وزارة التربيـة والتعليم
دائرة التعــليم والمعرفة

I ❤ MATHS

الرياضيـــات للحادي عشر المتقدم

الفصل الدراسي الثالث

2018 / 2019

الوحدة 12

النهـايات والمشتقات

اعداد
أ. عبدالغنيِ مصطفى زيتون
050 6171533

(12-1) تقدير النهاية بيانياً

مفهوم النهاية :

نقول ان العدد الحقيقي L نهاية للدالة f عندما تقترب x من a إذا كانت $f(x)$ تقترب من L كلما اقتربت x من a من الجهتين اليسرى واليمنى ; $x \neq a$ وتكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ مثلاً $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ لماذا يا هذا ؟

✳ قد تكون **نهاية الدالة موجودة** عند نقطة بالرغم من أن الدالة غير معرفة عند تلك النقطة .

✓ الترميز $x \to a^-$ للإشارة إلى أن x تقترب من a من جهة اليسار (حيث $x < a$) $\quad x \to a$

✓ والترميز $x \to a^+$ للإشارة إلى أن x تقترب من a من جهة اليمين (حيث $x > a$) $\quad a \leftarrow x$

نسمي $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ نهاية يسرى للدالة f و $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ نهاية يمنى للدالة f (وكلاهما نهايات أحادية الطرف)

وتذكّر أن

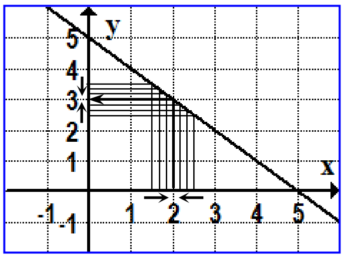
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

✓ إذا كانت $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **غير موجودة**

مثال 1 إذا كانت $f(x) = 5 - x$ قدّر النهاية $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ بيانياً ثم عزز إجابتك عددياً

نرسم بيان الدالة باستخدام جدول القيم

x	0	2	5
$f(x)$	5	3	0



يُبين التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x)$

كلما اقتربت x من العدد 2 (من الجهتين) فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 3

وبالتالي يمكننا تقدير $\lim\limits_{x \to 2} (5 - x) = 3$

التعزيز عددياً : نكون جدول لقيم $f(x)$ وذلك باختيار قيم لـx قريبة جداً من العدد 2 من كلا الجهتين

يبين الجدول أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 3

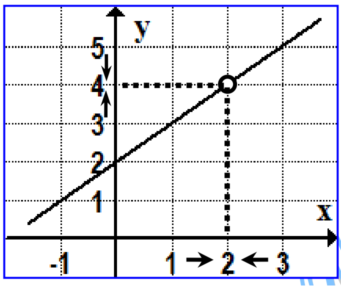
x تقترب من 2 من اليسار ⟶ ⟵ x تقترب من 2 من اليمين

x	1.9	1.99	1.999	2	**2.001**	**2.01**	**2.1**
$f(x)$	3.1	3.01	3.001		**2.999**	**2.99**	**2.9**

مثال 2 إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ قدّر النهاية $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ بيانياً ثم عزز إجابتك عددياً

نرسم بيان الدالة باستخدام جدول القيم

x	0	2	3
$f(x)$	2	4	5



يُبين التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x)$

كلما اقتربت x من العدد 2 (من الجهتين) فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 3

وبالتالي يمكننا تقدير $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \mathbf{4}$ (لاحظ أن $f(x) = x + \mathbf{2}$ معوجود فجوة عند $x = \mathbf{2}$ لماذا يا ...)

التعزيز عددياً : نكون جدول لقيم $f(x)$ وذلك باختيار قيم لـx قريبة جداً من العدد 2 من كلا الجهتين

يبين الجدول أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4

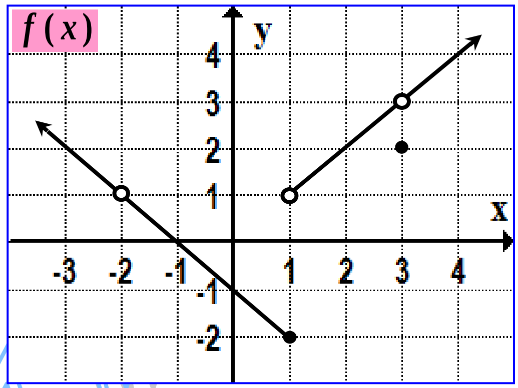
x تقترب من 2 من اليسار ⟶ ⟵ x تقترب من 2 من اليمين

x	1.9	1.99	1.999	2	**2.001**	**2.01**	**2.1**
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		**4.001**	**4.01**	**4.1**

إيجـــاد نهاية دالة بيانيـاً :

تدريب 1 في كل دالة مما يلي ، قدّر النهاية إن وُجـدت :

❶



① $f(1)=$.............. ② $f(4)=$..............

③ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$.............. ④ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$..............

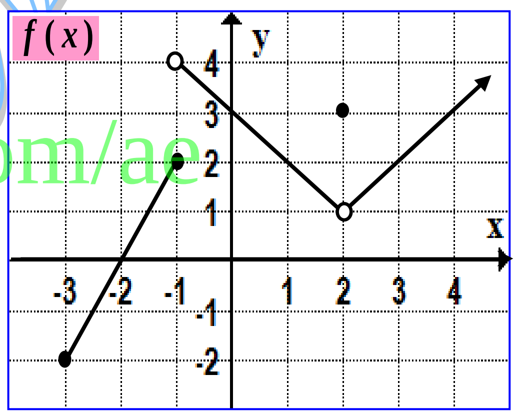
⑤ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$.............. ⑥ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$..............

⑦ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$.............. ⑧ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$..............

⑨ إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة فإن قيم c هي ....

9	8	7	6	5	4	3	2	1	Q
1	2	غ م	1	-2	3	-1	4	-2	A

❷



① $f(-1)=$.............. ② $f(2)=$..............

③ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$.............. ④ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$..............

