بسم الله الرحمن الرحيم

"ووصينا الإنسن بولديه حملته أمه وهنا على وهن وفصله
في عامين أن اشكر لى ولولديك إلى المصير"

صدق الله العظيم

****

... **يارسول الله** من أحق الناس بحسن صحابتي؟

.. **أمك**... ثم من؟ ... **أمك**... ثم من؟. **أمك** ...

ثم من؟ ... **أبوك**

صدقت ياسيدي يارسول الله ...

****

أمي ياملاكي ... ياحبي الباقي إلى الأبد

ولاتزل يداكي أرجوحتي .. ولا أزل ولد

****

لأمي الحبيبة مع كل الحب والعرفان

قيصرون

المحتويات

الفصل الأول: الفيزياء: علم الطبيعة - المتجهات

الفصل الثاني: حركة الأجسام

الفصل الثالث: الحركة في مستو

الفصل الرابع: تحريك الأجسام

الفصل الخامس: الشغل والطاقة

الفصل السادس: حركة منظومة جسيمات

الفصل السابع: التصادمات

الفصل الثامن: الحركة الدورانية

الفصل التاسع: التحريك الدوراني

الفصل العاشر: الحركة الاهتزازية

الفصل الحادي عشر: السوائل

الفصل الثاني عشر: الأمواج

الفصل الثالث عشر: الحرارة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الكرام وأصحابه أجمعين، وبعد، فقد تم بحمد الله إنهاء هذه الطبعة من هذا الكتاب حيث قمت بإعادة طباعته شخصيا وإعداد الرسوم والمنحنيات والجداول، وأضفت العديد من الصور الضوئية المناسبة لجعل المادة مرتبطة بالتطبيقات الحياتية اليومية. وحاولت جهدي أن أضع المادة بين يدي طلبتنا الأعزاء بشكل ميسر وسلس مع المحافظة على العمق الفيزيائي المناسب لهذه المرحلة. وكما في الطبعات السابقة فإن التمارين والمسائل المرفقة مع كل فصل تغطي المادة المطروحة مع تسلسل درجة الصعوبة لمساعدة الطلبة الأعزاء في حلها، وأضفت ملحقا بإجابات الأسئلة الزوجية على أمل إعداد كتيب مرافق للأخوة المدرسين بكافة الحلول بأقرب فرصة إنشاء الله.

ومرة أخرى فهذا جهد شخصي متواضع ولذا فكلي أمل أن يتكرم علي الأخوة والأخوات المدرسين والمدرسات وطلبتنا الأعزاء بموافاتي بما يرتأونه مناسبا للتعديل أو التصويب.

ويبقى الهدف الأساس من هذا العمل وضع كتاب علمي جامعي بلغة عربية سليمة، ما أمكن، للتأكيد على أن هذه اللغة غنية بتعابيرها ومصطلحاتها لكل علم وكل وقت. ولاشك بأن استيعاب العلم لايمكن أن يتحقق بالشكل الكامل الذي يجعل قارئه عالما به إلا إذا كان بلغة الأم الأصلية التي تنقل الكلمات والمصطلحات صورا ومعاني، لا حروفا باردة تجهد قارئها ليشكل منها كلمة ينقلها لقاموس الدماغ، ومن ثم يجمعها مع غيرها من الكلمات المترجمة في جملة مركبة بطريقة مكسرة لايفهم منها إلا اليسير، وهذا مايعانيه معظم طلبتنا الجامعيين مع الكتب الأجنبية المفروضة عليهم للأسف. وإنني أدعو الزملاء والزميلات للتعاون لإثراء المكتبة العلمية العربية بماتحتاجه من المراجع والكتب الضرورية، والذي صار في زمننا هذا ضرورة وواجبا على الجميع.

أخيرا، فيسرني أن أشكر زملائي بقسم الفيزياء بجامعة البحرين على تشجيعهم لإتمام هذه الطبعة. كما أشكر الأخ العزيز محمود الحمد من دار الأمل على متابعة نشر طبعات الكتاب المختلفة على مدي مايزيد عن خمس وعشرين سنة وحرصه على إخراج هذه الطبعة بالشكل المناسب.

"**والله غالب على أمره، ولكن أكثر الناس لايعلمون**" والحمد لله رب العالمين.

الولايات المتحدة 17-2-2006

محمد قيصرون ميرزا
قسم الفيزياء – جامعة البحرين
mkmerza@gmail.com

الفصل الأول

الفيزياء: علم الطبيعة- المتجهات

1-1 مقدمة: الكميات الفيزيائية *(Physical Quantities)*

الفيزياء علم الطبيعة الذي يهتم بكل مافيها من ظواهر ومشاهدات وحوادث، فيصف كل واحدة ويضع النظريات والقوانين التي تحاول تحديد أسبابها ونتائجها وكيف يمكن الاستفادة منها. وهوعلم قائم على التجربة والبرهان، فكل مانعرفه عن العالم من حولنا والقواعد والنظم التي تتحكم به ليس إلا محصلة ملاحظات وتجارب البشر للظواهر الطبيعية ومحاولة تفسيرها مع مرور الزمن. وبالتالي فإن كل نظرية توضع لوصف أو تعليل أي ظاهرة لابد وأن تخضع للتجربة والاختبار للتأكد من صحتها أو بطلانها. وعند قيامنا بإجراء تجربة ما فإننا نقوم بقياس كميات محددة، كالمسافة التي يسيرها الصوت في زمن معين، أو مقدار تغير درجة حرارة معدن عند وضعه في فرن حار. ثم نستعمل هذه الكميات **المقاسة** *(measured quantities)* للحصول على كميات أخرى **محسوبة** *(calculated quantities)* كسرعة انتشار الصوت، أو الحرارة النوعية لمعدن، وهكذا.

ويطلق على كل عدد يعبر عن قيمة فيزيائية اسم **كمية فيزيائية** *(physical quantity)*. فعندما نقول إن طول غرفة هو أربعة أمتار فإننا نعبر عن كمية فيزيائية هي الطول، ولذلك فإن العدد 4 هو كمية فيزيائية، بينما لو كتبنا طاقة حركة جسم بالشكل $\frac{1}{2}mv^2$ فإن العدد ½ لايعتبر كمية فيزيائية وليس له أبعاد.

ولتعريف أي كمية فيزيائية يجب أن يكون بالإمكان وصف طريقة لقياسها أو تحديد العمليات الرياضية اللازمة لحسابها. فنعرف الزخم الخطي لجسم بحاصل ضرب كتلته بسرعته، بينما نعرف سرعة الجسم بحاصل قسمة المسافة المقطوعة على الزمن اللازم لذلك. إلا أنه لاتوجد كميات فيزيائية أبسط من الكتلة والزمن والمسافة حتى نعرفها بها. ولذلك تسمى هذه المقادير **كميات أساس** *(basic quantities)* وتكتب أي كمية فيزيائية أخرى في الميكانيك، مثل الطاقة والقوة والعزم وغيرها، بدلالتها. ويطلق على هذه الأخيرة عندئذ اسم **كميات مشتقة** *(derived quantities)*. وتكون وحدات هذ الكميات ناتجة عن حاصل ضرب و/أو قسمة وحدات الكميات الأساس فقط. فمثلا وحدة القوة في النظام الدولي هي النيوتن الذي يساوي كيلوغرام مضروبا بالمتر ومقسوما على مربع الثانية ($1\ N=1\ kg.m/s^2$).

ونستفيد مما تقدم للتأكد من صحة المقادير التي نستخدمها في الفيزياء إذ لايجوز أن تحوي وحدة القوة مثلا وحدة الكتلة مربعة أو وحدة المسافة مكعبة، وهكذا.

2-1 نظام الوحدات الدولي *(SI units)*

عندما نقيس كمية فيزيائية، كالمسافة أو الزمن أو الكتلة، فإننا نقارنها بكمية ثابتة نسميها **وحدة عيارية** *(standard unit)*، كالمتر أو الثانية أو الكيلوجرام. فعندما نقول مثلا إن طول حبل ثلاثون مترا، أي أن طول هذا الحبل يعادل ثلاثين ضعفا من طول وحدة عيارية ثابتة تساوي بالتعريف مترا واحدا. وقد تقرر في نظام الوحدات الدولي التي يرمز لها بـ SI *(Systeme International)* أن يكون **المتر** (m) الوحدة الأساسية للطول، **والثانية** (s) الوحدة الأساسية للزمن، **والكيلوجرام** (kg) الوحدة الأساسية للكتلة.

وهناك أنظمة أخرى للوحدات، كالنظام الانجليزي حيث يستخدم القدم والباوند كوحدات أساس للطول والثقل، إلا أنها في طريقها للزوال نتيجة اتفاق دولي لاستخدام الوحدات الدولية.

ويعتمد تحديد وحدة عيارية ما للطول والكتلة والزمن، وأي كمية أخرى، على ثبوت هذه الكمية العيارية مع مرور الوقت وإمكانية نسخها بسهولة لتوفيرها للمختبرات والمؤسسات المختلفة التي

تحتاج إليها. ونتطرق فيما يلي لتعريف الوحدات الأساس للطول والكتلة والزمن في النظام الدولي.

1- وحدة الطول *(length)*

المتر العياري التقليدي

اعتمد المتر كوحدة أساسية للطول وعرف تاريخيا بواحد من المليون من المسافة الفاصلة بين القطب الشمالي وخط الاستواء مرورا بمدينة باريس. وقد تم تحديد هذه المسافة بدقة بين نقطتين على طرفي قضيب معدني مصنوع من خليط من البلاتين والإريديوم عند درجة حرارة 0 °C، ويحتفظ به في متحف في باريس. وعلى الرغم من الدقة الفائقة التي تم بها تحديد هذا المتر العياري إلا أنه تبين أنه يختلف بحدود 0.023% عما كان مقصود به، مع صعوبة الحصول على نسخ منه، ناهيك عن التغير الطفيف في طوله مع درجة الحرارة وغير ذلك من العوامل. لذلك بحث اختصاصيو المواصفات والمقاييس عن ظواهر طبيعية ثابتة ليس للإنسان أي علاقة بها ولايمكنه التدخل بخواصها التي قدرها الخالق العظيم. فتقرر في المؤتمر الدولي للمواصفات والمقاييس عام 1960 اعتماد "وصفة" جديدة للمتر ليكون مساويا لـ 1,650,763.73 ضعفا من طول موجة اللون الأحمر-البرتقالي الصادر عن عنصر الكريبتون (^{86}Kr) في الفراغ. وقد اختير هذا الرقم الغريب ليبقى المتر مساويا للطول الأصلي الذي اعتمد سابقا. ويبدو جليا أن المتر المعرف بهذه الطريقة مستقل تماما عن أي آلة أو تدخل بشري، وعلى الرغم من ذلك فإن حاجة المؤسسات البحثية والمختبرات العلمية للدقة والتقانة الأعظم تطلبت تعريفا أدق للمتر. لذا تقرر عام 1983، خلال المؤتمر السادس عشر للمواصفات والمقاييس، اعتماد سرعة الضوء، التي تعتبر أكثر الكميات الفيزيائية ثبوتا، أن يكون المتر مساويا إلى المسافة التي يقطعها الضوء في الفراغ خلال 1/299,792,458 من الثانية، أي أن سرعة الضوء قد تحددت بالقيمة 299,792,458 متر لكل ثانية. ونعطي في الجدول1-1 بعض المسافات في الطبيعة.

