياه هي $A(1, 3)$، و $B(3, 1)$، و $C(4, 5)$ و $\overline{WY}$ ونقطتاها الطرفيتان هما $W(4, 7)$ و $Y(8, 3)$.

ما الإحداثيات التي يجب وضع X عندها لعمل $\triangle WYX$، بحيث يشبه $\triangle ABC$؟

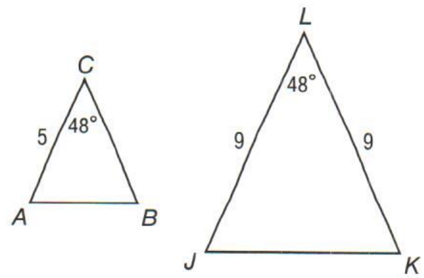


15. في الشكل أدناه، $\triangle ABC$ يشبه $\triangle DEC$. فما قيمة x؟



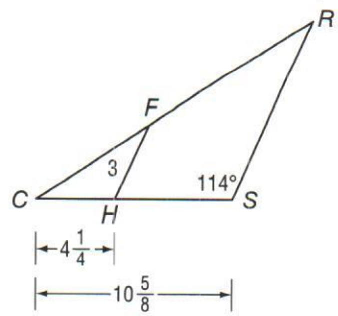
16. المثلثان ABC و JKL متشابهان.

فما $m\angle B$؟



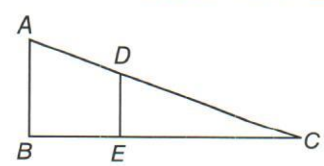
17. في الرسم التخطيطي أدناه، المثلثان CFH و CRS متشابهان.

فأي مما يلي يمثل طول $\overline{RS}$؟

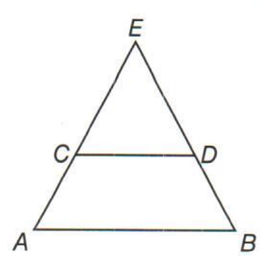


18. المثلثان ABC و DEC متشابهان، فيهما $AD = 6$، و $DC = 12$، و $AB = 6$، و $BE = 4$.

فما محيط $\triangle DCE$؟



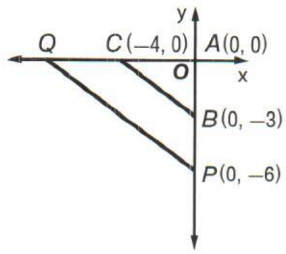
19. يبين الشكل أدناه المثلثين: $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$.



ما المعلومات اللازم معرفتها لإثبات أن $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$ متشابهان؟

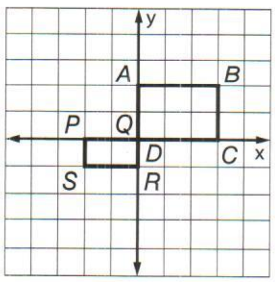
20. المثلث ABC يشبه $\triangle DEF$ والمثلثان فيهما النقاط $A(-3, -1)$، و $B(0, 2)$، و $D(-6, -2)$، و $E(0, 4)$. فما قيمة النسبة $\frac{BC}{EF}$؟

21. تحاول ليلى إثبات أن $\triangle ABC$ يشبه $\triangle APQ$.



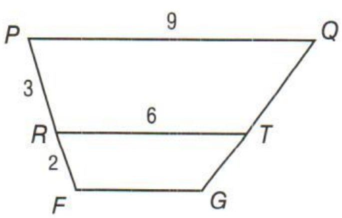
فماذا ستكون إحداثيات النقطة Q لإثبات أن هذين المثلثين متشابهان؟

22. يقع المثلثان $ABCD$ و $PQRS$ في المستوى الإحداثي كما هو موضح أدناه.



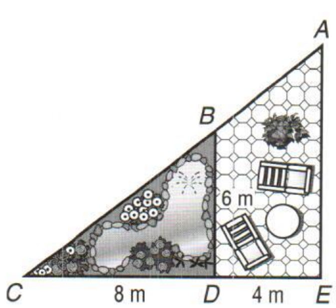
هل المثلثان $ABCD$ و $PQRS$ متشابهان؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

23. في الشكل أدناه، $PQTR \sim RTGF$.



فما طول $\overline{FG}$؟

24. في مخطط الفناء الموضح أدناه، الشكل ACE يشبه الشكل BCD.



فما طول القطعة المستقيمة AE؟

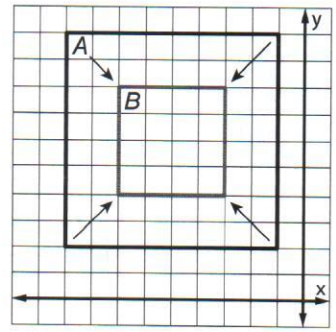
تدريب على الاختبار المعياري

25. الجبر أي معادلة تصف المستقيم المار بالنقطة $(-3, 4)$ والعمودي على $3x - y = 6$؟

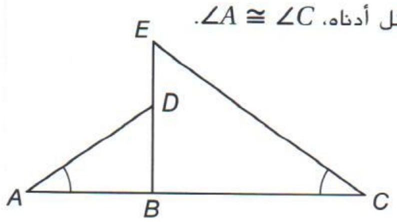
A $y = -\frac{1}{3}x + 4$ **C** $y = 3x + 4$

B $y = -\frac{1}{3}x + 3$ **D** $y = 3x + 3$

26. الإجابة المختصرة ما معامل مقياس تغيير الأبعاد الموضح أدناه؟



27. في الشكل أدناه، $\angle C \cong \angle A$.



ما المعلومة الإضافية التي قد لا تكون كافية لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CEB$؟

F $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB}$ **H** $\overline{ED} \cong \overline{DB}$

G $\angle ADB \cong \angle CEB$ **J** $\overline{EB} \perp \overline{AC}$

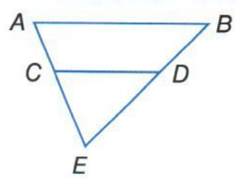
28. SAT/ACT $x = \frac{6}{4p+3}$ و $xy = \frac{3}{4p+3}$. $y =$

A 4 **C** 1 **E** $\frac{1}{2}$

B 2 **D** $\frac{3}{4}$

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$. علل إجابتك. (الدرس 2-13)



29. $AC = 8.4$ و $BD = 6.3$ و $DE = 4.5$ و $CE = 6$

31. $AC = 7$ و $BD = 10.5$ و $BE = 22.5$ و $AE = 15$

31. $AB = 8$ و $AE = 9$ و $CD = 4$ و $CE = 4$

حـلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية.

32. $2x - 3y + z = -4$
$x + 2y - 3z = -9$
$4x - y + 2z = -3$

33. $-3x + 4y - 2z = -14$
$2x - 3y - 4z = 6$
$-5x - 2y + 3z = 35$

34. فعالية في إحدى مباريات كرة القدم بمدرسة ثانية، يبيع كشك للمشروبات مشروب الشيكولاتة الساخنة بمبلغ AED 1.75 والمياه الغازية بمبلغ AED 1.25.
في المباراة الأخيرة، بيع 175 مشروبًا بإجمالي AED 243.75. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد المشروبات التي بيعت من كل نوع.

مراجعة المهارات

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

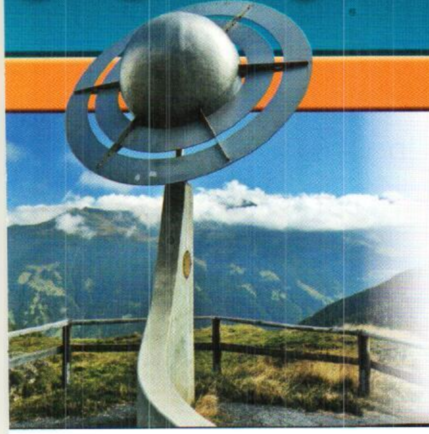
35. $2x - 3y = 18$
$5x + 7y = -13$

36. $-3x - 2y = -5$
$-4x + 6y = 28$

37. $x + 5y - z = 14$
$2x - y + z = -8$
$3x + 2y + z = -1$

38. $x + y + z = -3$
$3x - 2y = 16$
$2x - y + 3z = -5$

الدرس 13-4 مقياس الرسم والنماذج المقياسية



:: السابق

- لقد استخدمت عوامل القياس في حل المسائل ذات المضلعات المتشابهة.

:: الحالي

1. تفسير النماذج المقياسية.
2. استخدام مقاييس الرسم لحل المسائل.

:: لماذا؟

- في سانت لوك بسويسرا، أنشأ مرصد درب الكواكب "Le Chemin des planetes" نموذجًا مقياسيًا لكل كوكب بالمجموعة الشمسية. وهذا النموذج من أكبر النماذج المقياسية الثلاثية الأبعاد والمكتملة للمجموعة الشمسية. يبلغ قطر مركز نموذج كوكب زحل الموضح 121 ميليمترًا. أما قطر الكوكب الحقيقي فيبلغ 121,000 كيلومترًا.

المفردات الجديدة

نموذج مقياسي scale model

مقياس رسم scale drawing

مقياس scale

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 النماذج المقياسية

النموذج المقياسي أو **رسم مقياسي** عبارة عن جسم أو رسم له أطوال متناسبة مع الجسم الذي يمثله. و **مقياس الرسم** أو النموذج هو النسبة بين طول النموذج أو الرسم والطول الفعلي للجسم المرسوم أو الذي تم تمثيله بنموذج.

مثال 1 استخدام مقياس رسم نسبي

الخرائط مقياس الخريطة الموضحة هو 0.1 سنتيمتر = 60 كيلومترًا. أوجد المسافة الفعلية بين ناشفيل وممفيس.

استخدم المسطرة. المسافة بين ناشفيل وممفيس 4 سنتيمترات.

الطريقة 1 كتابة تناسب وحله.

افترض أن x يمثل المسافة بين ناشفيل وممفيس.

المقياس	ناشفيل إلى ممفيس	
الخريطة ← $\frac{1 \text{ cm}}{60 \text{ km}}$	$= \frac{4 \text{ cm}}{x \text{ km}}$ ← الخريطة	الفعلية
$1 \cdot x = 60 \cdot 4$		خاصية الضرب التبادلي
$x = 240$		بالتبسيط.

الطريقة 2 كتابة معادلة وحلها.

افترض أن a = المسافة الحقيقية بالكيلومترات بين ناشفيل وممفيس وأن m = المسافة على الخريطة بالسنتيمترات. اكتب المقياس بالشكل $\frac{60 \text{ km}}{1 \text{ cm}}$، حيث 1 ÷ 60 أو 60 كيلومترًا لكل سنتيمتر. لذلك، تكون المسافة الفعلية 60 كيلومترًا لكل سنتيمتر على الخريطة.

$a = 60 \cdot m$ كتابة معادلة.

$= 60 \cdot 4$ $m = 4$ cm.

$= 240$ الحل.

التحقق استخدم التحليل البُعدي.

$$\text{km} = \frac{\text{km}}{\text{cm}} \cdot \text{cm} \Rightarrow \text{km} = \text{km} \checkmark$$

المسافة بين ناشفيل وممفيس 240 كيلومترًا.

تمرين موجّه

1. **خرائط** أوجد المسافة الفعلية بين ناشفيل وتشاتانوغا.

2 استخدام مقياس الرسم يُكتب مقياس الرسم أو النموذج المقياسي على هيئة نسبة غير محددة الوحدات في أبسط صورة. ودائمًا ما تُكتب عوامل المقياس بحيث يأتي طول النموذج أولاً في المقياس.

مثال 2 إيجاد مقياس الرسم

نموذج مقياسي هذه نسخة مطابقة مصغرة من سيارة أجرة لشركة تشيكر عام 1923. يبلغ طول النموذج 16 سنتيمترًا. وكان الطول الفعلي للسيارة 4 أمتار.

a. ما مقياس النموذج؟

لإيجاد المقياس، اكتب نسبة طول النموذج إلى الطول الفعلي.

$$\frac{\text{طول النموذج}}{\text{الطول الفعلي}} = \frac{16 \text{ cm}}{4 \text{ m}} \text{ أو } \frac{4 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$$

مقياس رسم النموذج هو **4 cm :1 m**.

b. كم يبلغ طول النموذج مقارنة بطول السيارة الفعلية؟

للإجابة على هذا السؤال، أوجد معامل مقياس النموذج واضربه في معامل تحويل يربط السنتيمترات بالأمتار للحصول على نسبة غير محددة الوحدة.

$$\frac{4 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = \frac{4 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = \frac{1}{25}$$

معامل مقياس الرسم هو **1:25**. أي أن طول النموذج يساوي طول السيارة الفعلية بمقدار $\frac{1}{25}$.

نصيحة دراسية

انتظام يكون معامل مقياس رسم النموذج المُصغر من الجسم الأصلي بين 0 و 1. ويكون معامل مقياس رسم النموذج المُكبر من الجسم الأصلي أكبر من 1.

تمرين موجّه

2. نموذج مقياسي صنع صف الأستاذة مها لمادة التاريخ نموذجًا مقياسيًا لمبنى يبلغ ارتفاعه 100 سنتيمترًا. يبلغ الطول الفعلي للمبنى 10 أمتار.

A. ما مقياس رسم النموذج؟

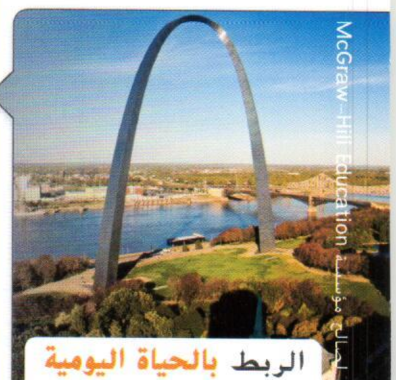
B. كم يبلغ ارتفاع النموذج مقارنة بالمبنى الفعلي؟ وكم يبلغ ارتفاع المبنى الفعلي مقارنة بالنموذج؟

مثال 3 من الحياة اليومية إنشاء نموذج مقياسي

نموذج مقياسي افترض أنك تريد عمل نموذج لقوس جيت واي في ميسوري لا يزيد ارتفاعه عن 28 سنتيمترًا. اختر المقياس المناسب واستخدمه لتحديد ارتفاع النموذج. استخدم المعلومات المقدمة على اليمين.

يبلغ ارتفاع النصب التذكاري الفعلي 189 مترًا. وبما أن 189 مترًا ÷ 28 سنتيمترًا = 6.75 أمتار لكل سنتيمتر، يعد مقياس 1 سنتيمتر = 7 أمتار مقياسًا مناسبًا. وإذًا، مقابل كل سنتيمتر بالنموذج m، افترض أن القياس الفعلي 7 a أمتار. اكتب ذلك على هيئة معادلة.

$a = 7 \cdot m$	كتابة معادلة.
$189 = 7 \cdot m$	$a = 189$
$27 = m$	إذًا ارتفاع النموذج سيكون 27 سنتيمترًا.



الربط بالحياة اليومية

قوس جيت واي في ميسوري هو أطول نصب تذكاري وطني في الولايات المتحدة، حيث يبلغ 189 مترًا. وتتباعد قاعدته مسافة 189 مترًا أيضًا. يزن القوس 17,246 طنًا ويمكن أن يتمايل بحد أقصى 22.5 سنتيمترًا في الاتجاهين أثناء الرياح الشديدة.

المصدر: حقائق قوس جيت واي

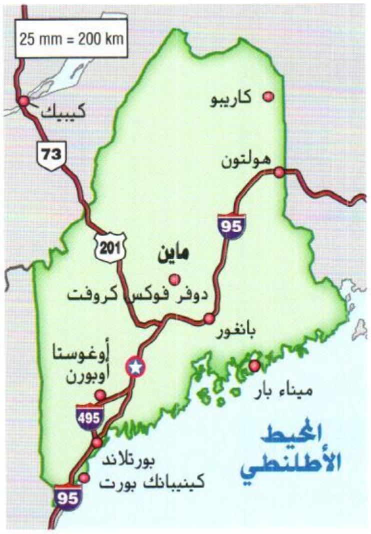
تمرين موجّه

3. مقياس رسم تصنع نجلاء رسمًا مقياسيًا لغرفتها على ورقة أبعادها 21 في 27.5 سنتيمترًا. فإذا كانت أبعاد غرفتها 4.20 أمتر في 3.60 أمتار، فأوجد مقياس الرسم المناسب للرسم وحدد أبعاد الرسم.

التحقق من فهمك

مثال 1

خرائط **استخدم خريطة ولاية ماين الموضحة ومسطرة تقليدية لإيجاد المسافة الفعلية بين كل زوجين من المدن. قِس بالتقريب لأقرب جزء من ستة عشر من البوصة.**



.1 بانجور وبورتلاند

.2 أوغوستا وهولتون

مثال 2

.3 **نماذج مقياسية** صنع مجيد نموذجًا مقياسيًا لجسر محلي. يمتد الجسر 15 سنتيمترًا، ويمتد الجسر الفعلي 15 مترًا.

a. ما مقياس رسم النموذج؟

b. ما معامل الرسم الذي استخدمه مجيد لصنع النموذج؟

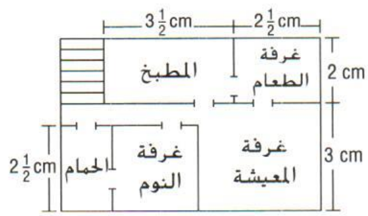
مثال 3

.4 **رياضة** يبلغ عرض ملعب الكرة الطائرة 9 أمتار وطوله 18 مترًا. اختر المقياس المناسب وأنشئ رسمًا مقياسيًا للملعب ليناسب بطاقة فهرس أبعادها 7.5 سنتيمترات في 12.5 سنتيمترًا.

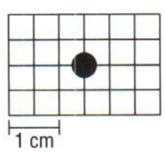
التدريب وحل المسائل

.5 برج له شكل أسطواني قطره 60 مترًا وارتفاعه 136.2 مترًا. أنشأت أنت نموذجًا مقياسيًا للبرج قطره 25 سنتيمترًا. فما حجم النموذج المقياسي مقربًا لأقرب سنتيمتر مكعب؟

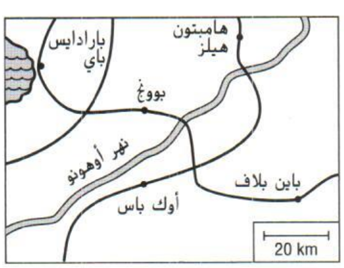
.6 مقياس المخطط هو 1 سنتيمتر لكل 2 متر.
فما أبعاد المطبخ؟



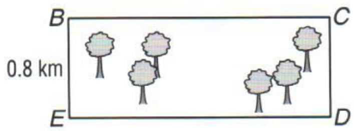
.7 باستخدام المقياس أدناه، ما أفضل تقدير لقطر الفجوة في منتصف الرسم؟



.8 ما المسافة التقريبية بالسيارة بين بارادايس باي وأوك باس؟



9. يوضح الرسم التخطيطي محيط حديقة حيث طول الجانبين الأطول يساوي $2\frac{1}{2}$ مرة قدر طول الجانبين الأقصر. فإذا أرادت هالة السير مسافة 8 كيلومترات، فكم عدد المرات التي ينبغي أن تسيرها في اتجاه عقارب الساعة حول الحديقة إذا بدأت من النقطة B؟



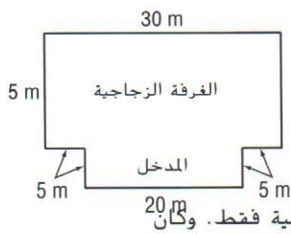
A أقل من مرتين بقليل مع التوقف في منتصف الطريق بين E و B

B $1\frac{1}{2}$ مرة بالضبط مع التوقف عند النقطة D

C أكثر من مرة واحدة بقليل مع التوقف قبل النقطة C تمامًا

D أقل بقليل من $1\frac{1}{2}$ مرة مع التوقف في منتصف الطريق بين C و D

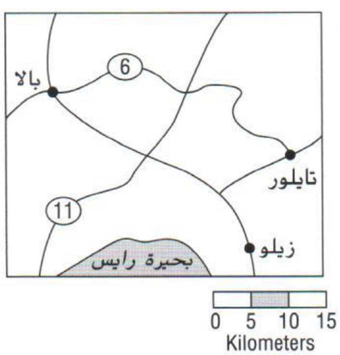
10. ترغب السيدة ياسمين في تركيب أرضية من السيراميك في غرفتها الزجاجية الجديدة والمدخل المؤدي إليها. فإذا كانت تكلفة تركيب بلاط السيراميك المعلن عنها هي AED 1,200 لكل 100 متر مربع، فماذا ستكون التكلفة الإجمالية على السيدة ياسمين؟



11. افترض أن السيدة ياسمين قامت بتركيب البلاط عند قاعدة الحائط في الغرفة الزجاجية فقط. وكان طول كل بلاطة وعرضها 15 سنتيمترًا. فإذا كانت تكلفة تركيب البلاطة AED 2.40، فماذا ستكون التكلفة الإضافية؟

12. قام مجمّع سكني بتعيين شركة فيصل وأبنائه لطلاء 20 أرضية خشبية بالورنيش. لا يحتاج الجانب السفلي من الأرضيات إلى الطلاء. فإذا كان لتر الورنيش يغطي حوالي 200 متر مربع، فكم عدد اللترات التي ينبغي على شركة فيصل وأبنائه شراؤها لهذه المهمة؟

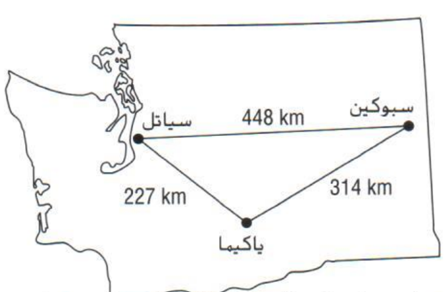
13. ارجع إلى الخريطة للإجابة عن السؤال التالي. إذا كنت تقود السيارة بمعدل متوسط 50 كيلومترًا في الساعة، فكم الوقت الذي ستستغرقه تقريبًا للقيادة من بالا إلى تايلور؟



14. مخطط لمركز مجتمعي جديد تبلغ أبعاده 85 سنتيمترًا للطول و55 سنتيمترًا للعرض. فإذا كان طول المركز المجتمعي فعليًا 45 مترًا، فما العرض الفعلي للمركز؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

15. تعيش سهيلة في سبوكين، وترغب في زيارة جدتها التي تعيش في ياكيما لمدة ساعتين، ثم زيارة صديقتها في سياتل لمدة 3 ساعات ثم العودة إلى منزلها في اليوم نفسه. تستطيع سهيلة المغادرة في الساعة 6 ص.، وسرعته المتوسطة في السفر هي 80 كيلومترًا في الساعة.



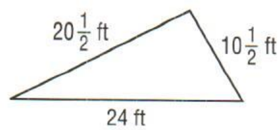
الجزء A كم عدد ساعات السفر التي ستحتاجها سهيلة لرحلتها؟

الجزء B هل ستتمكن سهيلة من زيارة جدتها وصديقتها والعودة لمنزله في يوم واحد؟

16. تقطع سيارة سهيلة 30 كيلومترًا لكل لتر وقود وسعتها 16 لترًا. أيضًا، تحبذ سهيلة في الرحلات الطويلة ملء خزان الوقود عندما ينخفض إلى $\frac{1}{4}$ السعة الكاملة. فكم عدد المرات التي سيتعين عليها فيها ملء خزان الوقود فيها أثناء رحلتها؟

17. تشتري هدى خريطة الإمارات من أحد المحلات. وقرأت أن المسافة من المدينة 1 إلى المدينة 2 هي 9.6 كيلومترات. وتظهر هذه المسافة على خريطتها 6.25 سنتيمترات. وهناك طريق اتجاه واحد يربط بين المدينتين طوله 12 كيلومترًا. فكم طول هذا الطريق على خريطة هدى؟

18. صنع يوسف رسمًا مقياسيًا لمنزله لصف تعلم الهندسة المعمارية. وتنتهي غرفة منزله العلوية بمثلثات مختلفة الأضلاع. والتي قام بقياسها لتصنع الشكل الموضح أدناه.



فإذا رسم يوسف أطول أضلاع غرفته العلوية بطول 10 سنتيمترات، فكم يبلغ طول أقصر ضلع؟

19. تعتبر منطقة إيفرجلايدز بجنوب فلوريدا نهرًا شاسعًا بطيء الجريان عرضه 100 كيلو متر وطوله 160 كيلو متر. تتدفق المياه مسافة 0.8 كيلومتر في اليوم تقريبًا. فإذا أظهرت خريطة العرض بأنه 5 سنتيمترات، فكم يبلغ طول المنطقة بالسنتيمترات على الخريطة؟

20. يعد فندق فور سيزون أطول بنايات ميامي بارتفاع يبلغ 240 مترًا. ولكن عند اكتمال بناء باي فرونت بلازا، فسيصبح أطول المباني بارتفاع 320 مترًا. صنع مهندس معماري نموذجًا مقياسيًا لتوضيح المقارنة بين البنايتين. فإذا كان ارتفاع النموذج الذي صنعه لفندق فور سيزون هو 48 سنتيمترًا، فكم يبلغ ارتفاع نموذجه لباي فرونت بلازا؟

21. صنعت هالة رسمًا مقياسيًا لغرفة نومها لإحدى المشاريع المدرسية. استخدمت مقياسًا يبلغ 1 سنتيمتر لكل 25 سنتيمترًا في رسمها. فإذا كانت مساحة غرفتها على الرسم المقياسي 324 سنتيمترًا مربعًا، فما المساحة الفعلية لغرفتها **بالمتر المربع؟**

22. تم عمل مقياس رسم بمقياس 9 : 1. فإذا كان طول الجسم الفعلي 27 مترًا، فما طوله على الرسم المقياسي؟

23. خريطة مقياسها $\frac{1}{2}$ سنتيمتر = 100 كيلو متر. فإذا كانت المسافة بين مدينتين على الخريطة 3 سنتيمترات، فما المسافة الفعلية بينهما؟

24. صُنع نموذج سيارة بمقياس 1:25. فإذا كان طول النموذج 10 سنتيمترات، فما طول السيارة الفعلية؟

25. خريطة مقياسها $\frac{1}{4}$ سنتيمتر = 50 كيلو مترًا. فإذا كانت المسافة بين مدينتين على الخريطة 4 سنتيمترات. فما المسافة الفعلية بينهما؟

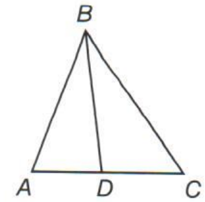
26. تم عمل مقياس رسم بمقياس 5 : 1. فإذا كان طول الجسم الفعلي 10 أمتار، فما طوله على الرسم المقياسي؟

27. خريطة مقياسها $\frac{1}{4}$ سنتيمتر = 50 كيلو مترًا. فإذا كانت المسافة بين مدينتين على الخريطة 4 سنتيمترات، فما المسافة الفعلية بينهما؟

تدريب على الاختبار المعياري

28. الإجابة المختصرة إذا كان $3^x = 27^{(x-4)}$، فما قيمة x إذًا؟

29. في $\triangle ABC$، $\overline{BD}$ متوسط. فإذا كان $AD = 3x + 5$ و $CD = 5x - 1$. أوجد AC.



A 6 **C** 14
B 12 **D** 28

30. في مثلث، تبلغ النسبة بين أطوال الأضلاع 4:7:10، ويبلغ أطول أضلاعه 40 سنتيمترًا. أوجد محيط المثلث بالسنتيمترات.

F 37 cm **H** 84 cm
G 43 cm **J** 168 cm

31. SAT/ACT إذا كانت وفاء تستطيع كتابة 80 كلمة في دقيقتين، فكم الزمن الذي ستستغرقه لكتابة 600 كلمة؟

A 30 min **D** 10 min
B 20 min **E** 5 min
C 15 min

مراجعة شاملة

32. الرسم يرسم ناصر لوحة لصديقه لصف الرسم. وبما أن صديقه ليس لديه الوقت للحضور بنفسه، استخدم ناصر صورة فوتوغرافية أبعادها 15 سنتيمترًا في 20 سنتيمترًا. فإذا كانت أبعاد قماش الرسم 60 سنتيمترًا في 80 سنتيمترًا، فهل تعتبر الرسمة تغييرًا في أبعاد الصورة الأصلية؟ إذا كانت كذلك، فما معامل الرسم؟ اشرح. (الدرس 3-13)

من دون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر ما إذا كان التمثيل البياني لكل معادلة قطعًا مكافئًا، أو دائرة، أم قطع ناقص أم قطع زائد.

33. $8y^2 - 16x + 12y - 20 = 0$

34. $9x^2 - 18x + 12y - 15y^2 + 10xy + 12 = 0$

35. $2y^2 + 8x^2 - 6xy + 8x - 10y - 12 = 0$

36. مجلس الطلاب يتوزع عادة عدد الطلاب المرشحين لمجلس الطلاب كل عام بمتوسط 16.8 طالبًا وانحراف معياري 3.7.

a. ما احتمال ترشح أقل من 10 طلاب في عام محدد؟

b. إذا احتفظت المدرسة بالسجلات لمدة 20 عامًا، فكم عدد السنوات التي ترشح فيها عدد 15 إلى 20 طالبًا لمجلس الطلاب؟

37. الملابس عينة من 225 طالب مدرسة ثانوية أنفق متوسط AED 125 على ملابس العام الدراسي الجديد. احسب أقصى خطأ للتقدير لنسبة 90% من مستوى الثقة إذا كان الانحراف المعياري AED 10.40.

مراجعة المهارات

حُـلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

38. $x^2 - y^2 = 21$
$y^2 + x^2 = 29$

39. $y = -3x + 1$
$y - x^2 = 23 - 8x$

40. $y = x^2 - 2x - 3$
$y = 2x - 3$

الوحدة 13 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التناسبات (الدرس 1-13)

- بالنسبة لأي عددين a و c وأي عددين غير صفريين b و d، يكون $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فقط إذا كان $ad = bc$.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 2-13)

- إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع مثلث وتقاطع مع الضلعين الآخرين في نقطتين متمايزتين، فإنه يقسّم كلاً من هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة متناسبة الأطوال.
- يكون منصف ساقي المثلث موازيًا لأحد أضلاع المثلث، ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.
- يكون المثلثان متشابهين عندما يتناسب قياس كل مما يلي: المحيطان والارتفاعان المتناظران ومنصفات الزوايا المتناظرة والمتوسطات المتناظرة لهما.

تحويلات التشابه ومقياس الرسم والنماذج المقياسية (الدرسين 3-13 و 4-13)

- يكون للنموذج أو الرسم المقياسي أطوال متناسبة مع الأطوال المتناظرة في الجسم الذي يمثله النموذج أو الرسم.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

المفردات الأساسية

الضرب التبادلي cross products	نسبة ratio
تغيير الأبعاد dilation	تصغير reduction
تكبير enlargement	مقياس نسبي scale
الطرفان extremes	مقياس رسم scale drawing
الوسطان means	نموذج مقياسي scale model
منصف ساقي المثلث midsegment of a triangle	تحويل التشابه similarity transformation
تناسب proportion	

مراجعة المفردات

اختر الحرف الذي يعبر عن الكلمة أو العبارة الأنسب لإكمال العبارات التالية.

a. النسبة
b. التناسب
c. الوسطان
d. الطرفان
e. مشابه
f. معامل المقياس
g. مسلمة تشابه زاويتين.
h. نظرية تشابه أضلاع المثلث الثلاثة
i. نظرية تشابه ضلعين وزاوية محصورة
j. منصف الساقين
k. تغيير الأبعاد
l. التكبير
m. التصغير

1. ___؟___ للمثلث تكون نقطتاه الطرفيتان في منتصف ساقي المثلث.

2. ___؟___ هي مقارنة بين كميتين باستخدام القسمة.

3. إذا كان $\angle X \cong \angle A$ و $\angle Z \cong \angle C$، فإن $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ بحسب ___؟___.

4. ___؟___ هو مثال لتحويل التشابه.

5. إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، فإن a و d هما ___؟___.

6. ___؟___ هو معادلة تنص على تكافؤ نسبتين.

7. تغيير الأبعاد بمعامل مقياس $\frac{2}{5}$ ينتج عنه ___؟___.

مراجعة درس بدرس

13-1 النسب والتناسب

حِل كلاً من التناسبات التالية.

8. $\frac{x+8}{6}=\frac{2x-3}{10}$ **9.** $\frac{3x+9}{x}=\frac{12}{5}$

10. $\frac{x}{12}=\frac{50}{6x}$ **11.** $\frac{7}{x}=\frac{14}{9}$

12. النسبة بين أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث هي 5:8:10. فإذا كان المحيط 276 سنتيمترًا، فأوجد طول أطول أضلاع المثلث.

13. **التجارة** يجب قطع لوحة بطول 12 مترًا إلى قطعتين النسبة بين طوليهما 3 إلى 2. أوجد طول القطعتين.

مثال 1

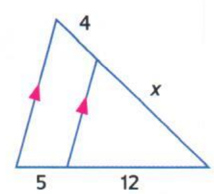
أوجد حل $\frac{2x-3}{4}=\frac{x+9}{3}$.

$\frac{2x-3}{4}=\frac{x+9}{3}$	التناسب الأصلي
$3(2x-3)=4(x+9)$	خاصية الضرب التبادلي
$6x-9=4x+36$	بسّط.
$2x-9=36$	بالطرح.
$2x=45$	بجمع 9 إلى كل طرف.
$x=22.5$	بالقسمة على 2.

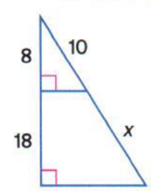
13-2 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

أوجد قيمة x.

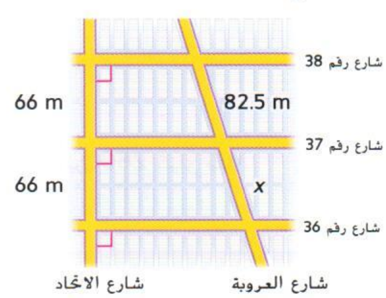
14.



15.