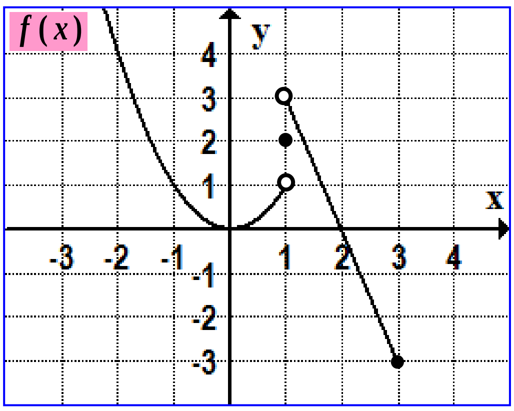
⑤ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=$.............. ⑥ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=$..............

⑦ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$.............. ⑧ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=$..............

⑨ مجموعة قيم c التي عندها $\lim\limits_{x\to c} f(x)=3$ هي ....

9	8	7	6	5	4	3	2	1	Q
-1	0	غ م	2	4	3	1	3	2	A

❸



① $f(-2)=$.............. ② $f(1)=$..............

③ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=$.............. ④ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$..............

⑤ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$.............. ⑥ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$..............

⑦ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-x}{f(x)}=$.............................. □

⑧ $\lim\limits_{x\to -2} (f(x)-x)=$..............................

8	7	6	5	4	3	2	1	Q
6	2	0	غ م	0	4	2	4	A

لكي تنجح يجب أن تكون رغبتك في النجاح أكبر من خوفك من الفشل

(12-2) إيجاد قيمة النهايات جبرياً

حساب النهايات عند نقطة

❖ لأي ثابت c وأي عدد حقيقي a يكون : $\lim_{x\to a} c = c$ ، مثال : $\lim_{x\to 3} 5 = 5$

❖ لأي عدد حقيقي a يكون : $\lim_{x\to a} x = a$ ، مثال : $\lim_{x\to -1} x = -1$

خواص النهــايات :

إذا كانت c, k أعداد حقيقية و n عدد صحيح موجب ، $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتان فإن :

① $\lim_{x\to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

② $\lim_{x\to c} k \times f(x) = k \times \lim_{x\to c} f(x)$

③ $\lim_{x\to c} \left(f(x) \times g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$

④ $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$; $\left(\lim_{x\to c} g(x) \neq 0\right)$

⑤ $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$, ❀ $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

⑥ $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (ولكن عندما n زوجي , $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

⑦ لأي كثيرة حدود $p(x)$ وأي عدد حقيقي c يكون : $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$

ملحوظة :

بصورة عامة يتم إيجاد النهاية باستخدام الخواص السابقة والتعويض المباشر أما في حالة الكسر

إذا كان الناتج $\frac{0}{0}$ نتبع ما يلي : 1) نحلل 2) نختصر 3) وأخيراً نعوض عن x بـ c

وإذا احتوت على جذر تربيعي 1) نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر 2) نختصر 3) وأخيراً نعوض عن x

مثال 1 أوجـد قيمة النهـاية لكلٍ مما يلي :

a) $\lim_{x\to 3} (x^2 + 2x - 5) = (3)^2 + 2(3) - 5 = 10$ (تعويض مباشر)

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{4x+7}{x+3} = \dfrac{4(2)+7}{2+3} = \dfrac{15}{5} = 3$ لاحظ المقام يساوي $5 \neq 0$ (تعويض مباشر)

c) $\lim_{x\to 4} \sqrt{5+x} = \sqrt{\lim_{x\to 4} (5+x)} = 3$

لا تنه عن خلق وتأتي مثله ...... عارٌ عليك إذا فعلت عظيم
ابدأ بنفسك وانهها عن غيّها ...... فإذا انتهت عنه فأنت حكيم

Amz.math@hotmail.com

تدريب 1 أوجد قيمة النهاية لكلٍ مما يلي :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{x}\left(x + \dfrac{6}{x}\right)$

....

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x + 3}$

....

c) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{5 - x}$

....

مثال 2 إذا كانت $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ أوجد كلاً مما يلي :

❶ $\lim\limits_{x\to 3}(6f(x) - 3) = 6(2) - 3 = 9$

❷ $\lim\limits_{x\to 3}(f(x) - g(x)) = (2) - (-1) = 3$

❸ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + 2x\right) = \dfrac{2}{-1} + 2(3) = -2 + 6 = 4$

تدريب 2 إذا كانت $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -1$ أوجد كلاً مما يلي :

❶ $\lim\limits_{x\to 3}(f(x) - 3x + 2)$ ....

❷ $\lim\limits_{x\to 3}(2f(x) - g(x))$ ....

❸ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4x}{3g(x)} + 5x\right)$ ....

مثال 3 أوجد قيمة النهاية

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{5x - 10}$ (بالتعويض المباشر نجد الناتج $\dfrac{0}{0}$)

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{5\cancel{(x-2)}}$ (نحلل ثم نختصر ...)

$= \dfrac{(2+3)}{5} = 1$ (وأخيراً نعوض عن x بـ 2)

ابتسم ترح قلبك وتفرح من أحبك

تدريب 3 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي :

❶ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

....

....

....

....

❷ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

....

....

....

....

مثال 4 أوجد قيمة النهاية

$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

(بالتعويض المباشر نجد الناتج $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

(نضرب بمرافق الجذر ...)

$=\dfrac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{1}{6}$

(وأخيراً نعوض عن x بـ 9)

تدريب 4 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي :

❶ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}$

....

❷ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

....

....

....

قل لمن ادعى في العلم فلسفة علمت شيئا وغابت عنك أشياء

Amz.math@hotmail.com

نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللا نهاية

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} a x^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a x^n$$

مثال 5 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي :

❶ $\lim_{x\to\infty} (9x^3 - 4x^2 + 7x + 2)$

$$= \lim_{x\to\infty} 9x^3 = 9 \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

❷ $\lim_{x\to-\infty} (4 + 3x - x^2)$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x^2 = - \lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty$$

❸ $\lim_{x\to-\infty} (5x^4 - 3x + 2)$

$$= \lim_{x\to-\infty} 9x^4 = 5 \lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$$

تدريب 5 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي :

❶ $\lim_{x\to\infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$

....

❷ $\lim_{x\to-\infty} (4x^3 + 3x^6 - 8x)$

....

❶ $\lim_{x\to-\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

....

نهاية الدوال النسبية عند اللا نهاية

✓ إذا كان $k \neq 0$ وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

✓ عند حساب نهاية دالة نسبية ، إذا كانت $\frac{\infty}{\infty}$ نقسم البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير x تظهر في المقام .