2- وحدة الكتلة *(mass)*

لعل تحديد وحدة عيارية للكتلة هو من أصعب المواضيع التي واجهها اختصاصيوا القياس والمواصفات. ففي البدء تقرر اعتبار الكيلوجرام مساويا لقطعة معينة من خليط البلاتين والإريديوم، واحتفظ بهذه القطعة في باريس. إلا أن هذا لم يكن دقيقا تماما فاستخدمت ذرة الكربون ^{12}C وقورنت بقية العناصر بها للحصول على كتلها بالنسبة لها (الكتل النسبية). ولكن

الكيلوجرام العياري

مقارنة هذه الكمية العيارية بكتل منظورة ومحسوسة بدقة عالية لم يكن ممكنا. وبخلاف أختيها الزمن والطول بقيت وحدة الكتلة بدون تعريف دقيق بشكل كاف. ولذلك قام مكتب المواصفات والقياس في الولايات المتحدة الأمريكية ومعهد القياس التقني في ألمانيا بابتكار طريقة جديدة لتحديد الكتلة عن طريق حساب عدد الذرات في قطعة من السيليكون بدقة عالية. فأمكن إعادة تعريف الكيلوجرام ليكون مساويا لعدد معين من ذرات عنصر السيليكون بحيث يمكن الحصول على نسخ منه في أي مكان في العالم بتحضير عينة تحوي ذلك العدد تماما. ونعطي في الجدول1-1 بعض الكتل في الطبيعة.

3- وحدة الزمن *(Time)*

تعتمد وحدة الزمن على ظاهرة تتكرر دائما بنفس الشكل وخلال نفس الزمن، كاهتزازات بندول بسيط أو دوران الأرض حول الشمس وغيرها. وقد كان شائعا استخدام متوسط طول اليوم الشمسي (الزمن الفاصل بين ظهورين متتاليين للشمس في كبد السماء) ليكون مساويا إلى 86,400 ثانية أي 24 ساعة. لكن تغير طول اليوم خلال السنة جعل هذا التعريف غير دقيق تماما. ولذلك اعتمد على تردد اهتزازات ذرات بلورات الكوارتز كوحدة عيارية للزمن لفترة قريبة جدا. إلا أن دقة هذه الطريقة ترتبط بطاقة هذه الذرات التي لاتبقى ثابتة تماما نتيجة الاحتكاك وغير ذلك من المؤثرات الخارجية. فاستخدمت اهتزازات عنصر السيزيوم (^{133}CS) بدلا منها وحددت الثانية لتكون مساوية إلى الزمن اللازم لـ 9,192,631,1770 اهتزازة من ذرات هذا العنصر. ونعطي في الجدول1-1 بعض القيم لفترات زمنية معينة.

ساعة سيزيوم

وكثيرا مانستعمل أضعافا أو أجزاءا من وحدة عيارية ما. ففي نظام الوحدات الدولي نستعمل الوحدات العيارية مضروبة بالعدد عشرة مرفوعة لقوة ما، ويطلق عليها عندئذ اسم خاص بها. ونعطي في الجدول 1-2 اسم الوحدة الأساس ومضاعفاتها للطول والزمن والكتلة في هذا النظام. وفي الجدول1-3 الأسم الذي يطلق على العدد عشرة مرفوعا إلى إحدى القوى.

الجدول 1-1

بعض الأطوال في الطبيعة (m)		بعض الكتل في الطبيعة (kg)		بعض الفترات الزمنية (s)	
بعد الأرض عن الشمس	2×10^{16}	الكون	10^{52}	عمر الكون	5×10^{17}
بعد القمر عن الأرض	4×10^{9}	مجرة درب التبانة	7×10^{41}	عمر الشمس	1.4×10^{17}
نصف قطر الشمس	7×10^{8}	الشمس	9×0^{30}	عمر الأرض	1×10^{17}
نصف قطر الأرض	6.4×10^{6}	الأرض	6×10^{24}	عمر الإنسان	6×10^{8}
نصف قطر القمر	1.7×10^{6}	القمر	7×10^{22}	سنة ارضية	3×10^{7}
أعلى جبل في العالم	9×10^{3}	الإنسان الرشيق	7×10^{1}	يوم واحد	9×10^{4}
متوسط طول الإنسان	1.7×10^{0}	حشرة	1×10^{-5}	محاضرة مملة	3×10^{3}
قطر ذرة الهيدروجين	1×10^{-10}	جرثوم	1×10^{-55}	نبضة قلب	8×10^{-1}
قطر النواة	1×10^{-14}	ذرة الهيدروجين	2×10^{-27}	موجة صوتية	1×10^{-3}
قطر البروتون	1×10^{-15}	الإلكترون	9×10^{-31}	موجة ضوئية	2×10^{-15}

وقد يكون من الضروري في بعض الأحيان تحويل وحدات كميات فيزيائية من نظام لآخر أو من شكل لآخر. فإذا أعطيت سرعة جسم بالكيلومتر بالساعة بينما المطلوب تقديرها بالمتر لكل ثانية عندئذ نستخدم الجدولين 1-2 و1-3 لتحويل السرعة من شكل لآخر، كما يلي:

$$1\,\text{km/h}=(1\,\text{km}\times1000\,\frac{\text{m}}{\text{km}})/(1\,\text{h}\times3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}})=0.278\,\text{m/s}$$

وبنفس الطريقة نحول وحدات أي كمية من نظام لآخر.

3-1 أبعاد الكميات الفيزيائية ومعادلة الأبعاد *(Dimensions)*

إن مهمة الدارس للعلوم الطبيعية، كالفيزياء، أن يربط بين الكميات الفيزيائية بوساطة معادلات وقوانين مختلفة واستنتاج مايمكن استنتاجه منها. ويجب أن تتوافق أبعاد الكميات المستعملة في علاقة ما مع بعضها. فلا يجوز مثلا أن نساوي بين كيلومترات وساعات، أو بين جول ووات. كما لايمكن أن نجمع ساعات مع أمتار، أو كيلوجرامات مع جول. ولهذا نستعمل أبعاد الكميات الفيزيائية للتأكد من صحة القوانين والمعادلات التي نستخدمها في التجارب والتطبيقات. وتعني كلمة بعد *(dimension)* ماهية الكمية الفيزيائية. فسواء قدرنا المسافة بين نقطتين بالمتر أو بالقدم أو بالقصبة فإننا في كل الأحوال نتكلم عن مسافة ونقول إن بعد المسافة هو **طول** *(length)*

ونرمز له [L]. وبنفس الشكل نرمز لبعد الزمن *(time)* [T] ولبعد الكتلة *(mass)* [M]، حيث نستخدم الأقواس المربعة [ ] للدلالة على بعد الكمية فقط وليس على وحدتها أو قيمتها.
فإذا أعطينا حجم اسطوانة بدلالة نصف قطرها وارتفاعها على النحو $V = \pi r^2 h$ عندئذ يمكن التحقق من صحتها بكتابة معادلة الأبعاد $[V]=[L]^2[L]$ حيث $[L]^2$ بعد مربع نصف القطر و [L] بعد الارتفاع، أما π فهو رقم لايمثل كمية فيزيائية وليس له أبعاد. ومن ثم نجد أن بعد الحجم هو $[V]=[L]^3$ أي مكعب المسافة. فالعلاقة المذكورة أعلاه صحيحة من ناحية الأبعاد على الأقل.

مثل 1-1

تعطى الطاقة الميكانيكية لجسم بالعلاقة $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ حيث m كتلته وv سرعته وg تسارع الجاذبية الأرضية قرب سطح الأرض وh ارتفاع الجسم عن سطح الأرض. تأكد من توافق الأبعاد في هذه العلاقة.

الحل: نكتب معادلة الأبعاد من العلاقة السابقة ملاحظين أن أبعاد الكتلة هي [M]، وأبعاد السرعة هي مسافة مقسومة على زمن، أي [L]/[T]، وأبعاد تسارع الجاذبية هي مسافة مقسومة على مربع الزمن، أي $[L]/[T]^2$. ومن ثم نكتب معادلة الأبعاد للعلاقة المعطاة بالشكل:

$$[E]=[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}+[M]\frac{[L]}{[T]^2}[L]=[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}+[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}$$

ونلاحظ أن للحدين الأخيرين من الطرف الأيمن نفس الأبعاد وهي كتلة مضروبة بمربع مسافة مقسومة على مربع زمن وهذه أبعاد طاقة، كما سنجد في الفصول اللاحقة. كما نلاحظ أننا لم نذكر العدد ½ لأنه رقم ولايمثل كمية فيزيائية.

مثل 2-1

يستخدم طالب العلاقة التالية لتحديد بعد سيارة عنه بدلالة الزمن:

$$s = \tfrac{1}{2} v_0 t^2 + vt$$

حيث s وv بعد السيارة وسرعتها في اللحظة t بينما v_0 سرعتها لحظة بداية مراقبتها (السرعة الابتدائية) والعدد ½ ثابت ليس له أبعاد. تأكد من صحة هذه العلاقة.

الحل: لنكتب معادلة الأبعاد للعلاقة السابقة، مهملين العدد ½ لعدم وجود أبعاد له، فنجد:

$$[L]\overset{?}{=}\frac{[L]}{[T]}[T]^2+\frac{[L]}{[T]}[T]$$

حيث $[L]/[T]$ بعد السرعة المساوي لمسافة مقسومة على زمن، ومن ثم يكون:

$$[L] \stackrel{?}{=} [L][T] + [L]$$

ونلاحظ أن أبعاد الطرف الأيمن تختلف عن أبعاد الطرف الأيسر، أي أن المعادلة غير صحيحة.