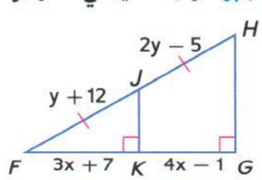


16. **الشوارع** أوجد المسافة بين شارع رقم 37 وشارع رقم 36 عبر طول شارع العروبة.



مثال 2

الجبر أوجد قيمتي x و y.



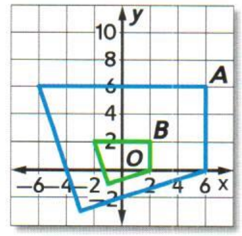
$FK=KG$	
$3x+7=4x-1$	
$-x=-8$	
$x=8$	
$FJ=JH$	تعريف التطابق
$y+12=2y-5$	بالتعويض
$-y=-17$	بالطرح.
$y=17$	بسّط.

الوحدة 13 دليل الدراسة والمراجعة تابع

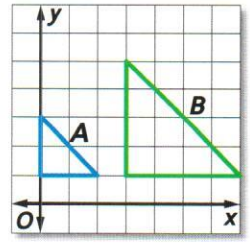
13-3 تحويلات التشابه

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثمّ أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

17.



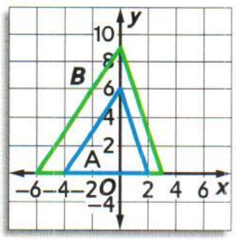
18.



19. **تصميم الجرافيك** ترفي سهى في استخدام آلة تصوير لتكبير تصميمها الذي صنعته لبرنامج التكريم في مدرستها. وقامت بضبط آلة التصوير إلى 250%. فإذا كانت أبعاد الرسمة الأصلية 16 سنتيمترًا في 24 سنتيمترًا، فأوجد أبعاد الصورة المكبرة.

مثال 3

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثمّ أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.



B أكبر من A. ولذا تغيير الأبعاد عبارة عن تكبير. والمسافة بين رؤوس الزوايا عند $(-4, 0)$ و $(2, 0)$ بالنسبة إلى A هي 6. والمسافة بين رؤوس الزوايا عند $(-6, 0)$ و $(3, 0)$ بالنسبة إلى B هي 9. إذًا معامل المقياس هو $\frac{9}{6}$ أو $\frac{3}{2}$

13-4 مقياس الرسم والنماذج المقياسية

20. **مخطط بناية** في رسم مقياسي لمخطط طوابق مدرسة، تعد 15 سنتيمترًا تمثيلاً لـ 30 مترًا. فإذا كانت المسافة بين طرفي الرواق الرئيسي 52.5 مترًا، فأوجد الطول المناظر في الرسم المقياسي.

21. **نماذج قطارات** أحد المقاييس الشائعة النماذج القطارات هي المقياس **1:48**. فإذا كان طول عربة القطار الفعلية 21.6 مترًا، فأوجد الطول المناظر للنموذج بالسنتيمترات.

22. **خرائط** خريطة لشرق الولايات المتحدة لها مقياس يكون فيه 3 سنتيمترات = 16 كيلومترًا. فإذا كانت المسافة على الخريطة بين كولومبيا وكارولاينا الجنوبية وشارلوت وكارولاينا الشمالية هي 28.75 سنتيمترًا، فما المسافة الفعلية بين المدن؟

مثال 4

في مقياس رسم خريطة لشمال غرب المحيط الهادي، 1 سنتيمتر= 15 كيلومترًا. المسافة بين بورتلاند بأوريجون وسياتل بواشنطن على الخريطة تبلغ 18.66 سنتيمترًا. أوجد المسافة بين المدينتين.

$\frac{1}{15} = \frac{18.66}{x}$ كتابة التناسب.

$x = 15(18.66)$ خاصية الضرب التبادلي

$x = 280$ بسّط.

المسافة بين المدينتين 280 كيلو مترًا.

تدريب على الاختبار

حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.

1. $\frac{3}{7} = \frac{12}{x}$

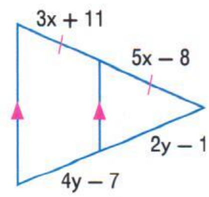
2. $\frac{2x}{5} = \frac{x+3}{3}$

3. $\frac{4x}{15} = \frac{60}{x}$

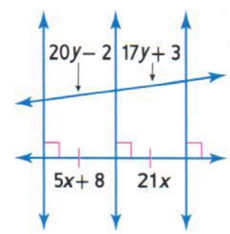
4. $\frac{5x-4}{4x+7} = \frac{13}{11}$

الجبر أوجد قيمة x و y. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مائة إذا لزم.

5.



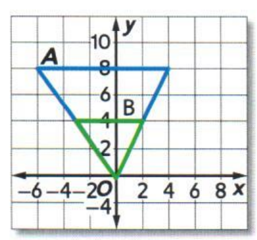
6.



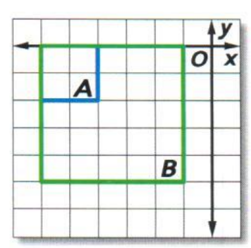
7. الإجابة المختصرة لدى يوسف قالب لسيارة معدنية عبارة عن نموذج مقياسي لسيارة سباقات فعلية. فإذا كان الطول الفعلي للسيارة هو 3 أمتار و 15 سنتيمترًا، وكان طول النموذج 17.5 سنتيمترًا، فما معامل مقياس النموذج بالنسبة إلى السيارة الفعلية؟

حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

8.

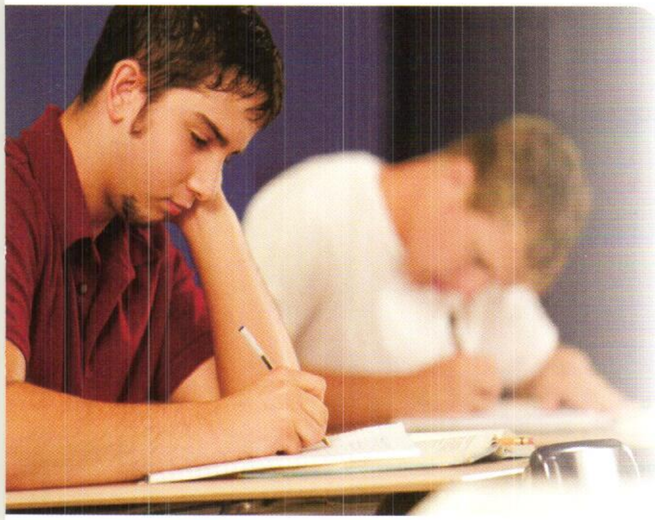


9.



التحضير للاختبارات المعيارية

تحديد أمثلة خارجة عن التعريف



تطلب منك مسائل الاختيار من متعددٍ أحيانًا تحديد خيار الإجابة الذي يعدّ مثالًا خارجًا عن التعريف. حيث تستلزم هذه الأنواع من المسائل استخدام طريقةٍ مختلفةٍ لحلّها.

طرق تحديد الأمثلة الخارجة عن التعريف

الخطوة 1

اقرأ عبارة المسألة وافهمها.

- **المثال الخارج عن التعريف:** المثال الخارج عن التعريف هو اختيار إجابة لا تلبي شروط عبارة المسألة.
- **الكلمات الأساسية:** ابحث عن كلمة *ليست* (عادةً تكون بالخط العريض أو كلها بالأحرف الكبيرة أو مائلة الأحرف) للإشارة إلى أنك تريد إيجاد مثال خارج عن التعريف.

الخطوة 2

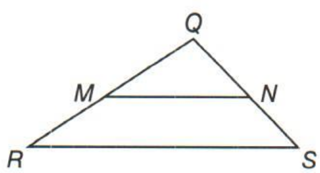
اتّبع المفاهيم والخطوات أدناه لمساعدتك في تحديد الأمثلة الخارجة عن التعريف. حدّد أي خيارات إجابةٍ من الواضحة أنها ليست صحيحة واستبعدها.

- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون سليمة الصيغة.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تتضمن الوحدات الصحيحة.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

في المثلث المجاور، تعلم أن $\angle MQN \cong \angle RQS$. فأي مما يلي لن يكون كافيًا لإثبات أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$؟



A $\angle QMN \cong \angle QRS$

B $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

C $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

D $\dfrac{QM}{QR} = \dfrac{QN}{QS}$

إن الخط المائل لا يشير إلى أنّ عليك إيجاد مثالٍ خارج عن التعريف. اختبر كل خيار إجابةٍ باستخدام مبادئ تشابه المثلثات لتعرف أيّها لا يثبت أن $\triangle QRS \cong \triangle QMN$.

الخيار A: $\angle QMN \cong \angle QRS$

إذا كانت $\angle QMN \cong \angle QRS$، إذا كانت $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ بموجب التشابه زاوية-زاوية.

الخيار B: $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$، إذًا $\angle QMN \cong \angle QRS$، لأنهما زاويتان متناظرتان لمستقيمين متوازيين يقطعهما القاطع $\overline{QR}$. ولذلك، $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ حسب التشابه زاوية-زاوية.

الخيار C: $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

إذا كان $\overline{QN} \cong \overline{NS}$، فلا يمكن أن نستنتج أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ لأننا لا نعلم شيئًا عن $\overline{QM}$ و $\overline{MR}$. إذًا فالإجابة C هي مثالٌ خارجٌ عن التعريف.

الإجابة الصحيحة هي C. يجب التحقق أيضًا من الاختيار D للتأكد من أنه مثالاً صالحًا إذا توفر لديك الوقت.

التدريبات

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. تساوي نسبة قياسات زوايا الرباعي المبيّن أدناه 3:4:5:6. فأي مما يلي ليس قياسًا لزاويةٍ في المثلث؟

A $60°$

B $80°$

C $120°$

D $140°$

2. ما نوع الشكل الذي يمكن أن يقدم مثالاً عكسيًا على الفرضية أدناه؟

> إذا كانت جميع زوايا الشكل الرباعي قائمة، فهل يكون الشكل الرباعي مربعًا.

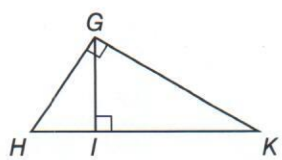
F متوازي الأضلاع

G المستطيل

H المعيّن

J شبه المنحرف

3. خذ الشكل أدناه. أي مما يلي ليس كافيًا لإثبات أن $\triangle GIK \sim \triangle HIG$؟



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

4. أي مثلثين ليسا متشابهين بالضرورة؟

F مثلثان قائمان بكل منهما زاوية واحدة قياسها $30°$

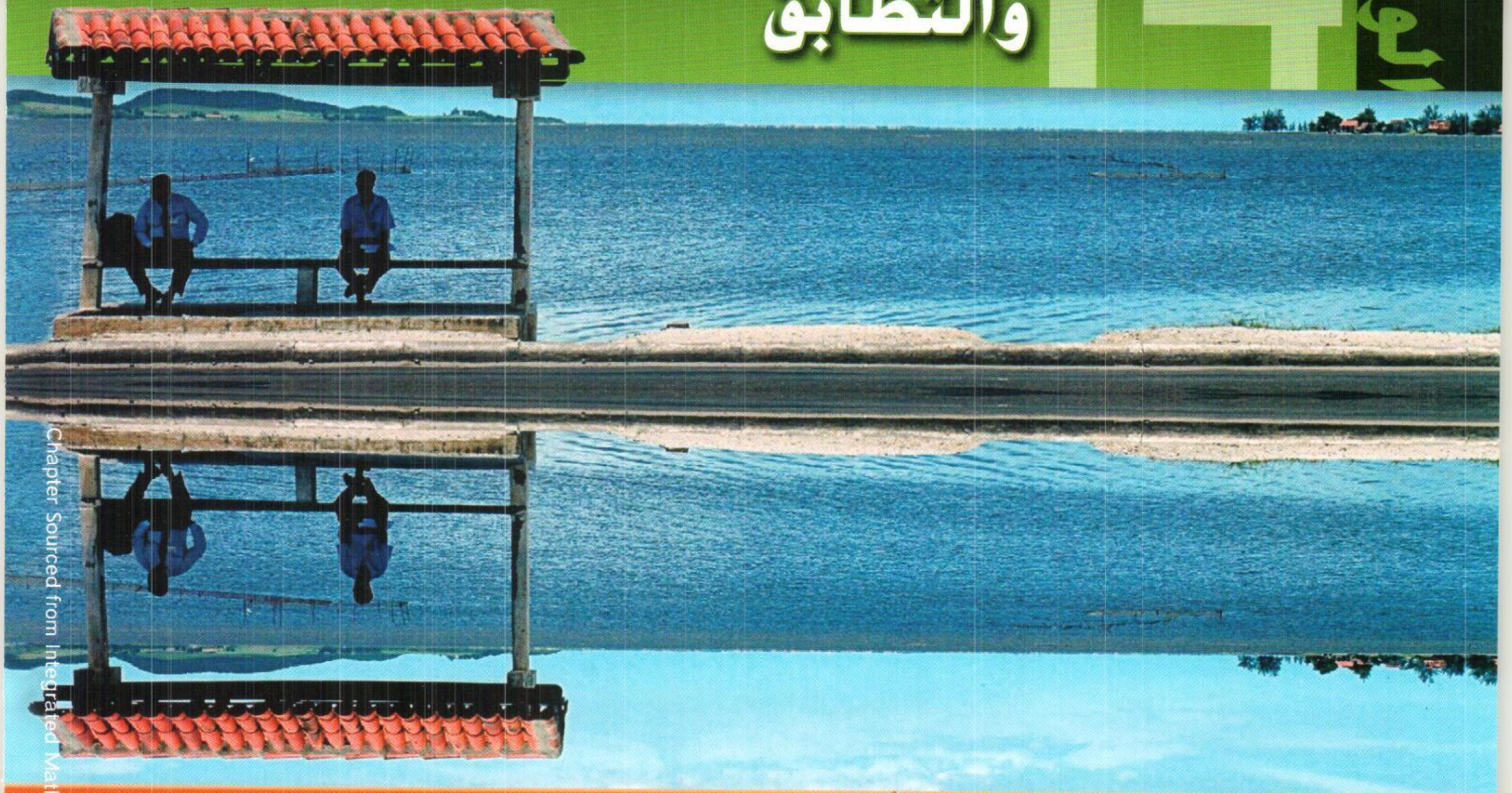
G مثلثان قائمان بكل منهما زاوية واحدة قياسها $45°$

H مثلثان متساويا الساقين

J مثلثان متساويا الأضلاع

الوحدة 14

التحويلات والتطابق



السابق

- لقد حدّدت الانعكاس والإزاحة والدوران.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تحديد أسماء أشكال عُكست أو أزيحت أو دوّرت أو غُيّرت أبعادُها (تمدّدت) ورسمها.
  - تمييز تركيب التحويلات ورسمها.
  - تحديد التماثل في الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.

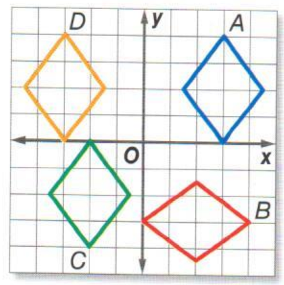
لماذا؟ ▲

- **التصوير الضوئي** يستخدم المصورون الانعكاس والدوران والتطابق ليجعلوا صورهم مثيرةً للإعجاب وملفتةً للنظر.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحةً*، أو *دورانًا*.



.1 A إلى B

.2 D إلى A

.3 A إلى C

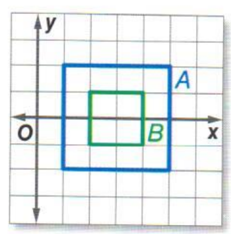
أوجد مجموع كل متّجهين.

4. $\langle 13, -4\rangle + \langle -11, 9\rangle$

5. $\langle 6, -31\rangle + \langle -22, 3\rangle$

.6 الفرقة الموسيقية خلال جزءٍ من أغنية، يوجّه ضارب الطبل في فرقةٍ استعراضيةٍ الفرقة للتحرّك من النقطة $(4 ,1)$ إلى النقطة $(1 ,5)$. اكتب صورة مركّبة المتّجه الذي يصف هذه الحركة.

.7 حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد .

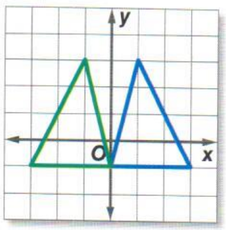


.8 المسرحيات يصنع أحمد نموذج نملةٍ لمسرحية. أوجد معامل مقياس النموذج إذا كان طول النملة سنتيمترًا واحدًا وكان طول النموذج $\frac{1}{4}$ m.

مراجعة سريعة

مثال 1

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.



كل رأس وصورته على مسافة واحدة من المحور الرأسي y.
هذا انعكاس

مثال 2

اكتب صورة مركّبة $\overrightarrow{AB}$ لـ $A(-1, 1)$ و $B(4, -3)$.

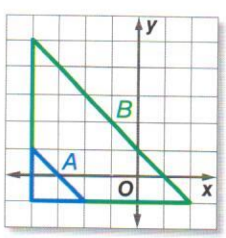
$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ صورة مركبة المتّجه

$= \langle 4 - (-1), -3 - 1\rangle$ بالتعويض.

$= \langle 5, -4\rangle$ بالتبسيط

مثال 3

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثمّ أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.



B أكبر من A، إذًا فهو تكبير.

المسافة بين رؤوس **A** تساوي **2** والمسافة المناظرة بالنسبة لـ **B** تساوي **6**.

عامل المقياس يساوي $\frac{6}{2}$ أو 3.

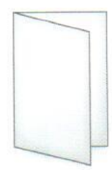
البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك للوحدة 14. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

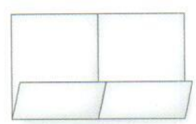
المطويات® منظّم الدراسة

التحويلات والتطابق اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 14 حول التحويلات والتطابق. وابدأ بثلاث صفحاتٍ في الدفتر.

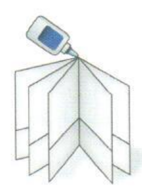
1 **اطوِ** كل ورقة إلى نصفين.



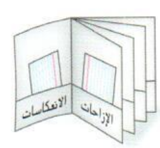
2 **افتح** الأوراق المطوية واطوِ كل ورقةٍ بالاتجاه الطولي لتشكيل جيب.



3 **ألصق** الورقات جنبًا إلى جنبٍ لتشكيل كتيّب.



4 **سمِّ** كلًا من الجيوب كما هو موضح.



المفردات الجديدة

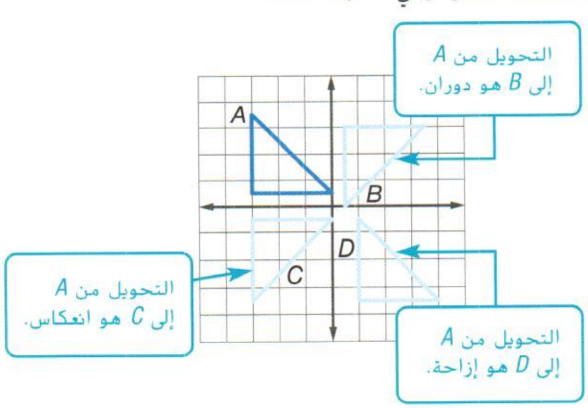
خط الانعكاس	line of reflection
مركز الدوران	center of rotation
زاوية الدوران	angle of rotation
تركيب التحويلات	composition of transformations
التماثل	symmetry
تناظر محوري	line symmetry
خط التماثل	line of symmetry

مراجعة المفردات

الانعكاس هو تحويلٌ يمثل قلب شكلٍ بالنسبة لنقطةٍ أو مستقيمٍ أو مستوى

الدوران هو تحويلٌ يدير كل نقطةٍ في صورةٍ أصليةٍ بزاويةٍ واتجاهٍ محددين حول نقطة ثابتة

الإزاحة هي تحويلٌ يحرّك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.



الدرس 14-1 الانعكاس

.. السابق
- لقد حدّدت الانعكاس وأثبتّه على أنه تحويل تطابق.

.. الحالي
1. رسم الانعكاس.
2. رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي.

.. لماذا؟

- لاحظ في هذا الانعكاس في الماء أن المسافة التي تقع عندها نقطةٌ فوق خطّ الماء تبدو مماثلةً للمسافة التي تقع عندها صورة تلك النقطة تحت الماء.

المفردات الجديدة
خط الانعكاس
line of reflection

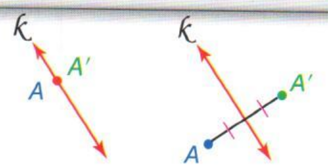
ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 رسم الانعكاس

لقد تعلمت في الدرس 7-4 أن الانعكاس أو القَلبَ تحويلٌ بالنسبة لمستقيمٍ يدعى **خط الانعكاس**. تبعد كل نقطة في الصورة الأصلية ونظيرتها في الصورة المسافة نفسها عن هذا المستقيم.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة لمستقيم

الانعكاس بالنسبة لمستقيمٍ هو دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها بحيث:
- إذا كانت النقطة تقع على المستقيم، فإن فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها أو
- إذا لم تكن النقطة تقع على المستقيم، فالمستقيم هو المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.



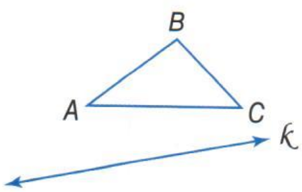
A لا تقع على المستقيم k.
A تقع على المستقيم k.

A′, A″, A‴ وهكذا دواليك هي تسميات النقاط المقابلة لتحويلٍ أو أكثر.

لتعكس مضلعًا بالنسبة لمستقيم، اعكس كلًّا من رؤوس المضلع. ثم صِل هذه الرؤوس لتشكّل الصورة المنعكسة.

مثال 1 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيم

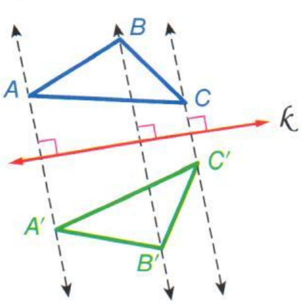
انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.



الخطوة 1 ارسم مستقيمًا من خلال كل رأسٍ بحيث يكون عموديًا على المستقيم k.

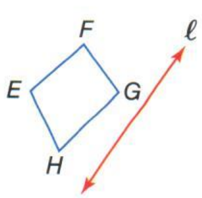
الخطوة 2 قِس المسافة من النقطة A إلى المستقيم k. ثم حدّد A' على المسافة نفسها من المستقيم k على الطرف المقابل

الخطوة 3 كرّر الخطوة 2 لتحديد النقطتين B' و C'. ثم صِل الرؤوس A' و B' و C' لتشكيل الصورة المنعكسة.

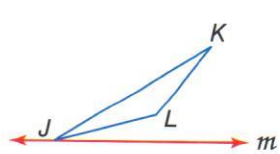


تمرين موجّه

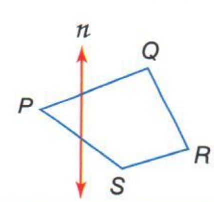
1A.



1B.



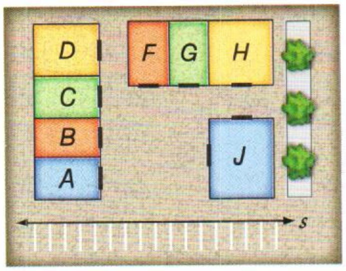
1C.



تذكّر أن الانعكاس هو تحويل تطابقٍ أو تساوي أبعاد. في الشكل المبيّن في المثال 1، $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

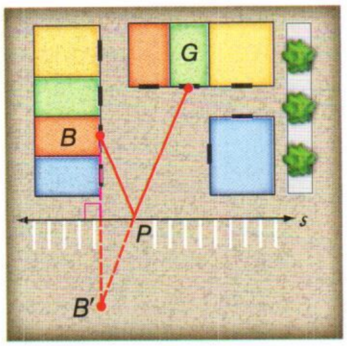
مثال 2 من الحياة اليومية تصغير المسافات باستخدام الانعكاس

التسوّق **افترض أنك ستشتري ملابس من المتجر B، ثم ستعود إلى سيارتك، ثم ستشتري حذاءً من المتجر G. فأين عليك أن تركن سيارتك على طول المستقيم s من أماكن إيقاف السيارات لتحدّ من المسافة التي ستمشيها سيرًا على الأقدام إلى الحدّ الأدنى؟**



استيعاب المسألة تطلب المسألة منك تحديد نقطة P على المستقيم s بحيث يكون لـ $BP + PG$ أقل قيمة ممكنة.

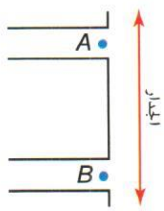
التخطيط تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أصغر ما يمكن حين تكون النقاط الثلاثة على استقامةٍ واحدة. استخدم انعكاس النقطة B بالنسبة للمستقيم s لإيجاد موقع النقطة P.



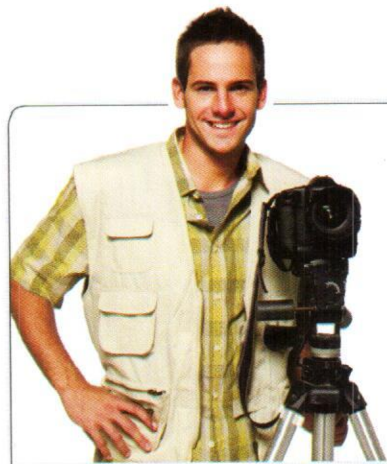
الحلّ ارسم $\overline{B'G}$. حدّد P عند تقاطع المستقيم s و $\overline{B'G}$.

التحقق قارن المجموع $BP + PG$ لكل حالة لتتحقق من أن موقع P الذي وجدته يصغّر هذا المجموع.

تمرين موجّه



2. بيع البطاقات تريد إيمان اختيار موقع جيدٍ لبيع بطاقات حضور حفل التخرج. حدّد نقطةً P بحيث تكون المسافة التي على شخصٍ ما أن يقطعها من الرّدهة A إلى النقطة P على الجدار، ومن ثمّ إلى الصّف التالي في الردهة B أصغر ما يمكن.



مهنة من الحياة اليومية

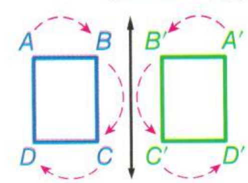
المصوّر يلتقط العاملون في مجال التصوير الصور لأسباب متعددة، منها ما يتعلق بالثقافة أو الفنّ أو تسجيل حدثٍ ما، ومنها ما يكون لأغراض علمية. وتطلب بعض الاختصاصات كالتصوير الصحفي والتصوير العلمي نيل درجة البكالوريوس. بينما لا تستلزم بعض مجالات التصوير الأخرى، كالتقاط الصور الشخصية، سوى براعةً فنية.

2 رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي

رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي يمكن إجراء الانعكاس أيضًا في المستوى الإحداثي عبر استخدام التقنيات المقدّمة في المثال 3.

نصيحة دراسية

خواصّ الانعكاس تحافظ الانعكاس، شأنها شأن جميع حالات تساوي القياس، على المسافات وقياسات الزوايا وبينيّة النقاط ووقوعها على استقامةٍ واحدة. ولكن توجيه الصورة الأصلية وصورتها يكونان متعاكستين.

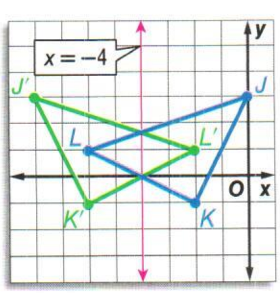


مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيمٍ أفقي أو رأسي

للمثلث JKL الرؤوس $J(0, 3)$ و $K(-2, -1)$ و $L(-6, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

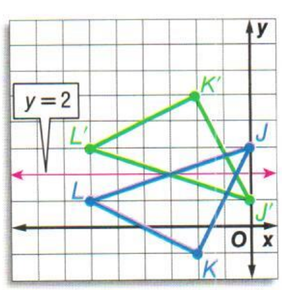
a. $x = -4$

أوجد نقطةً مناظرةً لكل رأسٍ بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $x = -4$.



b. $y = 2$

أوجد نقطةً مناظرةً لكل رأسٍ بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $y = 2$.



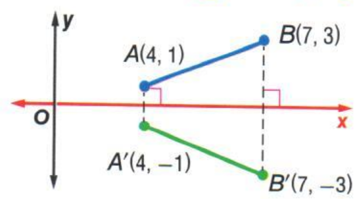
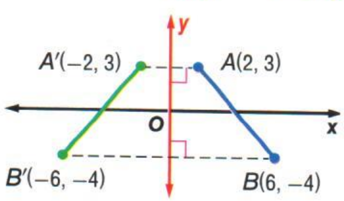
تمرين موجّه

لشبه المنحرف $RSTV$ الرؤوس $R(-1, 1)$ و $S(4, 1)$ و $T(4, -1)$ و $V(-1, -3)$. مثل شبه المنحرف $RSTV$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

3A. $y = -3$ **3B.** $x = 2$

حين يكون خط الانعكاس هو المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y، فيمكنك استخدام القاعدة التالية.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x أو المحور الرأسي y

	الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y
الشرح	لتعكس نقطةً بالنسبة للمحور الأفقي x، اضرب الإحداثي الرأسي y الخاص بها بـ -1.	لتعكس نقطةً بالنسبة للمحور الرأسي y، اضرب الإحداثي الأفقي x الخاص بها بـ -1.
الرموز	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال		

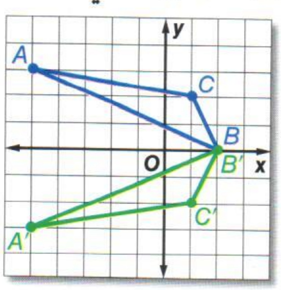
قراءة في الرياضيات

الرمز الإحداثي للدالة يمكن قراءة التعبير $P(a, b) \rightarrow P'(a, -b)$ على النحو: *النقطة P التي إحداثياها a و b رُبطت بموضع جديد P إحداثياه a وناقص b.*

مثال 4 انعكاس شكلٍ بالنسبة للمحور الإحداثي x أو المحور الإحداثي y

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الانعكاس المعطى.

a. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(-5, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(1, 2)$ بالنسبة للمحور الأفقي x



اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس بـ -1.

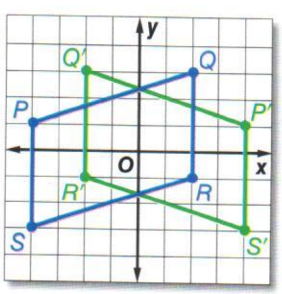
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5, -3)$

$B(2, 0) \rightarrow B'(2, 0)$

$C(1, 2) \rightarrow C'(1, -2)$

b. متوازي الأضلاع $PQRS$ ذو الرؤوس $P(-4, 1)$ و $Q(2, 3)$ و $R(2, -1)$ و $S(-4, -3)$ بالنسبة للمحور الرأسي y



اضرب الإحداثي الأفقي x لكل رأس بـ -1.

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$P(-4, 1) \rightarrow P'(4, 1)$

$Q(2, 3) \rightarrow Q'(-2, 3)$

$R(2, -1) \rightarrow R'(-2, -1)$

$S(-4, -3) \rightarrow S'(4, -3)$

نصيحة دراسية

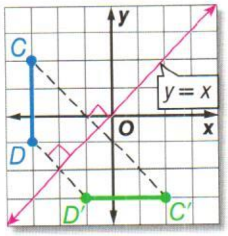
النقاط الثابتة في المثال 4a، تدعى النقطة B *بالنقطة الثابتة* لأنها ترتبط بنفسها فقط. وإن النقاط التي تقع على خط الانعكاس تبقى ثابتةً عند الانعكاس بالنسبة لهذا المستقيم.

تمرين موجّه

A4. المستطيل ذو الرؤوس $E(-4, -1)$ و $F(2, 2)$ و $G(3, 0)$ و $H(-3, -3)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

B4. المثلث $\triangle JKL$ ذو الرؤوس $J(3, 2)$ و $K(2, -2)$ و $L(4, -5)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

يمكنك أيضًا عكس صورةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$.



ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1. وفي التمثيل البياني المبيّن $\overline{CC'}$ عموديّ على $y = x$. فإن فميله يساوي -1. من النقطة $C(-3, 2)$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدةً وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدةً لتصل إلى $y = x$. ومن هذه النقطة على المستقيم $y = x$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدة وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدة لتحدد النقطة $C'(2, -3)$. وباستخدام طريقة مشابهة، تجد أن صورة النقطة $D(-3, -1)$ هي النقطة $D'(-1, -3)$.

تعطي مقارنة إحداثيات هذه الأمثلة وغيرها القاعدة التالية للانعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتعامدة

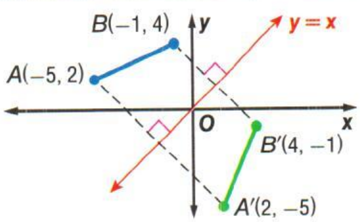
يكون مستقيمان غير رأسيان متعامدين فقط وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.

المفهوم الأساسي انعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$

الشرح لعكس نقطةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$، بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, x)$

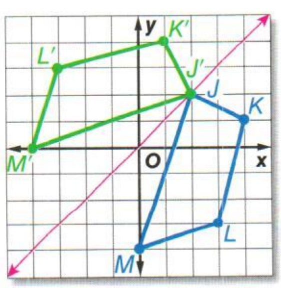
مثال



مثال 5 انعكاس شكلٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$

للشكل الرباعي $JKLM$ الرؤوس $J(2, 2)$، $K(4, 1)$، $L(3, -3)$، $M(0, -4)$. مثّل $JKLM$ بيانيًا وصورته $J'K'L'M'$ بالنسبة للمستقيم $x = y$.

بدّل بين إحداثيات x و y لكل رأس.