مثال 6 أوجد قيمة كل نهاية مما يلي :

❶ $\lim_{x\to\infty} \frac{4x - 3}{8x + 5}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x/x - 3/x}{8x/x + 5/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - 3/x}{8 + 5/x} = \frac{4 - 0}{8 + 0} = \frac{1}{2}$$

يا كاشف الضر صفحاً عن جرائمنا   فقد أحاطت بنا يا ربِّ بأساءُ

❷ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x}{3x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2/x^3-x/x^3}{3x^3/x^3+1/x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6/x-1/x^2}{3+1/x^3}=\frac{0-0}{3+0}=0$$

❸ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4+x^2}{9x^3-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4/x^3+x^2/x^3}{9x^3/x^3-2x/x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+1/x}{9-2/x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{9}=-\infty$$

تدريب 6 أوجـد قيمة كل نهـاية مما يلي :

❶ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-10}$$

....

....

❷ $$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7}{5x+1}$$

....

....

❸ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3+1}{2x^3+4x}$$

....

....

تدريب 7 للمتتالية اكتب الحـدود الخمسة الأولى ثم أوجـد قيمة نهـايتها :

$$a_n=\frac{3n+1}{n+5}$$

....

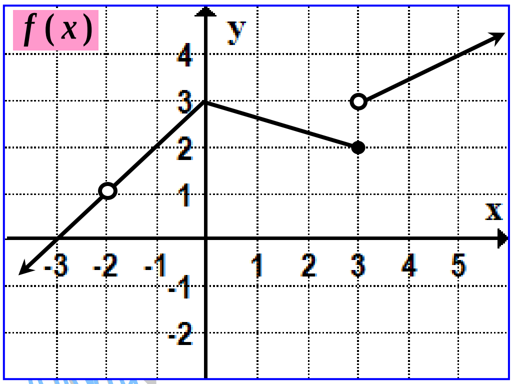
....

....

....

تمارين

① استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لإيجاد قيمة كل نهاية إن وُجدت :



① $f(-2)$ ……………

② $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ……………

③ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ……………

④ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ ……………

⑤ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ ……………

⑥ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ ……………

⑦ $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ ……………

⑧ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ……………

⑨ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f^2(x)-4}{f(x)-2} =$ ……………………………

9	8	7	6	5	4	3	2	1	Q
4	غ م	0	3	2	1	3	4	غ م	A

② أوجد قيمة كل نهاية مما يلي إن وُجدت :

❶ $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-2x-3)$ 5

……………………………………………………………………………………

❷ $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ -3

……………………………………………………………………………………

❸ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{2-x}$ 0

……………………………………………………………………………………

❹ $\lim\limits_{x\to 4} (\dfrac{2}{x} + 3x - 4\sqrt{x})$ 4.5

……………………………………………………………………………………

❺ $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-4}$ 4

……………………………………………………………………………………

❻ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ غ م

……………………………………………………………………………………

③ أوجد قيمة كل نهاية مما يلي إن وُجدت :

❶ $\lim_{x\to 4} \dfrac{(2x-1)(x-4)}{x^2-16}$ $\boxed{7/8}$

....

❷ $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{3x-9}$ $\boxed{-2/3}$

....

....

❸ $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2-x-30}{x^2-6x}$ $\boxed{11/6}$

....

....

❹ $\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+2)^2-1}{x+1}$ $\boxed{2}$

....

....

❺ $\lim_{x\to 2} \dfrac{6-x-x^2}{x^3-8}$ $\boxed{-5/12}$

....

....

❻ $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$ $\boxed{3/4}$

....

....

❼ $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x^{-2}+9}{4x^{-2}+5}$ $\boxed{2}$

....

....

④ أوجد قيمة كل نهاية مما يلي إن وُجدت :

❶ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ 2

....

....

❷ $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x+4}-5}$ -12.5

....

❸ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ 1/6

....

....

....

❹ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+7}-4}$ 4

....

....

....

❺ $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ -12

....

....

....

❻ $\lim_{x\to 7} \frac{5-\sqrt{18+x}}{x-7}$ $-1/10$

....

....

....

⑤ أوجد قيمة كل نهاية مما يلي إن وُجدت :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-4x^5+9)$ $\boxed{\infty}$

....

❷ $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+6x^2-4x^6)$ $\boxed{-\infty}$

....

❸ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$ $\boxed{0}$

....

....

❹ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x-2}{x^2+4x-1}$ $\boxed{3}$

....

....

❺ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{-1}+2x^{-2}-3}{3x^{-2}+7}$ $\boxed{-3/7}$

....

....

❻ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^2+3x-2}$ $\boxed{-\infty}$

....

....

❼ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^5-12x^2+14x}{2x^5+13x^3}$ $\boxed{3}$

....

....

❽ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+3)(x^2-2)}{(2x-1)^2}$ $\boxed{\infty}$

....

....

⑤ أوجد نهاية كل متتالية مما يلي إن وُجدت :

❶ $a_n = \dfrac{8n+1}{n^2-3}$

....

....

❷ $a_n = \dfrac{3n^2+5n+2}{2n+1}$

....

....

....

❸ $a_n = \dfrac{12n^2+2}{6n^2-1}$

....

....

....

❹ $a_n = \dfrac{5}{n^2}[\dfrac{n(n+1)}{2}]$

....

....

....

....

❺ $a_n = \dfrac{1}{n^4}[\dfrac{n(n+1)^2}{4}]$

....

....

....

....

(12-3) خطوط المماس والسرعة المتجهة

معدل التغير اللحظي :

معدل التغير اللحظي لتمثل بياني لدالة $f(x)$ هو الميل m للمماس عند أي نقطة $(x\ ,\ f\ (x))$

ويُعطى بالمعادلة : $\boxed{m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}$ *بشرط وجود النهاية*

ميل المماس m عند النقطة $(a\ ,\ f\ (a))$ أو عند $x = a$ هو $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$:

مثال 1 أوجـد ميل المماس للتمثل البياني $y = x^2 - 1$ عند النقطة $(2\ ,\ 3)$

$$f\ (2+h) = (2+h)^2 - 1$$

$$= 4 + 4h + h^2 - 1 = 3 + 4h + h^2$$

$$f\ (2) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3} + 4h + h^2 - \cancel{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4$$

إرشاد
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

تدريب 1 أوجـد ميل المماس للتمثل البياني لكل دالة عند النقطة المذكورة :

① $y = x^2\ ,\ (1\ ,\ 1)$ $\quad m = 2$

....
....
....
....
....
....