4-1 الأرقام المعنوية *(Significant figures)*

عند قياس كمية فيزيائية بطريقة ما فإن دقة النتيجة التي نتوصل إليها تكون محدودة ضمن إمكانيات الأجهزة التي نستخدمها، وخبرة الشخص الذي يقوم بالقياس، وعدد المرات التي تقاس بها الكمية المعنية، وغير ذلك. فمثلا إذا قسنا طول وعرض قطعة مستطيلة باستخدام مسطرة مترية دقتها 0.1 cm ± ووجدنا أن طول القطعة 16.3 cm فذلك يعني أن طولها محصور بين 16.2 cm و16.4 cm، ونقول إن القيمة المقاسة تحوي ثلاثة أرقام معنوية. وبنفس الشكل، إذا قسنا عرض القطعة 4.5 cm فإن القيمة الحقيقية تقع بين 4.4 cm و 4.6 cm، وتحوي هذه القيمة رقمين معنويين فقط. ونلاحظ أن الأرقام المعنوية تشمل أول رقم تقريبي في المقدار المقاس، أي الرقم 3 في الطول والرقم 5 في العرض. ونكتب نتيجة قياس الطول والعرض بالشكل 16.3±0.1 cm و4.5±0.1 cm، على الترتيب. لنحسب الآن مساحة القطعة بضرب طولها بعرضها فنجد $(16.3\ \text{cm})(4.5\ \text{cm})=73.35\ \text{cm}^2$. إلا أنه لايصح كتابة النتيجة بهذا الشكل لأنها تحوي أربعة أرقام معنوية، أي أكثر من القيمتين المقاستين. ولمعرفة العدد الصحيح للأرقام المعنوية اللازم الاحتفاظ بها نستخدم القاعدة التالية: عند إجراء عملية حسابية على أرقام مختلفة فإن عدد الأرقام المعنوية في الجواب النهائي يجب أن لايزيد عن عدد الأرقام المعنوية في الكمية الأقل دقة، أي التي تحوي أقل عدد من الأرقام المعنوية. وبتطبيق ماتقدم على مساحة القطعة المذكورة أعلاه نلاحظ أن الجواب لايجب أن يشمل أكثر من رقمين معنويين لأن العرض يحوي رقمين فقط ولذا نكتب مساحة القطعة بالشكل: $7.3\times10^1\ \text{cm}^2$.

من جهة أخرى، فإن العدد صفر في رقم ما قد يشكل معضلة إن لم يتم التعامل معه بشكل صحيح. فلو كتبنا كتلة جسم 1500 g أو 1.5 kg فإن كلا الرقمين صحيح، إلا أننا نكتب الإجابة دائما على شكل عدد مضروب بعشرة مرفوعة إلى قوة ما. فإن كان العدد يحوي رقمين معنويين نكتب 1.5×10^0 kg، وإن حوى ثلاثة أرقام معنوية فنكتب 1.50×10^0 kg، وهكذا. وبنفس الشكل نكتب رقما مثل 0.0015 بالرموز العلمية 1.5×10^{-3} إذا حوى رقمين معنويين فقط أوعلى النحو 1.50×10^{-3} إن حوى ثلاثة أرقام معنوية.

ونستنتج مما تقدم أن وجود أصفار إلى يمين أو يسار الرقم لايعني كونها معنوية بالضرورة، أما وجودها في منتصفه، مثل 105، فإنها تحسب ضمن الأرقام المعنوية طبعا.

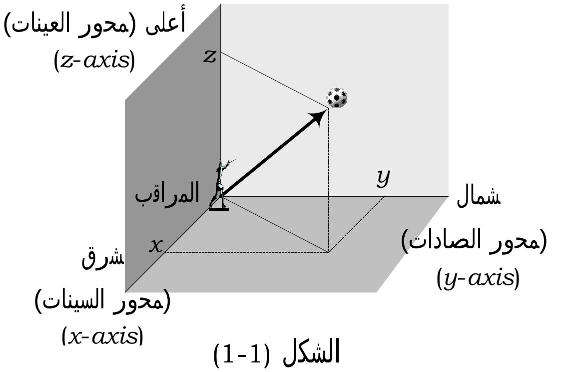
ويمكن تحديد مكان الفاصلة العشرية في أي نتيجة حسابية باستخدام القاعدة التالية: عند إجراء عملية حسابية على أرقام مختلفة فإن عدد الأرقام إلى يمين الفاصلة يجب أن يكون مساويا لأقل عدد من الأرقام على يمينها في أي عدد مستعمل في العملية. فعلى سبيل المثال إذا جمعنا 23.1+5.32 فيجب كتابة النتيجة 28.4 فقط وليس 28.42.

ونعيد التذكير بأن عدد الأرقام المعنوية التي يمكن الاحتفاظ بها في أي عدد يعتمد على الطريقة التي حصلنا عليه. فإن كان نتيجة قياس مباشر فيعتمد على أجهزة وطريقة القياس، وإن كان نتيجة حساب من أعداد أخرى فيعتمد على هذه الأعداد وكم فيها من أرقام معنوية.

5-1 المحاور الإحداثية *(Coordinate Systems)*

عندما ندرس حركة ما، كالنجوم في السماء أو الإلكترونات في الذرة أو سيارة في الشارع، فإننا نكون معنيين بتحديد موضع وسرعة وتسارع الجسم المدروس والقوى المؤثرة عليه في كل لحظة من الزمن. فإذا قام مراقب بمتابعة جسم ما (نجم أو سيارة أو كرة قدم، الخ) فإنه يحدد موضعه بالنسبة له فيقول إن الجسم يبعد عنه مسافة ما وباتجاه معين. وإذا انتقل الجسم من مكانه فإنه يحدد بعده واتجاهه الجديدين في كل لحظة. ومما لاشك فيه أنه إذا كانت حركة الجسم في الفضاء عشوائية فإن تحديد المكان أو الموضع يصير موضوعا معقدا فعلا. لذا يمكن للمراقب اعتماد اتجاهات ثابتة بالنسبة له ويحدد مواضع الأجسام التي يدرسها بالنسبة لهذه الاتجاهات. فإذا اعتمد الاتجاهات التالية: شرق-غرب وشمال-جنوب وأعلى-أسفل، يقول إن الجسم يبعد عنه 3 m شرقا و 7 m جنوبا و4 m للأعلى. وإذا اتحرك الجسم من مكانه فإن أبعاده الثلاثة تتغير مع الزمن وفق علاقات معينة تحددها القوى المؤثرة عليه، كما سنرى لاحقا. ولكن تحديد الاتجاهات بكلمات شرق أو غرب أو شمال أو جنوب، الخ، ليس عمليا تماما، كما يحتمل أن يكون هناك اتجاهات أفضل للاستعمال عند دراسة حركة أجسام معينة. لذا نعتمد اصطلاحا شبكة من ثلاثة محاور متعامدة يطلق عليها اسم **منظومة محاور إحداثية** *(coordinate system)* ينطبق فيها محور السينات *(x-axis)* على اتجاه شرق-غرب مثلا، ومحور الصادات *(y-axis)* على اتجاه شمال-جنوب، ومحور العينات *(z-axis)* على اتجاه أعلى-أسفل. عندئذ نقول إن موضع الجسم المذكور آنفا يعطى بالإحداثيات x=+3 m وy=−7 m و z=+4 m، حيث نتفق أن الإشارة الموجبة تعني نحو الشرق أو الشمال أو الأعلى، على الترتيب، بينما تعني الإشارة السالبة نحو

الغرب أو الجنوب أو الأسفل، على الترتيب أيضا. وتسمى x وy وz **إحداثيات ديكارتية** *(Cartesian coordinates)*، كما هو موضح بالشكل (1-1). وهناك طرق أخرى لتحديد موضع جسم في الفضاء، إلا أننا سنكتفي باستخدام الإحداثيات الديكارتية فقط في هذا الكتاب.



الشكل (1-1)

6-1 المتجهات والأعداد *(Vectors & Scalars)*

تتميز بعض الكميات الفيزيائية، مثل الزمن أوالكتلة وغيرها، أنها تتعين كليا بعدد واحد فقط، مع إشارة موجبة أو سالبة أحيانا. فعندما نقول إن كتلة جسم تساوي 75 kg، أو أن درجة الحرارة –5 °C، فإن هذا العدد وحده كاف لتعريف الكمية المذكورة. ولذا نطلق على هذا النوع من الكميات اسم **كميات عددية** *(scalars)*. من ناحية أخرى، فإن هناك كميات فيزيائية لايمكن تحديدها بشكل كامل بعدد واحد فقط. فعندما يسير متحرك من موضع ما A مسافة ما d فإن معرفة مقدار المسافة المقطوعة وحده غير كاف لمعرفة المكان الذي وصل إليه بل لابد من معرفة اتجاه الحركة شرقا كان أم غربا، شمالا أم جنوبا، وهكذا. وبالتالي فإن الإزاحة، وهي كمية فيزيائية، تتحدد بمعرفة قيمتها واتجاهها معا. ويطلق على هذا النوع من الكميات اسم **كميات متجهة** أو **متجهات** *(vectors)*.

ويرمز عادة للمتجه بحرف غامق **A** أو حرف عادي وفوقه سهم صغير $\vec{A}$، ويمثل بيانيا بقطعة مستقيمة $\overline{PQ}$ يتناسب طولها مع قيمة المتجه بينما يدل منحاها على اتجاهه، كما في الشكل(1-2أ). وتسمى النقطة P نقطة بداية المتجه وQ نهايته. ونعبر عن طول **A** أو مقداره بالشكل:

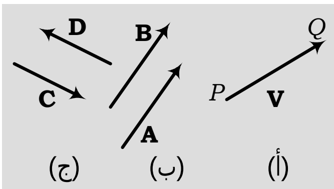
$$\text{طول } \mathbf{A} = A = |PQ| = \overline{PQ} \qquad (1\text{-}1)$$

7-1 جبر المتجهات *(Vectors Algebra)*

1- تساوي المتجهات:

نقول إن المتجهين **A** و**B** متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه ونكتب:

A=**B**



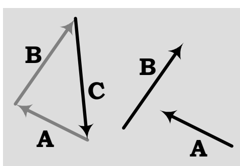
الشكل (1-2)

ويمثل الشكل (1-2ب) المتجهين المتساويين **A** و**B**. أما إذا كان للمتجهين **C** و**D** نفس الطول ولكن اتجاهين متعاكسين، كما في الشكل (1-2ج)، عندئذ يكون:

C=–**D**

2- جمع المتجهات:

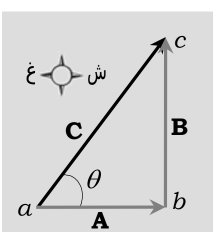
أ- **جمع المتجهات بالرسم** (بيانيا):



الشكل (1-3)

لجمع **A** و**B** بيانيا نرسم متجها يتناسب طوله مع **A** وبنفس الاتجاه ثم نرسم متجها آخر تقع بدايته عند نهاية الأول ويتناسب طوله مع **B**، فيكون المتجه الواصل من بداية **A** إلى نهاية **B** مساويا لمحصلتهما، كما في الشكل (1-3). ونلاحظ أن المتجه لايتغير إذا نقلناه من مكانه شريطة المحافظة على طوله واتجاهه.