$(x, y) \rightarrow (y, x)$

$J(2, 2) \rightarrow J'(2, 2)$

$K(4, 1) \rightarrow K'(1, 4)$

$L(3, -3) \rightarrow L'(-3, 3)$

$M(0, -4) \rightarrow M'(-4, 0)$

نصيحة دراسية

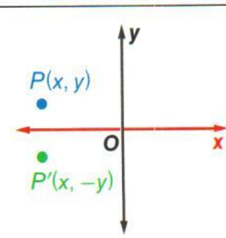
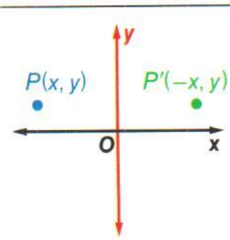
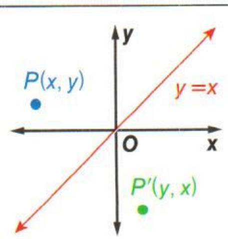
الصورة الأصلية وصورتها

سنعتمد في هذا الكتاب دائمًا اللون الأزرق للصورة الأصلية واللون الأخضر لصورتها المحوّلة.

تمرين موجّه

5. للمثلث $\triangle BCD$ الرؤوس $B(-3, 3)$ و $C(1, 4)$ و $D(-2, -4)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle BCD$ وصورته بالنسبة للمستقيم $y = x$.

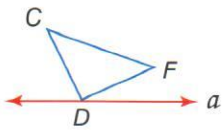
ملخص المفهوم الانعكاس في المستوى الإحداثي

الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y	انعكاس بالنسبة لمستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

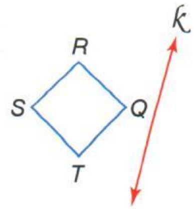
التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا الخط باستخدام مسطرة.**

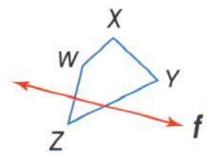
1.



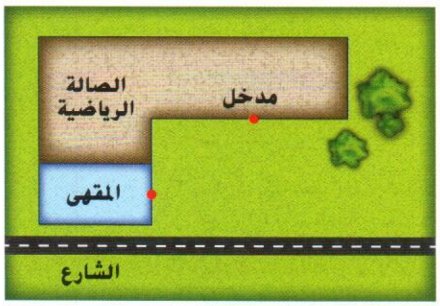
2.



3.



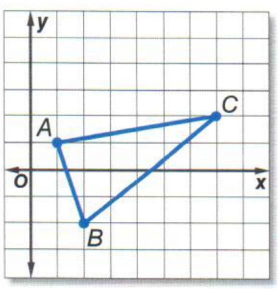
مثال 2 **4.** **الأحداث الرياضية** ينتظر أحمد في المقهى أن يحضر له صديقه بطاقةً لحضور حدثٍ رياضيٍ بسعرٍ مخفض. فعند أي نقطة P على طول الطريق يتعيّن على الصديق إيقاف سيارته لتقليل المسافة التي على أحمد أن يسيرها من المقهى إلى السيارة ومن ثم إلى مدخل الصّالة إلى الحدّ الأدنى؟ ارسم مخططًا.



مثال 3 **مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.**

5. $y = -2$

6. $x = 3$



المثالان 5–4 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته مما يلي وفق عملية الانعكاس المعطاة.**

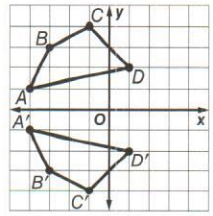
7. المثلث $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه $X(0, 4)$ و$Y(-3, 4)$ و $Z(-4, -1)$ بالنسبة للمحور y

8. متوازي الأضلاع $\square QRST$ الذي رؤوسه $Q(-1, 4)$ و $R(4, 4)$, $S(3, 1)$ و $T(-2, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

9. الشكل الرباعي $JKLM$ الذي رؤوسه $J(-3, 1)$ و $K(-1, 3)$ و $L(1, 3)$ و $M(-3, -1)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

التدريب وحل المسائل

10. يعرض الشكل الموضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فأي عبارةٍ يمكن استخدامها لتحديد نوع التحويل الذي حدث؟



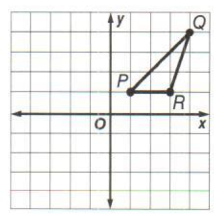
A ميل $\overline{AB} = 2$؛ ميل $\overline{B'C'} = -\frac{1}{2}$؛ بما أن قيمتي الميلين سالبتان. فالتحويل هو دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة.

B إن صورة كل من النقاط A و B و C و D هي انعكاسٌ بالنسبة للمحور الأفقي x. فإن فالتحويل هو انعكاس.

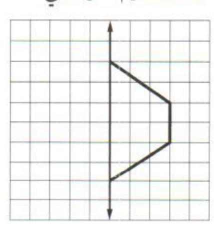
C بما أن B' تبعد ست نقاطٍ أسفل B. فالتحويل هو إزاحةٌ لمسافة ستّ وحدات إلى الأسفل.

D $CD = 2\sqrt{2}$ و $C'D' = 2\sqrt{2}$؛ بما أن $CD = C'D'$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل قياس يساوي 1.

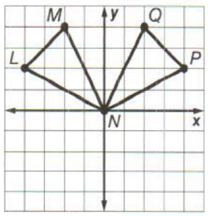
12. إذا انعكس المثلث PQR بالنسبة للمحور الأفقي x ليصبح المثلث $P'Q'R'$. فماذا سيكون إحداثيا النقطة Q'؟



14. **الهندسة** توضح الشبكة أدناه ثلاث قطعٍ مستقيمة. ارسم ثلاث قطعٍ مستقيمةٍ أخرى لإتمام سداسي أضلاعٍ متماثلٍ بالنسبة للمستقيم الرأسي.



11. المثلث $\triangle PQN$ هو تحويل للمثلث $\triangle LMN$. فما العبارة التي تثبت أن التحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



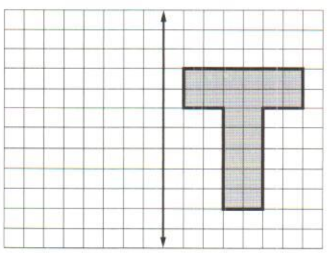
A ميل $\overline{MN}$ • ميل $\overline{NP} = -1$

B ميل $\overline{LN}$ • ميل $\overline{QN} = -1$

C صورة كل نقطة (x, y) هي $(-x, y)$.

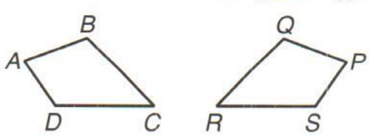
D $\overline{MN} \cong \overline{QN}$

13. **الهندسة** ارسم شكلاً إلى يسار المستقيم بحيث يكون الشكل المعطى والشكل الذي رسمته متماثلين بالنسبة لذلك المستقيم.



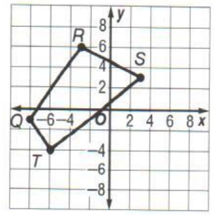
15. في الرسم التخطيطي، حَوِّلَ الشكل الرباعي $ABCD$ إلى الشكل الرباعي $PQRS$.

فما الصورة الأصلية لـ $\overleftrightarrow{PS}$؟

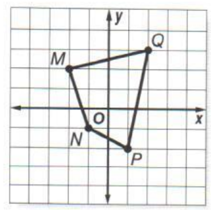


16. يعرض الشكل أدناه الشكل الرباعي $QRST$.

إذا انعكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ومن ثمّ بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكّل شكل رباعي $Q''R''S''T''$. فماذا سوف يكون إحداثيا T''؟

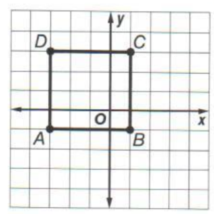


17. يعرض الشكل التمثيل البياني لـ $MNPQ$. ماذا سوف يكون إحداثيا Q' إذا ما انعكس الشكل الرباعي بالنسبة للمحور الأفقي x؟

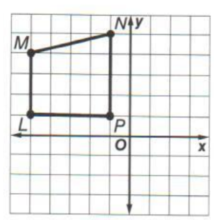


18. يوضح الشكل أدناه المربع $ABCD$.

إذا انعكس المربع $ABCD$ بالنسبة للمحور y، فماذا سيكون إحداثيا D'؟



19.



إذا انعكس شبه المنحرف $LMNP$ بالنسبة للمحور الرأسي y. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

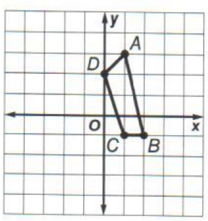
20. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا ما انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle WXY$؟

21. يريد إسماعيل أن يعكس المستطيل $HIJK$ ذا الرؤوس $H(2, 4)$ و $I(5.5, 4)$ و $J(5.5, -1)$ و $K(2, -1)$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكّل المستطيل $LMNP$. فماذا ستكون إحداثيات النقطة L إذا كانت هذه النقطة هي نقطة الانعكاس H؟

22. للمثلث $\triangle UVW$ الرؤوس $U(-3, 1)$ و $V(2, 4)$ و $W(7, 2)$. وللمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(-3, -1)$ و $Y(2, -4)$ و $Z(7, -2)$. فما هو نوع التحويل الذي يمكن استخدامه لربط المثلث $\triangle UVW$ بالمثلث $\triangle XYZ$؟

23. إذا انعكس المثلث $\triangle LMN$ ذو الرؤوس $L(-2, 6)$ و $M(5, 2)$ و $N(-6, -1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

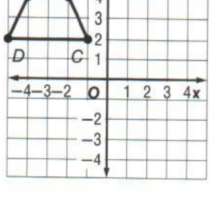
24. يُعكس الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(1, 3)$ و $B(2, -1)$ و $C(1, -1)$ و $D(0, 2)$. $ABCD$ بالنسبة للمستقيم $x = 1$ ليعطي الشكل الرباعي $WXYZ$. فماذا ستكون مجموعة إحداثيات $WXYZ$؟



25. تقع رؤوس مثلثٍ عند النقاط $(0, 1)$ و $(1, -1)$ و $(-1, -1)$. ما هو المستقيم الذي إذا ما انعكس المثلث بالنسبة إليه سيعطي مثلثًا تقع رؤوسه عند النقاط $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ و $(-1, -1)$؟

26. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي المثلث $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات المثلث $\triangle WXY$؟

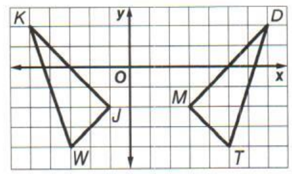
27. ما هما إحداثيا النقطة B' إذا انعكس شبه المنحرف $ABCD$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟



28. أيٌّ ممّا يلي هي نقطة انعكاس النقطة $E(-7, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x؟

29. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(-3, 1)$ و $B(1, 5)$ و $C(7, 0)$. فما هي إحداثيات الصورة $\triangle A'B'C'$ بموجب انعكاس المثلث الأصلي بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

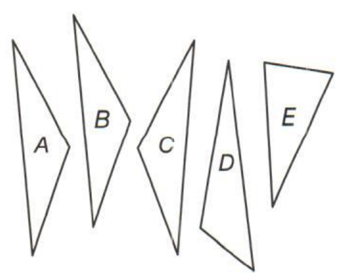
30. ما هو المستقيم الذي يعدّ المثلث $\triangle MDT$ بالنسبة إليه انعكاسًا للمثلث $\triangle JKW$؟



31. ما هو انعكاس النقطة $P(-3, 10)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

32. ما هما المستقيمان الذي تعدّ بالنسبة إليهما القطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P''(10, 0)$ و $Q''(12, 4)$ نتيجةً لانعكاسٍ مضاعفٍ للقطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P(0, 0)$ و $Q(2, 4)$؟

33. أيٌّ من الأشكال التالية يبدو أنه انعكاسٌ للشكل A بالنسبة لمستقيمٍ ما؟



34. أيٌّ من العبارات التالية صحيحة؟

A إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

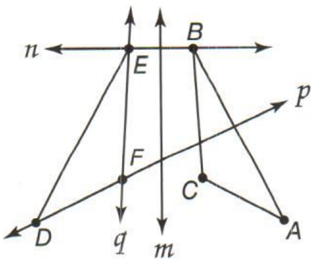
B إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(y, -y)$.

C إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, y)$.

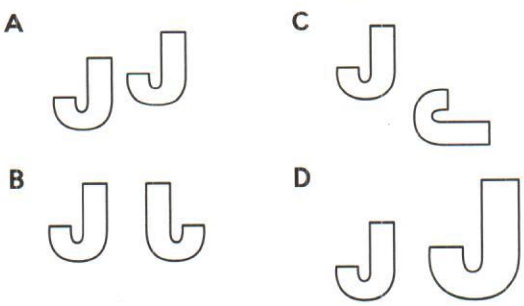
D إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الأفقي x، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

35. بناءً على أحد التحويلات، يكون لسداسي الأضلاع $PQRSTU$ الصورة $ABRSCD$. فأي من التحويلات التالية يعطي ذلك؟

36. ما هو المستقيم الذي معكوس المثلث $\triangle DEF$ بالنسبة إليه هو المثلث $\triangle ABC$؟



37. ما الصورة التي تمثل انعكاسًا؟



38. أي من النقاط التالية هي انعكاسٌ للنقطة $L(-2, -9)$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟

A $L'(-9, -2)$ **C** $L'(2, -9)$

B $L'(2, 9)$ **D** $L'(-9, -2)$

93. بموجب الانعكاس الانزلاقي $R_{x=0} \rightarrow T_{x,\,y}$ ، فإن صورة $A(1, 3)$ هي $A'(-1, 6)$. فما قيمتا x و y؟

A $x = -2$ و $y = 3$

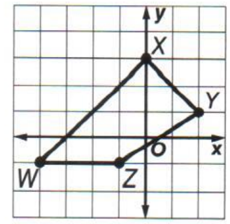
B $x = 0$ و $y = 3$

C $x = 3$ و $y = -2$

D $x = 3$ و $y = 0$

تدريب على الاختبار المعياري

40. الإجابة القصيرة إذا انعكس الشكل الرباعي $WXYZ$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليعطي الشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$، فما إحداثيا X'؟

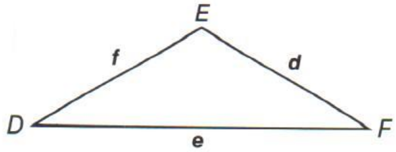


41. الجبر إذا كان الوسط الحسابي للأعداد $6x$ و $3x$ و 27 هو 18، فما قيمة x؟

A 2 C 5

B 3 D 6

42. في المثلث $\triangle DEF$، لدينا $m\angle E = 108$، $m\angle F = 26$، و $f = 20$. أوجد طول d مقربًا إلى أقرب عددٍ كلّي.



F 26 G 33 H 60 J 65

43. SAT/ACT في مستوىً إحداثي، للنقطتين A و B الإحداثيان $(-2, 4)$ والإحداثيان $(3, 3)$، على الترتيب. فما قيمة AB؟

A $\sqrt{50}$ D $(1, -1)$

B $(1, 7)$ E $\sqrt{26}$

C $(5, -1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$

44. إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$، أوجد $\sin \theta$.

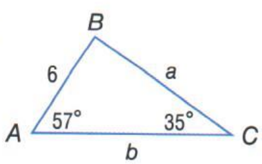
45. وإذا كان $\tan \theta = 2$، فأوجد $\cot \theta$.

46. إذا كان $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$، أوجد $\cos \theta$.

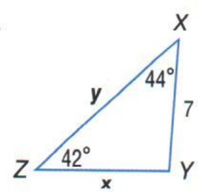
47. وإذا كان $\csc \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$، فأوجد $\tan \theta$.

حُــلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

48.



49.



50. الهندسة الإحداثية في المثلث $\triangle LMN$، تقسم القطعة المستقيمة $\overline{PR}$ الضلعين $\overline{NL}$ و $\overline{MN}$ إلى أطوال متناسبة. فإذا كانت إحداثيات الرؤوس على النحو $N(8, 20)$ و $P(11, 16)$ و $R(3, 8)$ و $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$. أوجد إحداثيات L و M.

حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

51. $\text{Sin } \theta = -0.58$

52. $\text{Cos } \theta = 0.32$

53. $\text{Tan } \theta = 2.7$

مراجعة المهارات

أوجد مقدار كل متجه واتجاهه.

54. $\overrightarrow{RS}$: $R(-3, 3)$ و $S(-9, 9)$

55. $\overrightarrow{FG}$: $F(-4, 0)$ و $G(-6, -4)$

56. $\overrightarrow{JK}$: $J(8, 1)$ و $K(2, 5)$

57. $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 10)$ و $B(1, -12)$

الدرس 14-2 الإزاحة

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا
● لقد أوجدت مقادير متجهاتٍ واتجاهاتها	1 رسم الإزاحة. 2 رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي.	● إن تقنية الرسوم المتحركة هي تقنية يُحرّك فيها جسمٌ بمقادير صغيرة جدًا بين صورٍ ملتقطةٍ كل على حدة. وعند تشغيل سلسلة من الصور على هيئة سلسلةٍ مستمرة، ينتج خداعٌ حركي.

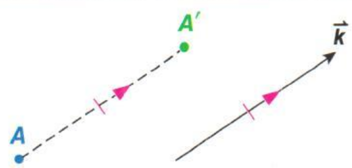
المفردات الجديدة
متّجه الإزاحة
translation vector

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 رسم الإزاحة تعلّمت في الدرس 7-4 أن الإزاحة أو الانزلاق تحويلٌ يحرّك جميع نقاط شكلٍ المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. وبما أنه يمكن استخدام متجهاتٍ لوصف المسافة والاتجاه، فيمكن استخدام متّجهاتٍ لتعريف الإزاحة.

المفهوم الأساسي الإزاحة

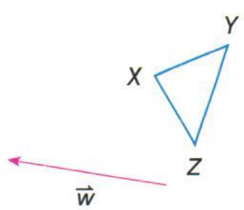
الإزاحة هي دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها على طول متجهٍ يدعى **متجه الإزاحة**، بحيث:
- يكون لكل قطعة مستقيمة تربط نقطةً بصورتها طول المتجه نفسه، و
- تكون هذه القطعة المستقيمة موازيةً للمتجه أيضًا.



النقطة A' هي إزاحة للنقطة A على طول متّجه الإزاحة $\vec{k}$.

مثال 1 رسم الإزاحة

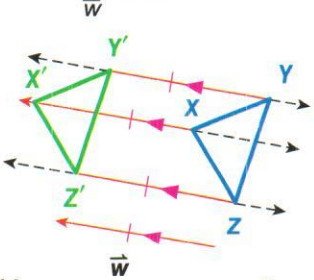
انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.



الخطوة 1 ارسم مستقيمًا عبر كل رأسٍ بحيث يوازي المتجه $\vec{w}$

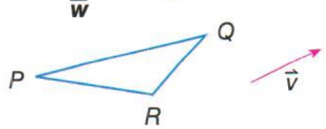
الخطوة 2 قِس طول المتجه $\vec{w}$. وحدّد النقطة X' عبر تحديد هذه المسافة على طول المستقيم المار بالرأس X والذي مبدؤه هو النقطة X واتجاهه هو اتجاه المستقيم نفسه.

الخطوة 3 كرر الخطوة 2 لتحديد نقطتين Y' و Z'. ثم اربط الرؤوس X' و Y' و Z' لتشكيل الصورة المزاحة.

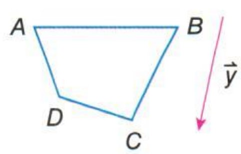


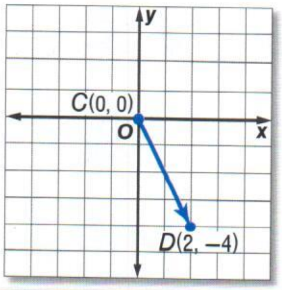
تمرين موجّه

1A.



1B.





2 رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي

تذكّر أن أيّ متجهٍ في المستوى الإحداثي يمكن أن يكتب في الصورة $\langle a, b\rangle$، حيث a يمثل التغير الأفقي و b هو التغير الرأسي من رأس المتّجه إلى ذيله. $\overline{CD}$ ممثّلة بالزوج المرتّب $\langle 2, -4\rangle$.

يمكن استخدام المتجهات وفق هذه الصيغة المدعوة بالصورة المركبة لإزاحة شكلٍ في المستوى الإحداثي.

قراءة في الرياضيات

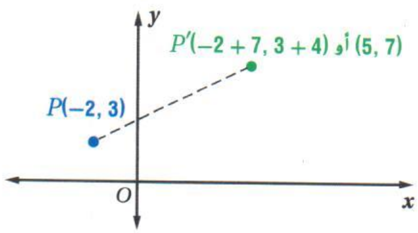
الإزاحة الأفقية والرأسية عندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle a, 0\rangle$، فإن الإزاحة تكون أفقيةً فقط. وعندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle 0, b\rangle$، فإن الإزاحة تكون رأسيةً فقط.

المفهوم الأساسي الإزاحة في المستوى الإحداثي

الشرح لإزاحة نقطةٍ على طول المتّجه $\langle a, b\rangle$، اجمع a بالإحداثي x و b بالإحداثي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال صورة النقطة $P(-2, 3)$ المزاحة على طول المتّجه $\langle 7, 4\rangle$ هي $P'(5, 7)$.

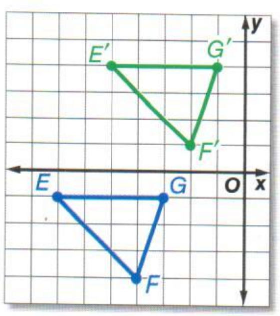


الإزاحة هي شكلٌ آخر من تحويل التطابق أو تساوي الأبعاد.

مثال 2 الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتّجه المعطى.

a. المثلث $\triangle EFG$ ذو الرؤوس $E(-7, -1)$ و $F(-4, -4)$ و $G(-3, -1)$؛ $\langle 2, 5\rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة C وحدتين يمينًا و 5 وحدات إلى الأعلى.

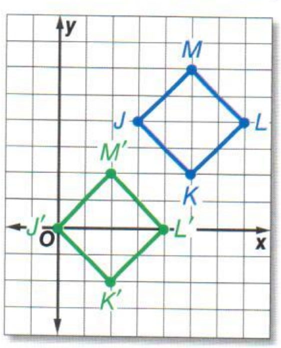
$(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

$E(-7, -1) \rightarrow E'(-5, 4)$

$F(-4, -4) \rightarrow F'(-2, 1)$

$G(-3, -1) \rightarrow G'(-1, 4)$

b. المربع $JKLM$ ذو الرؤوس $J(3, 4)$ و $K(5, 2)$ و $L(7, 4)$ و $M(5, 6)$؛ $\langle -3, -4\rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

$(x, y) \rightarrow (x + (-3), y + (-4))$

$J(3, 4) \rightarrow J'(0, 0)$

$K(5, 2) \rightarrow K'(2, -2)$

$L(7, 4) \rightarrow L'(4, 0)$

$M(5, 6) \rightarrow M'(2, 2)$

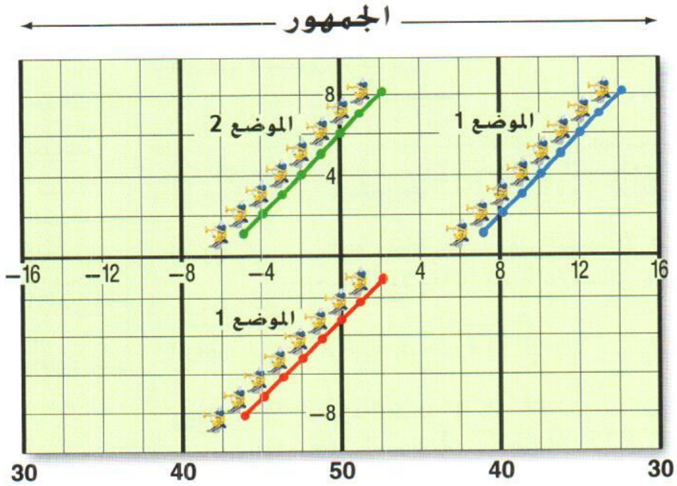
تمرين موجّه

2A. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(2, 6)$ و $B(1, 1)$ و $C(7, 5)$؛ $\langle -1, -4\rangle$

2B. الشكل الرباعي $QRST$ ذو الرؤوس $Q(-8, -2)$ و $R(-9, -5)$ و $S(-4, -7)$ و $T(-4, -2)$؛ $\langle 7, 1\rangle$

مثال 3 من الحياة اليومية وصف الإزاحة

الفرقة الموسيقية خلال إحدى فقرات عرض فرقةٍ موسيقيةٍ عسكرية. يبدأ نافخو البوق بالعزف عند الموضع 1، ثم يسيرون إلى الموضع 2، ومن ثمّ إلى الموضع 3. وتمثل كل وحدة على التمثيل البياني خطوة واحدة.



a. **صِف إزاحة خط نافخي البوق من الموضع 1 إلى الموضع 2 باستخدام رمز الدالة وبالكلمات.**

إحدى النقاط الواقعة على المستقيم في الموضع 1 هي $(14, 8)$. وفي الموضع 2، تتحرك هذه النقطة إلى $(2, 8)$ استخدم دالة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ لإعادة حل المعادلات من أجل إيجاد a و b.

$(14 + a, 8 + b)$ أو $(2, 8)$

$14 + a = 2$ $\quad\quad$ $8 + b = 8$

$a = -12$ $\quad\quad$ $b = 0$

رمز الدالة: $(x, y) \rightarrow (x + (-12), y + 0)$

إذًا، يزاح خطّ نافخي البوق 12 خطوة يسارًا ولكنه لا يزاح أي خطوة إلى الأمام أو الخلف من الموضع 1 إلى الموضع 2.

b. **صِف إزاحة خط نافخي البوق من الموضع 1 إلى الموضع 3 باستخدام متجه إزاحة.**

$(14 + a, 8 + b)$ أو $(2, -1)$

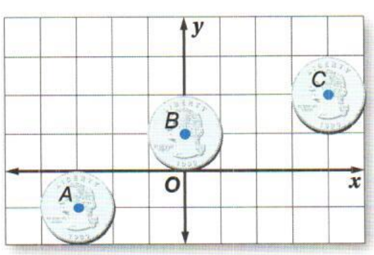
$14 + a = 2$ $\quad\quad$ $8 + b = -1$

$a = -12$ $\quad\quad$ $b = -9$

متّجه الإزاحة: $\langle -12, -9 \rangle$

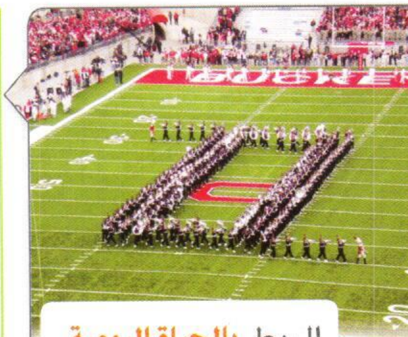
تمرين موجّه

3. **الرسوم المتحركة** يجري إعداد مقطع لقطعةٍ نقديةٍ باستخدام تقنية الرسوم المتحركة بحيث تبدو وكأنها تتحرك.



A. صِف الإزاحة من A إلى B بواسطة رمز الدالة وبالكلمات.

B. صِف الإزاحة من A إلى C باستخدام متجه إزاحة.

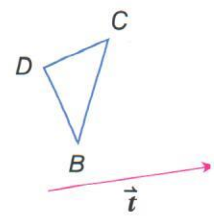


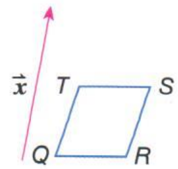
الربط بالحياة اليومية

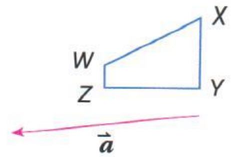
غالبًا ما تستخدم الفرق الموسيقية العسكرية سلسلةً من التشكيلات التي تضم أشكالاً هندسية. ويحدّد لكل عضوٍ في الفرقة موضعٌ محددٌ في كلِ نوعٍ من التشكيلات. *الحركة العائمة* هي حركة مجموعة من الأعضاء معًا دون أن يغيروا شكل تشكيلتهم أو حجمها.

التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.**

1.


2.


3.


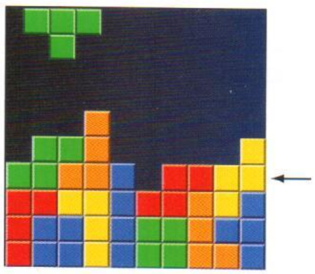
مثال 2 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتجّه المعطى.**

4. شبه المنحرف $JKLM$ ذو الرؤوس $J(2, 4)$ و $K(1, 1)$ و $L(5, 1)$ و $M(4, 4)$؛ $\langle 7, 1 \rangle$

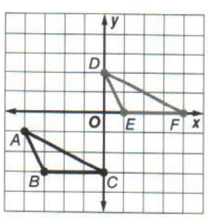
5. المثلث $\triangle DFG$ ذو الرؤوس $D(-8, 8)$ و $F(-10, 4)$ و $G(-7, 6)$؛ $\langle 5, -2 \rangle$

6. متوازي الأضلاع $WXYZ$ ذو الرؤوس $W(-6, -5)$ و $X(-2, -5)$ و $Y(-1, -8)$ و $Z(-5, -8)$؛ $\langle -1, 4 \rangle$

مثال 3 **7.** **ألعاب الفيديو** الهدف من لعبة الفيديو المبينة هو تحريك المكعبات الملونة يمينًا أو شمالاً حالما تسقط من أعلى الشاشة حتى يُملأ كل صفٍ دون ترك أي فراغات. فإذا كان موضع البداية للمكعب الموجود في أعلى الشاشة هو (x, y)، استخدم رمز الدالة لوصف الإزاحة التي تملأ الصّف المحدد.



التدريب وحل المسائل



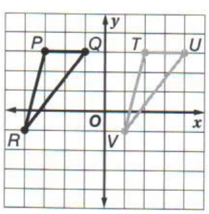
8. يوضح الشكل المثلث ABC وصورته الممثلة بالمثلث DEF. فأي عبارة مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟

A ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{DF}$؛ بما أن الميل هو نفسه، فالتحويل هو دوران.

B تنعكس كل من النقاط A و B و C بالنسبة للمحور الأفقي x.

C في كلٍ من النقاط A و B و C، يُزاد كل إحداثي أفقي x بمقدار 4 وحدة، ويُزاد كل إحداثي رأسي y بمقدار 3 وحدات. إذًا، فالتحويل عبارة عن إزاحة.

D بما أن $BC \neq DF$، فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياسٍ يساوي 1.



9. يوضح الشكل المثلث PQR وصورته TUV. فأي عبارةٍ مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟

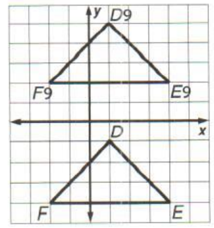
A بما أن كلاً من الإحداثيات الأفقية x للنقاط P و Q و R تُزاد بمقدار 5. فالتحويل هو إزاحة.

B صورة كلٍ من النقاط P و Q و R هي انعكاسٌ بالنسبة للمحور الرأسي y.

C $R = (-4, -1)$; $U = (4, 3)$؛ بما أن الإحداثيات الأفقية x متعاكسة. فالتحويل هو انعكاسٌ بالنسبة للمحور الأفقي x.

D بما أن $QR = UV$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياسٍ يساوي 1.

10. في الشكل الموضح، يتشكل المثلث $D'E'F'$ e عبر إضافة 6 وحداتٍ إلى الإحداثي الرأسي y لكل رأسٍ في المثلث DEF. المصطلح الأفضل لوصف المثلث $D'E'F'$ هو



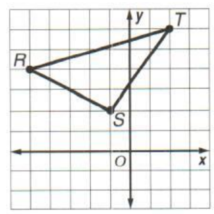
A دورانٌ للمثلث $\triangle DEF$.

B انعكاسٌ للمثلث $\triangle DEF$.

C مثلث مشابه للمثلث $\triangle DEF$.

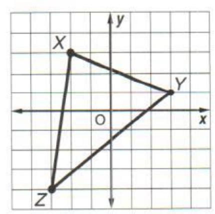
D مثلث مطابق للمثلث $\triangle DEF$.

11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $T(2, 6)$ و $S(-1, 2)$. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل



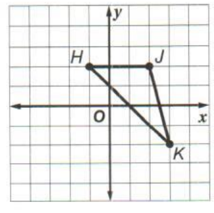
12. توضح الشبكة الإحداثية المثلث $\triangle XYZ$.

إذا أزيح المثلث $\triangle XYZ$ بحيث تقع النقطة X على المحور الرأسي y والنقطة Y عند $(-3, 5)$. فما الإحداثيان الجديدان للنقطة Z؟



13. يُزاح المثلث HJK المبيّن أدناه بحيث تكون الإحداثيات الجديدة لرؤوسه هي $H'(-2, 4)$ و $J'(1, 4)$ و $K'(2, 0)$.