② $y = x^2 + 4\ ,\ (-1\ ,\ 5)$ $\quad m = -2$

....
....
....
....
....
....

احترم تُحترم ، تصدق تُرزق ، ابتسم تؤجر ، تواضع ترفع

تدريب2 أوجـد ميل المماس للتمثل البياني لكل دالة عند أي نقطة $(x, f(x))$

① $y = x^2$

$m = 2x$

....

② $y = \frac{2}{x}$

$m = \frac{-2}{x^2}$

....

③ $y = x^2 - 3x$

$m = 2x - 3$

....

السرعة المتوسطة

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ فإن السرعة المتوسطة للجسم v_{avg}

في الفترة الزمنية من a إلى b تعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تدريب3 تمثل الدالة $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا

ما السرعة المتوسطة للبالون بين $t = 1$ ، $t = 2$ ؟

....

....

....

....

السرعة اللحظية

السرعة اللحظية عند أي زمن t تُعطى بالصيغة :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

تدريب4 جسم على ارتفاع 64 قدم فإذا كان ارتفاعه بعد t ثانية من سقوطه تمثله المعادلة $f(t) = 64 - 16t^2$ بالقدم

a) أوجـد السرعة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.5$ و $t = 2$

b) أوجـد السرعة اللحظية عند الزمن $t = 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

لا تقل انك لا تملك الوقت الكافي فجميع العظماء كان يومهم 24 ساعة

Amz.math@hotmail.com

تمــارين

① أوجــد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة عند النقطة المذكورة :

❶ $y = 3 - 2x \quad , \quad (-2\,,\,7)$

$m = -2$

....

❷ $y = \dfrac{6}{x+2} \quad , \quad (1\,,\,2)$

$m = -2/3$

....

❸ أوجــد ميل المماس للتمثيل البياني للدالة $y = x^2 + x$ عند أي نقطة

$m = 2x + 1$

....

② أوجـد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية المذكورة :

❶ $s(t) = 0.2t^2 \quad , \quad 2 \le t \le 4$

....

....

....

....

❷ $s(t) = -0.5(t-5)^2 + 3 \quad , \quad 4 \le t \le 4.5$

....

....

....

....

③ أوجـد السرعة اللحظية لجسم عند القيمة المذكورة لـ t :

❶ $s(t) = 100 - 12t^2 \quad , \quad t = 3$

....

....

....

....

....

....

....

❷ $s(t) = 38t - 16t^2 \quad , \quad t = 1$

....

....

....

....

....

....

....

(12-4) المشتقات

تعريف المشتقة :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

المشتقة عند $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال 1 أوجد مشتقة الدالة $f(x)=x^2-2$ ثم أوجد قيمتها عند $x=-3$

$$f(x+h)=(x+h)^2-2$$

$$=x^2+2xh+h^2-2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2\cancel{-2}-(\cancel{x^2}\cancel{-2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$f'(x)=2x \quad\Rightarrow\quad f'(-3)=2(-3)=-6$$

تدريب 1 أوجد مشتقة $f(x)$ ثم أوجد قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة

❶ $f(x)=2x^2+1 \qquad ; x=5$

....

....

....

....

....

....

❷ $f(x)=x^2-3x \qquad ; x=-4$

....

....

....

....

....

....

قواعد الاشتقاق

لأي عدد ثابت c يكون $\frac{d}{dx}(c) = 0$ وكذلك $\frac{d}{dx}(x) = 1$

قاعدة القوة : لأي عدد حقيقي n لا يساوي الصفر يكون $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

تدريب 2 أوجد مشتقة كل دالة مما يلي :

❶ $f(x) = x^{13}$ ....

....

❷ $f(x) = \frac{1}{x^{19}}$ ....

....

❸ $f(x) = x^{\pi}$ ....

....

❹ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ....

....

قاعدة : إذا كانت $f(x), g(x)$ قابلتين للاشتقاق عند x وكان c أي عدد ثابت فإن :

$$i)\quad \frac{d}{dx}[\,f(x) \pm g(x)\,] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$ii)\quad \frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,f'(x)$$

تدريب 3 أوجد مشتقة كل دالة مما يلي :

❶ $f(x) = 2x^6 + x^{-2} - 8x - 9$

....

❷ $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5x^3 - \sqrt{x} + 1$

....

....

❸ $f(x) = \frac{4x^5 - 3x^2 + 2\sqrt{x}}{x^2}$

....

....

نظرية القيم القصوى

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$ فأن لها قيمة عظمى وقيمة صغرى

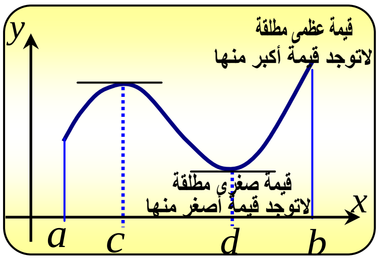
لتحديد القيم القصوى لدالة f على $[a\ ,\ b]$ نتبع الخطوات التالية :

① نوجد $f'(x)$

② نوجد النقاط التي تحقق $f'(x)=0$

③ نوجد قيمة الدالة عند كل نقطة حصلنا عليها من حل المعادلة $f'(x)=0$

وعند طرفي الفترة a ، b فتكون أكبرها **قيمة عظمى** وأصغرها **قيمة صغرى**



تدريب 4

❶ أوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2-4x+3$ على $[0\ ,\ 5]$ وبيّن نوعها. 8 , -1

❷ أوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^3-3x^2+6$ على $[-2\ ,\ 3]$ وبيّن نوعها. 6 , -14

❸ يمكن تمثل الارتفاع h الذي تقطعه العربة على طول مسار قطار الملاهي بالمعادلة $h(t)=-\dfrac{1}{9}t^3+\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{11}{3}$

على الفترة $[1\ ,\ 12]$ ، أوجد أعلى ارتفاع وأدنى ارتفاع للعربة

قاعدة الضرب والقسمة

قاعدة الضرب

افترض أن $g(x)\,,\, f(x)$ قابلتان للاشتقاق عند x فإن :

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

تدريب 5

❶ باستخدام قاعدة الضرب أوجد المشتقة y' :

$$y = (2x^4 - 3x + 5)\left(x^3 - x + \frac{2}{x}\right)$$

....