مثل 1-3



الشكل (1-4)

يتحرك جسم مسافة 30 km شرقا ثم 40 km شمالا. ما الإزاحة الكلية لهذا الجسم قيمة واتجاها؟

الحل: نوضح حركة الجسم بيانيا في الشكل(1-4)، فنمثل الإزاحة الأولى بمتجه **A** نحو الشرق يتناسب طوله مع 30 kmمعتبرين كل 1 cm تكافئ 10 km مثلا، فيكون طول **A** 3 cm، بينما نمثل الإزاحة الثانية بمتجه **B** نحو الشمال ويتناسب طوله مع 40 km، أي 4 cm. ثم نضع بداية **B** عند نهاية **A** ونصل بين بداية **A** ونهاية **B** فنحصل على المتجه **C** المساوي لحاصل جمع **A**+**B**. ونلاحظ من الشكل (1-4) أن طول الوتر ac في المثلث القائم abc يساوي:

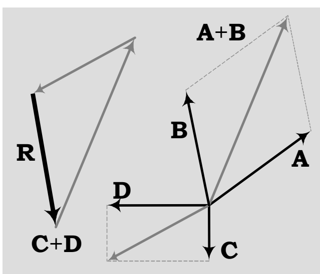
$$\overline{ac}=\sqrt{\overline{ab}^2+\overline{bc}^2}=5\ \text{cm}$$

فطول c يساوي 5 cm وهذا يعادل مسافة 50 km. وأما اتجاهه فنحدده بالزاوية بينه وبين **A** مثلا فنجد من المثلث abc أن:

$$\tan\theta = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = 1.33 \;\Rightarrow\; \theta = 53°$$

وعملية جمع المتجهات **تبديلية**، أي أن:

$$\boxed{\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}} \qquad (2\text{-}1)$$



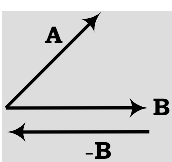
الشكل (5-1)

فيمكن للجسم المذكور في المثل السابق أن يتحرك نحو الشمال أولا مسافة 40 km ثم 30 km شرقا وسيصل إلى نفس الموضع الذي وجدناه تماما. ويسمى مجموع متجهين أو أكثر **المحصلة** *(resultant)*، ويوضح الشكل (5-1) عملية جمع أربعة متجهات بيانيا.

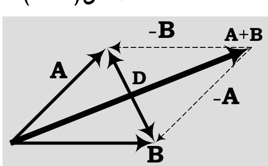
ويعتبر طرح المتجهات حالة خاصة من عملية الجمع لأنه يمكن كتابة

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \qquad (3\text{-}1)$$

حيث **B**– متجه مساو لـ **B** بالقيمة ومعاكس له بالاتجاه، لذا نرسم **B**– أولا ونجمعه مع **A**، كما في الشكل (6-1). ونستنتج من الشكل (7-1) أنه إذا رسمنا متوازي الأضلاع المؤلف من **A** و**B** كضلعين متجاورين فيه، فإن القطر الواصل بين بداية **A** ونهاية **B** يمثل المجموع $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$، بينما يمثل القطر الآخر الطرح $\mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ أو $-\mathbf{D}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$، بحسب الاتجاه الذي نختاره.



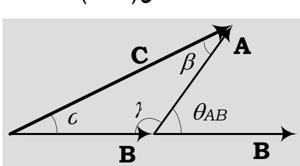
الشكل(6-1)



الشكل(7-1)

ويمكن الحصول على طول المحصلة لأي متجهين **A** و**B** من **علاقة جيب التمام** *(cosine law)* التي سنبرهن صحتها في الفقرة القادمة، فنكتب:

$$\boxed{c=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta_{AB}}} \qquad (4\text{-}1)$$



الشكل (8-1)

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و**B**.

كما نحصل على اتجاه **C** بحساب الزاوية بينه وبين **A** أو**B** من

علاقة الجيب *(sine law)* ونكتب:

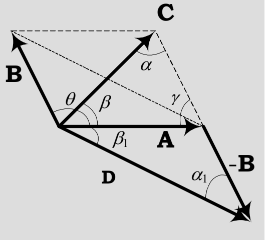
$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma} \tag{5-1}$$

حيث تعرف الزوايا α و β و γ كما هو موضح بالشكل (8-1).

مثل 4-1

ماقيمة واتجاه كل من **C**=**A**+**B** و**D**=**A**–**B** في الشكل (9-1) إذا كان A=7 و B=6 و θ=120°؟

الحل: لإيجاد المحصلة **C**=**A**+**B** نكمل بالرسم متوازي الأضلاع فنحصل على المتجه **C** الممثل لها. ولحساب طوله نستخدم العلاقة (4-1) ونكتب:



الشكل (9-1)

$$c=\sqrt{(7)^2+(6)^2+2(7)(6)\cos 120^\circ}=6.6$$

ونجد اتجاهه من العلاقة (5-1):

$$\frac{7}{\sin\alpha}=\frac{6}{\sin\beta}=\frac{6.6}{\sin 60^\circ}$$

ومنه:

$$\sin\beta=0.79 \quad\Rightarrow\quad \beta=52^\circ$$

الآن: لإيجاد حاصل الطرح **D**=**A**–**B** نلاحظ من الشكل (9-1) أن:

$$D=\sqrt{(7)^2+(6)^2+2(7)(6)\cos 60^\circ}=11.3$$

كما نجد اتجاه **D** من علاقة الجيب:

$$\frac{7}{\sin\alpha_1}=\frac{6}{\sin\beta_1}=\frac{11.3}{\sin 60^\circ}$$

أي أن:

$$\sin\alpha_1=0.54 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=32^\circ$$

ب- **جمع المتجهات تحليليا** (المركبات):

بما أن مجموع متجهين هو متجه ثالث، لذلك يمكن تحليل أي متجه **C** لمتجهين $\mathbf{C}_x$ و$\mathbf{C}_y$ ونكتب:

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_x+\mathbf{C}_y \tag{6-1}$$

وإذا اخترنا اتجاهي c_x وc_y ليكونا متعامدين، كما في الشكل(1-10)، عندئذ نكتب:

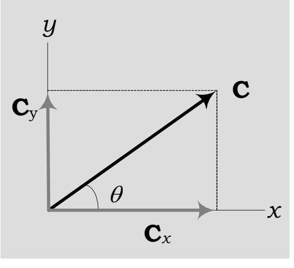
$$C_x = C\cos\theta \ \Leftarrow\ \cos\theta = \frac{C_x}{C}$$
$$C_y = C\sin\theta \ \Leftarrow\ \sin\theta = \frac{C_y}{C} \qquad (1\text{-}7)$$

ويطلق على c_x اسم **المركبة السينية** *(x-component)* وc_y **المركبة الصادية** *(y-component)*.
ويمكن الحصول على طول **C** واتجاهه من مركبتيه من الشكل (1-10) فنكتب:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \qquad (1\text{-}8)$$

و

$$\tan\theta = \frac{C_y}{C_x} \qquad (1\text{-}9)$$



الشكل (1-10)

ولابأس من التنويه إلى أنه كان بالإمكان اختيار الزاوية بين محور السينات ox ومحور الصادات oy في الشكل (1-8) كيفما نشاء إلا أن اختيارها قائمة أدى للحصول على العلاقات (1-7) و(1-8) و(1-9) ولذا تسمى هذه المحاور **منظومة محاور متعامدة** *(orthogonal coordinate system)*.

مثل 1-5

مامركبتي المتجه**V** الموضح في الشكل (1-11) على المحورين ox وoy إذا كان طوله 7 وحدات وθ=30°؟

الحل: **الطريقة الأولى** (بالحساب): لنحدد الزاوية التي يصنعها **V** مع محور السينات الموجب فنجد:

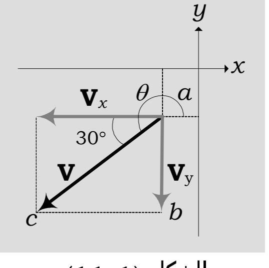
$$\theta = 180° + 30° = 210°$$

ولذلك نكتب من (1-7):

$$V_x = V\cos\theta = 7\cos 210° = -6.1$$

و

$$V_y = V\sin\theta = 7\sin 210° = -3.5$$



الشكل (1-11)

ونلاحظ أن العلاقات (7-1) تعطينا قيمة واتجاه كل مركبة شرط أن نستعمل الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات **بدءا من محور السينات الموجب إلى المتجه بعكس عقارب الساعة**.

الطريقة الثانية(بالرسم): بإمكاننا إيجاد مركبة $\mathbf{V}$ على محور السينات من الرسم بإسقاط عمود من بدايته على ذلك المحور لتحديد مسقط البداية، وعمود آخر من نهايته لتحديد مسقط النهاية. وتكون مركبة المتجه المطلوبة على هذا المحور هي المتجه الواصل من مسقط البداية لمسقط النهاية. ونلاحظ من الشكل (11-1) أن طول هذه المركبة يساوي الضلع ab في المثلث القائم abc، أي أن:

$$V_x = ab = 7\cos 30° = 6.1$$

كما نلاحظ أن اتجاه هذه المركبة بعكس محور السينات أي أنها سالبة، ونكتب $V_x = -6.1$.

وبنفس الطريقة نجد المركبة الصادية لـ $\mathbf{V}$ بإسقاط عمودين من بدايته ونهايته على oy فنلاحظ من الشكل (11-1) أن طول هذه المركبة يساوي طول الضلع bc في المثلث abc، أي أن:

$$V_y = bc = 7\sin 30° = 3.5$$

كما أن اتجاهه معاكس لمحور الصادات، ولذلك نكتب:

$$V_y = -3.5$$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقا.