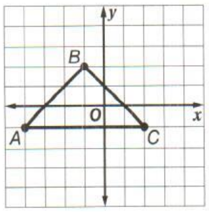
ما العبارة التي تصف هذا التحويل؟



14. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أزيح الشكل مسافة 4 وحداتٍ يمينًا ووحدتين إلى الأعلى، فما إحداثيا الرأس B'؟

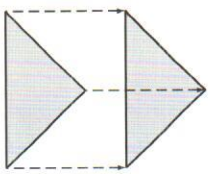
15. نريد إزاحة المثلث ABC إلى $\triangle A'B'C'$ باستخدام القاعدة التالية. $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 3)$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



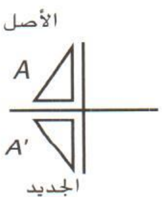
16. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0.5, 8)$ و $B(7.5, 7)$ و $C(4.2, 2)$. فما هي مجموعة إحداثيات رؤوس الصورة الناتجة عن إزاحة المثلث $\triangle ABC$ 3.5 وحدات إلى الأسفل؟

17. ما التحويل الموضح في الشكل من بين التحويلات التالية؟

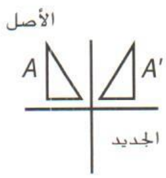


18. ما الرسم التخطيطي الذي يوضح إزاحة الشكل A؟

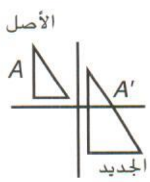
A



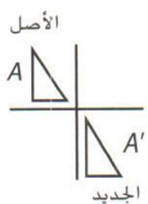
B



C

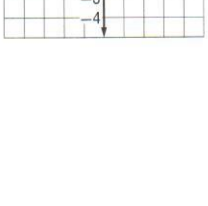


D



19. للشكل الرباعي $QUAD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

ما التحويل الذي سيضع رأسين عند $(5, 2)$ و $(6, -1)$؟

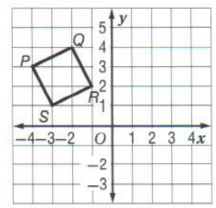


20. رؤوس المثلث $\triangle LMN$ هي $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل وكان للصورة رؤوسٌ تقع عشوائيًا عند $(-2, 0)$ و $(1, 6)$ و $(-12, 8)$. إذًا فما القاعدة التي تصف الإزاحة؟

21. للمثلث قائم الزاوية GHI الرؤوس $G(0, 0)$ و $H(3, 0)$ و $I(0, 4)$. يُحوّل المثلث بحيث يكون لـ H' الإحداثيان $(3, 2)$. فماذا يمكن أن يكون التحويل المطبّق على $\triangle GHI$؟

22. يزاح المربع $PQRS$ المبين أدناه إلى المربع $P'Q'R'S'$ عبر اتّباع قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x + 2, y - 6)$$

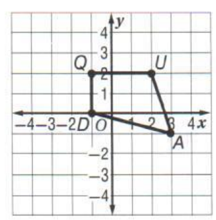


ماذا سيكون إحداثيا النقطة الرأس P'؟

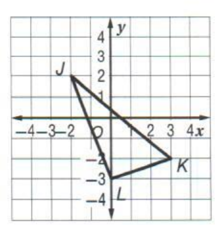
23. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أزيح الشكل مسافة 4 وحداتٍ يمينًا ووحدتين إلى الأعلى. فما إحداثيا الرأس B'؟

24. يزاح الشكل الرباعي $QUAD$ لمسافة وحدات يسارًا و 3 وحدات إلى الأعلى.

فما إحداثيا الرأس A'؟

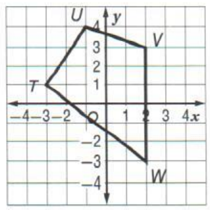


25. يُزاح المثلث $\triangle JKL$ مسافة 3 وحدات يسارًا ووحدتين إلى الأعلى ليعطي المثلث $\triangle J'K'L'$. فما إحداثيات الرؤوس؟



26. للمثلث $\triangle LMN$ الرؤوس $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل، وكانت الرؤوس الجديدة هي $L'(1, 6)$ و $M'(-2, 0)$ و $N'(-12, 8)$. فما القاعدة التي تصف التحويل؟

27. يُزاح الشكل الرباعي $TUVW$ بحيث تكون الرؤوس الجديدة هي $T'(-1, 0)$ و $U'(1, 3)$ و $V'(4, 2)$. فما إحداثيا W'؟



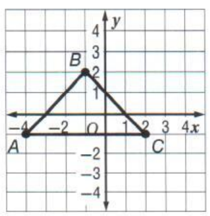
A $(0, -3)$ C $(4, -3)$

B $(0, -4)$ D $(4, -4)$

28. نريد إزاحة المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle A'B'C'$ وفق قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x - 2, y + 3)$$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



29. للشكل الرباعي $ABCD$ الرؤوس $A(-2, 1)$ و $B(-2, 5)$ و $C(3, 5)$ و $D(3, 1)$. فإذا أزيح الشكل الرباعي $ABCD$ لمسافة 6 وحدات إلى الأسفل و 5 وحدات يمينًا لإعطاء $D'E'F'G'$. فما إحداثيات رؤوس $D'E'F'G'$؟

30. ما إحداثيا الصورة P' الخاصة بالنقطة $P(4, 1)$ وفق التحويل $T_{-3, -3}$؟

31. ما هي الإزاحة التي تنتج بموجبها النقطة $B(-2, 5)$ عن النقطة $A(-7, 8)$؟

32. للمثلث $\triangle RST$ الإحداثيات $R(3, 1)$ و $S(5, 4)$ و $T(7, 11)$. فما إحداثيات رؤوس الصورة $\triangle R'S'T'$، وفق التحويل $T_{-6, 1}$؟

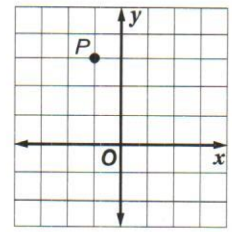
33. ما إحداثيات الصورة H' للنقطة $H(-8, 3)$ وفق التحويل $T_{8,7}$؟

34. ما التحويل الذي ينتج الصورة $P'(-4, 2)$ من النقطة $P(2, -1)$؟

35. ما التحويل الذي يحافظ على المساحة والتوجيه؟

تدريب على الاختبار المعياري

36. حدّد موضع النقطة P وفق الإزاحة $(x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ **C** $(2, -4)$
B $(0, 3)$ **D** $(2, 4)$

37. الإجابة القصيرة ما المتّجه الذي يصف على النحو الأمثل إزاحة $A(3, -5)$ إلى $A'(-2, -8)$؟

38. الجبر خلال الأيام الأربعة القادمة، تخطّط ميسون لقيادة سيارتها مسافة 160 كيلومترًا و 235 كيلومترًا و 185 كيلومترًا و 220 كيلومترًا. فإذا كانت السيارة تقطع 32 كيلومترًا مقابل كل لترٍ تستهلكه من البنزين، فكم لترًا من البنزين عليها أن تتوقعَ استهلاكها بالإجمال؟

F 25 **G** 30 **H** 35 **J** 40

39. SAT/ACT يحتوي كيسٌ 5 كرات رخام حمراء وكرتي رخام زرقاوين و 4 كرات رخام بيضاء وكرة رخام صفراء واحدة. فإذا اختيرت كرتا رخامٍ على التوالي دون إعادة، فما احتمال الحصول على كرتي رخامٍ بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ **C** $\frac{1}{9}$ **E** $\frac{2}{5}$
B $\frac{1}{11}$ **D** $\frac{5}{33}$

مراجعة شاملة

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الإزاحة المعطاة. (الدرس 14-1)

40. القطعة المستقيمة $\overline{DJ}$ ذات النقطتين الطرفيتين $D(4, 4)$ و $J(-3, 2)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

41. المثلث $\triangle XYZ$ ذو الرؤوس $X(0, 0)$ و $Y(3, 0)$ و $Z(0, 3)$ بالنسبة للمحور x

42. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(-3,-1)$ و $B(0, 2)$ و $C(3, -2)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

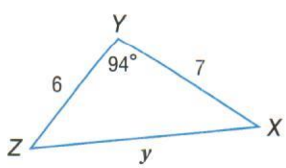
43. الشكل الرباعي $JKLM$ ذو الرؤوس $J(-2, 2)$ و $K(3, 1)$ و $L(4, -1)$ و $M(-2, -2)$ بالنسبة لنقطة الأصل

حُلّ كل معادلة بحيث $0° \leq \theta \leq 360°$.

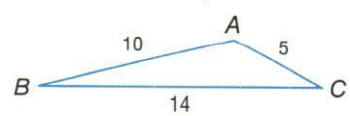
44. $2 \sin \theta = 1$ **45.** $2 \cos \theta + 1 = 0$ **46.** $4 \cos^2 \theta - 1 = 0$

حُلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

47.



48.

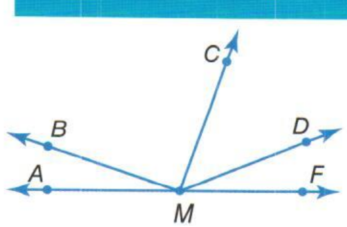


حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

49. $\text{Sin}\ \theta = -0.58$ **50.** $\text{Cos}\ \theta = 0.32$ **51.** $\text{Tan}\ \theta = 2.7$

مراجعة المهارات

انسخ الرسم التخطيطي المبيّن ومدّد كل شعاع. وصنّف كل زاويةٍ على أنها *قائمة* أو *حادّة* أو *منفرجة*. ثم استخدم منقلةً لقياس الزاوية مقربةً إلى أقرب درجة.



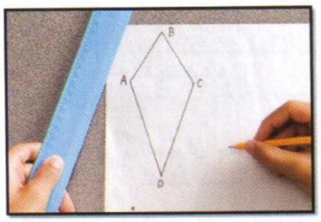
52. $\angle AMC$ **53.** $\angle FMD$
54. $\angle BMD$ **55.** $\angle CMB$

مختبر الهندسة
عمليات الدوران

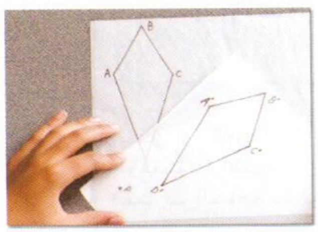
استكشاف 14-3

الدوران هو نوعٌ من التحويل يُحرّك شكلاً حول نقطةٍ ثابتةٍ أو مركزٍ للدوران بزاويةٍ محددةٍ وباتجاهٍ محدد. وفي هذا النشاط، سوف تستخدم ورق الرسم الاستشفافي لاستكشاف خواصّ الدوران.

النشاط استكشاف العلاقات باستخدام ورق الشمع



الخطوة 1



الخطوتان 2 و 3

الخطوة 1 ارسم على ورقةٍ للرسم الاستشفافي الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P.

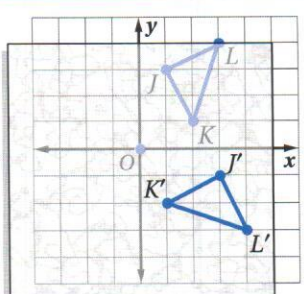
الخطوة 2 وعلى ورقةٍ أخرى للرسم الاستشفافي، ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P استشفافيًا. سمّ الشكل الرباعي الجديد $A'B'C'D'$ والنقطة الجديدة P.

الخطوة 3 ضع ورقة الرسم الاستشفافي بحيث تنطبق النقطتان P. دوّر الورقة بحيث لا يتداخل الشكلان $ABCD$ و $A'B'C'D'$. ألصق ورقتي الرسم الاستشفافي معًا.

الخطوة 4 قس المسافة بين النقاط A و B و C و D والنقطة P كرّر العملية نفسها بالنسبة للشكل الرباعي $A'B'C'D'$. ثم انسخ الجدول أدناه وأكمله.

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

التمارين



1. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ ذا الرؤوس $J(1, 3)$ و $K(2, 1)$ و $L(3, 4)$ على مستوىً إحداثي، ومن ثمّ ارسمه على ورق الرسم الاستشفافي.

a. استخدم منقلةً لدوران كل رأسٍ بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل وفق ما هو موضح في الشكل على الجهة اليمنى. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟

b. دوّر المثلث $\triangle JKL$ بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟

c. استخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة من النقطتين J, K و L إلى نقطة الأصل. وكرّر الأمر نفسه بالنسبة لـ $J'K'L'$ و $J''K''L''$.

2. الكتابة في الرياضيات إذا دوّرت النقطة $(4, 2)$ بزاوية $90°$ و $180°$ حول نقطة الأصل. فكيف يتغير الإحداثيان الأفقي x والرأسي y ؟

3. التنبؤ ما الإحداثيان الجديدان (x, y) المدوّر بزاوية $270°$؟

4. التخمين خمّن المسافة من مركز لدوران P إلى كل رأسٍ مقابلٍ في الشكلين الرباعيين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

الدرس 14-3 الدوران

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
لقد حدّدت الدوران وأثبتّه على أنه تحويل تطابق.	1 رسم الدوران. 2 رسم الدوران في المستوى الإحداثي.	قد تكون تقنية طواحين الهواء الحديثة بديلاً هامًا للوقود الأحفوري. وتحوّل طواحين الهواء طاقة الرياح إلى كهرباءٍ من خلال دوران ريش توربينات.

المفردات الجديدة

مركز الدوران
center of rotation
زاوية الدوران
angle of rotation

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

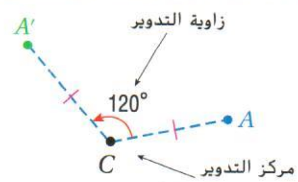
1 رسم الدوران

لقد تعلمت في الدرس 7-4 أن عملية الدوران أو الدوران تحرّك جميع نقاط صورةٍ أصليةٍ بزاويةٍ واتجاهٍ محددين حول نقطةٍ ثابتة.

المفهوم الأساسي الدوران

الدوران حول نقطة ثابتة، تدعى **مركز الدوران**، بزاوية $x°$ هو دالةٌ تربط نقطةً بصورتها بحيث:

- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، إذًا فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها أو
- إذا لم تكن النقطة مركزَ الدوران، إذًا فالصورة والصورة الأصلية تبعدان مسافةً واحدةً عن مركز الدوران، ويساوي قياس **زاوية الدوران** بين الصورة الأصلية ومركز الدوران وصورة النقطة القيمة x.



A' هي صورة A بعد دوران بزاوية قياسها $120°$ حول النقطة C.

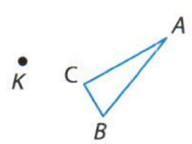
يمكن أن يكون الدوران إما باتجاه دوران عقارب الساعة أو بعكسه. افترض أن جميع الدورانات بعكس اتجاه عقارب الساعة ما لم يذكر خلاف ذلك.

عكس دوران عقارب الساعة

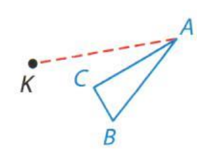
باتجاه دوران عقارب الساعة

مثال 1 رسم الدوران

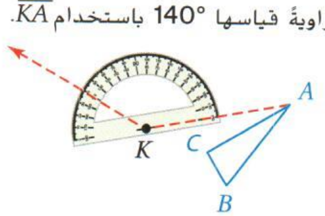
انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم دوران بزاوية قياسها $140°$ للمثلث $\triangle ABC$ حول النقطة K.



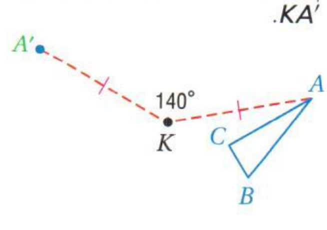
الخطوة 1 ارسم قطعةً مستقيمةً من A إلى K.



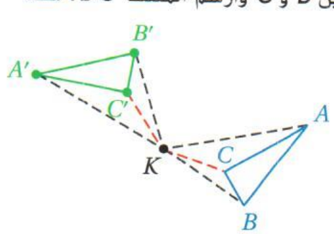
الخطوة 2 ارسم زاويةً قياسها $140°$ باستخدام $\overline{KA}$.



الخطوة 3 استخدم مسطرةً لرسم A' بحيث تكون $KA' = KA$.



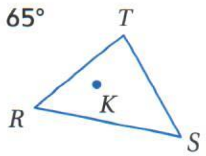
الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 بالنسبة للرأسين B و C وارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.



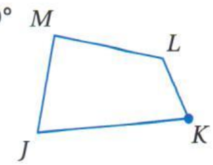
تمرين موجّه

انسخ كل شكلٍ والنقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم دورانًا للشكل وفق العدد المعطى من الدرجات حولَ K.

1A. 65°



1B. 170°



2 رسم الدوران في المستوى الإحداثي

عند دوران نقطةٍ بزاوية °90 أو °180 أو °270 بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فيمكنك استخدام القواعد التالية.

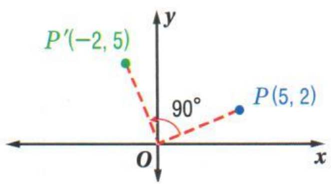
المفهوم الأساسي الدوران في المستوى الإحداثي

الدوران بزاوية °90

لدوران نقطة بزاوية °90 بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي الرأسي y بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال

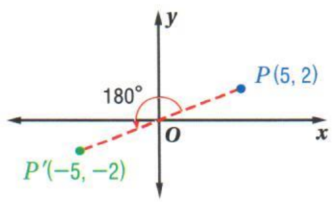


الدوران بزاوية °180

لدوران نقطة بزاوية °180 بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فاضرب الإحداثيين x و y بـ -1.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال

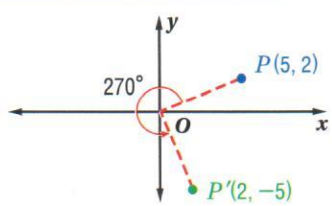


الدوران بزاوية °270

لدوران نقطة بزاوية °270 بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. اضرب الإحداثي الأفقي x بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال



نصيحة دراسية

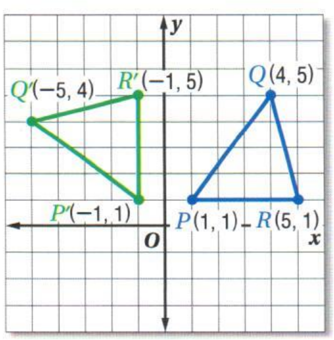
الدوران باتجاه عقارب الساعة يمكن التدليل على الدوران بعكس عقارب الساعة بقياس زاويةٍ سالب. كالدوران بزاوية قياسها °90− حول نقطة الأصل والدوران بزاوية قياسها °90 حول نقطة الأصل على سبيل المثال.

نصيحة دراسية

الدوران بزاوية °360 يعيد الدوران بزاوية قياسها °360 حول نقطةِ الشكل إلى موضعه الأصلي. أي، تساوي الصورة الناتجة عن دوران بزاويةٍ قياسها °60 الصورة الأصلية.

مثال 2 الدوران في المستوى الإحداثي

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(4, 5)$ و $R(5, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle PQR$ وصورته بعد الدوران بزاوية °90 حول نقطة الأصل.



اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس بـ -1 وبدّل.

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$

$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$

$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$

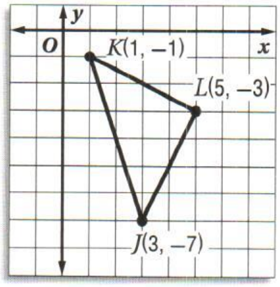
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle PQR$ وصورته المثلث $\triangle P'Q'R'$.

تمرين موجّه

2. لمتوازي الأضلاع $FGHJ$ الرؤوس $F(2, 1)$ و $G(7, 1)$ و $H(6, -3)$ و $J(1, -3)$. مثّل بيانيًا $FGHJ$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها °180.

مثال 3 على الاختبار المعياري الدوران في المستوى الإحداثي

ليكن لديك المثلث JKL المبيّن على الجهة اليمنى. ما صورة النقطة J بعد دوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟



A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

قراءة فقرة الاختبار

من المعلوم لديك أن للمثلث $\triangle JKL$ الإحداثيات $J(3, -7)$ و $K(1, -1)$ و $L(5, -3)$ ويُطلب منك تحديد إحداثيات صورة النقطة J بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حَل فقرة الاختبار

لإيجاد إحداثيي النقطة J بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي الأفقي x بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

$(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$ $\qquad$ $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

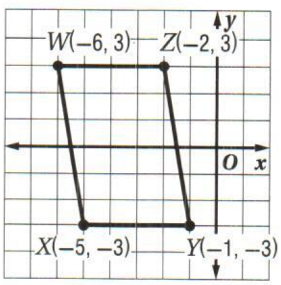
الإجابة هي الخيار C.

نصيحة دراسية

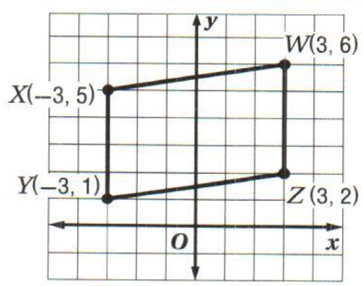
الدوران بزاوية $270°$ يمكنك إتمام دوران بزاوية $270°$ عبر إجراء دوران بزاوية $90°$ و دوران بزاوية $180°$ على التسلسل.

تمرين موجّه

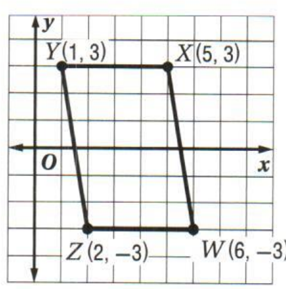
3. يُدوّر متوازي الأضلاع $WXYZ$ بزاوية $180°$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فأيّ من التمثيلات البيانية يمثّل الصورة الناتجة؟



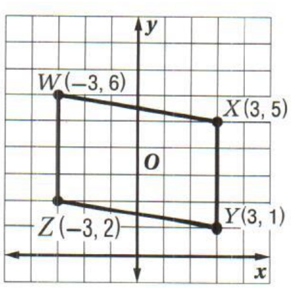
F



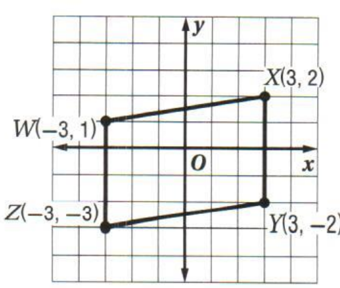
H



G



J



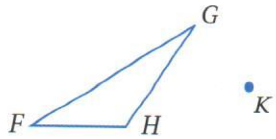
نصيحة عند حل الاختبار

الاستنتاج المنطقي
بدلاً من التحقق من رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ جميعها في كل تمثيل بياني، تحقق من رأسٍ واحدٍ فقط، مثل X.

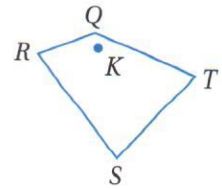
التحقق من فهمك

مثال 1 **الأدوات** **انسخ كل مضلعٍ ونقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة K.**

1. 45°

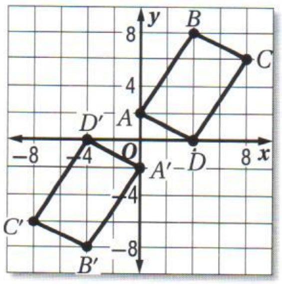


2. 120°



مثال 2 3. للمثلث DFG الرؤوس $D(-2, 6)$ و $F(2, 8)$ و $G(2, 3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle DFG$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل.

مثال 3 4. **الاختيار من متعدد** في التحويل الموضّح، ما قياس زاوية الدوران الشكل $ABCD$ حول نقطة الأصل؟



A 90°

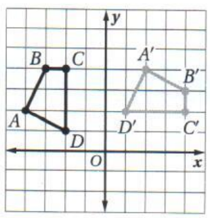
B 180°

C 270°

D 360°

التدريب وحل المسائل

5. يوضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فما العبارات التي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



A ميل $\overleftrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}$ ؛ ميل $\overleftrightarrow{D'O} = 2$ ؛ بما أن الميلين معكوسان ضربيان، فالتحويل هو دوران باتجاه عقارب الساعة بزاوية 90°.

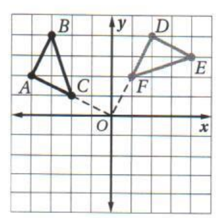
B $C = (-2, 4)$؛ $A' = (2, 4)$؛ بما أن A' هي صورة C بالنسبة للمحور الرأسي y، فالتحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y.

C $A = (-4, 2)$؛ $A' = (2, 4)$؛ التحويل إزاحةٌ لمسافة 6 وحدات يمينًا ووحدتان إلى الأعلى.

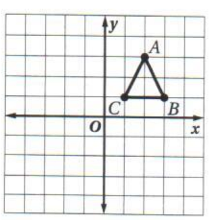
D $CD = 3$ و $B'C' = 1$؛ بما أن طول $B'C'$ يساوي ثلث طول $\overline{CD}$، فالتحويل تغيير للأبعاد بمعامل مقياسٍ يساوي $\frac{1}{3}$.

6. المثلث $\triangle DEF$ هو دوران للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى.

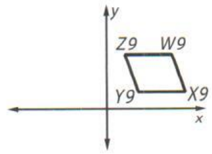
فما هي العبارة التي تثبت أن زاوية الدوران تساوي 90°؟

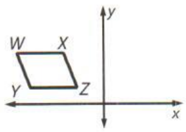


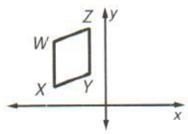
7. إذا أدير المثلث ABC بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ليعطي t المثلث $A'B'C'$. فما الإحداثيان الجديدان للرأس A'؟

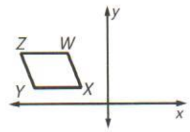


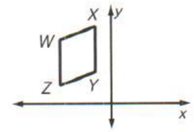
8. ما الصورة الأصلية للشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$ التي توضح أن التحويل $WXYZ \rightarrow W'X'Y'Z'$ هو دوران؟



A


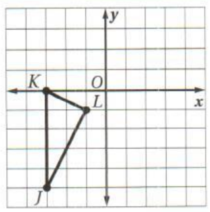
B


C


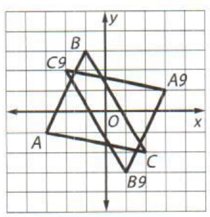
D


مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

9. المثلث JKL مرسومٌ على المستوى الإحداثي كما هو موضح أدناه. فإذا أدير المثلث $\triangle JKL$ بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيا J'؟



في المستوى الإحداثي المبيّن أدناه، تم دوران المثلث $\triangle ABC$ حول نقطة الأصل بزاوية $180°$ لتشكيل المثلث $\triangle A'B'C'$.

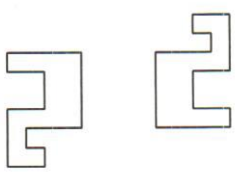


أكمل الجدول أدناه لمقارنة إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle ABC$ بإحداثيات الرؤوس المقابلة في المثلث $\triangle A'B'C'$.

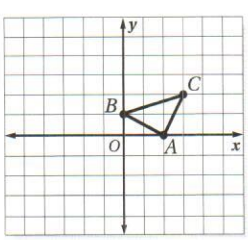
$\triangle ABC$	$\triangle A'B'C'$
A(-3, -1)	A′
B(-1, 3)	B′
C(2, -2)	C′

اختر إحداثيات رؤوس مثلث آخر $\triangle XYZ$ واكتبها في الجدول أدناه. استخدم النمط الذي اكتشفته في الجدول لإيجاد إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle X'Y'Z'$، الذي يمثل صورة المثلث $\triangle XYZ$ بعد الدوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل. اشرح كيف استخدمت النمط لإكمال الجدول أدناه.

10. ما نوع التحويل الذي طُبّق على الشكل الأيسر لتشكيل الشكل الأيسر؟

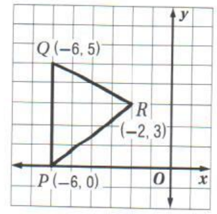


11. إذا أدير المثلث ABC بزاوية قياسها $90°$ باتجاه دوران عقارب الساعة حول النقطة B، فما إحداثيات B'؟



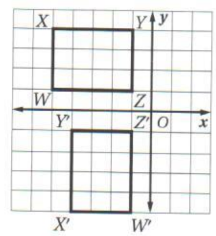
12. للمثلث PQR الرؤوس $P(-6, 0)$ و $Q(-6, 5)$ و $R(-2, 3)$ كما هو موضح أدناه.

ما صورة النقطة R بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ حول نقطة الأصل؟

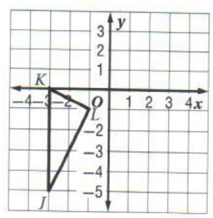


13. انظر إلى التحويل أدناه.

ما قياس زاوية دوران الشكل $WXYZ$ حول نقطة الأصل بعكس اتجاه عقارب الساعة؟



14. بدوران المثلث JKL بزاوية قياسها 180 درجة حول نقطة الأصل. فما إحداثيا J'؟



A $(5, 3)$

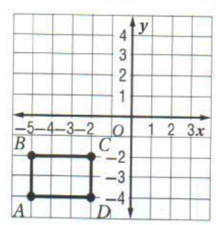
B $(3, 0)$

C $(3, 5)$

D $(3, -5)$

15. للمثلث JKL رؤوس عند النقاط $J(0, 1)$ و $K(2, 3)$ و $L(4, 0)$. فإذا أدير المثلث بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل. فماذا سيكون إحداثيا K'؟

16. ما إحداثيا النقطة C' إذا أدير المستطيل $ABCD$ بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

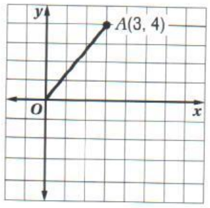


17. ما هي صورة $P(0, 7)$ وفق دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟

18. أي مما يلي هي صورة $Q(-3, 0)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة؟

19. عند دوران النقطة $R(4, -2)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $90°$ وبعكس اتجاه عقارب الساعة. ففي أي ربع ستقع صورة النقطة؟

20. النقطة A هي أحد رؤوس مربع في الرسم التخطيطي الموضح أدناه. يُدار المربع بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل. فما إحداثيا A'، التي تمثل صورة A نتيجة الدوران؟



21. ما الدوران حول نقطة الأصل الذي يجعل من النقطة $P'(-6, 1)$ صورةً للنقطة $P(1, 6)$؟ انظر الهامش

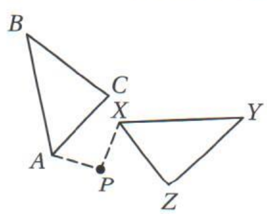
22. صورة النقطة $P(x, y)$ بموجب الدوران حول نقطة الأصل O وبزاوية قياسها $x°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة هي النقطة $P'(x', y')$. فما الدوران حول نقطة الأصل O الذي يمكن بموجبه دوران $P'(x', y')$ بحيث تنتج الصورة $P(x, y)$؟

23. تدار نقطة في الربع الأول بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة. ففي أي ربع ستقع صورة النقطة؟ انظر الهامش

24. النقطة $P(x, y)$ نقطة تقع في الربع الثاني. ما هو الدوران الذي بموجبه يكون إحداثيا الصورة هما $P(-y, x)$؟

25. ما النقطة التي تمثّل صورة دوران بعكس اتجاه عقارب الساعة وبزاوية $90°$ للنقطة $P(-4.7, 3.5)$ حول نقطة الأصل؟

26. أحد المثلثات هو دوران لمثلثٍ آخر حول P. فأي عبارة مما يلي **ليست** صحيحة؟



A المثلثان متطابقان.

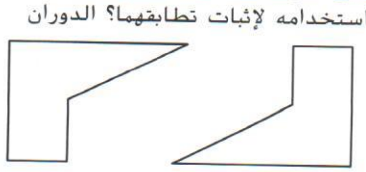
B توجيه أحد المثلثين مختلف عن المثلث الآخر.

C تدار كل من A و B و C بالعدد نفسه من الدرجات لتشكل المثلث ΔXYZ.

D $\angle A \cong \angle X$ و $\angle B \cong \angle Y$ و $\angle C \cong \angle Z$

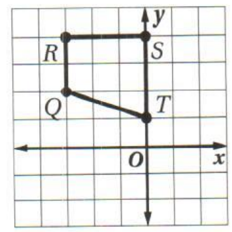
27. ما هي صورة $P(-5, 12)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟ انظر الهامش

28. المضلعان الموضحان أدناه متطابقان. فما التحويل الذي يمكن استخدامه لإثبات تطابقهما؟ الدوران



تدريب على الاختبار المعياري

29. ما الدوران الذي يخضع له شبه المنحرف $QRST$ ليعطي صورةً فيها النقطة R' تقع عند $(4, 3)$؟



A دوران بزاوية $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

B دوران بزاوية $180°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

C دوران بزاوية $180°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

D دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

31. الإجابة القصيرة للمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(1, 7)$ و $Y(0, 2)$ و $Z(-5, -2)$. فما إحداثيا X' بعد دوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

30. جبريًا يقدّر أن عدد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية عام 2007 تخطى 301,000,000 نسمة. وفي الوقت نفسه، قُدّر أن عدد سكان العالم قد تجاوز 6,602,000,000 نسمة. فما هي النسبة المئوية لعدد سكان الولايات المتحدة إلى عدد سكان العالم في ذلك الوقت؟

F 3.1%

G 3.5%

H 4.2%

J 4.6%

32. SAT/ACT يُسند سلّم طوله 18 مترًا على الحائط الخارجي لأحد المنازل. تبعد قاعدة السلّم 8 أمتار عن الحائط. فما الارتفاع الذي تبلغه قمّة السلّم على حائط المنزل مقربًا إلى أقرب عُشرٍ من المتر؟

A 10.0 m

B 16.1 m

C 19.7 m

D 22.5 m

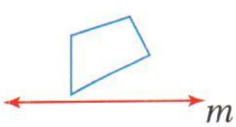
E 26.0 m

مراجعة شاملة

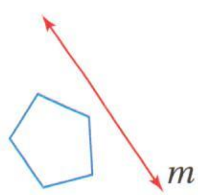
33. البراكين تتحرك سحابةٌ من الغازات الكثيفة والغبار صادرةٌ عن أحد البراكين مسافة 64 كيلومترًا باتجاه الغرب ومن ثم 48 كيلومترًا باتجاه الشمال. صمم تمثيلاً يوضح إزاحة حبيبات الغبار. ثم أوجد مسافة المسار الأقصر الذي يوصل الحبيبات إلى الموضع نفسه. (الدرس 2-14)

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة. (الدرس 1-14)

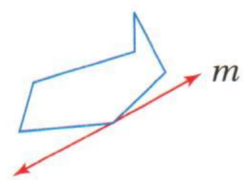
34.



35.



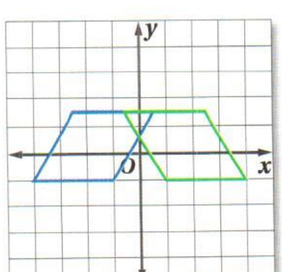
36.



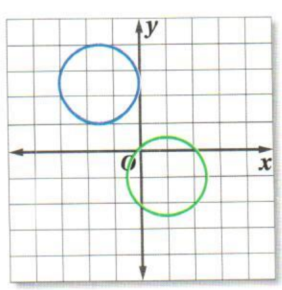
مراجعة المهارات

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.

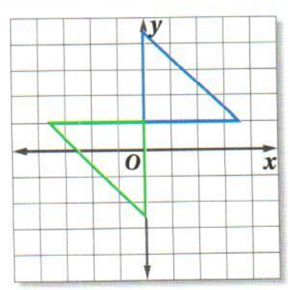
37.