....

....

❷ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = (4x^3 - 6x + 2)(x^3 - 2x + 3)$ عند $x = 0$

....

....

....

....

قاعدة القسمة

افترض أن $g(x)\,,\, f(x)$ قابلتان للاشتقاق عند x فإن :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$g(x) \neq 0$

تدريب 6

❶ باستخدام قاعدة القسمة أوجد مشتقة الدالة :

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$$

....

....

....

❷ حالة لاحاجة فيها لاستخدام قاعدتي الضرب والقسمة :

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$$

....

....

تمــارين

① استخدم النهايات لإيجـاد مشتقة كل دالة ، ثم أوجـد قيمة المشتقة للقيم المعطاة لكل متغير

❶ $f(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad x = -1$

....

....

....

....

❷ $g(t) = -t^2 + 2t \quad ; \quad t = 5$

....

....

....

....

❶ $h(u) = 5u^2 + 9u - 13 \quad ; \quad u = 7$

....

....

....

....

❷ $v(n) = 9n - 13 \quad ; \quad x = -4$

....

....

....

① أوجـد مشتقة كل دالة مما يلي :

❶ $f(x) = 2x^6 + 3\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^2} - \pi$

....

....

❷ $f(x) = (-2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$

....

....

❸ $f(x) = (2 + 3x)(5x^2 - \dfrac{3}{x})$

....

....

❹ $f(x) = x^{3/2}(x^2 - \dfrac{3}{x} + 2)$

....

....

❺ $f(x) = x(\sqrt[3]{x} + 3x)$

....

....

❻ $f(x) = x(\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}})$

....

....

❼ $f(x) = (x+2)\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

....

....

ولا خيرَ في حُسنِ الجسومِ وطولِها ...... إذا لم يَزِنْ حُسنَ الجسومِ عقولُ

Amz.math@hotmail.com

① أوجـد مشتقة كل دالة مما يلي :

❶ $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5x + 1}$

....

....

❷ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

....

....

❸ $f(x) = \dfrac{3x - x^3}{x^2 + 2x}$

....

....

....

❹ $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 5x + 1)}$

....

....

....

❺ $f(u) = \dfrac{2u}{u^2 + 1}(u + 3)$

....

....

....

❻ $f(y) = \dfrac{y^2 - 2y}{y^2 + 5y}$

....

....

....

(12-5) المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف ... ، ولكن إذا كان الشكل غير منتظم (لا تتكون من أشكال أساسية) يمكننا تقريب مساحته كما في الأمثلة الآتية :

تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات

مثال 1 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=8x-x^2$ والمحور x على الفترة $[0\ ,\ 8]$ باستعمال 4 مستطيلات ، ثم 8 مستطيلات .استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

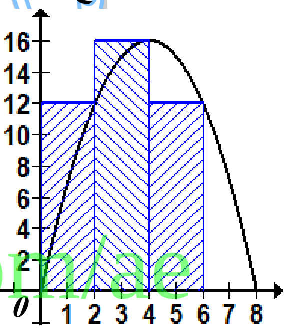
1) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة $(b-a)$ على عدد المستطيلات n ، أي أن العرض هو $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$

فمثلا لأربعة مستطيلات يكون عرض كل منها $\Delta x=\dfrac{8-0}{4}=2$ ولثمانية مستطيلات العرض $\Delta x=\dfrac{8-0}{8}=1$

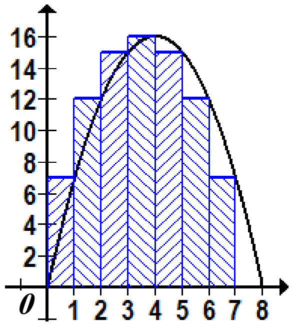
2) قسِّم الفترة $[0\ ,\ 8]$ إلى 4 فترات طول كل منها 2 ، ولثمانية مستطيلات قسّم الفترة $[0\ ,\ 8]$ إلى 8 فترات ...

3) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلا أحد بعديه طول الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

4) أوجد المساحة التقريبية وذلك بجمع مساحات المستطيلات في كل حالة كما يلي :



$$A=2\times[\,f(2)+f(4)+f(6)+f(8)]$$
$$=2\times[12+16+12+0]=80$$



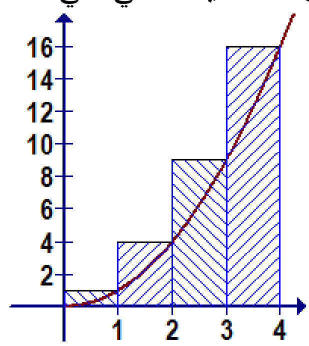
$$A=1\times[\,f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)]$$
$$=1\times[9+12+15+16+15+12+9+0]=88$$

المساحة تحت منحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

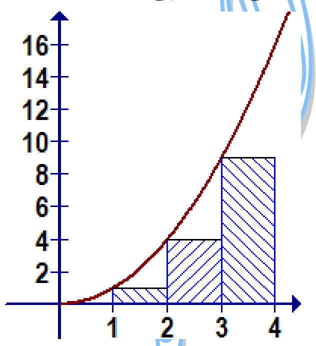
مثال 2 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=x^2$ والمحور x في الفترة $[0\ ,\ 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة .

استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها . ويوضح الشكل أدناه كل من الحالتين :



$$A=1\times[\,f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]$$
$$=1\times[1+4+9+16]=30$$

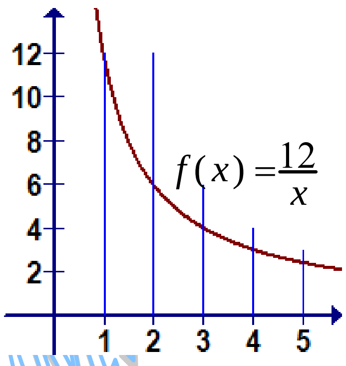


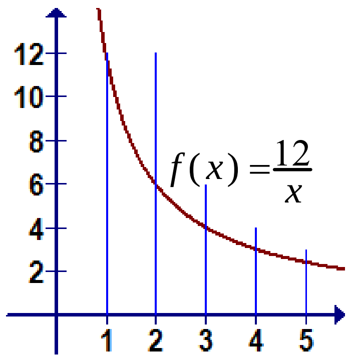
$$A=1\times[\,f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]$$
$$=1\times[0+1+4+9]=14$$

هذان تقديران تقع المساحة الفعلية بينهما ، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة ، وهو 22

تدريب 1 قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في $[1 , 5]$ باستعمال 4 مستطيلات

استعمل **a)** الأطراف اليمنى للمستطيلات **b)** الأطراف اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها





....