لنفترض الآن أن المتجهين $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$ معرفين بدلالة مركباتهما على النحو:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$$

عندئذ تكون محصلتهما $\mathbf{C}$ معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y) + (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y)$$

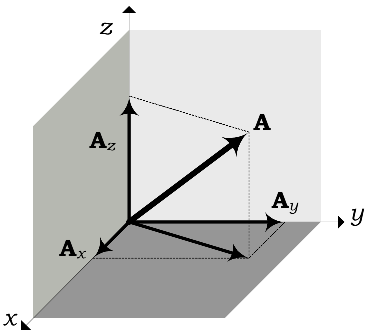
أو

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}_x + \mathbf{B}_x) + (\mathbf{A}_y + \mathbf{B}_y) \tag{10-1}$$

أي أن مركبتي $\mathbf{C}$ هما:

$$\boxed{\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \end{aligned}} \tag{11-1}$$

وبالطبع فإن كل ماتقدم ينطبق على مجموع متجهين أو أكثر. كما اقتصر حديثنا على جمع وتحليل المتجهات الواقعة في نفس المستوي، إلا أنه يمكننا تعميم العمليات السابقة على المتجهات الواقعة في الفراغ (ثلاثة أبعاد). ولذلك نعرف **منظومة محاور إحداثية ثلاثية متعامدة** $oxyz$ حيث يكون oz عموديا على المستوي الحاوي على المحورين ox وoy بحيث ننتقل من ox إلى oy بالدوران $90°$ بعكس عقارب الساعة، كما ننتقل من oy إلى oz بالدوران $90°$ بعكس عقارب الساعة، ومن oz إلى ox بزاوية $90°$ عكس عقارب الساعة أيضا. ويوضح الشكل (12-1) منظومة المحاور الثلاثية المذكورة ومركبات المتجه **A** عليها. ويمثل طول وعرض وارتفاع أي غرفة أفضل مثال على ذلك.



الشكل (12-1)

3- ضرب المتجهات:

تختلف عملية ضرب المتجهات كليا عن ضرب الكميات العددية، إذ أن ضرب عددين سيعطي عددا بالضرورة، فلو كان لدينا ثلاثة أشخاص (كمية عددية) مع كل واحد خمسة دنانير (كمية عددية) فإننا نجد مامعهم من نقود بضرب عددهم بما مع كل واحد والنتيجة 15 دينار هي كمية عددية بالطبع. إلا أن ضرب متجهين ببعضهما قد يكون عددا أو متجها بحسب طبيعة الضرب المستعمل. ولهذا نعرف ثلاث طرق لضرب المتجهات: الأولى ضرب متجه بعدد، والثانية الضرب العددي (أو النقطي) لمتجهين، والثالثة الضرب المتجه (أو التقاطعي) لمتجهين.

أ- **ضرب متجه بعدد:**

إذا ضربنا متجها **A** بعدد n فإننا نحصل على متجه جديد **B** له نفس منحى المتجه الأصلي **A** ويتناسب طوله معه بحيث أن:

$$\boxed{\mathbf{B} = n\mathbf{A}} \tag{12-1}$$

ونلاحظ من هذه العلاقة أنه إذا كان n موجبا فإن للمتجهين **A** و**B** نفس الاتجاه، أما إذا كان n سالبا فإن لهما اتجاهين متعاكسين.

ومن أهم تطبيقات ضرب متجه بعدد التعبير عن مركبات متجه على المحاور ox وoy وoz. فإذا فرضنا أن $\mathbf{i}$ هو متجه طوله واحدة الأطوال وباتجاه محور السينات الموجب، عندئذ يمكن كتابة كل متجه محمول على محور السينات، مثل $\mathbf{C}_x$ في العلاقة (6-1)، كما يلي:

$$\mathbf{C}_x = C_x \mathbf{i} \tag{13-1}$$

حيث يدل C_x على قيمة $\mathbf{C}_x$ وتدل إشارته فيما إذا كان $\mathbf{C}_x$ بالاتجاه الموجب أو السالب لمحور السينات. فإذا كان $\mathbf{C}_x = -4.5\mathbf{i}$ مثلا فإن ذلك يعني أن طوله 4.5 وحدة وباتجاه محور السينات السالب. ويطلق على $\mathbf{i}$ اسم **متجه وحدة** *(unit vector)* على امتداد ox.

وبنفس الطريقة نعرف متجه وحدة $\mathbf{j}$ على امتداد محور الصادات الموجب oy، وآخر $\mathbf{k}$ على امتداد oz، وعندئذ نكتب أي متجه في الفضاء $\mathbf{D}$ بوساطة مركباته على المحاور ox وoy وoz بالشكل:

$$\boxed{\mathbf{D} = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}} \tag{14-1}$$

ونعيد التذكير أن المركبات الثلاث هي أعداد موجبة أو سالبة يعطي كل منها قيمة المركبة وتدل إشارته على اتجاهها بالنسبة للمحور المحمولة عليه.

ب- **الضرب العددي** (أو النقطي) *(scalar or dot product)*:

نعرف الضرب العددي لمتجهين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = c} \tag{15-1}$$

حيث c عدد موجب أو سالب قيمته:

$$c = AB \cos\theta_{AB} \tag{16-1}$$

حيث θ_{AB} الزاوية المحصورة بين $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$ بينما A وB طول كل منهما، على الترتيب.

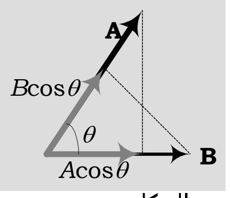
ونستنتج من (15-1) و(16-1) أن:

$$\boxed{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB \cos\theta_{AB}} \tag{17-1}$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A(B \cos\theta_{AB}) = B(A \cos\theta_{AB})$$

ولكن $B\cos\theta_{AB}$ تمثل مركبة **B** على **A**، بينما $A\cos\theta_{AB}$ مركبة **A** على **B**، فعملية الضرب العددي تكافئ ضرب أحد المتجهين بمركبة الآخر عليه، كما في الشكل (1-13).



الشكل (1-13)

كما تجدر الإشارة هنا إلى أن:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (1\text{-}18)$$

أي أن الضرب العددي تبديلي وليس هناك أهمية لترتيب المتجهين المضروبين ببعضهما، وهذا منطقي لأن نتيجة الضرب هي عدد موجب أو سالب فقط.

مثل 1-6

مانتيجة الضرب العددي لمتجهات الوحدة التالية:

(أ) **i·i** (ب) **j·j** (ج) **k·k** (د) **i.j** (هـ) **j.k** (و) **k.i**

الحل: نستعمل (1-17) فنجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = ii\cos\theta_{ii}$$

ولكن $ii=1$ و$\theta_{ii}=0$ لأن الزاوية بين أي متجه ونفسه تساوي الصفر طبعا، لذلك يكون:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \qquad (1\text{-}19)$$

وكذلك نستعمل (1-17) لنكتب:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = ij\cos\theta ij = (1)(1)\cos 90° = 0$$

وبالتالي:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0 \qquad (1\text{-}20)$$

مثل 1-7

إذا كان $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ فجد حاصل الضرب العددي $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}$ واستفد من النتيجة لمعرفة طول واتجاه **R** بالنسبة للمحاور الإحداثية.

الحل: نكتب:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}).(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})$$

أي أن:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = R_x^2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + R_y^2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + R_z^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) + 2R_xR_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + 2R_yR_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + 2R_zR_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})$$

وبالاستفادة من العلاقات (1-19) و(1-20) نستنتج أن:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = RR\cos 0^\circ = R^2 \qquad (21\text{-}1)$$

أي أن:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \qquad (22\text{-}1)$$

ولإيجاد الزاوية بين **R** والمحور ox مثلا، نضرب **R** عدديا بمتجه الوحدة **i** فنجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{R} = R_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + R_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + R_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = iR\cos\theta_{Rx}$$

حيث θ_{Rx} الزاوية بين **R** ومحور السينات، كما أن i=1 لذلك نجد من (1-19) و(1-20) أن:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta_{Rx} &= \frac{R_x}{R}\\ \cos\theta_{Ry} &= \frac{R_y}{R}\\ \cos\theta_{Rz} &= \frac{R_z}{R}\end{aligned}} \qquad (23\text{-}1)$$

حيث نحصل على العلاقتين الأخيرتين بطريقة مماثلة.

ويرمز للزوايا θ_{Rx} و θ_{Ry} و θ_{Rz} عادة بـ α وβ وγ، على الترتيب، ونلاحظ أن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (24\text{-}1)$$

وتسمى هذه الزوايا **جيوب تمام التوجيه** *(direction cosines)* للمتجه المحدد بها.

ويمكن تعميم العلاقة (1-21) إلى أي متجهين **A** و**B** فنكتب:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \qquad (25\text{-}1)$$

ويستفاد من هذه النتيجة لمعرفة الزاوية بين متجهين، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 1-8

إذا كان $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ فما الزاوية بينهما؟

الحل: نستخدم (1-25) ونكتب

$$\mathbf{A{\cdot}B} = (2)(1) + (6)(-1) + (-3)(1) = -7 = AB\cos\theta_{AB}$$

حيث

$$A = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = 7$$

و

$$B = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 1.7$$

ولذلك يكون:

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A{\cdot}B}}{AB} = -0.58 \quad \Rightarrow \quad \theta_{AB} = 125°$$

ج- **الضرب المتجه** (أو التقاطعي) *(vector or cross product)*:

نعرف الضرب المتجه لمتجهين **A** و**B** بالعلاقة:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \qquad (26\text{-}1)$$

حيث **C** متجه جديد تعطى قيمته بالعلاقة

$$\boxed{C = AB\sin\theta_{AB}} \qquad (27\text{-}1)$$

ويتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى حيث يتجه الإبهام باتجاه **A** (المتجه الأول) وتتجه السبابة باتجاه **B** (المتجه الثاني) وعندها تشير بقية الأصابع (العمودية على المستوي الحاوي على الإبهام والسبابة) باتجاه **C** (المتجه الثالث)، كما في الشكل (1-14). وتكون الثلاثية **A** و**B** و**C** منظومة مشابهة للمحاور ox وoy وoz، وبنفس الترتيب.

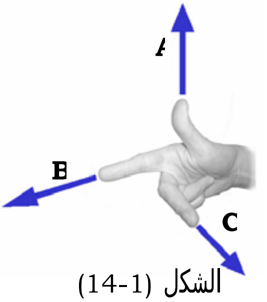
ونستنتج من (1-26) و(1-27) أن:

$$\boxed{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\sin\theta_{AB}} \qquad (28\text{-}1)$$

كما يتضح من تعريف الضرب التقاطعي لمتجهين أن:

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}} \qquad (29\text{-}1)$$

ولذلك فالضرب التقاطعي ليس تبديليا لكن قيمة النتيجة واحدة في كلا الحالتين مع تعاكس الاتجاهين، فطول **A**×**B** يساوي طول **B**×**A** ولكن باتجاه معاكس له.