38.



39.

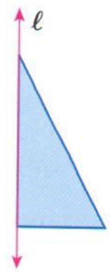


مختبر الهندسة
المجسمات الناتجة عن الدوران

المجسم الناتج عن الدوران هو شكلٌ ثلاثي الأبعاد ينتج عن دوران شكلٍ أو منحنىً موجودٍ في مستوىً حول مستقيم.

النشاط 1

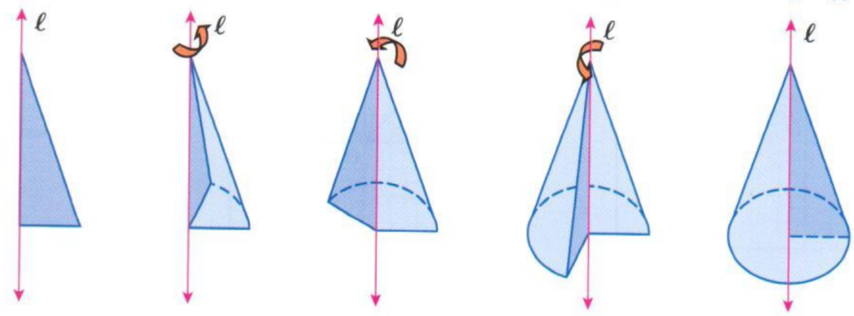
حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران المثلث القائم الموضّح حول المستقيم ℓ.



الخطوة 1 انسخ المثلث على بطاقةٍ أو ورقٍ مقوىً وقُصّه.

الخطوة 2 استخدم شريطًا لاصقًا للصق المثلث على قضيبٍ أو قشّة للشرب.

الخطوة 3 دوّر طرف القشة بين يديك بسرعةٍ وراقب النتيجة.

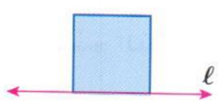


الصورة المشوشة التي تلاحظها هي صورة مخروط.

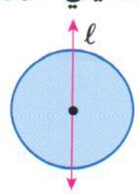
تمثيل النماذج والتحليل

حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران كل شكل ثنائي الأبعاد مما يلي حول المستقيم ℓ ومثّله.

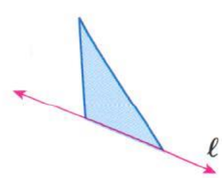
1.

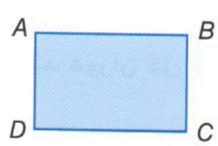


2.



3.



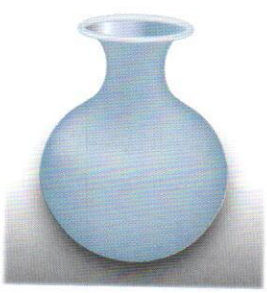


4. مثّل وحدّد المجسّم المتشكّل نتيجةً لدوران المستطيل الموضح حول المستقيم المؤلّف من

a. الضلع $\overline{AB}$.

b. الضلع $\overline{AD}$.

c. نقطة منتصف الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$.



5. **التصميم** ارسم شكلاً ثنائي الأبعاد يمكن دورانه لتشكيل الإناء الموضح، بما في ذلك المستقيم الذي ينبغي الدوران حوله.

6. **الاستنتاج** صواب أو خطأ: يمكن أن تتشكل جميع المجسمات عبر دوران شكلٍ ثنائي الأبعاد. اشرح استنتاجك

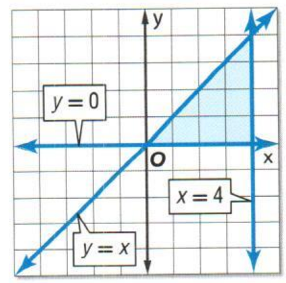
مختبر الهندسة
المجسمات الناتجة عن الدوران تابع

سيطلب منك في حساب التفاضل والتكامل إيجاد أحجام مجسماتٍ ناتجةٍ عن دوران منطقةٍ على مستوى إحداثي حول المحور الأفقي x أو الرأسي y. ومن أولى الخطوات الهامة في حل هذه المسائل تصوّر المجسّمات المتشكلة.

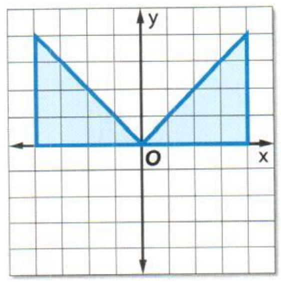
النشاط 2

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران المنطقة المطوّقة بـ $y = x$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول المحور الرأسي y.

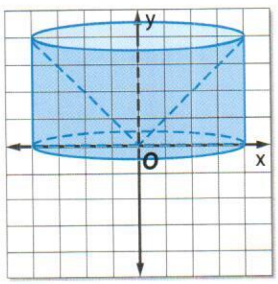
الخطوة 1 مثّل بيانيًا كل معادلة مما يلي لإيجاد المنطقة التي سيتم دورانها.



الخطوة 2 اعكس المنطقة حول المحور الرأسي y.



الخطوة 3 صِل رؤوس المثلثات القائمة باستخدام خطوطٍ منحنية.



المجسّم أسطوانةٌ ذات مخروط مقتطعٍ في مركزها.

تمثيل النماذج والتحليل

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تحكمها كل معادلة مما يلي حول المحور الرأسي y.

7. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

8. $y = x^2$
$y = 4$

9. $y = x^2$
$y = 2x$

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تطوّقها كل معادلة مما يلي حول المحور الأفقي x.

10. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

11. $y = x^2$
$y = 0$
$x = 2$

12. $y = x^2$
$y = 2x$

13. **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل منطقةً في الربع الأول من المستوى الإحداثي.

a. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الرأسي y.

b. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الأفقي x .

14. **التحدي** أوجد معادلةً تطوّق منطقةً حين تُدوّر حول المحور الأفقي x. ينتج شكلٌ حجمه 18π وحدة مربعة.

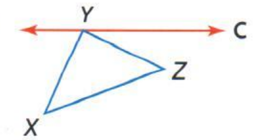
الوحدة 14

اختبار نصف الوحدة

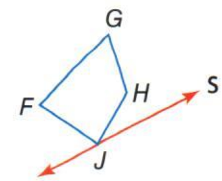
الدروس من 14-1 إلى 14-3

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة. (الدرس 14-1)

1.



2.

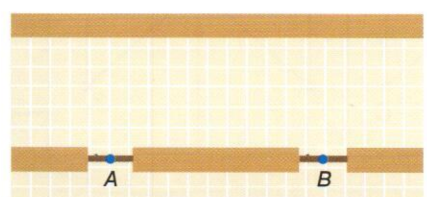


مثّل كل شكلٍ مما يلي وصورته بيانيًا وفق الانعكاس المحدد. (الدرس 14-1)

3. للمثلث $\triangle FGH$ الرؤوس $F(-4, 3)$ و $G(-2, 0)$ و $H(-1, 4)$؛ بالنسبة للمحور الرأسي y

4. للمعيّن $QRST$ الرؤوس $Q(2, 1)$ و $R(4, 3)$ و $S(6, 1)$ و $T(4, -1)$؛ بالنسبة للمحور الأفقي x

5. **النوادي** يبيع نادي الدراما الحلوى خلال استراحة إحدى المسرحيات المدرسية. حدّد نقطةً P على طول الجدار لتمثيل طاولة الحلوى بحيث يقطع الأشخاص القادمون من أيٍ من البابين A أو B المسافة نفسها إلى الطاولة. (الدرس 14-1)



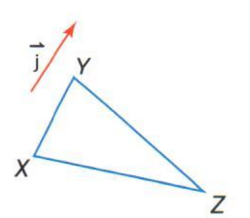
مثّل كل شكلٍ بيانيٍ وصورته بعد الإزاحة المحددة. (الدرس 14-2)

6. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(2, 1)$ و $C(1, -3)$؛ $\langle 3, -1 \rangle$

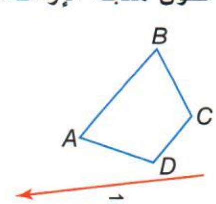
7. للمستطيل $JKLM$ الرؤوس $J(-4, 2)$ و $K(-4, -2)$ و $L(-1, -2)$ و $M(-1, 2)$؛ $\langle 5, -3 \rangle$

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة. (الشكل 14-2)

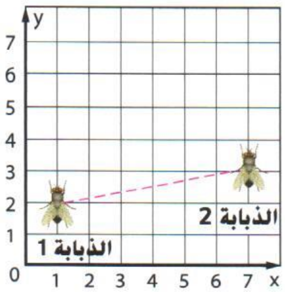
8.



9.

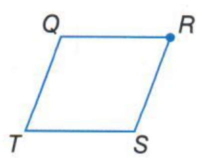


10. **الصور المتحركة** يصنع فارس صورةً متحركة. حيث يستخدم ورقًا للتمثيل البياني للتحقق من دقة أبعاد رسوماته. فإذا رسم مستوىً إحداثيًا يضم ذبابتين كما هو موضح أدناه، فما المتجه الذي يمثل الحركة من الذبابة 1 إلى الذبابة 2؟ (الدرس 14-2)

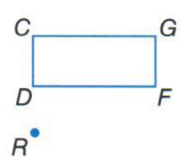


انسخ كل مضلع ونقطة R. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحددً لكل شكلٍ حول النقطة R. (الدرس 14-3)

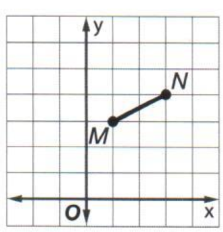
11. 45°



12. 60°



13. **الاختيار من متعدد** ما صورة النقطة M بعد دوران بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل؟ (الدرس 14-3)



A $(-3, 1)$

B $(-3, -1)$

C $(-1, -3)$

D $(3, 1)$

مثّل كل شكلٍ بيانيٍ وصورته بعد الدوران المحدد. (الدرس 14-3)

14. للمثلث $\triangle RST$ الرؤوس $R(-3, 0)$ و $S(-1, -4)$ و $T(0, -1)$؛ 90°

15. للمربع $JKLM$ الرؤوس $J(-1, 2)$ و $K(-1, -2)$ و $L(3, -2)$ و $M(3, 2)$؛ 180°

الاستكشاف

14-4 مختبر برامج الهندسة
تركيب التحويلات

سوف تستخدم في هذا المختبر لوح الرسم الهندسي لاستكشاف آثار القيام بتحويلاتٍ متعددةٍ على شكلٍ ما.

النشاط

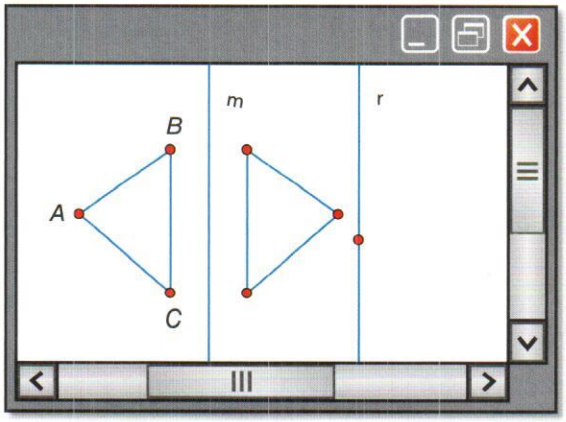
عكس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين رأسيين.

الخطوة 1 استخدم أداة القطع المستقيمة لإنشاء مثلثٍ يتجه أحد رؤوسه نحو اليسار بحيث يمكنك أن ترى بسهولةٍ التحويلات التي تجربها. سَمِّ المثلث ABC.

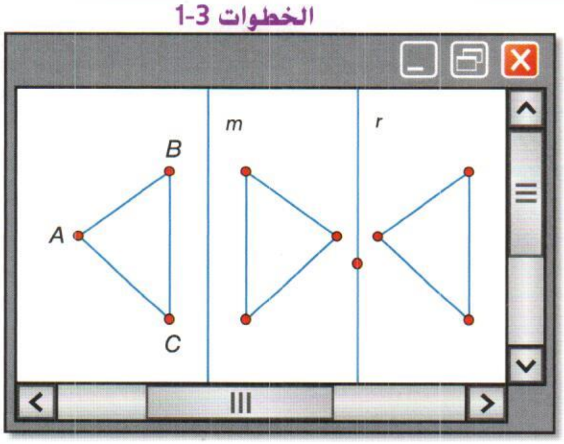
الخطوة 2 أدخل مستقيمًا وسمّه m إلى يمين المثلث $\triangle ABC$. أدخل نقطةً بحيث تكون المسافة منها إلى المستقيم m أكبر من عرض المثلث $\triangle ABC$. ارسم المستقيم الموازي للمستقيم m من خلال النقطة وسمّ المستقيم الجديد r.

الخطوة 3 اختر المستقيم m واختر Mark Mirror من قائمة Transform (التحويل). اختر جميع أضلاع المثلث $\triangle ABC$ ورؤوسه واختر Reflect (العكس) من قائمة Transform (التحويل).

الخطوة 4 كرر العملية التي استخدمتها في الخطوة 3 لعكس الصورة الجديدة بالنسبة للمستقيم r.



الخطوات 3-1



الخطوة 4

تحليل النتائج

1. كيف يرتبط الشكل الأصلي بالشكل النهائي؟
2. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي؟
3. إذا حركت المستقيم، فما الذي يحدث؟
4. **التخمين** إذا عكست الشكل بالنسبة لمستقيم ثالث، فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.
5. كرر النشاط لمستقيمين متعامدين. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي نفسه؟
6. **التخمين** إذا عكست الشكل الوارد في التدريب 5 بالنسبة لمستقيمٍ ثالثٍ عموديٍ على الثاني، فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.

الدرس 14-4

تركيب التحويلات

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• لقد رسمت الانعكاس والإزاحة والدوران.	1 رسم الانعكاس الانزلاقي وغيره من تركيب حالات التساوي في المستوى الإحداثي. 2 رسم تركيبات الانعكاس بالنسبة لمستقيمات متوازية ومتقاطعة.	• توضح آثار الأقدام التي يخلّفها في الرمال شخصٌ يسير على طول حافة شاطئٍ تركيب تحويلين مختلفين، وهما الإزاحة والانعكاس.

المفردات الجديدة

تركيب التحويلات composition of transformations

الانعكاس الانزلاقي glide reflection

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الانعكاس الانزلاقي

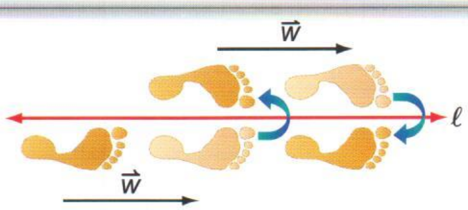
عند تطبيق تحويلٍ على شكلٍ ومن ثم تطبيق تحويلٍ آخر على صورته، فيطلق على النتيجة اسم **تركيب التحويلات**. والانعكاس الانزلاقي نوعٌ من تركيب التحويلات.

المفهوم الأساسي الانعكاس الانزلاقي

الانعكاس الانزلاقي هو تركيبٌ لإزاحةٍ يتبعها انعكاسٌ بالنسبة لمستقيمٍ موازٍ لمتّجه الإزاحة.

مثال

الانعكاس الانزلاقي الموضح هو تركيبٌ لإزاحةٍ على طول $\vec{w}$ يتبعها انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم ℓ.



مثال 1 تمثيل انعكاسٍ انزلاقي

للمثلث JKL الرؤوس $J(6, -1)$ و $K(10, -2)$ و $L(5, -3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد إزاحةٍ على طول $\langle 0, 4\rangle$ انعكاسٍ بالنسبة للمحور الرأسي y.

الخطوة 1 إزاحة على طول $\langle 0, 4\rangle$

$(x, y) \rightarrow (x, y + 4)$

$J(6, -1) \rightarrow J'(6, 3)$

$K(10, -2) \rightarrow K'(10, 2)$

$L(5, -3) \rightarrow L'(5, 1)$

الخطوة 2 انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y

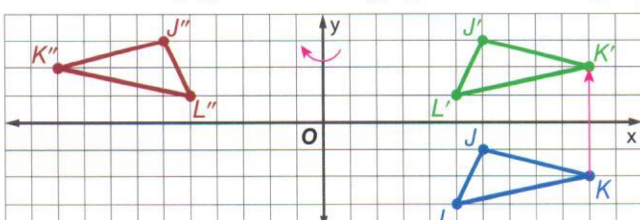
$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$J'(6, 3) \rightarrow J''(-6, 3)$

$K'(10, 2) \rightarrow K''(-10, 2)$

$L'(5, 1) \rightarrow L''(-5, 1)$

الخطوة 3 مثّل المثلث $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$ بيانيًا.



تمرين موجّه

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(2, 5)$ و $R(4, 2)$. مثّل المثلث $\triangle PQR$ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدد.

1A. إزاحة: على طول $\langle -2, 0\rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

1B. إزاحة: على طول $\langle -3, -3\rangle$
انعكاس: بالنسبة للمستقيم $y = x$

في المثال 1، $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$ و $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$. بناءً على خاصية التعدي في التطابق، فإن $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقترح النظرية التالية.

النظرية 14.1 تركيب حالات تساوي الأبعاد

تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد (أو أكثر) هو تساوٍ للأبعاد أيضًا.

ستُثبتُ إحدى حالات النظرية 14.1 في التدريب 30.

نصيحة دراسية

الحركات الصلبة إن الانعكاس الانزلاقي والانعكاس والإزاحة والدوران هي الأنواع الأربعة الوحيدة *للحركات الصلبة* أو حالات تساوي الأبعاد في مستوى.

إذًا، يعطي تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد، بما في ذلك الانعكاس أو الإزاحة أو الدوران، صورةً مطابقةً لصورتها الأصلية.

مثال 2 تمثيل تركيبات تساوي الأبعاد الأخرى

النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1)$ و $D(-3, 2)$. مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها بعد الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$

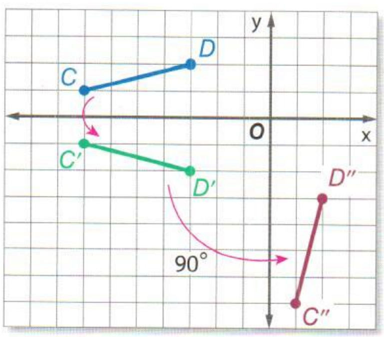
$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2 الدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$

$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$



الخطوة 3 مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

قراءة في الرياضيات

الفواصل العلوية المزدوجة تستخدم الفواصل العلوية المزدوجة للإشارة إلى أن رأسًا هو صورة تحويلٍ ثانٍ.

تمرين موجّه

للمثلث ABC الرؤوس $A(-6, -2)$ و $B(-5, -5)$ و $C(-2, -1)$.
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بعد تركيب التحويلات بالترتيب المدرج التالي.

2A. إزاحة: على طول $\langle 3, -1\rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي

2B. دوران: $180°$ حول نقطة الأصل
إزاحة: على طول $\langle -2, 4\rangle$

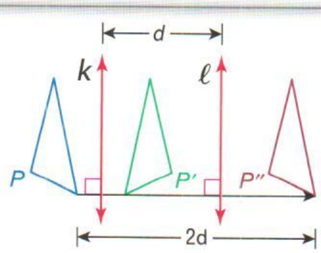
2 تركيب انعكاسين

تركيب انعكاسين تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين يماثل عملية إزاحة واحدة.

النظرية 14.2 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متوازيين

يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين بواسطة متجه إزاحة

- عمودي على المستقيمين.
- طوله يساوي ضعف المسافة بين المستقيمين.



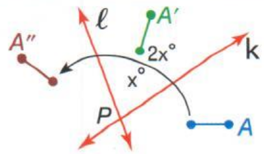
سوف تثبت النظرية 14.2 في التدريب 36.

تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين يماثل عملية دورانٍ واحدة.

النظرية 14.3 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متقاطعين

يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين على أنه عملية دورانٍ واحدة.

- حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان و
- بزاوية تساوي ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة التي يشكلها المستقيمان.

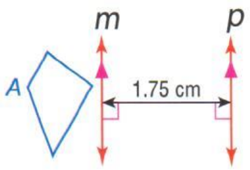


سوف تثبت النظرية 14.3 في التدريب 37.

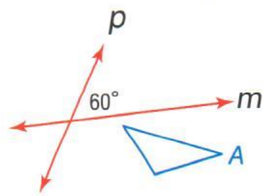
مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين

انسخ الشكل A واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط A بـ A''.

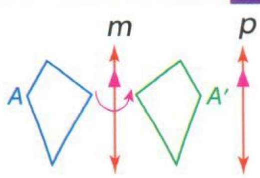
a.



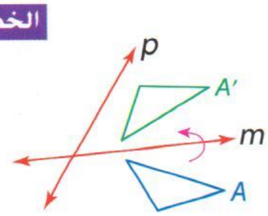
b.



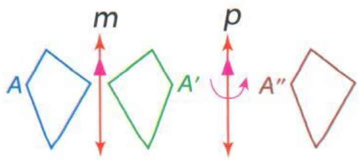
الخطوة 1 اعكس A بالنسبة للمستقيم m.



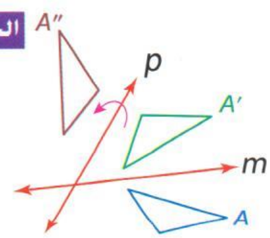
الخطوة 1



الخطوة 2 اعكس A' بالنسبة للمستقيم p.



الخطوة 2



بحسب النظرية 14.2، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين رأسيين متوازيين m و p إزاحةً أفقيةً إلى الجهة اليمنى لمسافة $1.75 \cdot 2$ أو 3.5 سنتيمترات.

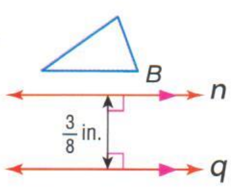
بحسب النظرية 14.3، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين m و p دورانًا بزاوية تساوي $60° \cdot 2$ أو 120° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان m و p.

انتبه!
ترتيب التركيب
تحقق من تركيب تحويلين بحسب ترتيبهما المعطى

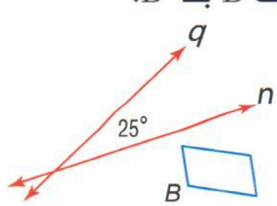
تمرين موجّه

انسخ الشكل B واعكسه بالنسبة للمستقيم n ثم بالنسبة للمستقيم q. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط B بـ B''.

3A.



3B.



تتشكل الكثير من الأنماط في الحياة اليومية باستخدام تركيب التحويلات.

الربط بالحياة اليومية

تنتج أنماط الحواشي في السجاد عند تكرار أي نوع من عدة أنواع من التحويلات الأساسية باتجاهٍ واحد. وثمّة العديد من التشكيلات الممكنة لهذه التحويلات: الإزاحات والانعكاس الأفقي والانعكاس الرأسية والانعكاسا الرأسية المتبوعة بانعكاس أفقي والانعكاس الانزلاقي والدوران والانعكاس المتبوع بانعكاس انزلاقي.

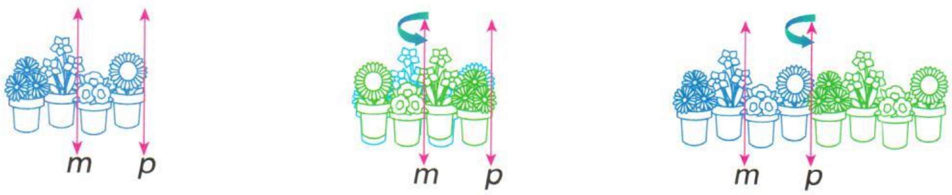
المصدر: متحف النسيج

مثال 4 من الحياة اليومية وصف التحويلات

أنماط الحواشي صِف التحويلات المركّبة لتشكيل كل شكلٍ من أشكال أنماط الحواشي الموضحة.

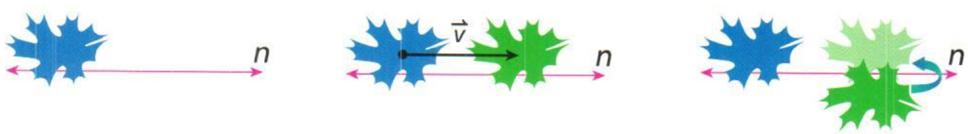
a.

ينتج النمط عبر إزاحات متعاقبةٍ لأصص النباتات الأربعة الأولى. وبموجب ذلك يمكن تشكيل هذا النمط عبر تركيب انعكاسين بالنسبة للمستقيمين m و p كما هو موضح. لاحظ أن المستقيم m يمرّ بمركز الصورة الأصلية.



b.

ينتج النمط من خلال الانعكاس الانزلاقي. ولذلك يمكن تشكيل النمط عبر تركيب إزاحةٍ على طول متّجه الإزاحة $\vec{v}$ ثم انعكاسٍ بالنسبة للمستقيم الأفقي n كما هو موضح.

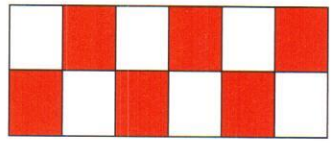


تمرين موجّه

4. نقوش السجّاد صِف التحويلات المركّبة لتشكيل نقش كلٍ من السجادتين الموضحتين.

A.

B.



ملخص المفهوم تركيب الإزاحات

انعكاس انزلاقي	الإزاحة	دوران
تركيب انعكاسٍ وإزاحة	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين

التحقق من فهمك

مثال 1 **للمثلث CDE الرؤوس $C(-5, -1)$ و $D(-2, -5)$ و $E(-1, -1)$. مثّل المثلث $\triangle CDE$ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدّد.**

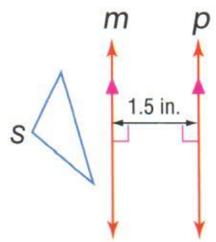
1. إزاحة: على طول $\langle 4, 0\rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

2. إزاحة: على طول $\langle 0, 6\rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي y

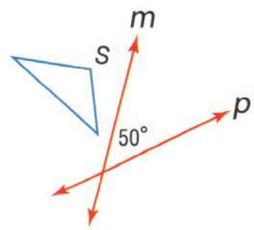
مثال 2 **3.** النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{JK}$ هما $J(2, 5)$ و $K(6, 5)$. مثّل $\overline{JK}$ وصورتها بيانيًا بعد انعكاسٍ بالنسبة للمحور الأفقي x ودورانٍ بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل.

مثال 3 **انسخ الشكل S واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثم صِف تحويلاً وحيدًا يربط S بـ S''.**

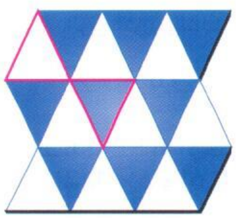
4.



5.

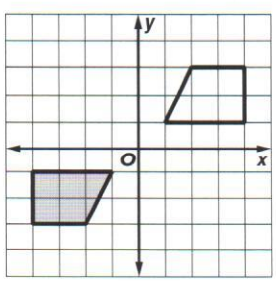


مثال 4 **6. أنماط المكعبات** يشكّل إسماعيل نمطًا من مكعباتٍ على أشكال مثلثات متساوية الأضلاع لوضعها فوق سطح طاولة. صِف تشكيلة التحويلات التي استخدمت لإعداد النمط.

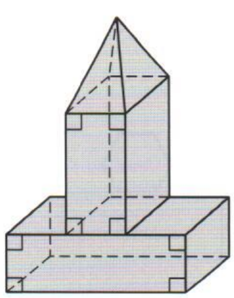


التدريب وحل المسائل

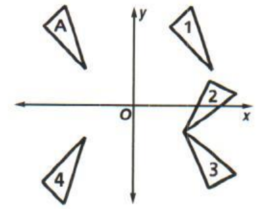
مثال 2 **7.** ما التحويلان اللذان قد يكونان استخدما لتغيير الشكل المظلل إلى الشكل غير المظلل؟



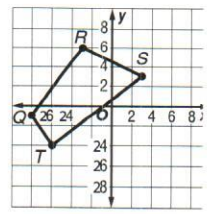
مثال 2 **8.** يمثل هذا الرسم بناءً يتوضع على الطرف الآخر من فندقٍ في أبو ظبي. فما الأشكال الممثلة في الشكل؟



9. إذا حُوِّل الشكل A بعملية دوران ثم انعكاس، فما الشكل الذي يمكن أن تأخذه الصورة الأخيرة؟



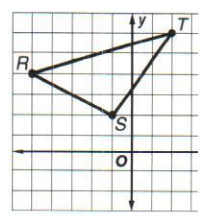
10. إذا عُكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ثم عُكس بالنسبة للمحور الرأسي y. ففي أي أرباعٍ ستقع الصورة النهائية؟



A الربع الأول والثالث والرابع **C** الربع الأول والثاني فقط

B الربع الثاني والثالث والرابع **D** الربع الثاني والرابع فقط

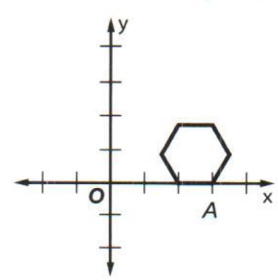
11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $S(-1, 2)$ و $T(2, 6)$. ماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أُزيح المثلث لمسافة 5 وحدات إلى الأسفل وعُكس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



A $(-2, 1)$ **C** $(2, -1)$

B $(-1, 2)$ **D** $(2, 1)$

12. يقع سداسي أضلاعٍ منتظم في المستوى الإحداثي بحيث تقعُ النقطة A عند $(3, 0)$.

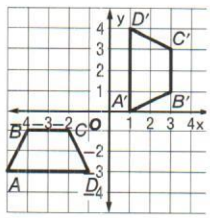


ما إحداثيا الرأس A بعد انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y وإزاحةٍ إلى الأعلى لمسافة وحدتين؟

13. يُمدّد المثلث JKL بمعاملٍ يساوي 1.5 ويُعكس بالنسبة للمحور الرأسي y ويُزاح لمسافة وحدتين يسارًا. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للرأس J بعد التحويلات الثلاث؟

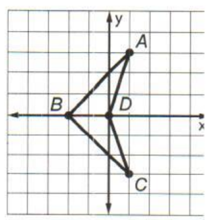
14. لشبه المنحرف $ABCD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

يحوّل الشكل $ABCD$ لتشكيل صورةٍ مطابقة. فما التحويلات الحادثة لتشكيل $A'B'C'D'$؟



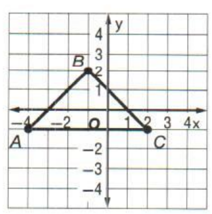
15. يُدار الشكل الرباعي $ABCD$ ويُزاح لتشكيل صورةٍ تضم الرأسين $A'(-3, 3)$ و $B'(0, 0)$.

فما إحداثيا النقطة D'؟



16. يُمدّد المثلث ABC حول نقطة الأصل بمعامل مقياسٍ يساوي 2 ثم يُزاح بحيث يكون لنقطة منتصف $\overline{A'B'}$ الإحداثيان المماثلان لإحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

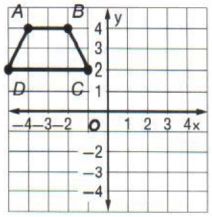
ما إحداثيا النقطة C'؟



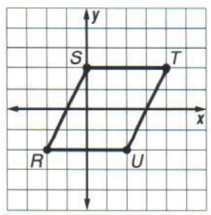
17. يتشكّل مثلثٌ من النقاط $P(2, -2)$ و $Q(-2, -4)$ و $R(6, -2)$. تتغير أبعاد المثلث بمعامل مقياسٍ يساوي $\frac{1}{2}$ ثم يُزاح لمسافة أربع وحداتٍ يمينًا وأربعةٍ إلى الأعلى.

ما إحداثيات المثلث $\triangle P'Q'R'$؟

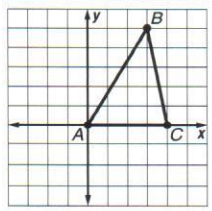
18. لشبه المنحرف $ABCD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه. فإذا عُكس $ABCD$ بالنسبة للمحور الرأسي y ثمّ أدير بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فماذا سيكون إحداثيا الرأس C' ؟



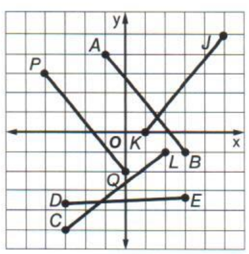
19. للمثلث STU الرؤوس $S(-5, -2)$ و $T(-1, 4)$ و $U(6, 3)$. فإذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل ثم عُكس بالنسبة للمحور الأفقي x، فماذا سيكون إحداثيا T' وهي صورة T؟



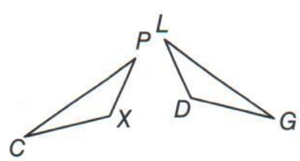
20. إذا أزيح متوازي الأضلاع $RSTU$ لمسافة 5 وحدات يسارًا و 3 وحدات إلى الأعلى ثم عُكس بالنسبة للمحور الرأسي y، فماذا سيكون إحداثيا T'. وهي صورة T وفق هذين التحويلين؟



21. إذا أدير المثلث $\triangle ABC$ كما هو موضح بزاوية قياسها $180°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فستكون صورته $\triangle A'B'C'$. فما التحويل أو تشكيلات التحويلات على المثلث $\triangle ABC$ والتي ستنتج صورةً مختلفةً عن المثلث $\triangle A'B'C'$؟



22. ما القطعة المستقيمة التي تمثل صورة $\overline{PQ}$ بموجب إزاحةٍ انزلاقية؟

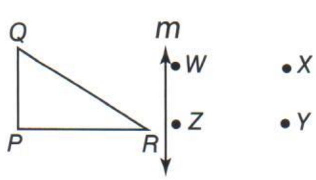


23. ما نوع التحويل الذي يمكنك استخدامه لتثبت أن $\triangle CXP \cong \triangle GDL$؟

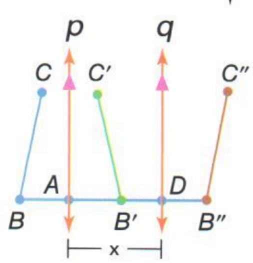
24. تقع رؤوس مثلثٍ في الربع الثاني. ففي أي ربع ستقع صورة المثلث بموجب الانعكاس الانزلاقي $T_{0,4} \to R_{x=0}$ ؟

25. تُعكس النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y، ثمّ أزيحت صورتها رأسيًا لمسافة a وحدة، حيث $a > 0$. فأيٌّ مما يلي يعطي إحداثيات الصورة النهائية P'؟

26. أي من مجموعات النقاط التالية يمكن أن تكون رؤوسًا لصورة المثلث $\triangle PQR$ بموجب انعكاسٍ انزلاقيٍ بحيث يكون المستقيم m هو خط الانعكاس؟



27. تقع رؤوس مثلث عند النقاط $(-1, 3)$ و $(2, 5)$ و $(0, 1)$. فإذا أزيح المثلث 4 وحدات يسارًا، ثمّ مُدّد بمعامل مقياسٍ قيمته 3، فما إحداثيات صورة المثلث؟



28. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 14.2.