....

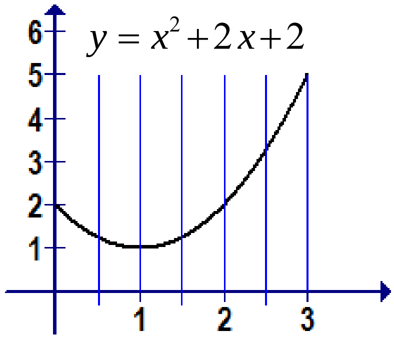
....

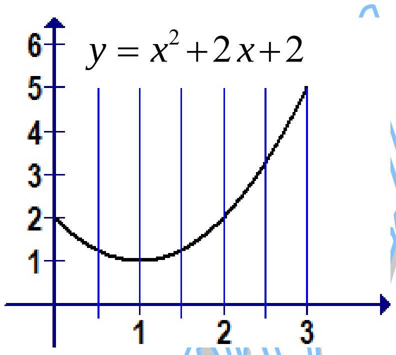
....

....

....

تدريب 2 قرِّب مساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = x^2 + 2x + 2$ على الفترة $[0 , 3]$ باستخدام 6 مستطيلات وقواعد القيم **a)** نقطة النهاية اليمنى **b)** نقطة النهاية اليسرى





....

....

....

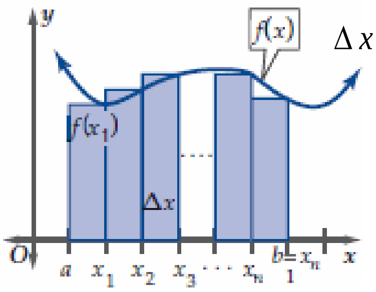
....

....

....

التكامل المحدد كنهاية لمجموع ريمان

في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة $[a , b]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول (**التجزيء المنتظم**)



وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل من المستطيلات التي عددها n) $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

وارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فمثلاً

ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$ ، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$ ، وهكذا ...

ومساحة المستطيل الأول $f(x_1)\cdot\Delta x$ ، ومساحة الثاني هو $f(x_2)\cdot\Delta x$ ، وهكذا ...

وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها أي أن :

$$A = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x$$

$$A = \Delta x[f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)] \quad or$$

باستخدام رمز المجموع $A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

ولتسهيل الحسابات، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي قيمة من قيم xi حيث طول كل فترة جزئية Δx ، وبالنظر إلى خط الأعداد نجد:

$$\begin{array}{ccccccc} a & a+\Delta x & a+2\Delta x & a+3\Delta x & --- & a+i\Delta x & --- & a+n\Delta x \\ & x_1 & x_2 & x_3 & & x_i & & x_n \end{array}$$

$$x_i = a + i\,\Delta x$$

❖ في التجزيء المنتظم تكون قيمة Δx_i ثابتة، ويكون $S_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ **مجموع ريمان الأيمن**

مجموع ريمان = مجموع مساحات المستطيلات فوق محور السينات – مجموع مساحات المستطيلات تحت محور السينات

تعريف التكامل المحدد

التكامل المحدد للدالة f في الفترة $[a , b]$ هو $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملاً**، وستُسهّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد

المجمـوع $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n$$

من خواص المجموع :

❶ $\sum_{k=1}^{n} c = nc$; c عدد ثابت ☞ $\sum_{r=1}^{10} 4 = 10\times 4 = 40$

❷ $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ☞ $1+2+3+......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

❸ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ☞ $1^2+2^2+3^2+......+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❹ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{6}\right)^2$ ☞ $1^3+2^3+3^3+......+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

❺ $\sum_{i=1}^{n} c a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$; c عدد ثابت ☞ $\sum_{x=1}^{n} 6x = 6\sum_{x=1}^{n} x = 6\times\dfrac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1)$

❻ $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$ ☞ $\sum_{r=1}^{n}(2r+3) = \sum_{r=1}^{n} 2r + \sum_{r=1}^{n} 3 = 2\sum_{r=1}^{n} r + \sum_{r=1}^{n} 3$

إيجاد المساحة تحت منحنى باستخدام تعريف التكامل

مثال 1 ❶ استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 4x$ والمحور x في $[0 , 5]$

$\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$

$x_i = \frac{5}{n} i$

$f(x_i) = 4x_i = \frac{20}{n} i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{20}{n} i)(\frac{5}{n}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{100}{n^2} i)$$

$$= \frac{100}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i) = \frac{100}{n^2} (\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{100}{2} (\frac{n+1}{n})$$

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{5}{n} i$

$$\int_0^5 4x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} 50(1+\frac{1}{n}) = 50$$

المساحة 50 وحدة مربعة

❷ استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0 , 4]$

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{4}{n} i$

$x_i = \frac{4}{n} i$

$f(x_i) = (\frac{4}{n} i)^2 = \frac{16}{n^2} i^2$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{16}{n^2} i^2)(\frac{4}{n}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{64}{n^3} i^2)$$

$$= \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i^2) = \frac{64}{n^3} (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \frac{64}{6} (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$\int_0^5 4x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{64}{3}$$

المساحة 64/3 وحدة مربعة

تدريب 1 استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 3x + 2$ والمحور x في $[0 , 1]$

....

....

....

....

....

....

....

....