الشكل (14-1)

ويمكن إيجاد نتيجة الضرب التقاطعي باستخدام المعينات، فإذا كان:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

فيكون:

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \qquad (30\text{-}1)$$

أي أن:

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}} \qquad (31\text{-}1)$$

مثل 9-1

مانتيجة الضرب التقاطعي لمتجهات الوحدة التالية:

(أ) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$ (ب) $\mathbf{j}\times\mathbf{j}$ (ج) $\mathbf{k}\times\mathbf{k}$ (د) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ (هـ) $\mathbf{j}\times\mathbf{k}$ (و) $\mathbf{k}\times\mathbf{i}$

الحل: نستخدم العلاقة (26-1) ونكتب:

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = ii\sin 0° = 0$$

إذا

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$

وبشكل عام نكتب:

$$\boxed{\mathbf{R}\times\mathbf{R} = 0} \qquad (32\text{-}1)$$

ولحساب $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ مثلا نكتب:

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = ij\sin 90° = 1$$

فطول المتجه الناتج عن $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ يساوي الواحد واتجاهه عمودي على المستوي الحاوي على كل من $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ بحيث أن المتجهات $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ والمتجه الجديد مشابهة للثلاثية ox وoy وoz. فهذا المتجه هو متجه الوحدة $\mathbf{k}$، أي أن:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \quad \text{و} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \tag{33-1}$$

ونستنتج من (33-1) أن:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} \quad \text{و} \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \tag{34-1}$$

$$-\;\mathbf{i}\quad\mathbf{j}\quad\mathbf{k}\quad\mathbf{i}\quad\mathbf{j}\quad\mathbf{k}\;+$$

الشكل (15-1)

ويمكن تحديد قيمة واتجاه الضرب المتجه لأي متجهين من متجهات الوحدة بسهولة من الشكل(15-1) حيث نلاحظ أن ضرب متجه بآخر يليه **مباشرة** يعطي المتجه الثالث الذي يأتي بعدهما بإشارة موجبة إذا سرنا مع السهم، وبإشارة سالبة إذا سرنا بعكسه. ويمكن للقارئ أن يتأكد من نتيجة الضرب المذكورة في المثل السابق مستخدما الشكل (15-1).

مثل 10-1

إذا كان $\mathbf{R}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{F}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ فاحسب (أ) $\tau=\mathbf{R}\times\mathbf{F}$ و(ب) θ_{RF} و(ج) الزاوية بين $\mathbf{R}$ ومحور الصادات.

الحل: نستخدم (31-1) ونكتب

$$\tau=\mathbf{R}\times\mathbf{F}=(20-1)\mathbf{i}+(3-(-10))\mathbf{j}+(2-(-12))\mathbf{k}=19\mathbf{i}+13\mathbf{j}+14\mathbf{k}$$

(ب) لإيجاد الزاوية بين $\mathbf{R}$ و$\mathbf{F}$ نكتب

$$|\tau|=|\mathbf{R}\times\mathbf{F}|=RF\sin\theta_{RF}$$

حيث

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=4.6$$

و

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=5.9$$

و

$$\tau=\sqrt{\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2}=26.9$$

وبذلك يكون

$$\sin\theta_{RF}=\frac{\tau}{RF}\approx 0.99 \quad\Rightarrow\quad \theta_{RF}=82^\circ$$

(ج) لحساب الزاوية بين **R** ومحور الصادات نستخدم ثاني العلاقات (1-23) ونكتب:

$$\cos\theta_{Ry}=\frac{R_y}{R}=-0.87 \quad\Rightarrow\quad \theta_{Ry}=150^\circ$$

8-1 متجه الوحدة *(Unit Vector)*

نعرف متجه الوحدة لأي متجه $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ بأنه يوازيه وطوله واحدة الأطوال، ويعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{a}=\frac{\mathbf{A}}{A}=\frac{A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}} \qquad (35\text{-}1)$$

ومن الواضح أن **a** و**A** متوازيان ولهما نفس الاتجاه، كما أن طول **a** يساوي الواحد ويمكن للقارئ أن يتأكد من ذلك بنفسه.

مثل 1-11

جد متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{R}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

الحل: نستخدم (1-35) ونكتب:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{R}}{R}=\frac{3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{j}}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{3}{\sqrt{26}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{26}}\mathbf{j}+\frac{4}{\sqrt{26}}\mathbf{k}$$

ويترك للقارئ أن يتأكد أن طول **r** يساوي الواحد وأنه يوازي **R**.

مثل 1-12

برهن علاقة **جيب التمام** *(cosine law)* التي تعطي طول محصلة متجهين **A** و**B** بالعلاقة:

$$c=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta_{AB}}$$

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و**B**.

الحل: نكتب $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ونضربه بنفسه عدديا فنجد:

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

وبحسب (1-17) نجد:

$$c^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}$$

أي أن

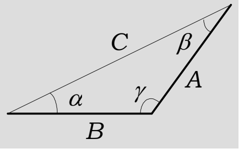
$$c = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}}$$

وهو المطلوب.

مثل 1-13

برهن علاقة **الجيب** *(sine law)* التي يعطي اتجاه محصلة متجهين بالنسبة لأي منهما بالعلاقة:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$



الشكل (1-15)

حيث نعرف الزوايا α و β و γ كما في الشكل (1-15).

الحل: نكتب $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ونضرب الطرفين تقاطعيا بالمتجه $\mathbf{B}$ ونأخذ قيمة الضرب فقط، فنجد:

$$CB\sin\alpha = AB\sin\gamma$$

ومنه:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

وبضرب طرفي العلاقة $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ تقاطعيا بالمتجه $\mathbf{A}$ نجد النسبة الثانية وهو المطلوب.

بأي اتجاه كان السائق يتحرك؟

الجدول 1-2 الكميات الأساس في الفيزياء

أ- الكمية الفيزيائية: الطول *(Length)*، الوحدة الأساسية المتر (m)

1 Fermi	1 F	10^{-15} m	فيرمي
1 Angstrom	1 A	10^{-10} m	أنغستروم
1 nanometer	1 nm	10^{-9} m	نانومتر
1 micrometer	1 μm	10^{-6} m	مايكرومتر
1 millimeter	1 mm	10^{-3} m	ميلمتر
1 centimeter	1 cm	10^{-2} m	سنتمتر
1 kilometer	1 km	10^{+3} m	كيلومتر

ب- الكمية الفيزيائية: الكتلة *(Mass)*، الوحدة الأساسية الكيلوجرام (kg)

1 microgram	1 μg	10^{-9} kg	مايكروغرام
1 milligram	1 mg	10^{-6} kg	ميليغرام
1 gram	1 g	10^{-3} kg	غرام
1 ton	1 t	10^{+3} kg	طن

ج- الكمية الفيزيائية: الزمن *(Time)*، الوحدة الأساسية الثانية (s)

1 picosecond	1 ps	10^{-12}	بيكوثانية
1 nanosecond	1 ns	10^{-9}	نانوثانية
1 microsecond	1 μs	10^{-6}	مايكروثانية
1 millisecond	1 ms	10^{-3}	ميلي ثانية
1 minute	1 min	60	دقيقة
1 hour	1 h	3600	ساعة

الجدول 1-3 مضاعفات العدد عشرة

العدد	10^{-15}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{3}	10^{-2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+15}
التسمية	فيرمي	بيكو	نانو	مايكرو	ميلي	سنتي	ديسي	كيلو	ميجا	جيجا	تيرا
الاختصار	F	p	n	μ	m	c	d	k	M	G	T

ملخص الفصل

الكميات العددية	تتحدد بقيمتها فقط
الكميات المتجهة	تتحدد بقيمتها واتجاهها
جمع الكميات المتجهة تبديلي	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
طول محصلة متجهين	$c=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta_{AB}}$
اتجاه محصلة متجهين	$\dfrac{A}{\sin\alpha}=\dfrac{B}{\sin\beta}=\dfrac{C}{\sin\gamma}$
مركبات متجه A	$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$
طول متجه	$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$
الزاوية بين متجه ومحور n	$\cos\theta_n=A_n/A$
الضرب العددي لمتجهين هو عدد قيمته	$\mathbf{A}.\mathbf{B}=AB\cos\theta_{AB}$
الضرب المتجه لمتجهين هو متجه طوله	$\lvert\mathbf{A}\times\mathbf{B}\rvert=AB\sin\theta_{AB}$
متجه الوحدة **a** لمتجه **A**	$\mathbf{a}=\mathbf{A}/A$

تمارين ومسائل

نظام الوحدات الدولي ومعادلة الأبعاد

1-1 تعطى كثافة الماء عادة بـ $1\ \mathrm{g/cm^3}$. ماكثافة الماء في نظام الوحدات الدولي؟

2-1 يتحرك جسم بسرعة $70\ \mathrm{km/h}$. ماسرعة هذا الجسم في نظام الوحدات الدولي؟

3-1 يعطى موضع جسم يتحرك على محور السينات بالعلاقة $x=at^2-bt^3$، حيث a وb ثابتان موجبان. استخدم معادلة الأبعاد لإيجاد أبعاد a و b.

جمع وتحليل المتجهات

4-1 ماقيمة واتجاه $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=-5\mathbf{i}-12\mathbf{j}$ و $\mathbf{C}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$؟

5-1 ماطول المتجه المحدد بمركباته (2,−2,4) وما الزوايا التي يصنعها مع ox وoy وoz؟

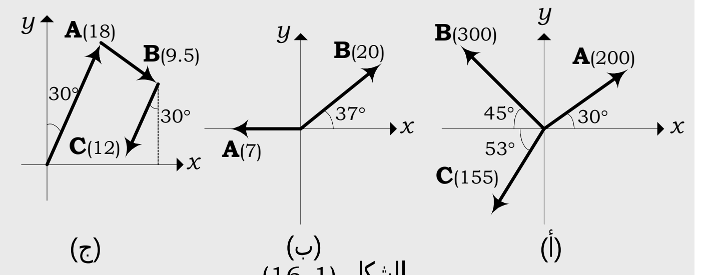
6-1 يسير شخص في نفق مسافة $50\ \mathrm{m}$ شرقا ثم $100\ \mathrm{m}$ باتجاه $30°$ غرب الشمال، وأخيرا $150\ \mathrm{m}$ غرب الجنوب. ما المسافة التي يجب أن يسيرها قيمة واتجاها ليعود لموضعه الابتدائي؟

7-1 جد بالرسم محصلة المتجهات الموضحة بالشكل (1-16 أ).

8-1 حال كل متجه معطى بالمسألة السابقة إلى مركبتين وحال محصلة المتجهات وتحقق من أن مجموع مركبات المتجهات على كل محور يساوي مركبة المحصلة على ذلك المحور.