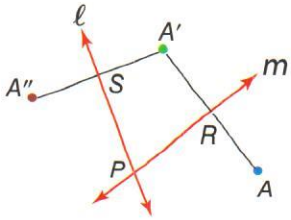
المعطيات: يطبّق انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم p على $\overline{BC}$ لتعطي $\overline{B'C'}$. ويطبّق انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم q على $\overline{B'C'}$ لتعطي $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$

المطلوب إثباته: **a.** $\overline{BB''} \perp p,\ \overline{BB''} \perp q$

b. $BB'' = 2x$

29. **البرهان** اكتب فقرة برهان للنظرية 14.3.



المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ و m عند النقطة P.
A هي أي نقطة على المستقيم ℓ أو المستقيم m.

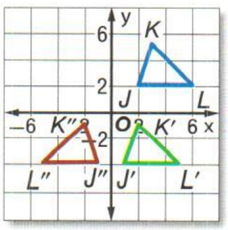
المطلوب إثباته: **a.** إذا عكست النقطة A بالنسبة للمستقيم m، ثم عكست صورتها A' بالنسبة للمستقيم ℓ، فإن A'' هي صورة A بعد دورانٍ حول النقطة P.

b. $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

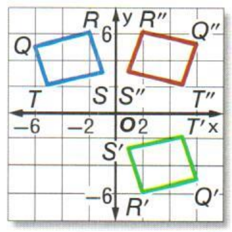
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

صِف التحويلات التي رُكّبت لتشكيل صورة كل شكلٍ مما يلي.

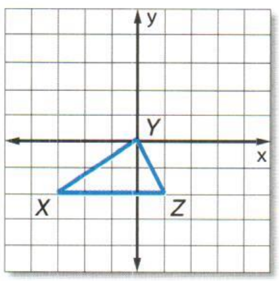
30.



31.

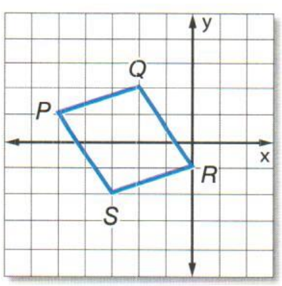


32. **تحليل الخطأ** تزيح أسماء وأماني المثلث $\triangle XYZ$ على طول $\langle 2, 2\rangle$ وتعكسانه بالنسبة للمستقيم $y = 2$. تقول أسماء إن التحويل هو انعكاسٌ انزلاقي. وتخالفها أماني قائلةً إن التحويل تركيبٌ من تحويلات متعددة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



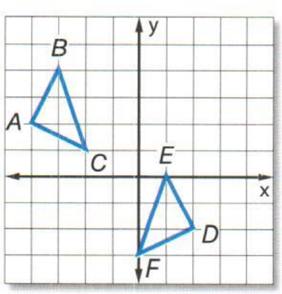
33. **الكتابة في الرياضيات** هل تبقى أي نقاطٍ ثابتةً بموجب الانعكاس الانزلاقي؟ وهل تبقى كذلك بموجب تركيباتٍ لتحويلات؟ اشرح.

34. **التحدي** إذا أزيح الشكل $PQRS$ على طول $\langle -2, 3\rangle$، وعُكس بالنسبة للمستقيم $y = -1$، وأدير بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيات الشكل $P'''Q'''R'''S'''$؟



35. **الفرضيات** إذا أردنا عكس صورةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$ والمحور الأفقي x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاس في الصورة النهائية؟ اشرح.

36. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب انعكاسًا انزلاقيًا أو تركيبًا لتحويلاتٍ يمكن استخدامها لتحويل المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$.

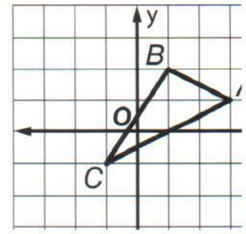


37. **التبرير** عند إجراء دورانين على صورةٍ وحيدة، فهل يؤثر ترتيب الدوران *أحيانًا* أو *دائمًا* أو لا يؤثر *إطلاقًا* في موضع الصورة النهائية؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل الانعكاس الانزلاقي وتركيب التحويلات.

تدريب على الاختبار المعياري

39. يزاح المثلث $\triangle ABC$ على طول المتجه $\langle -2, 3\rangle$ ثم يعكس بالنسبة للمحور الأفقي x. فما إحداثيا النقطة A' بعد التحويل؟



A $(1, -4)$

B $(1, 4)$

C $(-1, 4)$

D $(-1, -4)$

40. الإجابة القصيرة ما إحداثيا D'' إذا أزيحت القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ التي فيها الرأسان $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$ على طول $\langle -6, 2\rangle$ ثم عكست بالنسبة للمحور الرأسي y؟

41. جبريًا اكتب $\frac{18x^2 - 2}{3x^2 - 5x - 2}$ بأبسط صورة.

F $\frac{18}{3x + 1}$

G $\frac{2(3x + 1)}{x - 2}$

H $\frac{2(3x - 1)}{x - 2}$

J $2(3x - 1)$

42. SAT/ACT إذا كانت $f(x) = x^3 - x^2 - x$، فما هي قيمة $f(-3)$؟

A -39

B -33

C -21

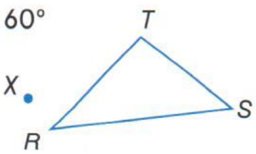
D -15

E -12

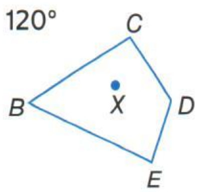
مراجعة شاملة

انسخ كل مضلع ونقطة X. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة X. (الدرس 14-3)

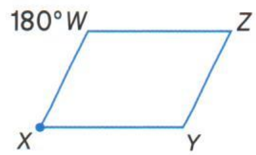
43. 60°



44. 120°



45. 180°



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتّجه المعطى. (الدرس 14-2)

46. المثلث $\triangle FGH$ ذو الرؤوس $F(1, -4)$ و $G(3, -1)$ و $H(7, -1)$؛ $\langle 2, 6\rangle$

47. الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(-2, 7)$ و $B(-1, 4)$، $C(2, 3)$ و $D(2, 7)$؛ $\langle -3, -5\rangle$

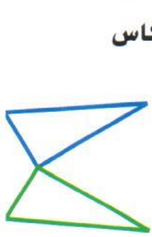
48. الشراع يساوي طول ضلع في شراعٍ مستطيل 7.5 أمتار. ويساوي قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع 40°. ويساوي قياس زاويةٍ أخرى يشكّلها الشراع 55°. فكم يساوي محيط الشراع مقربًا إلى أقرب عُشر؟

49. تنسيق الحدائق أطوال أضلاع حوض أزهارٍ مثلثي الشكل 1.35 مترًا و 1.8 مترًا و 2.25 مترًا. أوجد قياس أصغر زوايا المثلث.

مراجعة المهارات

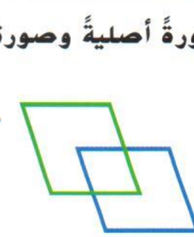
يعرض كل شكلٍ صورةً أصليةً وصورتها المنعكسة بالنسبة لخطٍ ما. انسخ كل شكلٍ وارسم خط الانعكاس

50.



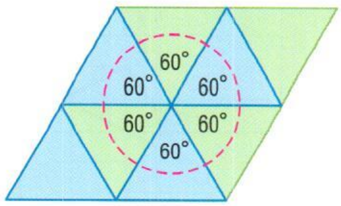
51.

52.



التوسع 14-4 مختبر الهندسة
الفسيفساء

الفسيفساء عبارة عن نمط شكلي أو أكثر يغطي مستوى معين بحيث لا تبقى مسافات فارغة أو متداخلة. مجموع الزوايا التي تحيط برأس الفسيفساء يساوي 360°.



تتشكل **الفسيفساء المنتظمة** بنوع واحد من المضلعات المنتظمة. سيشكل المضلع المنتظم فسيفساء إذا كان به قياس زاوية داخلية يمثل معامل بمقدار 360 درجة. وتتشكل **الفسيسفاء شبه المنتظمة** بمضلعين منتظمين أو أكثر.

النشاط 1 الفسيفساء المنتظمة

حدد ما إذا كان كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اشرح.

a. سداسي الأضلاع

لنفترض أن x يمثل قياس إحدى الزوايا الداخلية لسداسي الأضلاع.

$$x = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{قانون الزوايا الداخلية}$$
$$= \frac{180(6-2)}{6} \quad n = 6$$
$$= 120 \quad \text{بسّط.}$$

بما أن 120 هو معامل 360، سيشكل سداسي الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

b. عشاري الأضلاع

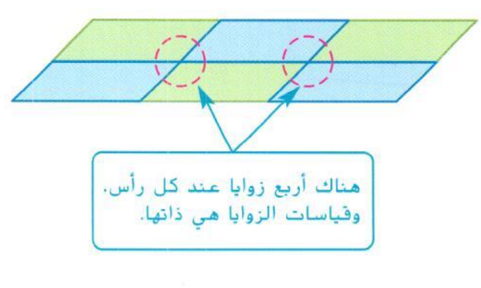
لنفترض أن x يمثل قياس أحدى الزوايا الداخلية في عشاري الأضلاع المنتظم.

$$x = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{قانون الزوايا الداخلية}$$
$$= \frac{180(10-2)}{10} \quad n = 10$$
$$= 144 \quad \text{بسّط.}$$

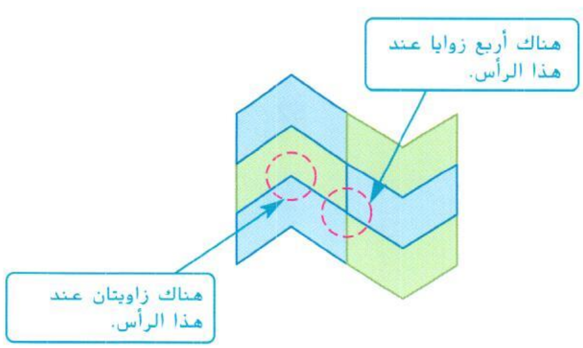
بما أن 144 ليس معامل 360، لن يشكل عشاري الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

تصبح الفسيفساء **موحدة** إذا كان بها تنظيم واحد للأشكال والزوايا في كل رأس.

موحدة



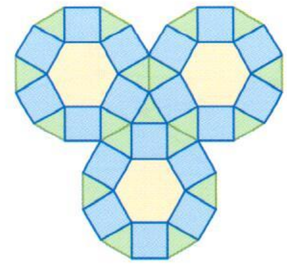
غير موحدة



النشاط 2 تصنيف الفسيفساء

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا، وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو فسيفساء منتظمة، أم *شبه منتظمة*، أم *ليست أي منهما*، وموحدة أو *ليست موحدة*.

.a

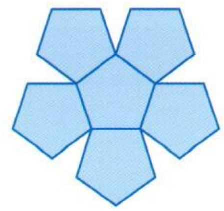


لا يوجد مسافات فارغة، ولا يوجد أشكال متداخلة. إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

تتكون الفسيفساء من أشكال منتظمة من سداسيات الأضلاع والمربعات والمثلثات متساوية الأضلاع. إذًا هي فسيفساء **شبه منتظمة**.

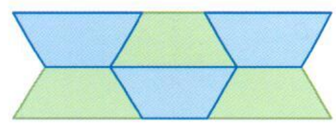
توجد أربع زوايا حول بعض الرؤوس وخمس زوايا حول البعض الآخر. إذًا الفسيفساء **ليست موحدة**.

.b



توجد مسافة غير مملوءة. إذًا النمط **ليس فسيفساء**.

.c



لا توجد مسافات فارغة، ولا توجد أشكال متداخلة. إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

تتكون الفسيفساء من أشباه منحرف، وهي مضلعات ليست منتظمة. إذًا الفسيفساء **ليست** منتظمة ولا شبه منتظمة.

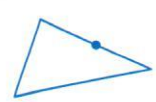
توجد أربع زوايا حول كل رأس من الرؤوس وقياسات الزوايا واحدة عند كل رأس. إذًا الفسيفساء **موحدة**.

يمكنك استخدام خصائص الفسيفساء لتصميم الفسيفساء وإنشائها.

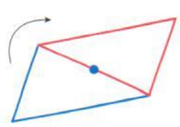
النشاط 3 رسم الفسيفساء

ارسم مثلثًا واستخدمه لإنشاء فسيفساء.

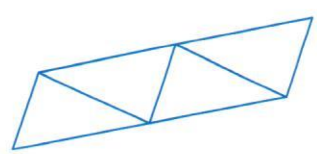
الخطوة 1 ارسم مثلثًا وأوجد نقطة منتصف أحد أضلاعه.



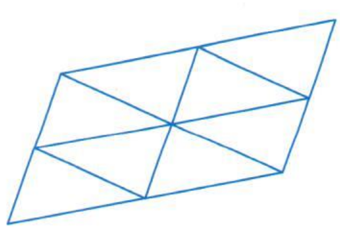
الخطوة 2 قم بدوران المثلث بمقدار $180°$ حول النقطة.



الخطوة 3 قم بإزاحة المثلثين لعمل صف.



الخطوة 4 قم بإزاحة الصف لعمل فسيفساء.



مختبر الهندسة
الفسيفساء تابع

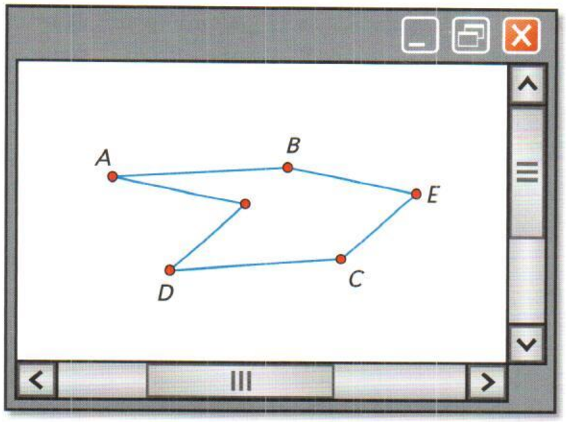
نشاط 4 الفسيفساء باستخدام التكنولوجيا

استخدم برنامج Geometer's Sketchpad لإنشاء فسيفساء.

الخطوة 1 أدخل ثلاث نقاط وأنشئ مستقيمًا يمر بنقطتين منها. ثم أنشئ مستقيمًا يوازي المستقيم الأول ويمر بالنقطة الثالثة باستخدام خيار **Parallel Line (مستقيم مواز)** من قائمة **Construct (إنشاء)**. أكمل متوازي الأضلاع وحدد النقاط A و B و C و D. قم بإخفاء المستقيمات.

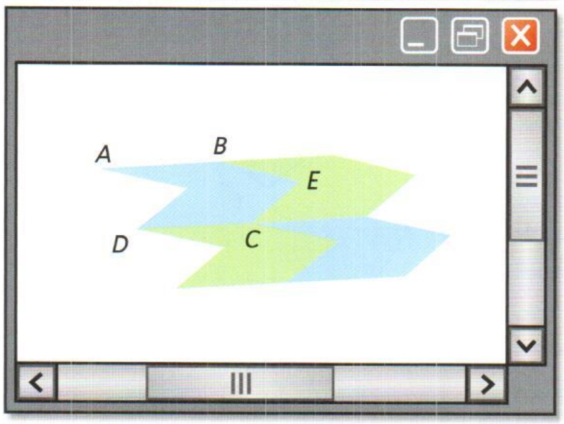
الخطوة 2 أدخل نقطة أخرى ولتكن E داخل متوازي الأضلاع. ارسم قطعًا مستقيمة بين A و B و B و E و E و C و C و D.

الخطوة 3 ظلّل النقطة B ثم النقطة A. من قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Mark Vector (تحديد المتجهات)**. واختر $\overline{BE}$ و $\overline{EC}$، والنقطة E. ومن قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Translate (إزاحة)**.



الخطوة 4 بدءًا من النقطة A، اختر جميع الرؤوس التي حول محيط المضلع. اختر **Hexagon Interior (داخل سداسي الأضلاع)** من قائمة **Construct (إنشاء)**.

الخطوة 5 اختر النقطة A ثم النقطة B وحدد المتجه كما فعلت في الخطوة 3. حدد داخل المضلع واختر **Translate (إزاحة)** من قائمة **Transform (تحويل)**. استمر في عمل الفسيفساء بتحديد المتجهات وإزاحة المضلع. يمكنك اختيار **Color (اللون)** من قائمة **Display** لإنشاء نمط ملون.



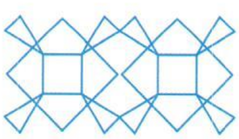
التمارين

حدد هل كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.

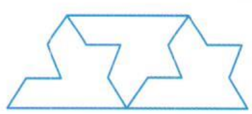
1. مثلث **2.** خماسي أضلاع **3.** سداسي عشري

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو فسيفساء *منتظمة*، أو *شبه منتظمة*، أو *ليس أي منهما* وفسيفساء *موحدة* أو *ليست موحدة*.

4.



5.



6.

ارسم فسيفساء باستخدام الشكل (الأشكال) التالية

7. ثماني أضلاع ومربع

8. سداسي أضلاع ومثلث

9. مثلث قائم الزاوية

10. شبه منحرف ومتوازي أضلاع

11. **الكتابة في الرياضيات** اذكر أمثلة على استخدام الفسيفساء في المعمار والترصيع بالفسيفساء والأعمال الفنية. واشرح طريقة استخدام الفسيفساء في كل مثال.

12. التخمين اذكر شكلاً تعتقد أنه سيشكل فسيفساء في مساحة ثلاثية الأبعاد. اشرح استنتاجك.

الدرس 14-5 التناظر

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• لقد رسمت انعكاس الأشكال ودورانها.	• 1 تحديد عمليات التناظر المحوري والدوراني في الأشكال ثنائية الأبعاد. 2 تحديد عمليات التناظر المحوري وفي المستوى الإحداثي في الأشكال ثلاثية الأبعاد.	• في مملكة الحيوانات، غالبًا ما يدل التناظر في جسم الحيوان على تعقيد جسم الحيوان. والحيوانات التي تظهر تناظرًا محوريًا، مثل الحشرات، عادة ما تكون أنماط حياتها أكثر تعقيدًا من تلك التي تظهر تناظرًا دورانيًا، مثل قنديل البحر.


المفردات الجديدة

التناظر symmetry
تناظر محوري line symmetry
خط/محور التناظر line of symmetry
التناظر الدوراني rotational symmetry
مركز التناظر center of symmetry
ترتيب التناظر order of symmetry
مقدار التناظر magnitude of symmetry
التناظر في المستوى الإحداثي plane symmetry
التناظر المحوري axis symmetry

ممارسات في الرياضيات

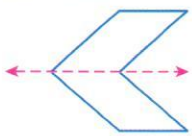
استخدام نماذج الرياضيات.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 التناظر في الأشكال ثنائية الأبعاد

يوجد في الشكل **تناظر** إذا كان هناك انعكاس ذو حركة ثابتة، أو إزاحة، أو دوران، أو انعكاس انزلاقي يرسم الشكل على نفسه. وأحد أنواع التناظر هو التناظر المحوري.

المفهوم الأساسي التناظر المحوري

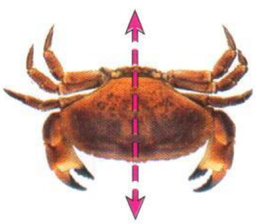
الشكل في المستوى له **تناظر محوري** (أو *تناظر انعكاس*) إذا كان من الممكن انعكاس الشكل على ذاته عن طريق انعكاس في أحد المستقيمات، ويسمى **محور التناظر** .



مثال 1 من الحياة اليومية تعريف التناظرالمحوري

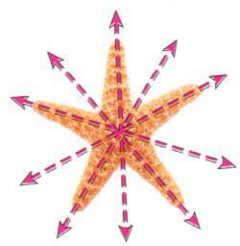
الشواطئ اذكر هل الجسم يبدو أن به تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

a.



نعم؛ السلطعون له مستقيم تناظر واحد.

b.



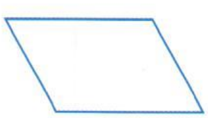
نعم؛ نجم البحر له خمسة مستقيمات تناظرية.

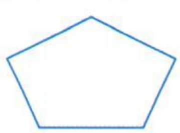
c.

لا؛ لا توجد مستقيمات في صدفة المحار يمكن أن تنعكس فيه بحيث تتماثل مع ذاتها.

تمرين موجّه

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

1A.


1B.


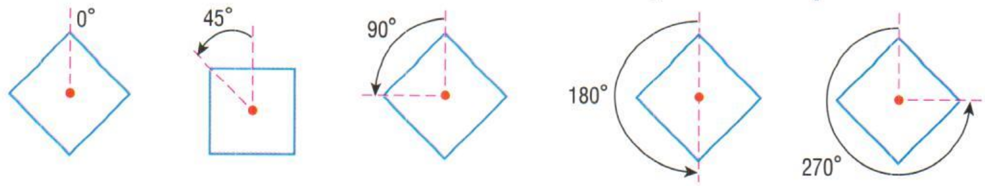
1C.


ويوجد نوع آخر من أنواع التناظر وهو التناظر الدوراني.

المفهوم الأساسي التناظر الدوراني

يكون للشكل في المستوى الإحداثي **تناظر دوراني** (أو *تناظر قطري*) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران ما بين $0°$ و$360°$ حول مركز الشكل. ويسمى **مركز التناظر** (أو *نقطة التناظر*).

الأمثلة الشكل التالي له تناظر دوراني لأن الدوان بمقدار $90°$ أو $270°$ يعكس الشكل على نفسه.



عدد المرات التي ينعكس فيها الشكل على نفسه عند الدوران من $0°$ إلى $360°$ يطلَق عليه **ترتيب التناظر**.
مقدار التناظر (أو زاوية التناظر) هي أصغر زاوية يمكن أن يدور بها الشكل بحيث ينعكس على ذاته. ويرتبط ترتيب الدوران ومقداره بالمعادلة التالية.

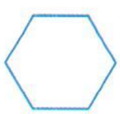
المقدار = $360°$ ÷ الترتيب

في الشكل السابق يوجد تناظر دوران بترتيب 4 ومقداره $90°$.

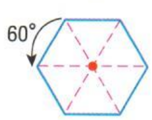
مثال 2 تعريف التناظر الدوراني

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

a.



نعم؛ الشكل السداسي المنتظم له 6 تناظرات دورانية ومقداره $360° \div 6$ أو $60°$. المركز هو تقاطع الأقطار.

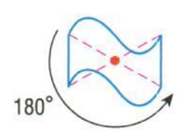


b.

لا؛ لا يوجد تناظر دوراني بين $0°$ و $360°$ ينعكس المثلث قائم الزاوية على نفسه.

c.

نعم؛ الشكل له 6 تناظرات دورانية ومقداره $360° \div 2$ أو $180°$. المركز هو تقاطع الأقطار.



تمرين موجّه

الزهور اذكر هل يبدو أن في الزهرة تناظر دوراني أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الزهرة وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

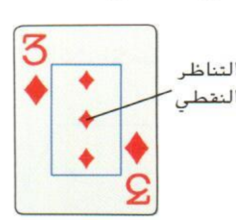
2A.

2B.

2C.

نصيحة دراسية

التناظر النقطي يوجد في الشكل *تناظر نقطي* إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران بزاوية $180°$. يوضح علم المملكة المتحدة التناظر النقطي. وذلك لأنه يوجد تماثل بين الجانب العلوي جهة اليمين والجانب المقابل له لأسفل.

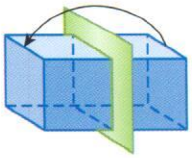


2 التناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد قد يوجد تناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد أيضًا.

المفهوم الأساسي التناظرات ثلاثية الأبعاد

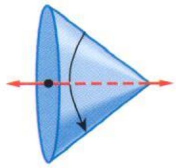
التناظر في المستوى الإحداثي

يحدث **التناظر في المستوى الإحداثي** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الانعكاس في المستوى الإحداثي.



التناظر المحوري

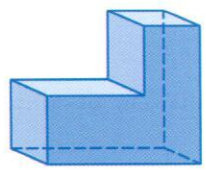
يحدث **التناظر المحوري** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين $0°$ و $360°$ في أحد المستقيمات.



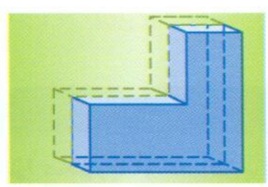
مثال 3 التناظر ثلاثي الأبعاد

اذكر هل الشكل به تناظر *في المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم *كلاهما* أم *ليس أيًا منهما*.

a. منشور على شكل حرف L

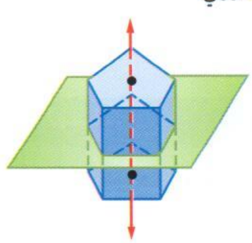


التناظر في المستوى الإحداثي الإحداثي



b. منشور خماسي منتظم

كلاهما، تناظر في المستوى الإحداثي وتناظر محوري



مراجعة المفردات

المنشور هو شكل متعدد الوجوه له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان يتصل ببعضه عن طريق أوجه متوازي الأضلاع

تمرين موجّه

الرياضات **اذكر هل كل أداة من الأدوات الرياضية بها تناظر *في المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم *كليهما* أم *ليس أيًا منهما* (مع تجاهل الخياطة أو العلامات في الأداة).**

3A.

3B.

3C.

3D.

الربط بالحياة اليومية

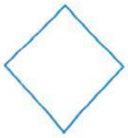
تم تصميم كرة القدم بطريقة ديناميكية هوائية حتى تلف بعد ركلها، بحيث يكون شكلها كروي متطاول. وهذا يعني أن أحد محاور التناظر أطول من المحاور الأخرى.

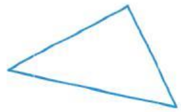
المصدر: الدليل الإرشادي الكامل إلى كرة القدم

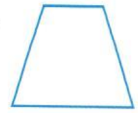
التحقق من فهمك

مثال 1

اذكر هل يبدو أن الشكل به تناظر خطي أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

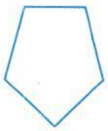
1. 

2. 

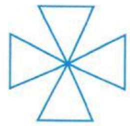
3. 

مثال 2

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

4. 

5. 

6. 

المثالان 1 و 2

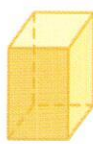
7. **مبنى البرلمان الأمريكي** تعدّ القبة التي تم اكتمال بنائها في عام 1863، أحدث الإضافات لمبنى البرلمان الأمريكي في الولايات المتحدة. وهي مدعومة بدعامات حديدية عددها 36 وبها 108 نافذة مقسمة بالتساوي على ثلاثة مستويات.

a. باستثناء قمة القبة، كم عدد مستقيمات التناظر الأفقية والرأسية التي يبدو أنها موجودة في القبة؟

b. هل القبة لها تناظر دوراني؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره.

مثال 3

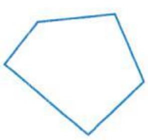
8. اذكر هل الشكل به *تناظر* في المستوى الإحداثي أم *تناظر محوري* أم *كلا التناظرين* أم *لا شيء منهما*.

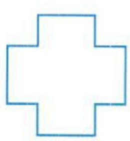


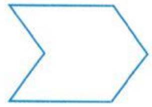
التدريب وحل المسائل

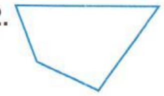
مثال 1

الانتظام ذكر هل يبدو أن الشكل يتضمن تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. إذا كان الأمر كذلك، فانسخ الشكل، وارسم كل مستقيمات التناظر، واذكر عددها.

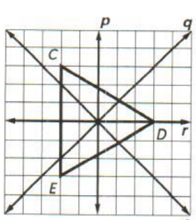
9. 

10. 

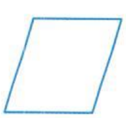
11. 

12. 

13. تم رسم المثلث CDE في المستوى الإحداثي. أي مستقيم هو مستقيم التناظر؟



اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

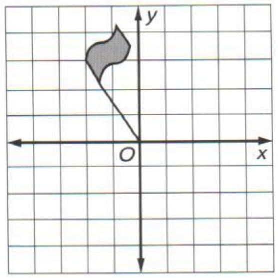
14. 

15. 

16. 

17. 

18. دوران علَم بمقدار $180°$ في المستوى الإحداثي. أي عبارة صحيحة؟



A الشكل متناظر حول النقطة $(0, 0)$.

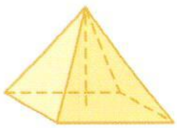
B الشكل متناظر حول المحور الرأسي y.

C الشكل متناظر حول المحور الأفقي x.

D الشكل متناظر حول النقطة $(-3, 2)$.

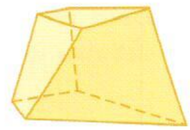
اذكر هل الشكل به تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كلاهما أم ليس أيًا منهما.

19.

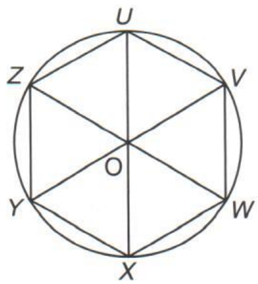


20.

21.

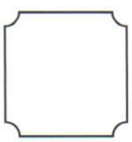


22. سداسي الأضلاع $UVWXYZ$ محاط بدائرة لتصميم بلاطة. أي نقطة توضح موضع النقطة U بعد الدوران حول نقطة المركز O بمقدار $120°$ باتجاه عقارب الساعة ؟

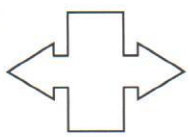


23. فنان جرافيك يريد تصميم شعار باستخدام مستقيمات التناظر. أي شعار لا يوجد به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد؟

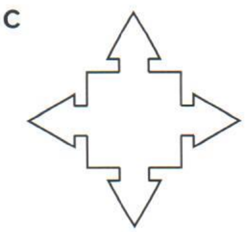
A



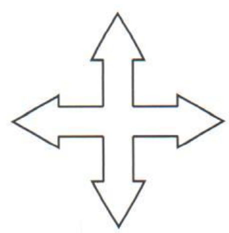
B



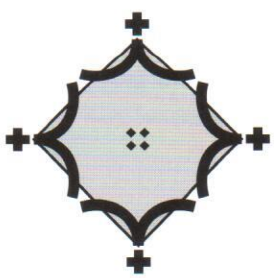
C



D



24. تنظر أمل إلى تصميمات سترة. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



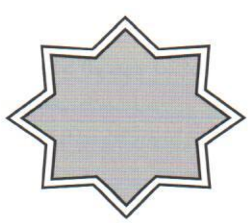
A التصميم به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد.

B التصميم به 3 مستقيمات تناظر بالتحديد.

C التصميم به مستقيمان تناظر بالتحديد.

D التصميم به مستقيم تناظر واحد بالتحديد.

25. يصمم أحمد شعارًا لناديه. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



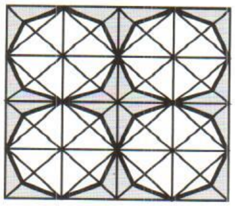
A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

26. ابتكر فنان فسيفساء برسم مستقيمات التناظر في مربع ثم استخدمها في رسم التصميم. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأحد الأشكال ثمانية الأضلاع المحدبة في التصميم؟



هندسة الإحداثيات **حدد ما إذا كان الشكل الموضح بالرؤوس له تناظر محوري و/أو دوراني.**

27 A(−4, 0) B(0, 4) C(4, 0) D(0 −4)

28. R(−3, 3) S(−3 −3) T(3, 3)

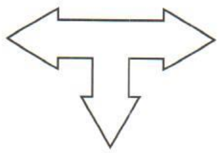
الجبر **مثّل الدالة بيانيًا وحدد ما إذا كان التمثيل البياني له تناظر محوري و/أو دوراني أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره واكتب معادلات لأي مستقيمات تناظر.**

29. $y = x$

30. $y = x^2 + 1$

31. $y = -x^3$

32. يصمم إسماعيل شعارًا لناديه. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

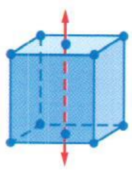
B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

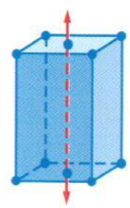
علم البلوريات **حدد هل البلورات التالية لها تناظر *في المستوى الإحداثي* و/أو تناظر محوري أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر مقدار التناظر.**

33.



34.

35.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **النقد** يقول أسامة أن الشكل A له تناظر محوري فقط، ويقول أيمن أن الشكل A له تناظر دوراني فقط. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

الشكل A

37. **التحدي** شكل رباعي له بالتحديد مستقيما تناظر، $y = x - 1$ و $y = -x + 2$. أوجد الرؤوس المحتملة للشكل. مثل الشكل ومستقيمات التناظر بيانيًا.

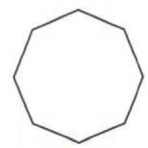
38. **التبرير** شكل متعدد الوجوه له تناظر محوري بترتيب 3، ولكن ليس له تناظر في المستوى. ما هو الشكل؟ اشرح. انظر الهامش.