لسانك لا تذكر به عورة امرئ فكلك عورات وللناس ألسن

Amz.math@hotmail.com

مثال 2 استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=4x^3$ والمحور x في $[1\,,3]$

$$\Delta x=\frac{3-1}{n}\Rightarrow \Delta x=\frac{2}{n} \quad / \quad x_i=a+i\Delta x \Rightarrow x_i=1+\frac{2}{n}i$$

$$f(x_i)=4[1+3(\frac{2}{n}i)+3(\frac{2}{n}i)^2+(\frac{2}{n}i)^3]==4[1+\frac{6}{n}i+\frac{12}{n^2}i^2+\frac{8}{n^3}i^3]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x=4[n+\frac{6}{n}(\frac{n(n+1)}{2})+\frac{12}{n^2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})+\frac{8}{n^3}(\frac{n^2(n+1)^2}{4})][\frac{2}{n}]$$

$$=\frac{8}{n}[n+3(n+1)+\frac{2}{n}(n+1)(2n+1)+\frac{2}{n}(n^2+2n+1)]$$

$$=8[1+3(1+\frac{1}{n})+2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})]$$

$$\int_0^5 4x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

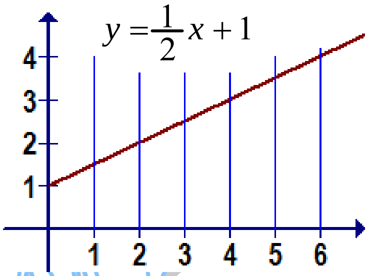
$$=\lim_{n\to\infty} 8[1+3(1+\frac{1}{n})+2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})]$$

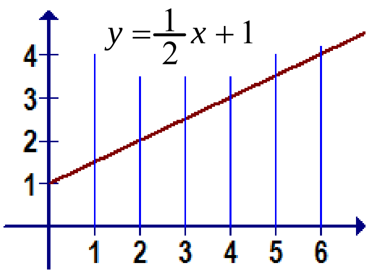
$$=8[1+3(1+0)+2(1+0)(2+0)+2(1+0+0)]=80$$

تدريب 2 استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=x^3-1$ والمحور x في $[0\,,2]$

تمارين

① قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = \frac{1}{2}x + 1$ والمحور x في الفترة $[1, 6]$ باستعمال 5 مستطيلات استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها



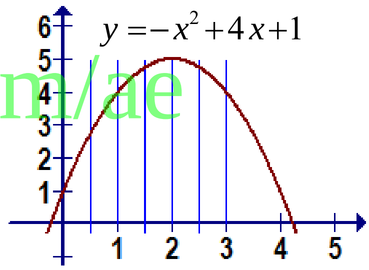


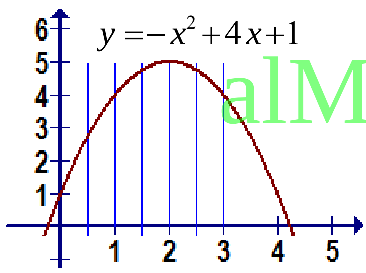
....

....

....

② قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 1$ والمحور x في الفترة $[0, 3]$ باستعمال 6 مستطيلات استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.



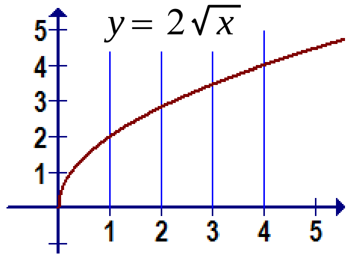


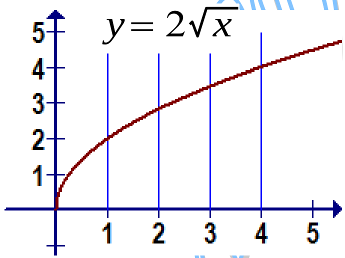
....

....

....

③ قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2\sqrt{x}$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال 4 مستطيلات استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.





....

....

....

④ استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد :

❶ $\int_{0}^{4} 6x\,dx$ $12\ unit^2$

❷ $\int_{-2}^{0} (2x+6)\,dx$ $8\ unit^2$

⑤ استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد :

❶ $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ $\qquad 32/3\ unit^2$

❷ $\int_1^3 (2x^2 + 3)\,dx$ $\qquad 70/3\ unit^2$

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (6-12)

المشتقة العكسية

أوجد المشتقة العكسية للدالة: $f(x)=3x^2$

علينا إيجاد دالة لها المشتقة $3x^2$ ، تذكر أن المشتقة لها أس أقل بواحد من أس الدالة الأصلية

إذاً المشتقة العكسية (الدالة الأصلية) يمكن أن تكون $F(x)=x^3$ تحقق من ذلك ، ولكن هذه الدالة ليست الوحيدة

فالدالة $G(x)=x^3-10$ مشتقة عكسية أخرى لأن $G'(x)=3x^2$ وكذلك الدالة $H(x)=x^3+44$ ....

لاحظ أن المشتقة لها عدد لا نهائي من الدوال الأصلية تختلف عن بعضها في الثابت

أوجد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة: $f(x)=3x^2$

b) $f(x)=-3x^{-4}$

a) $f(x)=2x$

....

....

تعريف التكامل غير المحدود

إذا كانت $F(x)$ مشتقة عكسية للدالة $f(x)$ على الفترة I فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$

يُعطى بالصيغة $\int f(x)dx=F(x)+c$ ، الرمز $\int$ علامة التكامل ، و C أي حد ثابت (ثابت التكامل).

قواعد التكامل غير المحدود

✓ لأي عدد ثابت $k\neq 0$ يكون : $\int k\,dx=kx+c$

أوجـد التكامل :

❶ $\int -2\,dx=$ ....

❷ $\int \frac{3}{5}dx=$ ....

✓ **قاعدة القوى:** لأي قوة نسبية $n\neq -1$ يكون $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

أوجـد التكامل :

❶ $\int x^2\,dx=$ ....

❷ $\int x^{-4}\,dx=$ ....

❸ $\int x^{3/2}\,dx=$ ....

وتذكّر أن :

◈ $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ◈ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ◈ $(a^m)^n=a^{m.n}$

◈ $a^n\times b^n=(a\times b)^n$ ◈ $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$ ◈ $(a)^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$(b)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}$

$\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

✓ قاعدة الضرب في ثابت : $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ حيث k عدداً حقيقيا

✓ قاعدة الجمع والطرح : $\int [\, f(x) \pm g(x)\,]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

أوجـــد التكامل : $\int (4x^3 + 2x - 3)\,dx$

....

....