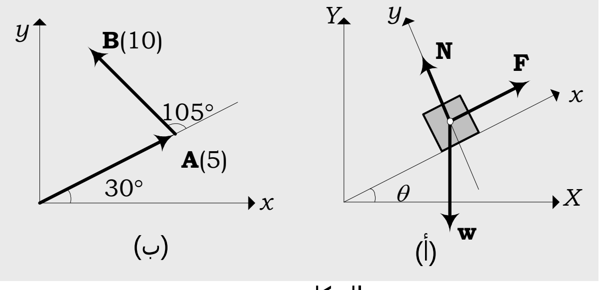
9-1 جد محصلة المتجهين **A** و**B** بالشكل (16-1 ب) مستعملا الرسم والطريقة التحليلية.

10-1 جد محصلة المتجهات **A** و**B** و**C** الموضحة بالشكل (16-1 ج) بالرسم والطريقة التحليلية.



الشكل (16-1)

11-1 يوضح الشكل (17-1أ) الجسم m الخاضع لعدة قوى (متجهات). حال كل قوة إلى مركبتين على ox وoy ثم على OX وOY.



الشكل (17-1)

12-1 حال المتجهين **A** و**B** الموضحين بالشكل (17-1ب).

13-1 جد مركبات **C**=**A**+**B** و**D**=**A**–**B** وقيمة واتجاه **C** و**D** للمتجهين $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

14-1 تطير طائرة 20 km باتجاه شمال الشرق ثم 30 km شرقا وبعد ذلك 10 km شمالا. مابعد الطائرة عن نقطة انطلاقها وبأي اتجاه؟

15-1 يجمع المتجه **M** (طوله 5 وحدات ويصنع زاوية 37° مع محور السينات الموجب) مع المتجه **N** فوجد أن طول محصلتهما 5 وحدات وتصنع زاوية 53° مع محور السينات الموجب. ماقيمة واتجاه **N**؟

16-1 لدينا متجه $\mathbf{A}$ طوله 2 وحدة ويصنع زاوية $60°$ فوق محور السينات الموجب والمتجه $\mathbf{B}$ طوله 4 وحدات ويصنع زاوية $60°$ تحت محور السينات الموجب. ماقيمة واتجاه $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}-\mathbf{A}$؟

17-1 ارسم المتجهين $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ على محورين ox وoy مدرجين بشكل مناسب وحدد من الرسم $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و$\mathbf{A}-\mathbf{B}$ وقارن نتائجك بالإجابات التي تحصل عليها بالحساب.

ضرب المتجهات

18-1 ماقيمة واتجاه الفرق بين متجهين طول الأول 10 وحدات والثاني 6 وحدات والزاوية بينهما $30°$؟

19-1 يعطى المتجهان $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. مامركبة كل متجه على الآخر؟

20-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = 3.2\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 0.5\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j}$ ؟ وماقيمة واتجاه المتجه $\mathbf{C}$ العمودي على $\mathbf{A}$ ويقع في المستوي xy؟

21-1 ما $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ و $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ و $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ إذا كان $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ؟

22-1 مامركبات $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$ والزاوية التي يصنعها مع المحور oz حيث $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ؟

23-1 ليكن لدينا المتجهان $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. (أ) احسب طول واتجاه كل منهما (ب) احسب $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ واكتب كل منهما بدلالة متجهات الوحدة وجد طول واتجاه كل واحد. (ج) احسب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ وجد الزاوية بينهما. (د) احسب $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ واكتبه بدلالة متجهات الوحدة واحسب طوله واتجاهه.

24-1 مامساحة متوازي الأضلاع المشكل من المتجهين المتجاورين $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$ المعرفين في المسألة السابقة؟ قارن إجابتك بنتيجة الضرب $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

25-1 يبلغ طول المتجه $\mathbf{A}$ ست وحدات ويقع على امتداد محور السينات الموجب، بينما يبلغ طول $\mathbf{B}$ أربع وحدات ويصنع زاوية $30°$ مع محور السينات الموجب. جد $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

26-1 ما الزاوية بين المتجه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ومحور العينات oz؟

27-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ؟

28-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ؟

29-1 ما $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ إذا كان طول $\mathbf{A}$ 10 وحدات وطول $\mathbf{B}$ 6 وحدات والزاوية بينهما $60°$؟

30-1 أثبت أن $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ لايساوي $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{k}$.

31-1 برهن أن $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0$ من أجل أي متجهين **A** و**B**.

32-1 ما الشروط التي يجب أن تتحقق لتكون قيمة محصلة متجهين متساويين مساوية لقيمة كل واحد منهما؟

33-1 برهن أن $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ من أجل أي ثلاثة متجهات **A** و**B** و**C** (مساعدة: اكتب المتجهات بدلالة مركباتها على المحاور الإحداثية).

34-1 ارسم المتجهين $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=6\mathbf{i}$ وحدد من الرسم الزاوية بينهما ثم احسب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ وجد الزاوية بين المتجهين بالحساب وقارن النتيجتين.

35-1 يقع المتجه **A** في المستوي yz صانعا زاوية $63°$ مع المحور oy بعكس عقارب الساعة، بينما يقع المتجه **B** في المستوي xz صانعا زاوية $48°$ مع المحور ox بعكس عقارب الساعة أيضا. جد كل من $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ والزاوية بينهما إذا علمت أن طول الأول 3.2 والثاني 1.4.

36-1 جد متجهات الوحدة لكل من **A** و**B** و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ في المسألة السابقة.

37-1 هل يمكن الاستفادة من أن $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ أو $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ لبرهان أن **B=C**؟ هل تتغير الإجابة لو كان $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ ؟

من علماء الإسلام

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي (توفي 236هـ، 850 م).

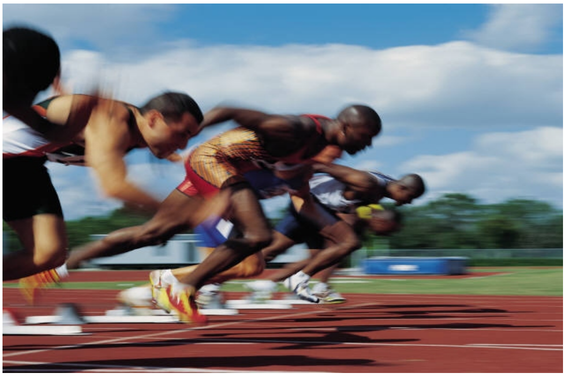
من أكبر علماء الإسلام العالميين الذين كان لهم تأثير كبير على العلوم الرياضية والفلكية. عاش في زمن الخليفة العباسي المأمون. وهو مؤسس علم الجبر كعلم مستقل عن الحساب، وقد أخذه الأوربيون عنه. وأول من استعمل كلمة "جبر" للعلم المعروف الآن بهذا الاسم. وترجع كل الكلمات التي تنتهي في اللغات الأوربية بـ "algorism" (الذي يبنى عليه برمجة الحاسوب) إلى اسم الخوارزمي. كما يرجع إليه الفضل في تعريف الناس بالأرقام الهندية (وهي التي تعرف حاليا بالأرقام العربية). من أسهاماته الهامة في الرياضيات اكتشافه بعض القواعد وتطويرها، كقاعدة الخطأين، والطريقة الهندسية لحل المربعات المجهولة التي تسمي اليوم باسم المعادلة من الدرجة الثانية، كما نشر الخوارزمي أول الجداول العربية عن المثلثات للجيوب والظلال. وأبدع الخوارزمي في علم الفلك، ووضع جداول فلكية (زيجا) مما كان له الأثر الكبير على الجداول الأخرى التي وضعها المسلمون وغيرهم فيما بعد. من أشهر كتبه **الجبر والمقابلة** و**صورة الأرض** و **عمل الاسطرلاب**.

الخوارزمي

الفصل الثاني

حركة الأجسام

(Kinematics)



1-2 تمهيد: دراسة الحركة ومناط الإسناد

اهتم الإنسان منذ الأزل بالطبيعة والظواهر الطبيعية. فكانت حركة الأجسام السماوية مثار الإعجاب والفضول لديه. وحاول، ومايزال، كشف أسرار الطبيعة بدءا من أكبر الأجسام السماوية وانتهاءا بأصغر مكونات الذرة والنواة. ولاينحصر اهتمام الإنسان بهذه الظواهر والعجائب لمجرد الفضول والتساؤل فقط بل للاستفادة منها وتسخيرها لخدمته بشتى الطرق والوسائل. وتعد دراسة حركة وتحريك الأجسام العمود الفقري في جسم الفيزياء لأنها تصف كيف ولماذا تتحرك الأجسام وكيف يمكن الاستفادة من هذه الحركة.

وسنقوم في هذا الفصل بدراسة الطريقة التي تتحرك بها الأجسام المختلفة، ونعني بذلك معرفة موضعها وسرعتها وتسارعها في كل لحظة من الزمن، بغض النظر عن السبب الذي أدى لحركتها. فعندما يسألك صديقك أن تصف حركة جسم ما فإنك تقول إنه يتحرك على خط مستقيم (كحجر يسقط في بئر) أو يدور على دائرة (كالقمر حول الأرض)، أي أنك تصف شكل الطريق الذي يسير عليه الجسم وهذا مانطلق عليه اسم **المسار** *(path)*، كما أنك تقول إنه قريب أو بعيد أي أنك تحدد **موضعه** *(position)* بالنسبة لك، ثم تقرر حالته الحركية سواء كان ساكنا أم متحركا بتحديد **سرعته** *(velocity)*، وتتابع تزايد أو تناقص سرعته مع مرور الزمن بتحديد **تسارعه** *(acceleration)*. فدراسة حركة أي جسم تعني تحديد هذه المتغيرات من موضع

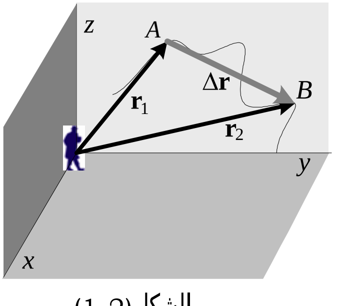
وسرعة وتسارع ومسار في كل لحظة من الزمن، وهذا مايسمى في الميكانيك **علم الحركة** *(kinematics)*. ونلاحظ أننا لم نسأل لماذا يتحرك الجسم بهذه الطريقة أو تلك وما الذي يحركه أصلا، لأن **تحريك الأجسام** *(dynamics)* هو موضوع آخر سنتطرق إليه فيما بعد.

لذا سندرس في هذا الفصل مفاهيم السرعة المتوسطة واللحظية والتسارع المتوسط واللحظي، ونكتب المعادلات التي تربط متغيرات الحركة بشكل عام في الفضاء. ثم نعتبر حالة الحركة في اتجاه واحد فقط، أي على خط مستقيم، بينما ندرس في الفصل الثالث الحركة في المستوي.