تدريب على الاختبار المعياري

39. كم عدد مستقيمات التناظر التي يمكن رسمها على صورة العلم الكندي التالي؟

A 0
B 1
C 2
D 4

40. الإجابة الشبكية ما ترتيب التناظر للشكل التالي؟



41. الجبر شركة حواسيب تشحن الحواسيب في صناديق خشبية يزن الواحد منها 45 كيلو جرامًا عندما تكون فارغة. فإذا كان كل حاسوب لا يزن أكثر من 13 كيلو جرامًا، أي متباينة تعطي أفضل وصف لإجمالي الوزن بالكيلو جرامات w لصندوق الحاسوب الذي يحتوي على عدد c من الحواسيب؟

F $c \leq 13 + 45w$
G $c \geq 13 + 45w$
H $w \leq 13c + 45$
J $w \geq 13c + 45$

42. SAT/ACT ما هو ميل المستقيم المحدد بالمعادلة الخطية $5x - 2y = 10$؟

A -5
B $-\frac{5}{2}$
C $-\frac{2}{5}$
D $\frac{2}{5}$
E $\frac{5}{2}$

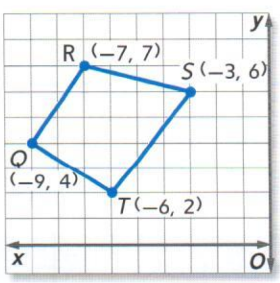
مراجعة شاملة

المثلث JKL له الرؤوس $J(1, 5)$ و $K(3, 1)$، و $L(5, 7)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد التحويل المشار إليه. (الدرس 4-14)

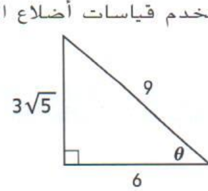
43. الإزاحة: بطول $\langle -7, -1\rangle$
الانعكاس: في المحور x

44. الإزاحة: بطول $\langle 1, 2\rangle$
الانعكاس: في المحور y

45. الشكل الرباعي $QRST$ موضح إلى اليسار. ما هي صورة النقطة R بعد الدوران حول نقطة الأصل بمقدار $180°$ عكس اتجاه عقارب الساعة؟ (الدرس 3-14)



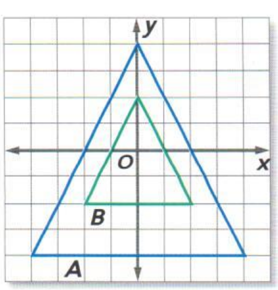
46. الإنشاءات نافذة أبعادها موضحة فيما يلي. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتوضيح أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



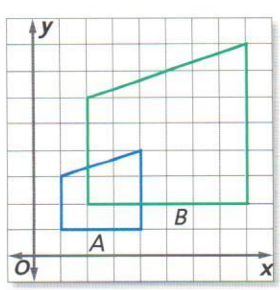
مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل A إلى الشكل B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثمّ أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

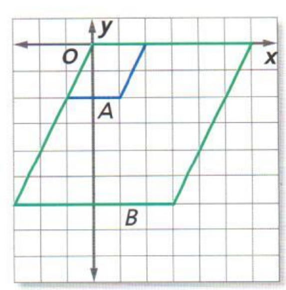
47.



48.



49.



التوسع 14-5

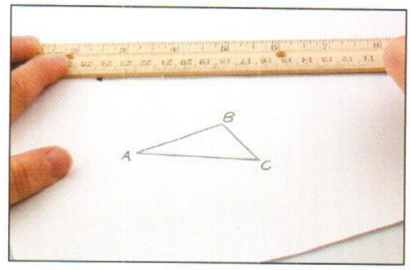
مختبر الهندسة
استكشاف الإنشاءات باستخدام جهاز عاكس

الجهاز العاكس هو عبارة عن أداة مصنوعة من البلاستيك شبه الشفاف تعكس الأجسام. وأفضل درجة انعكاس لها تكون عندما توضع على سطح مسطح في غرفة جيدة الإضاءة. ويمكنك استخدام الأداة العاكسة لتحويل الأشكال الهندسية.

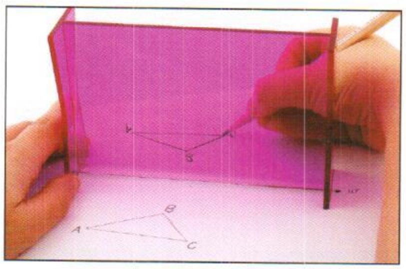
النشاط 1 انعكاس مثلث

استخدم الجهاز العاكس لعكس المثلث $\triangle ABC$ في w. ضع اسمًا للانعكاس $\triangle A'B'C'$.

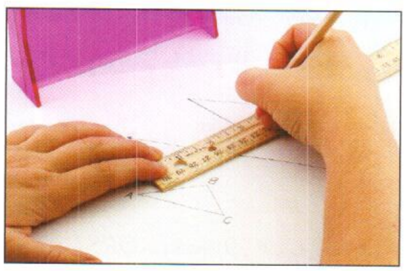
الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$ وخط الانعكاس w.



الخطوة 2 باستخدام الجهاز العاكس على المستقيم w، ارسم النقاط لرؤوس الانعكاس.



الخطوة 3 استخدم المسطرة لتوصيل النقاط لتكوين المثلث $\triangle A'B'C'$.

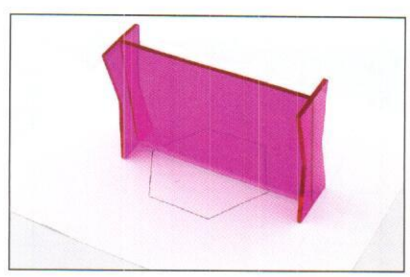


استخدمنا الفرجار والمسطرة المستقيمة والخيط والمطويات الورقية لعمل الإنشاءات الهندسية. ويمكنك أيضًا استخدام الأداة العاكسة في تلك الإنشاءات.

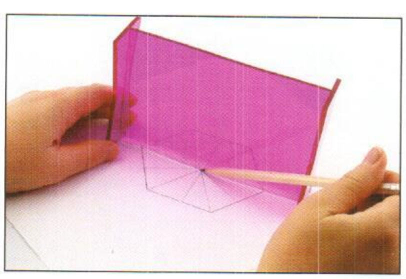
النشاط 2 إنشاء محاور التناظر

استخدم الأداة العاكسة لإنشاء محاور التناظر لسداسي الأضلاع المنتظم.

الخطوة 1 ارسم شكل سداسي منتظم. ضع الأداة العاكسة على الشكل وحركها حتى يتطابق أحد نصفي الشكل مع انعكاس النصف الآخر. ثم ارسم محور التناظر.



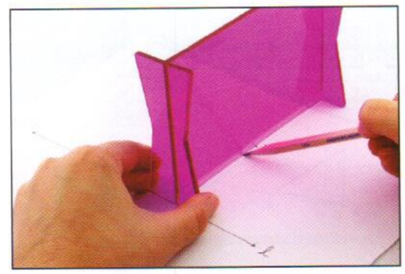
الخطوة 2 كرر الخطوة رقم 1 حتى تجد جميع محاور التناظر.



النشاط 3 إنشاء مستقيم موازٍ

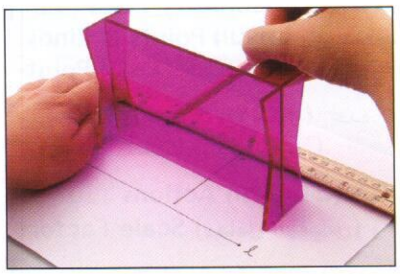
استخدم الجهاز العاكس لعكس المستقيم ℓ على المستقيم m الموازي والذي يمر بالنقطة P.

الخطوة 1



ارسم المستقيم ℓ والنقطة P. ضع الجانب القصير للجهاز العاكس على المستقيم ℓ والجانب الطويل على النقطة P. ارسم مستقيمًا بحيث يكون متعامدًا على المستقيم ℓ من خلال النقطة P.

الخطوة 2



ضع الأداة العاكسة بحيث يتطابق المستقيم العمودي مع ذاته ويمر انعكاس المستقيم ℓ بالنقطة P. استخدم المسطرة لرسم المستقيم الموازي m الذي يمر بالنقطة P.

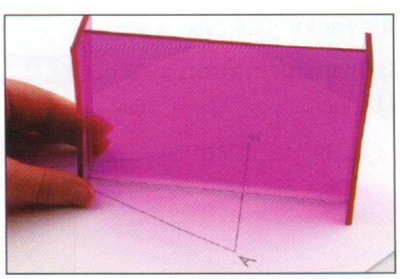
في درس الاستكشاف 1-5، أنشأنا منصفات عمودية بالمطويات الورقية. ويمكنك أيضًا استخدام الأداة العاكسة لإنشاء منصّفات عمودية للمثلث.

النشاط 4 إنشاء المنصفات العمودية

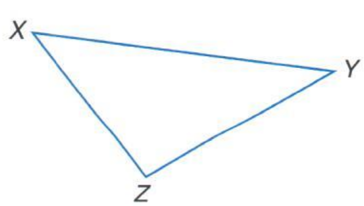
استخدم الأداة العاكسة لإيجاد مركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$.

الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$. ضع الجهاز العاكس بين النقطة A والنقطة B واضبطها إلى أن تتطابق النقطة A مع النقطة B. ارسم محور التناظر.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 مع الضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$. ثم ضع نقطة عند تعامد المنصفات العمودية الثلاثة. وهذا هو مركز الدائرة المحيطة للمثلث.



تمثيل النماذج والتحليل



1. كيف تعرف أن الخطوات في النشاط 4 تعطي المنصّف العمودي الفعلي ومركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$؟

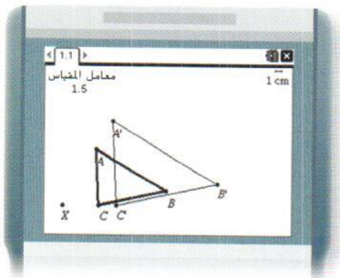
2. أنشئ منصّف الزاوية وأوجد مركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle XYZ$. اذكر كيف استخدمت الأداة العاكسة في الرسم.

استكشاف 14-6 مختبر تقنية التمثيل البياني عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)

يمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لاستكشاف خواص عمليات تغيير الأبعاد.أو التمدد

النشاط 1 تغيير أبعاد المثلث

تغيير أبعاد المثلث بمعامل مقياس 1.5.



الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة. ثم من قائمة **Points & Lines (النقاط والمستقيمات)**، استخدم أداة **Point (نقطة)** لإضافة نقطة وسمّها النقطة X.

الخطوة 2 من قائمة **Shapes (الأشكال)**، حدد **Triangle (مثلث)** وحدد ثلاث نقاط. وقم بتسمية النقاط A و B و C.

الخطوة 3 من قائمة **Actions (الإجراءات)**، استخدم أداة **Text** لإضافة النص **Scale Factor (معامل المقياس)** و 1.5 بشكل منفصل في الصفحة.

الخطوة 4 من قائمة **Transformation (تحويل)**، حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X، و $\triangle ABC$، والنص 1.5.

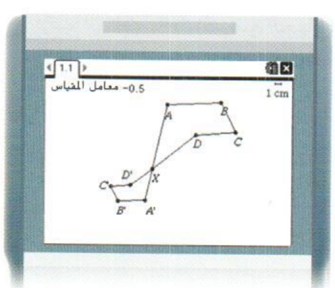
الخطوة 5 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C'.

تحليل النتائج

1. باستخدام أداة **Slope (الميل)** في قائمة **Measurement (القياس)**، اذكر تأثير تغيير الأبعاد على $\overline{AB}$. وبذلك، كيف ترتبط المستقيمات التي تمر بالقطع المستقيمة $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ ببعضها البعض؟
2. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CA}$؟
3. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CB}$؟

النشاط 2 تغيير أبعاد المضلع

تغيير أبعاد المضلع بمعامل مقياس 0.5−.

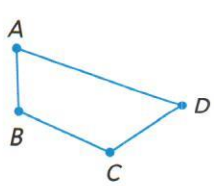


الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة وارسم المضلع $ABCDX$ كما هو موضح. أضف النص *Scale Factor (معامل المقياس)* و 0.5− في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة **Transformation (تحويل)**، حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X، والمضلع $ABCDX$، والنص 0.5−.

الخطوة 3 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C' و D'.

تمثيل النماذج والتحليل

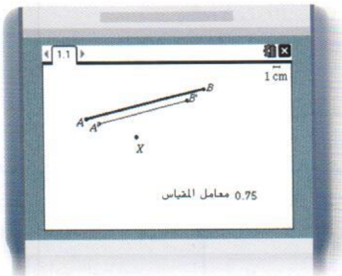


4. حلّل تأثير تغيير الأبعاد في النشاط 2 على الأضلاع التي تضم مركز تغيير الأبعاد.
5. حلّل تأثير تغيير أبعاد شبه المنحرف $ABCD$ الموضح بمعامل المقياس 0.75 ومركز تغيير الأبعاد عند النقطة A.
6. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على المستقيمات التي تمر بمركز تغيير الأبعاد والمستقيمات التي لا تمر به.

النشاط 3 تغيير أبعاد القطعة المستقيمة

غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ بمعامل المقياس المشار إليه.

a. معامل المقياس: 0.75



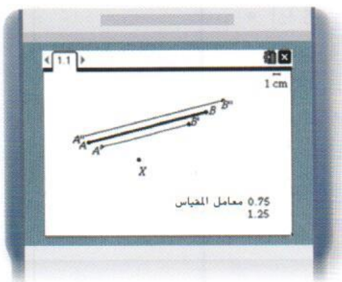
الخطوة 1 في صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة، ارسم القطعة المستقيمة باستخدام قائمة **Points & Lines (النقاط والمستقيمات)**. سمي النقطتين الطرفيتين A و B. ثم أضف النقطة X وقم بتسميتها.

الخطوة 2 أضف النص *Scale Factor* (*معامل المقياس*) و 0.75 إلى الصفحة.

الخطوة 3 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 0.75.

الخطوة 4 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A'B'}$.

b. معامل المقياس: 1.25



الخطوة 1 أضف النص *1.25* في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة **Transformation**. حدد **Dilation**. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 1.25.

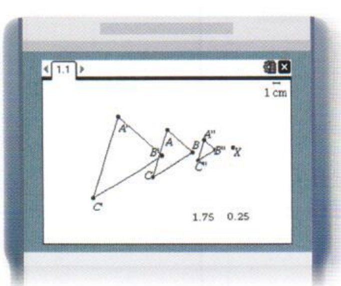
الخطوة 3 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A''B''}$.

تمثيل النماذج والتحليل

7. باستخدام أداة **Length (الطول)** من قائمة **Measurement (القياس)**. أوجد قياسات $\overline{AB}$، و $\overline{A'B'}$، و $\overline{A''B''}$.

8. ما نسبة الضلع $A'B'$ إلى الضلع AB؟ وما نسبة الضلع $A''B''$ إلى AB؟

9. ما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 0.75 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ وما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 1.25 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟



10. غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في النشاط 3 بمعامل المقياس -0.75 و -1.25. اذكر التأثير على طول كل قطعة مستقيمة تم تغيير أبعادها.

11. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على طول القطعة المستقيمة.

12. اذكر تغيير الأبعاد من $\overline{AB}$ إلى $\overline{A'B'}$ ومن $\overline{A'B'}$ إلى $\overline{A''B''}$ في المثلثات الموضحة.

الدرس 14-6 عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)/ التمدّد

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
تم تعريف تغيير الأبعاد(التمدد) والتحقق منها في صورة تحويلات التشابه.	1 رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد). 2 رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي.	لا يزال بعض المصورين الفوتوغرافيين يفضلون الكاميرات التقليدية والأفلام لإنشاء صور سلبية. ومن تلك الصور السلبية، يستطيع المصورون الفوتوغرافيون عمل صور ذات أبعاد معينة.

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

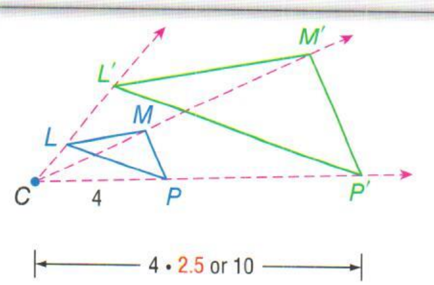
1 رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)

تغيير الأبعاد(التمدد) أو *المقياس* عبارة عن تحوّل تشابه يُكبّر أو يصغّر من الشكل نسبيًا فيما يتعلق بنقطة *المركز* ومعامل *المقياس*.

المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد(التمدد) (التمدّد)

عملية تغيير الأبعاد(التمدد) ذات المركز C ومعامل المقياس الموجب k، $k \neq 1$، عبارة عن دالة تحدد نسبة النقطة P في الشكل إلى الصورة بحيث

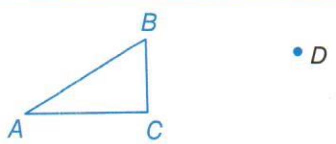
- إذا كانت النقطة P والنقطة C متطابقتين، فإن الصورة والصورة الأصلية يتكونان من النقطة ذاتها، أو
- إذا لم تكن النقطة P هي مركز عملية تغيير الأبعاد(التمدد)، فإن النقطة P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ أو $CP' = k(CP)$.



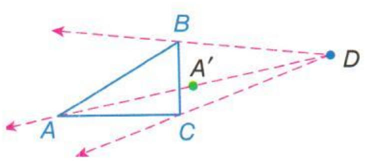
$\triangle L'M'P'$ عبارة عن صورة المثلث $\triangle LMP$ بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها C ومعامل المقياس **2.5**.

مثال 1 رسم عملية تغيير الأبعاد(التمدد)

انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة D. ثم استخدم مسطرة لرسم صورة المثلث $\triangle ABC$ بناء على عملية تغير أبعاد مركزها D ومعامل القياس $\frac{1}{2}$.

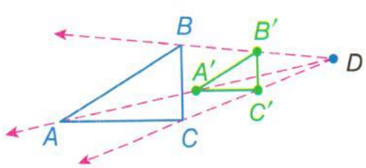


الخطوة 1 ارسم أشعة من النقطة D بحيث تمر بكل رأس.



الخطوة 2 حدد موقع النقطة A' على $\overrightarrow{DA}$ بحيث $DA' = \frac{1}{2}DA$.

الخطوة 3 حدد موضع النقطة B' على $\overrightarrow{DB}$ والنقطة C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة ذاتها. ثم ارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.



تمرين موجّه

انسخ الشكل وحدد النقطة J. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها J ومعامل القياس المحدّد هو k المُشار إليه.

1A. $k = \frac{3}{2}$

1B. $k = 0.75$

تعلّمت أيضًا أنه إذا كانت $k > 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تكبير. وإذا كان $0 < k < 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تصغير. بما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) في المثال 1 عبارة عن تصغير.

تغيير الأبعاد(التمدد) باستخدام معامل المقياس 1 يُطلق عليه *تغيير الأبعاد(التمدد) متساوي القياس*. فهو ينتج صورة تتطابق مع الصورة الأصلية. وبالتالي يكون الشكلان متطابقين.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد معامل القياس لعملية تغيير الأبعاد(التمدد)

التصوير الفوتوغرافي لإنشاء صور مختلفة الأحجام، يمكنك تعديل المسافة بين صورة الفيلم السالبة والصورة المكبَّرة باستخدام أداة التكبير الفوتوغرافي. افترض أن المسافة بين مصدر الضوء C والصورة السالبة تساوي 45 ميليمترًا (CP). فإلى أي مسافة PP' ينبغي ضبط أداة التكبير لإنشاء صورة بعرض 22.75 سنتيمترًا ($X'Y'$) من الصورة السلبية التي عرضها 35 ميليمترًا (XY)؟

الفهم تتضمن هذه المسألة عملية تغيير أبعاد. ومركز تغيير الأبعاد(التمدد) هو النقطة C، $XY = 35\ mm$، $X'Y' = 22.75\ cm$ أو 227.5 mm، و $CP = 45\ mm$. والمطلوب إيجاد PP'.

الخطة أوجد معامل القياس لتغيير الأبعاد(التمدد) من الصورة الأصلية XY إلى الصورة $X'Y'$. استخدم معامل المقياس لإيجاد CP' ثم استخدم CP و CP' لإيجاد PP'.

الحل معامل المقياس k للتكبير هو نسبة الطول في الصورة إلى الطول الموجود في الصورة الأصلية.

$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الصورة الأصلية}}$ معامل قياس الصورة

$= \frac{X'Y'}{XY}$ الصورة $= X'Y'$، الصورة الأصلية $= XY$

$= \frac{227.5}{35}$ أو 6.5 اقسم.

استخدم معامل القياس 6.5 لإيجاد CP'.

$CP' = k(CP)$ (تعريف تغيير الأبعاد(التمدد)

$= 6.5(45)$ $k = 6.5$ و $CP = 45$

$= 292.5$ اضرب.

استخدم CP' و CP لإيجاد PP'.

$CP + PP' = CP'$ إضافة قطعة مستقيمة

$45 + PP' = 292.5$ $CP = 45$ و $CP' = 292.5$

$PP' = 247.5$ اطرح 45 من كل طرف.

إذًا ينبغي ضبط أداة التكبير بحيث تكون المسافة من الصورة السلبية إلى الصورة المكبرة (PP') 247.5 ميليمترًا أو 24.75 سنتيمترًا.

تحقق بما أن تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تكبير، فإن معامل القياس ينبغي أن يكون أكبر من 1. وبما أن $1 < 6.5$، فإن معامل القياس الموجود منطقي. ✓

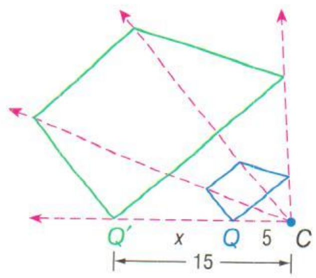
نصيحة في حل المسائل

المثابرة

لتجنب الوقوع في أخطاء السهو في حساباتك، قدّر إجابة المسألة قبل حلها. في المثال 2، يمكنك تقدير معامل مقياس تغيير الأبعاد(التمدد) ليصبح حوالي $\frac{240}{40}$ أو 6. ثم CP' ستكون الإجابة حوالي $50 \cdot 6$ أو 300 و PP' حوالي $300 - 50$ أو 250 ميليمترًا. وهذا يساوي 25 سنتيمترًا. والقياس 24.75 سنتيمترًا قريب من هذا التقدير. إذًا فالإجابة منطقية.

تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد(التمدد) من الشكل Q إلى Q' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل القياس و x.



2 عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي يمكن استخدام القواعد التالية لإيجاد صورة شكل بعد تمركز عملية تغيير الأبعاد(التمدد) على نقطة الأصل.

نصيحة دراسية

معاملات القياس السالبة

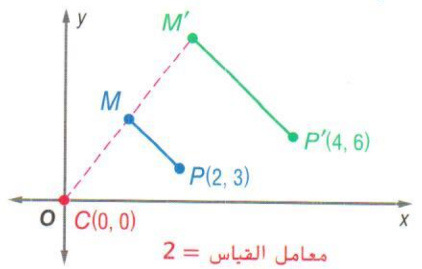
قد يكون لتغيير الأبعاد(التمدد) معاملات قياس سالبة. وستستكشف هذا النوع من تغيير الأبعاد(التمدد) في التدريب 36.

المفهوم الأساسي عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

الشرح لإيجاد إحداثيات صورة بعد تغيير الأبعاد(التمدد) المتمركز في نقطة الأصل، اضرب الإحداثيين x و y لكل نقطة من الصورة الأصلية في معامل القياس لتغيير الأبعاد(التمدد) k.

الرموز $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال



مثال 3 تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

الشكل الرباعي $JKLM$ له الرؤوس $J(-2, 4)$، و $K(-2, -2)$، و $L(-4, -2)$، و $M(-4, 2)$. مثّل صورة الشكل $JKLM$ بيانيًا بعد تغيير الأبعاد(التمدد) المتمركزة في نقطة الأصل باستخدام معامل القياس 2.5.

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل القياس 2.5.

$(x, y) \rightarrow (2.5x, 2.5y)$

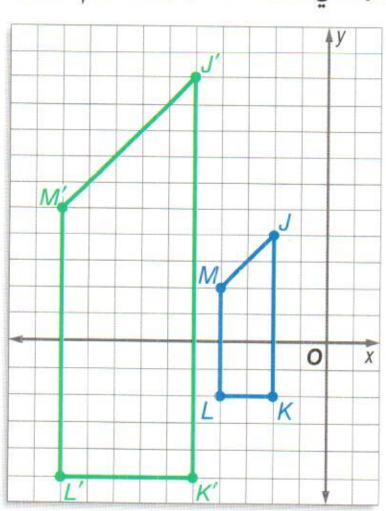
$J(-2, 4) \rightarrow J'(-5, 10)$

$K(-2, -2) \rightarrow K'(-5, -5)$

$L(-4, -2) \rightarrow L'(-10, -5)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(-10, 5)$

مثّل الشكل $JKLM$ وصورته بيانيًا $J'K'L'M'$.



تمرين موجّه

أوجد صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير للأبعاد مركزه نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.

3A. $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3); k = \frac{1}{3}$

3B. $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1); k = 2$

التحقق من فهمك

مثال 1

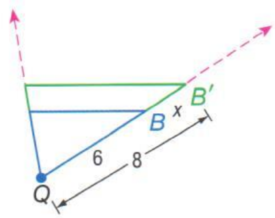
انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها النقطة M ومعامل القياس المحدّد k.

1. $k = \frac{1}{4}$

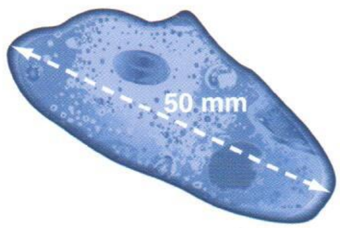
2. $k = 2$

مثال 2

3 حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد(التمدد) من الشكل B إلى B' عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم أوجد معامل القياس وقيمة x.



4. **الأحياء** تحت المجهر، كائن دقيق أحادي الخلية بطول 200 ميكرون يبدوا بطول 50 ميليمترًا. فإذا كان 1 ميليمتر = 1000 ميكرون، فما هو ضبط التكبير (معامل القياس) المستخدم؟ اشرح إجابتك.



مثال 3

مثّل صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير الأبعاد(التمدد) التي مركزها نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.

5. $W(0, 0)$, $X(6, 6)$, $Y(6, 0)$; $k = 1.5$

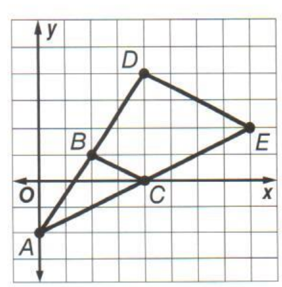
6. $Q(-4, 4)$, $R(-4, -4)$, $S(4, -4)$, $T(4, 4)$; $k = \frac{1}{2}$

7. $A(-1, 4)$, $B(2, 4)$, $C(3, 2)$, $D(-2, 2)$; $k = 2$

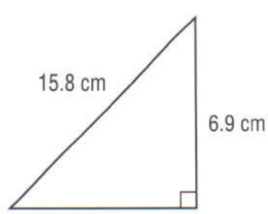
8. $J(-2, 0)$, $K(2, 4)$, $L(8, 0)$, $M(2, -4)$; $k = \frac{3}{4}$

التدريب وحل المسائل

9. المثلث $\triangle ADE$ عبارة عن تغيير أبعاد للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى. اكتب عبارة يمكن استخدامها للتأكد أن $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



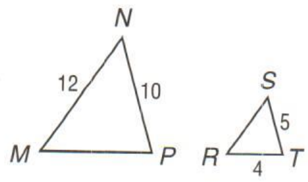
10. فكّر في الرسم التخطيطي التالي.



تم تغيير أبعاد المثلث بحيث يصبح محيط المثلث الجديد 82.4 سنتيمترًا. فما هو طول الضلع المفقود في المثلث الجديد؟

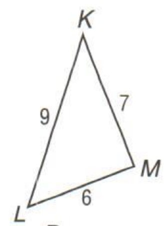
11. في الشكل التالي، المثلث MNP مشابه للمثلث RST.

أي معامل قياس استُخدم لتحويل المثلث $\triangle MNP$ إلى $\triangle RST$؟

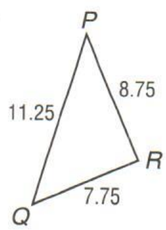


12. المثلث $\triangle KLM$ موضح أدناه.

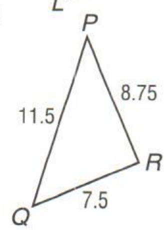
أي مما يلي يوضح المثلث $\triangle KLM$ الذي تغيرت أبعاده باستخدام معامل المقياس $\frac{5}{4}$ لإنشاء المثلث المشابه $\triangle PQR$؟



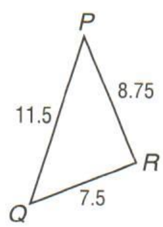
A



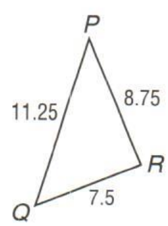
C



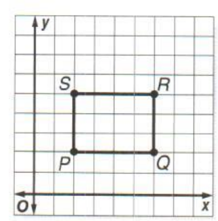
B



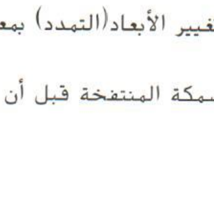
D



13. **المستطيل** $PQRS$ موضح فيما يلي. إذا تغيرت أبعاد المستطيل بمعامل المقياس 2، ومع جعل نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)، أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة R'.



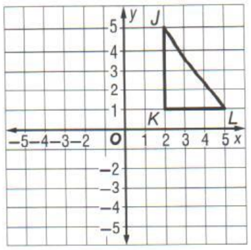
14. $\triangle RST$ موضح فيما يلي. فإذا تغيرت أبعاده باستخدام معامل القياس 2 وكانت نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)، فما هي إحداثيات النقطة S'؟



15. يحرّك بدر شخصية كرتونية في المستوى الإحداثي، باستخدام تغيير الأبعاد(التمدد) بمعامل مقياس 2. فإذا كانت $A(1, 3)$ و $B(3, 4)$، و $C(2, -3)$ عبارة عن ثلاث نقاط على صورة السمكة المنتفخة قبل أن ينفخها، فما هي إحداثيات النقاط ذات الصلة D، و E، و F على صورة السمكة المنتفخة؟

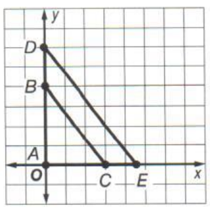
16. أي نوع من التحويل يحتفظ بالاتجاهات ولا يحتفظ بالحجم؟

17. المثلث قائم الزاوية JKL تغيرت أبعاده ليكوّن صورة المثلث $\triangle J'K'L'$. فإذا كان محيط المثلث $\triangle J'K'L'$ يساوي 36 سنتيمترًا، فما هي مساحة الصورة؟



18. المثلث ABC الذي رؤوسه $A(0, 0)$، و $B(0, 4)$، و $C(3, 0)$ عبارة عن مثلث تغيّرت أبعاده من المثلث ADE.

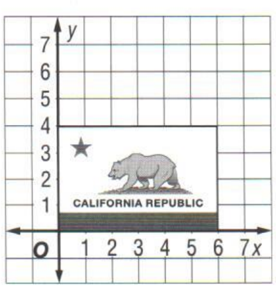
فما هو طول $\overline{DE}$ إذا كان للنقطة D الإحداثيات $(0, 5)$؟



19. المربع $JKLM$ له الرؤوس $J(1, 0)$، و $K(2, 1)$، و $L(3, 0)$، و $M(2, -1)$. فإذا كان الشكل تغيرت أبعاده وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس $\sqrt{2}$. فما هو طول كل ضلع في المربع الذي تغيرت أبعاده؟

20. شبه المنحرف متساوي الساقين $LMNO$ له الرؤوس $L(-4, -3)$، و $M(-4, 0)$، و $N(-2, 1)$، و $O(-2, -4)$. فإذا تغيرت أبعاد الشكل وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس 1.5. فما هو طول $\overline{L'M'}$ في شبه المنحرف متساوي الساقين المنسوخ؟

21. علَم ولاية كاليفورنيا موضح على الشبكة أدناه. افترض أن العلم تم تكبيره بحيث أصبحت رؤوس العلم الجديد $(0, 0)$، و $(0, 6)$، و $(9, 6)$، و $(9, 0)$. فما هي نسبة محيط العلم الأصلي إلى العلم الذي تم تكبيره؟



22. بعد تغيير الأبعاد(التمدد)، المثلث $\triangle XYZ$ عبارة عن صورة للمثلث $\triangle ABC$ و $XY = \frac{5}{8}AB$. فما هو معامل القياس؟

23. أي مما يلي يمثل إحداثيات صورة $A(4, -12)$ بعد عملية تغيير الأبعاد(التمدد) يقع مركزها في نقطة الأصل ومعامل القياس يساوي 0.25؟

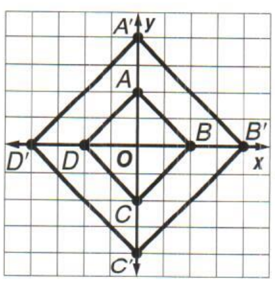
24. باستخدام أي معامل قياس r ستكون النقطة $Q(-20, 8)$ صورة من $P(-5, 2)$؟

25. بعد تغيير الأبعاد(التمدد)، صورة المربع $ABCD$ هي المربع $AXYZ$. أي نقطة مما يلي هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)؟

26. النقطتان الطرفيتان في $\overline{AB}$ هما $A(3, -7)$ و $B(7, -12)$. صورة $\overline{AB}$ بعد عملية تغيير الأبعاد(التمدد) التي يقع مركزها في نقطة الأصل هي $\overline{A'B'}$. إحداثيات النقطة A' هي $A'(9, -21)$. فما هي إحداثيات النقطة B'؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

27. انظر إلى الأشكال على الشبكة على اليمين.