ملاحظة هامة : لا يمكن توزيع التكامل على الضرب والقسمة

$$\int (f(x) \times g(x))\,dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

تذكّر أن: $\int v(t)\,dt = s(t) + c$ $\int a(t)\,dt = v(t) + c$ $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$

مثال 1 أجرى طلاب إحدى المدارس تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة ارتفاعها $9\,m$ عن سطح الأرض وتمثّل $v(t) = -10t$ السرعة المتجهة للكرة (متر لكل ثانية) بعد t ثانية من سقوطها

a) أوجد دالّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$
$$= \int -10t\,dt = \frac{-10t^2}{2} + C$$
$$= -5t^2 + C$$

لإيجاد C نعوض عن الارتفاع $s(t)$ بـ 9 وعن الزمن t بـ 0

$$9 = -5(0)^2 + C \Rightarrow C = 9$$

دالّة موقع الكرة بعد t ثانية من سقوطها هي $s(t) = -5t^2 + 9$

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة لتصدم بالأرض

تصدم الكرة بالأرض عندما $s(t) = 0$

$$0 = -5t^2 + 9 \Rightarrow 5t^2 = 9$$
$$t^2 = 1.8 \Rightarrow t = 1.341$$

تصدم الكرة بالأرض في غضون 1.34 ثانية تقريباً

تدريب 1 عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع $36m$ سقطت محفظته نحو الأرض ،
وتمثّل $v(t)=-32t$ السرعة المتجهة اللحظية للمحفظة بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها
a) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.
b) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة لتصدم بالأرض

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ المتصلة في الفترة $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

مثال 2 ❶ احسب التكامل المحدد $\int_1^2 (3x^2+2x)dx$

$$\int (3x^2+2x)dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+C=x^3+x^2+C$$

$$\int_1^2 (3x^2+2x)dx=x^3+x^2\Big|_1^2$$

$$=(2^3+2^2)-(1^3+1^2)=10$$

❷ استخدم النظرية الأساسية لحساب المساحة المحصورة بين منحنى $y=4x-x^2$ والمحور x في الفترة $[0,4]$

$$A=\int_0^4 (4x-x^2)dx=2x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$=[2(4)^2+\frac{4^3}{3}]-[2(0)^2+\frac{0^3}{3}]=\frac{160}{3}$$

لا تترك شخص محتاج لك ، فربما أنت آخر ما لديه من أمل

تدريب2

❶ احسب التكامل المحدد $\int_1^3 (3x^2+5)\,dx$

....

....

....

❷ استخدم النظرية الأساسية لحساب المساحة المحصورة بين منحنى $y=4x^3$ والمحور x في الفترة $[1\,,3]$

....

....

....

مثال 3 يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة $0.5\,m$ من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسا بوحدة الجول ؟

$$W=\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2\Big|_0^{0.5}$$

$$=180(0.5)^2-180(0)^2$$

$$=45-0=45$$

تدريب3 يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة $0.5\,m$ من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{1.4} 512x\,dx$

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسا بوحدة الجول ؟

....

....

....

ملاحظة : ✓ إذا كان منحنى الدالة f فوق محور السينات في $[\,a\,,b\,]$ فإن المساحة : $A=\int_a^b f(x)\,dx$

أما إذا كان منحنى الدالة f تحت محور السينات في $[\,a\,,b\,]$ فإن المساحة : $A=-\int_a^b f(x)\,dx$

من خوص التكامل المحدد : $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx=0$

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

تمـــارين

① أوجــد كلاً من التكاملات الآتية :

❶ $\int (x^3 + 5x + 7)\,dx$

....

....

❷ $\int (4x^3 + 3x)\,dx$

....

....

❸ $\int (x^4 + x^2 - 5)\,dx$

....

....

❹ $\int (x^3 + 3\sqrt{x})\,dx$

....

....

❺ $\int \frac{2x^3+3}{x^2}\,dx$

....

....

❻ $\int (x^2 - 3)(4x - 6)\,dx$

....

....

❼ $\int (x - \frac{1}{x})^2\,dx$

....

....

....

② أوجد كلاً من التكاملات المحدودة :

❶ $\int_{-1}^{2}(7-4x)\,dx$

....

....

❷ $\int_{1}^{4}(3x-2)\,dx$

....

....

❸ $\int_{-4}^{0}(x^2+4x)\,dx$

....

....

....

❹ $\int_{1}^{2}(3x^2+2x)\,dx$

....

....

....

❺ $\int_{-3}^{1}(6x^2+5x+2)\,dx$

....

....

....

❻ $\int_{1}^{3}\frac{4x^3-1}{x^2}\,dx$

....

....

....

③ استخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى لكل دالة والمحور x في الفترة المعطاة :

❶ $f(x) = 3x^2 + 1 \quad ; \quad [-2, 1]$

....

....

....

❷ $f(x) = 1 - 2x \quad ; \quad [1, 3]$

....

....

....

❸ $f(x) = x - 3 \quad ; \quad [1, 6]$

....

....

....

④ أوجد كلاً من التكاملات المحدودة :

❶ $\int_{x}^{2} (3t^2 + 8t)\,dt$

....

....

❷ $\int_{3}^{2x} (4t^3 + 10t + 2)\,dt$

....

....

❸ $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\,dt$

....

....

صلاح أمرك للأخلاق مرجعه   فقوّم النفس بالأخلاق تستقم

Amz.math@hotmail.com

⑤ إذا كانت $\int_0^1 (a x^2 + 5)\, dx = 7$ ، أوجد قيمة العــدد ثابت a .

....

....

....

⑥ تُعطى السرعة المتجهة لمقذوف بالعلاقة $v(t) = -32t + 120$ (قدم لكل ثانية) ويبلغ ارتفاعه $228\ ft$ بعد $2\ s$

(a أوجد دالة موقع المقذوف $s(t)$ بعد t ثانية من إطلاقه

(b أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف

(c أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض

....

....

....

....

....

....

....

....

....

⑦ يقدم التكامل $\int_0^{n+0.5} x^k\, dx$ تقديراً معقولاً لمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n} i^k$ استخدم التكامل لتقدير كل مجموع :

❶ $\sum_{i=1}^{30} i^2$

....

....

❷ $\sum_{i=1}^{20} i^3$

....

....

تمنيـــاتي للجميـــع بالتوفيق والتفوق

Amz.math@hotmail.com