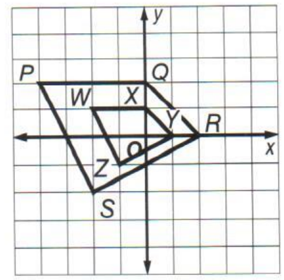


A صف عملية التحويل في الشكل الرباعي $ABCD$ التي أنتجت الشكل الرباعي $A'B'C'D'$.

B صف نتيجة دوران الشكل الرباعي $ABCD$ °90 حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة.

تدريب على الاختبار المعياري

28. الإجابة الموسعة الشكل الرباعي *PQRS* عبارة عن نسخة متغيرة الأبعاد(التمدد) من الشكل الرباعي *WXYZ*.



a. هل تغيير الأبعاد(التمدد) من *PQRS* إلى *WXYZ* عبارة عن تكبير أم تصغير؟ تصغير

b. أي عدد يعطي أفضل تمثيل لمعامل قياس تغيير الأبعاد(التمدد)؟

29. الجبر كم جرامًا من الماء النقي يجب أن يضيفه الصيدلي إلى 50 جرامًا من المحلول الملحي بتركيز 15% لعمل محلول يكون تركيز الملح فيه 10%؟

A 25 **C** 15

B 20 **D** 50

30. تريد بثينة نسخ لوحة في المتحف الفني. يبلغ عرض اللوحة 0.90 مترًا وطولها 1.80 مترًا. وتقرر استخدام معامل تصغير في تغيير الأبعاد(التمدد) بقيمة 0.25. فما حجم الورق الذي ينبغي أن تستخدمه؟

F 10 cm × 20 cm **H** 20 cm × 40 cm

G 15 cm × 30 cm **J** 25 cm × 50 cm

31. SAT/ACT لجميع قيم x, $(x-7)^2 =$؟

A $x^2 - 49$ **D** $x^2 - 14x + 49$

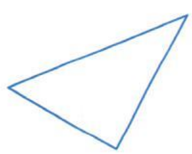
B $x^2 + 49$ **E** $x^2 + 14x - 49$

C $x^2 - 14x - 49$

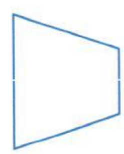
مراجعة شاملة

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها. (الدرس 5-14)

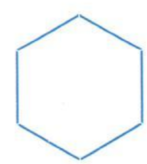
32.



33.

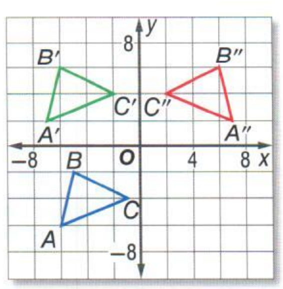


34.

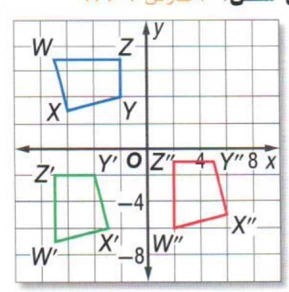


صف التحويلات المجموعة لرسم كل شكل. (الدرس 4-14)

35.



36.



37. الطوابير يوزَّع عدد الطوابير في مدرسة الشارقة الثانوية كل عام توزيعًا طبيعيًا باستخدام المتوسط 12.4 والانحراف المعياري 1.6.

a. ما احتمال الزيادة بمقدار 10 طوابير في عام معين؟

b. إذا كانت المدرسة مؤسسة منذ 30 عامًا. ففي كم عامٍ كانت تتراوح أعداد الطوابير ما بين 11 إلى 13 طابور؟

مراجعة المهارات

أوجد قيمة *x* إلى أقرب جزء من عشرة.

38. $58.9 = 2x$

39. $\frac{108.6}{\pi} = x$

40. $228.4 = \pi x$

41. $\frac{336.4}{x} = \pi$

الوحدة 14 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 1-14)

- الانعكاس هو تحويل يمثل عكس شكلٍ بالنسبة لنقطةٍ أو مستقيمٍ أو مستوى إحداثي.

الإزاحة (الدرس 2-14)

- الإزاحة هي تحويل يحرّك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.
- الإزاحة تطابق كل نقطة بالنقطة المنسوخة منها بطول المتجه.

الدوران (الدرس 3-14)

- يلف الدوران كل نقطة في الشكل من خلال الزاوية ذاتها حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات (الدرس 4-14)

- يمكن تمثيل الإزاحة في صورة تركيب من تركيب الانعكاسات في المستقيمات المتوازية ويمكن تمثيل الدوران في صورة تركيب من تركيب الانعكاس في المستقيمات المتقاطعة.

التناظر (الدرس 5-14)

- مستقيم التناظر في الشكل هو المستقيم الذي يمكن طي الشكل عنده مناصفة بحيث يتطابق النصفان تطابقًا دقيقًا.
- يُطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم ترتيب التناظر.
- مقدار التناظر هو أصغر زاوية يمكن دوران الشكل من خلالها بحيث ينعكس على نفسه.

تغيير الأبعاد/التمدّد (الدرس` 6-14)

- تغيير الأبعاد/التمدّد هو تكبير الأشكال أو تصغيرها نسبيًا.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

المفردات الأساسية

- زاوية الدوران angle of rotation
- التناظر المحوري axis symmetry
- مركز الدوران center of rotation
- تركيب التحويلات composition oftransformations
- الانعكاس الانزلاقي glide reflection
- خط الانعكاس line of reflection
- محور التناظر line of symmetry
- تناظر محوري line symmetry
- مقدار التناظر magnitude of symmetry
- ترتيب التناظر order of symmetry
- التناظر في المستوى plane symmetry
- التناظر الدوراني rotational symmetry
- التناظر symmetry
- متّجه الإزاحة translation vector

مراجعة المفردات

اختر أفضل مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. عند تطبيق تحويل على الشكل، ثم تطبيق تحويل آخر على صورته، فهذا يسمى (تركيب تحويلات، ترتيب عمليات التناظر).
2. إذا تم طي الشكل بطول خط مستقيم وتطابق النصفان تطابقًا تامًا، فإن محور الطي يسمى (محور الانعكاس، محور التناظر).
3. (تغيير الأبعاد/التمدّد، الانعكاس الانزلاقي) يكبّر الشكل أو يصغّره نسبيًا.
4. يطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم (مقدار التناظر، ترتيب التناظر).
5. A (خط الانعكاس، متجه الإزاحة) هو المسافة ذاتها من كل نقطة في الشكل إلى ما يقابلها في الصورة.
6. يكون للشكل (مركز دوران، تناظر) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق حركة ثابتة.
7. يتضمن الانعكاس الانزلاقي كلاً من الانعكاس و (الدوران، الإزاحة).
8. لدوران نقطة بمقدار (90°، 180°) عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في 1− ثم بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.
9. (المتجه، الانعكاس) هو أحد تحويلات التطابق.
10. يكون للشكل (تناظر في المستوى، تناظر دوراني) إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين 0° و 360° حول مركز الشكل.

مراجعة درس بدرس

14-1 الانعكاس

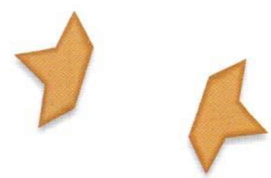
مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الانعكاس المعطى.

11. المستطيل $ABCD$ له الرؤوس $A(2, -4)$، و $B(4, -6)$، و $C(7, -3)$، و $D(5, -1)$ على المحور x

12. المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(-1, 1)$، و $Y(-1, -2)$، و $Z(3, -3)$ في المحور y

13. الشكل الرباعي $QRST$ الذي رؤوسه $Q(-4, -1)$، و $R(-1, 2)$ و $S(2, 2)$ و $T(0, -4)$ في المستقيم $y = x$

14. **الفن** تصنع بدرية النحت المكون من قطعتين الموضح لحديقة نصب تذكاري. في تصميمها، إحدى قطع النحت عبارة عن انعكاس للقطعة الأخرى، وذلك لتوضع بجانب الممر الذي قد يوجد بطول خط الانعكاس. انسخ الأشكال وارسم خط الانعكاس.



مثال 1

مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ الذي رؤوسه $J(1, 4)$، و $K(2, 1)$ و $L(6, 2)$ وصورته المنعكسة على المحور x.

اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1.

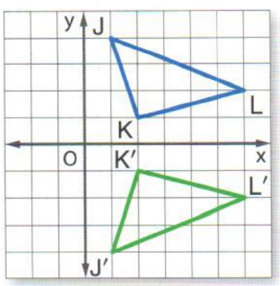
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$

$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$

$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$

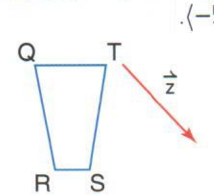
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J'K'L'$.



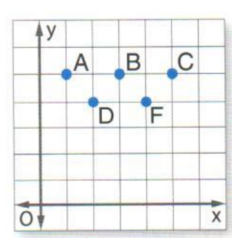
14-2 الإزاحة

15. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(0, -1)$ و $B(2, 0)$ و $C(3, -3)$ وصورته بطول $\langle -5, 4\rangle$.

16. انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.



17. **الأداء** خمس فنانين موجودون على المسرح كما هو موضح. يتحرك كل من B و F و C بطول $\langle 0, -2\rangle$. بينما يتحرك A بطول $\langle 5, -1\rangle$. ارسم الأوضاع النهائية.



مثال 2

مثّل بيانيًا المثلث $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه $X(2, 2)$، و $Y(5, 5)$ و $Z(5, 3)$ وصورته بطول $\langle -3, -5\rangle$.

يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

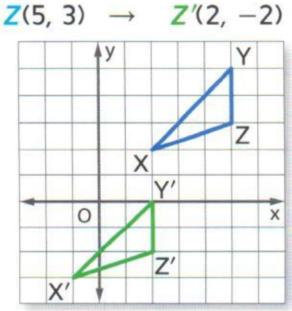
$(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 5)$

$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$

$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$

$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$

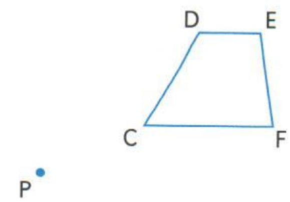
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle XYZ$ وصورته المثلث $\triangle X'Y'Z'$.



الوحدة 14 دليل الدراسة والمراجعة تابع

14-3 الدوران

18. انسخ شبه المنحرف $CDEF$ والنقطة P. ثم استخدم المنقلة والمسطرة لرسم دوران بمقدار $50°$ للشكل $CDEF$ حول النقطة P.



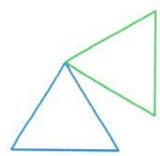
مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته بعد الدوران المحدد حول نقطة الأصل.

19. المثلث $\triangle MNO$ الذي رؤوسه: $M(-2, 2)$، $N(0, -2)$، $O(1, 0)$؛ $180°$

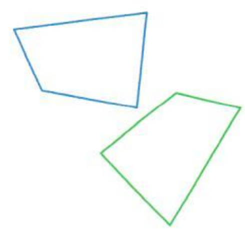
20. المثلث $\triangle DGF$ الذي رؤوسه: $D(1, 2)$، $G(2, 3)$، $F(1, 3)$؛ $90°$

يوضح كل شكل الصورة الأصلية ونسختها بعد الدوران حول النقطة P. انسخ كل شكل، وحدد موضع النقطة P، وأوجد زاوية الدوران.

21.



22.



مثال 3

المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 0)$ و $B(-3, 4)$ و $C(-1, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بعد الدوران $270°$ حول نقطة الأصل.

تتمثل إحدى طرق حل هذه المسألة في الجمع بين الدوران بمقدار $180°$ والدوران بمقدار $90°$. وضرب كل من الإحداثي x والإحداثي y لكل رأس في -1.

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$

$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$

$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$

اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1 وبدّل.

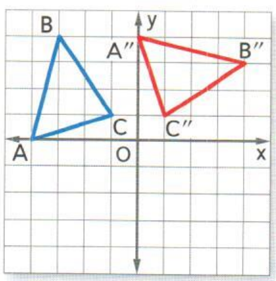
$(-x, -y) \rightarrow (y, -x)$

$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$

$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$

$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$

مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.



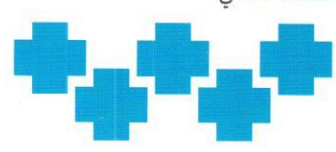
14-4 تركيب التحويلات

مثّل بيانيًا كل شكل له الرؤوس المعطاة وصورته بعد التحويل المشار إليه.

23. $\overline{CD}$: $C(3, 2)$ و $D(1, 4)$
الانعكاس: في $y = x$
الدوران بمقدار $270°$ حول نقطة الأصل.

24. $\overline{GH}$: $G(-2, -3)$ و $H(1, 1)$
الإزاحة: بطول $\langle 4, 2 \rangle$
الانعكاس: في المحور الأفقي x

25. **الأنماط** يبتكر جاسم نمطًا لجعله إطارًا لملصق باستخدام رسم مطبوع. اذكر تركيب التحويل الذي استخدمه لابتكار النمط التالي.



مثال 4

النقطتان الطرفيتان للقطعة المستقيمة $\overline{RS}$ تساويان $R(4, 3)$ و $S(1, 1)$. مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها بعد الإزاحة بطول $\langle -5, -1 \rangle$ والدوران بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 الإزاحة بطول $\langle -5, -1 \rangle$

$(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 1)$

$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$

$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$

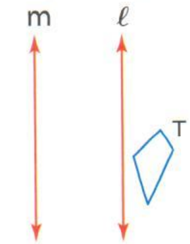
الخطوة 2 الدوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

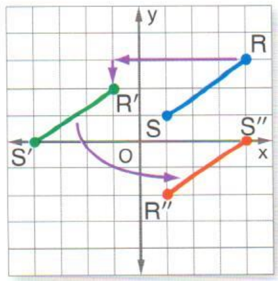
$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$

$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$

26. انسخ واعكس الشكل T في المستقيم ℓ ثم المستقيم m. ثم اذكر تحويلاً واحدًا يعكس المستقيم T على المستقيم T''.



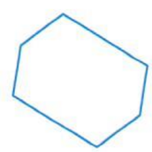
الخطوة 3 مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.



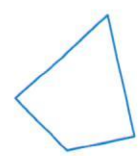
14-5 التناظر

اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

27.



28.

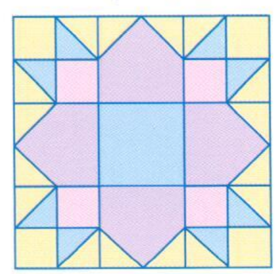


اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

29.

30.

31. **النسج** تبتكر حصة نمطًا لكوفية تنسجها لصديقتها. كم عدد مستقيمات التناظر الموجودة في النمط؟



مثال 5

اذكر هل كل شكل له تناظر في *المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم *كلاهما* أم *ليس أيًا منهما*.

a.

لمصباح الإضاءة تناظر في المستوى الإحداثي وتناظر محوري.

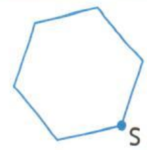
b.

المنشور له تناظر في المستوى.

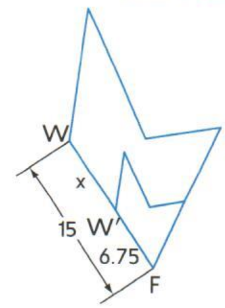
دليل الدراسة والمراجعة تابع

6-14 عمليات تغيير الأبعاد/ التمدّد

32. انسخ الشكل والنقطة S. ثم استخدم المسطرة لرسم صورة الشكل وفق المركز S ومعامل المقياس $r = 1.25$.



33. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل W إلى الشكل W' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل المقياس لتغيير الأبعاد والنقطة x.



34. النوادي يستخدم أعضاء نادي الرياضيات جهاز عرض الصور الشفافة لعمل ملصق. إذا كان عرض الصورة الأصلية 15 سنتيمترًا، وعرضها على الملصق 1.2 سنتيمترًا، فما هو معامل مقياس للتكبير؟

مثال 6

المربع $ABCD$ له الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(0, 8)$ و $C(8, 8)$ و $D(8, 0)$. أوجد صورة المربع $ABCD$ بعد تغيير الأبعاد وفق المركز عند نقطة الأصل ومعامل المقياس 0.5.

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل المقياس 0.5.

$(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$

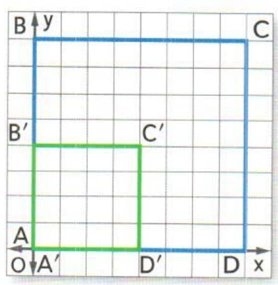
$A(0, 0) \rightarrow A'(0, 0)$

$B(0, 8) \rightarrow B'(0, 4)$

$C(8, 8) \rightarrow C'(4, 4)$

$D(8, 0) \rightarrow D'(4, 0)$

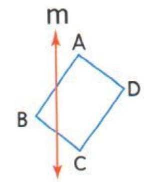
مثل بيانيًا الشكل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$.



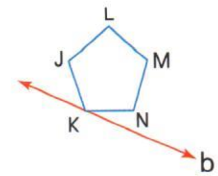
الوحدة 14 تدريب على الاختبار

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.

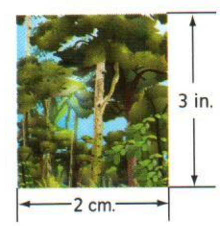
1.



2.

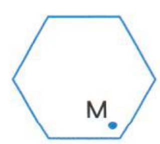


3. **المشروعات** يريد جمال تكبير الصورة التالية إلى 10 سنتيمترات إلى 15سنتيمترًا من أجل مشروع في المدرسة. إذا كانت ماكينة التصوير في المدرسة لا يمكن أن تكبر إلا حتى 150% في النسب المئوية للعدد الكلي، أوجد نسبتين مئويتين لأعداد كلية يمكن تكبير الصورة بهما وجعلها قريبة من 10 سنتيمترات إلى 15 سنتيمترًا أو أقل.

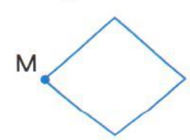


انسخ الشكل والنقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه M بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

4. $r = 1.5$



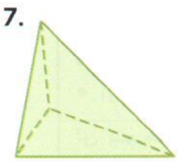
5. $r = \frac{1}{3}$



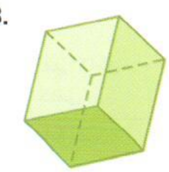
6. **الحدائق** في إحدى حدائق التنزه، تركب حليمة إحدى ألعاب الملاهي التي تجعل الراكب ينزلق جهة اليمين، ثم تدور عكس اتجاه عقارب الساعة حول مركزها بمقدار $60°$ كل ثانيتين. كم عدد الثواني التي تمر قبل أن ترجع حليمة إلى موضع البداية؟

اذكر هل كل شكل له تناظر في *المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم *كليهما* أم *ليس أيًا منهما*.

7.



8.



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق التحويل المعطى.

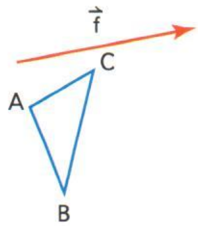
9. $▱FGHJ$ له الرؤوس $F(-1, -1)$، و $G(-2, -4)$ و $H(1, -4)$ و $J(2, -1)$ في المحور x

10. المثلث $\triangle ABC$ له الرؤوس $A(0, -1)$، $B(2, 0)$، $C(3, -3)$ $\langle -5, 4 \rangle$

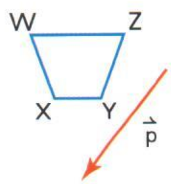
11. الشكل الرباعي $WXYZ$ له الرؤوس $W(2, 3)$، $X(1, 1)$، $Y(3, 0)$، $Z(5, 2)$، $180°$ حول نقطة الأصل

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.

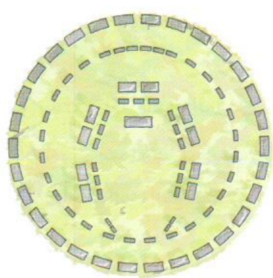
12.



13.



14. **الفنون** موضح فيما يلي تصور أحد الفنانين للصورة التي كان عليها وهو موقع ستونهنج، موقع أثري في إنجلترا، قبل سقوط الأحجار أو إزالتها. ما ترتيب التناظر ومقداره للحلقة الخارجية؟



15. **الاختيار** من متعدد ما التحويل أو تركيب التحويلات التي يمثلها الشكل التالي؟

A تغيير الأبعاد
B انعكاس انزلاقي
C دوران
D إزاحة

الوحدة 14 التحضير للاختبارات المعيارية

الحل بترتيب عكسي

في معظم المسائل، تتوفر مجموعة من الشروط والمعطيات ويجب عليك إيجاد النتيجة النهائية. ولكن بعض المسائل تعطيك النتيجة النهائية وتطلب منك إيجاد شيء قد حدث من قبل في العملية. ولحل المسائل من هذا النوع، يجب عليك الحل بترتيب عكسي.

إستراتيجيات الحل بترتيب عكسي

الخطوة 1

ابحث عن الكلمات الأساسية التي تشير إلى ما ستحتاج إليه للحل بترتيب عكسي لحل المسألة.

نموذج من الكلمات الأساسية:

- ماذا كانت **نقطة الأصل**...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل**...؟
- أين كان **البدء** أو **البداية**...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة لحلها.

- أدرج تسلسل الخطوات من البداية إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ بالنتيجة النهائية. وتتبع الخطوات بترتيب عكسي.
- "تراجع" عن كل خطوة باستخدام المعكوسات للرجوع إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- تأكد من منطقية إجابتك.
- ابدأ بإجابتك واتبع تقدم الخطوات في نص المسألة لترى هل حصلت على النتيجة ذاتها أم لا.

مثال على الاختبار المعياري

حُـلّ المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

يستخدم حمادة برنامجًا هندسيًا ليجربه في التحويلات على الشبكة الإحداثية. فبدأ بنقطة وأزاحها بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى و 8 وحدات جهة اليسار. ثم عكس الصورة في المحور x. وأخيرًا غيّر أبعاد هذه الصورة الجديدة وفق معامل المقياس 0.5 وفيما يتعلق بنقطة الأصل ليصل إلى $(-4, -1)$. ما هي الإحداثيات الأصلية للنقطة؟

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة صحيحة ولكن التفسير كامل.	1
لن يتم منح درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

اقرأ نص المسألة جيدًا. لديك سلسلة من التحويلات لنقطة على الشبكة الإحداثية. وتعرف إحداثيات الصورة النهائية ومطلوب منك إيجاد الإحداثيات الأصلية. تراجع عن كل تحويل للحل بترتيب عكسي وحل المسألة.

مثال على إجابة من نقطتين:

النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تغيير أبعاد ← النتيجة النهائية

ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحل بترتيب عكسي.

غير الأبعاد بمقدار 2 وتراجع عن تغيير الأبعاد بمقدار 0.5:

$$(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$$

اقلب الانعكاس عبر المحور x للتراجع عن الانعكاس:

$$(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$$

أزح بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل و 8 وحدات جهة اليمين للتراجع عن الإزاحة:

$$(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$$

الإحداثيات الأصلية للنقطة هي (4 ,6).

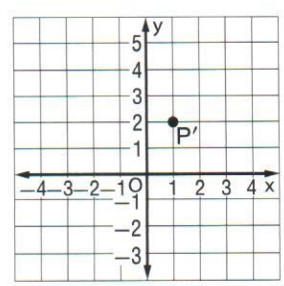
تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والاستنتاج. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

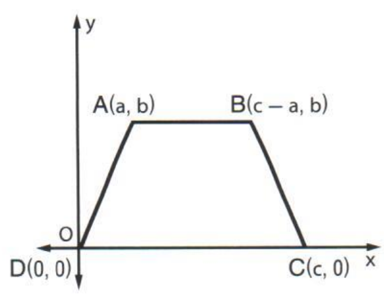
حُــلّ كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. استقر برغوث على الشبكة الإحداثية. قفز البرغوث عبر المحور x ثم عبر المحور y ليشكل انعكاسين متتاليين. ثم انتقل 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأسفل. إذا كان المكان النهائي للبرغوث عند (1− ,4)، فما هي النقطة التي استقر عليها في البداية؟

2. توضح الشبكة الإحداثية التالية الصورة النهائية عندما تم دوران صورة بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، وتم تغيير أبعادها وفق معامل المقياس 2، وانتقلت 7 وحدات جهة اليمين. فما هي الإحداثيات الأصلية؟



3. الشكل $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.



أي مما يلي يمثل إحداثيات النقطتين الطرفيتين لوسيط $ABCD$؟

A $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

B $\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

C $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

D $\left(\frac{c}{2}, b\right)$

4. إذا كان قياس زاوية داخلية في مضلع منتظم يساوي 108، فما نوع المضلع؟

F ثماني أضلاع

G سداسي أضلاع

H خماسي أضلاع

J مثلث

كتيب الطالب

يمكنك بمساعدة **كتاب الطالب**
هذا الإجابة عن هذه الأسئلة.

ماذا لو نسيتُ إحدى المفردات؟

ماذا لو نسيتُ إحدى الصيغ؟

الرموز

$\neq$	لا يساوي	AB	قياس $\overline{AB}$
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\angle$	زاوية
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـــ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$\lvert a\rvert$	القيمة المطلقة لـــ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـــ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتّب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f لـــ x؛ قيمة f لـــ x	$P(n, r)$	تباديل مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB	$C(n, r)$	توافيق مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة

الخواص الجبرية والمفاهيم الأساسية

المحايد	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، فإن يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث a و $b \neq 0$، يوجد فقط عدد واحد $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c،إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مربع فرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على > و ≥ و ≤.*

الصيغ

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة في مستوى إحداثي	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف في مستوى إحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
محيط المستطيل	$P = 2\ell + 2w$ أو $P = 2(\ell + w)$
محيط الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مستطيل	$A = \ell w$	شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$		

مساحة السطح

مكعب	$S = 6s^2$	هرم منتظم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم منتظم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (.in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة في خط الأعداد:	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة في مستوى إحداثي:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
المسافة في الفضاء:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
طول قوس المسافة:	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد:	$M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف في مستوى إحداثي:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نقطة المنتصف في الفضاء:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المُحيط ومحيط الدائرة

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مربع	$A = s^2$	مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
مستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$	مُضلع منتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	قطاع من دائرة	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
معين	$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$ أو $A = bh$		

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	كرة	$S = 4\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور مستطيل	$V = \ell wh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
منشور	$V = Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

صيغة الميل والمقطع لمستقيم	$y = mx + b$	دائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
صيغة النقطة والميل لمستقيم	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$		

الرموز

$\neq$	لا يساوي	$\parallel$	يوازي	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\nparallel$	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
$\cong$	يطابق	$\perp$	متعامد على	$\rightarrow$	موضوع على
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
$\angle, \measuredangle$	زاوية، زوايا	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	$\widehat{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$^\circ$	درجة	$\square$	متوازي أضلاع	$\widehat{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A وC
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	n-gon	مضلع عدد أضلاعه n	$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	f لـــــ x، قيمة f لـــــ x
$\overrightarrow{AB}$	شعاع تحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتّب	!	مضروب
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر	$_nP_r$	تباديل مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$\sim p$	نفي p، ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	$_nC_r$	توافيق مجموعة n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p و q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A \mid B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p إذًا q	$\vec{a}$	متجه a		
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p فقط إذا كان q	$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m) 1 متر = 100 سنتيمتر (cm) 1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd) 1 ميل = 5280 قدمًا (ft) 1 ياردة = 3 أقدام 1 ياردة = 36 بوصة 1 قدم = 12 بوصة (in.)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL) 1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt) 1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz) 1 ربع = 2 باينت (pt) 1 باينت = 2 كوب (c) 1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g) 1 جرام = 1000 مللي جرام (mg) 1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	1 طن (T) = 2000 رطل (lb) 1 رطل = 16 أونصة (oz)

الصيغ

الهندسة الإحداثية			
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	**المسافة**	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$
المصفوفات			
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$
كثيرات الحدود			
الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
اللوغاريتمات			
خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
القطوع المخروطية			
قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$ أو $x = a(y-k)^2 + h$	**قطع ناقص**	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	**قطع زائد**	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
المتتاليات والمتسلسلات			
الحد النوني، لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	**الحد النوني، لمتتالية هندسية**	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	**مجموع متسلسلة هندسية**	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

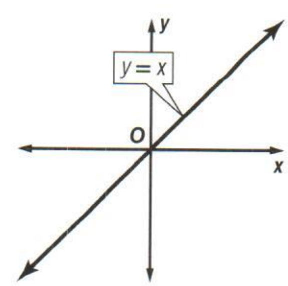
حساب المثلثات			
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
النسب المثلثية	$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
	$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

الرموز

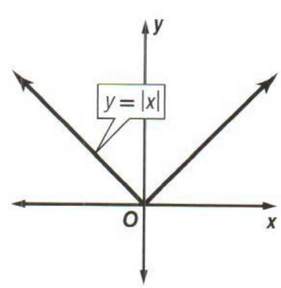
$f(x) = \{$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a
$f(x, y)$	f حسب x و y، دالة متغيراها x وy
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB
i	الوحدة التخيلية
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x
$\sum$	سيغما، المجموع
$\bar{x}$	متوسط عينة
μ	متوسط مجتمع إحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
$P(B \mid A)$	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل
nPr	تباديل مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
nCr	توافيق مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$\text{Sin}^{-1}\, x$	Arcsin x
$\text{Cos}^{-1}\, x$	Arccos x
$\text{Tan}^{-1}\, x$	Arctan x

الدوال الأصلية

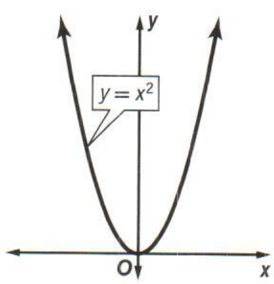
الدوال الخطية



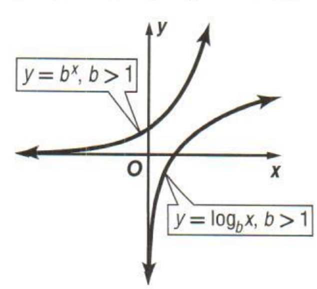
دوال القيمة المطلقة



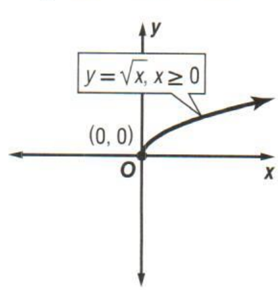
الدوال التربيعية



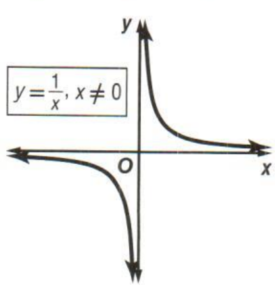
الدوال الأسّية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



شكر و تقدير

نسخة الطلاب

viii UAE_MoE; ix Roine Magnusson/Getty Images; x gulfimages/Alamy Stock Photo; xi Luboslav Tiles/Shutterstock.com; xii Etabeta1/Alamy; xiii Purestock/Getty Images; xiv Ingram Publishing; xv Purestock/SuperStock; xvi I. Rozenbaum & F. Cirou/PhotoAlto; xvii Zurijeta/Shutterstock.com; xviii Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; xix ZouZou/Shutterstock; xx Hero/Corbis/Glow Images; xxi Luiz Felipe Castro/Flickr/Getty Images, 618 Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; 622 Dejan Gileski/Shutterstock.com; 626 Kotsovolos Panagiotis/Shutterstock.com; 631 Nick Koudis/Photodisc/Getty Images; 632 2xSamara.com/Shutterstock.com; 639 Alexey Stiop/Shutterstock.com; 642 Salajean/Shutterstock.com; 650 Ffooter/Shutterstock.com; 654 ©IT Stock Free; 657 Tamara Kulikova/Shutterstock; 663 Fredrick Kippe/Alamy Images; 671 Chris Willig; 680 Anders Brownworth/Shutterstock.com; 685 Africa Studio/Shutterstock.com; 698 McGraw-Hill Education; 702 ZouZou/Shutterstock; 705 Africa Studio/Shutterstock.com; 712 LoanaB/Shutterstock.com; 724 Lindaks/Shutterstock.com; 725 Steve Allen/Getty Images; 726 JGI/Blend Images/Getty Images; 733 Hans-jürgen Hermann/age fotostock; 744 ZouZou/Shutterstock.com; 748 Hero/Corbis/Glow Images; 751 Clearviewstock/Alamy; 753 JUPITERIMAGES/Brand X/Alamy; 758 Gregory Warran/Flickr/Getty Images; 770 CORBIS/SuperStock; 776 Alistair Scott/Alamy; 777 Stockbyte/Stockdisc/Getty Images, amolson7/Shutterstock.com; 786 Jupiterimages/age fotostock; 788 Luiz Felipe Castro/Flickr/Getty Images; 791 Ivan Kuzmin/Shutterstock; 792 George Doyle & Ciaran Griffin/Superstock; 800 Redsnapper/Alamy Images; 802 Aceshot1/Shutterstock.com; 807 Ed-Imaging; 808 Ingram Publishing/age fotostock; 814 M.E. Young/USGS; 819 Fotosearch RF/Glow Images; 822 Martin Child/Photodisc/Getty Images; 831 (tl)Image Source, (tr)Brian Hagiwara/Brand X Pictures/Getty Images, (bl) Stockbyte/age fotostock, (bc) Ingram Publishing/SuperStock, (br)Siede Preis/Photodisc/Getty Images; 832 (bl)Jupiterimages/Thinkstock/Alamy Images, (bc) Del Boy/Shutterstock, (br)Tamara Kulikova/Shutterstock; 833 (tr) David Lee/Shutterstock.com, (cl) D. Hurst/Alamy, (c)Comstock Images/Alamy, (cr)Comstock Images/Alamy, (b)Lasha/Shutterstock.com; 834 Hisham F. Ibrahim/Stockbyte/Getty Images; 838 McGraw-Hill Education; 839 McGraw-Hill Education; 842 Mark Dierker/McGraw-Hill Education; 856 Zurijeta/Shutterstock;