ويهتم علم الحركة بمعرفة متغيرات حركة جسم أو منظومة جسيمات بالنسبة لمراقب أو **مناط إسناد ثابت** أو **عطالي** *(inertial frame of reference)* أي لايتحرك بالنسبة للأجسام التي يدرس حركتها. ونعرف **الشروط الابتدائية** *(initial conditions)* بموضع وسرعة وتسارع الجسم لحظة بدء مراقبته (وليس بدء حركته). كما نسمي المتجه الواصل من المراقب إلى الجسم في كل لحظة **متجه الموضع** *(position vector)* والذي يمكن أن يتغير مع الزمن نتيجة حركة الجسم، وسنرى كيف نربط بين تغير هذا المتجه وسرعة الجسم وتسارعه.

2-2 متجه السرعة المتوسطة *(Average Velocity)*

إذا قطعت سيارة مسافة 200 km خلال أربع ساعات فإننا نقول إنها سارت بسرعة متوسطة 50 km/h. وهذا لايعني بالضرورة أنها كانت تسير بهذه السرعة طوال الوقت بل يعني أنها لو سارت هكذا لقطعت مسافة 200 km في أربع ساعات وهذا مانطلق عليه اسم **السرعة المتوسطة** *(average speed)*. ويمكن تعريف **متجه السرعة المتوسطة** *(average velocity)* بدقة إذا اعتبرنا متحركا p (كطير مثلا) يتحرك في الفضاء، كما في الشكل (2-1)، ومراقبا يحدد موضع الجسم بالنسبة له (أي أن المراقب هو مناط الإسناد أو المرجع ونطلق عليه اسم **المبدأ** *(origin)*)، فيرى الجسم عند الموضع A المحدد بالمتجه $\mathbf{r}_1$ في اللحظة t_1، ثم يغفل عنه لفترة من الزمن ويعود ليحدد موضعه عند الموقع B المحدد بالمتجه $\mathbf{r}_2$ في اللحظة t_2.



الشكل(2-1)

عندئذ نعرف **متجه الإزاحة** *(displacement)* بين A وB بالمتجه الواصل بينهما مباشرة، أي أن:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (2\text{-}1)$$

ونلاحظ أن الإزاحة قد لاتنطبق بالضرورة على الطريق الفعلي المتبع للانتقال من A إلى B.

وحيث أن الزمن اللازم للجسم لهذه الإزاحة هو:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{2-2}$$

عندئذ نعرف **متجه السرعة المتوسطة** بين A وB بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}} \tag{3-2}$$

فسرعة الجسم هي دليل على تغير موضعه مع الزمن. وتعطى وحدة السرعة في النظام الدولي بالمتر لكل ثانية، أي m/s.

ومن الواضح أن معرفة السرعة المتوسطة خلال انتقال الجسم بين نقطتين لايعطينا أية معلومات عن تفاصيل الرحلة الفعلية. فإذا افترضنا أننا انتقلنا من دمشق لعمان بسرعة متوسطة 80 km/h فإن ذلك لايعني أننا تحركنا بهذه السرعة طوال الوقت، إذ يمكن أن نسرع في مرحلة ثم نتباطأ في مرحلة أخرى، وهكذا. ونعطي في الجدول (2-1) بعض السرعات في الطبيعة.

الجدول 2-1: بعض السرعات في الطبيعة (m/s)

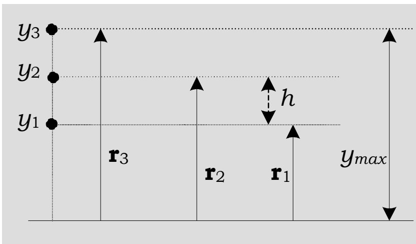
سرعة الضوء في الفراغ	3×10^{8}
سرعة الصوت في الهواء	3.4×10^{2}
سرعة دوران الأرض حول الشمس	4.0×10^{4}
سرعة دوران القمر حول الأرض	1.1×10^{4}
سرعة دوران الأرض حول نفسها	9.6×10^{2}
سرعة دوران الإلكترون في الذرة	6.3×10^{5}
سرعة مركبة فضائية حول الأرض	7.5×10^{5}
سرعة طائرة ركاب عبر المحيط	2.0×10^{2}
سرعة أسرع عداء في العالم	1.02×10^{1}

وصلت السرعة المتوسطة لهشام الغروج حامل ذهبية 1500 متر إلى 24.4 كم/سا

ونلاحظ من تعريف الإزاحة $\Delta\mathbf{r}$ أنها تتحدد بمعرفة موضع المتحرك لحظة بداية مراقبته ولحظة نهايتها فقط، بغض النظر عن تفاصيل الطريق التي اتبعها للانتقال بينهما. كما أن هاتين اللحظتين قد تختلفان كليا عن لحظة بداية الحركة نفسها أو نهايتها. ومما لاشك فيه أن متجه الإزاحة قد لاينطبق على المسافة الفعلية التي تحركها الجسم بين النقطتين A وB، كما ذكرنا سابقا، إلا أن لتعريفها بهذه الطريقة أهمية كبيرة لتحديد متجه السرعة المتوسطة، كما يساعد في حل الكثير من المسائل التي تبدو معقدة بكل يسر وسهولة.

وتوضيحا لما تقدم نعتبر جسما مقذوفا نحو الأعلى، كما في الشكل (2-2) حيث عينا موقع الجسم بعد ثانية وثانيتين وعند أعلى ارتفاع يصل إليه وعند عودته لنفس ارتفاع نقطة إطلاقه. عندئذ تكون إزاحته بين اللحظتين t_1 وt_2 هي:

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = y_2 - y_1 = h$$



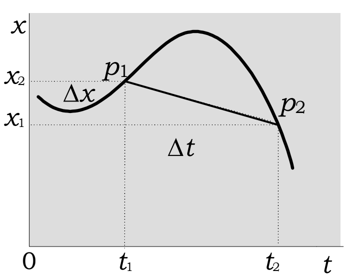
الشكل (2-2)

أما الإزاحة بين نقطة الإطلاق وأعلى ارتفاع فهي:

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0| = y_{\max}$$

وأخيرا تكون الإزاحة الكلية بين لحظة الإطلاق ولحظة عودة الجسم إليها هي $|\Delta\mathbf{r}| = 0$ على الرغم من أن المسافة المقطوعة فعليا تساوي $2y_{max}$! وإذا افترضنا أن الجسم استغرق Δt للوصول إلى أعلى ارتفاع لكانت سرعته المتوسطة (بالقيمة فقط) في الذهاب مساوية إلى $y_{\max} / \Delta t$ وكذلك في رحلة الإياب. أما لو أردنا حساب متجه السرعة المتوسطة (قيمة واتجاه) خلال الرحلة بأكملها ذهابا وإيابا لكانت النتيجة مساوية للصفر لأن متجه الإزاحة معدوم في هذه الحالة.

ولابأس من الاستفادة من الرسم البياني للتعمق في مفهوم السرعة المتوسطة (ومن ثم السرعة اللحظية التي سندرسها فيما بعد). فإذا افترضنا أن سيارة تسير على طريق مستقيمة بحيث يتغير بعدها عن مراقب ثابت (نقطة المبدأ أو مناط الإسناد) كما هو موضح في الشكل (3-2)، للاحظنا أولا أن السيارة لاتسير على الخط المنحني المرسوم بل على خط مستقيم نسميه محور السينات (كالشارع مثلا)، أما المنحني فيمثل تغيرات الموضع مع الزمن. وبأخذ نقطتين p_1 وp_2 تمثلان لحظتي بداية ونهاية مراقبة الجسم من قبل مراقب عند الموضع x=0 على محور السينات، عندئذ يمكن تحديد إزاحته بالمسافة بين



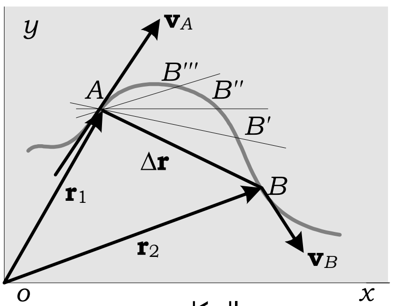
الشكل (3-2)

هاتين النقطتين $\Delta x = x_2 - x_1$ خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$. ويعطي ميل الوتر p_1p_2 في الشكل (3-2)، أي $\Delta x / \Delta t$ ، مقدار واتجاه السرعة المتوسطة للجسم خلال انتقاله بين هاتين النقطتين. فكلما كان الميل كبيرا بالقيمة المطلقة كلما كانت السرعة المتوسطة أكبر، وإذا كان الميل موجبا كانت الحركة بالاتجاه الموجب لمحور السينات، وإذا كان سالبا فإن السيارة تتحرك بالاتجاه السالب. وللملاحظة الأخيرة أهمية كبيرة **عندما يتحرك جسم على خط مستقيم** حيث

تعطي إشارة السرعة اتجاه الحركة فقط ولاعلاقة لها بتغير قيمتها (أي تسارعها أو تباطؤها) بتاتا. فلو تحرك جسم على خط مستقيم بسرعة $+10\ m/s$ ثم صارت سرعته $-5\ m/s$ فهذا لايعني أنه تباطأ بل يعني أنه غير اتجاه حركته من الجهة الموجبة للجهة السالبة أي أنه تباطأ وتوقف واستدار وعاد بالاتجاه المعاكس.

3-2 السرعة اللحظية *(Instantaneous Velocity)*

لمعرفة سرعة جسم في لحظة ما أو عند موضع معين، مثل النقطة A في الشكل (2-4)، نستفيد من العلاقة (2-3) التي تعطي **متوسط السرعة بين نقطتين** وذلك بجعل B تقترب من A إلى أن تنطبق عليها فتنتهي الإزاحة $\Delta\mathbf{r}$ والزمن Δt إلى الصفر سويا، وعندئذ يصير القاطع AB مماسا للمنحني عند A ويصير متجه السرعة مساويا إلى:



الشكل (2-4)

$$\mathbf{v} = \lim_{\substack{\Delta\mathbf{r}\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (2\text{-}4)$$

فالسرعة اللحظية عند نقطة معينة من مسار جسم هي مشتق متجه موضعه بالنسبة للزمن، ونمثلها هندسيا بمتجه مماس للطريق الذي يتحرك عليه الجسم عند النقطة المعتبرة بحيث يتناسب طوله مع قيمة السرعة بينما يعطي منحاه اتجاه الحركة. فإذا تحرك جسم على خط مستقيم (كسيارة تسير في الشارع) فإن متجه السرعة اللحظية يكون موازيا لخط السير دوما. بينما إذا سار الجسم على مسار دائري (كالإلكترون حول البروتون في ذرة الهيدروجين)، أو أي مسار آخر، فإن متجه السرعة اللحظية يكون مماسا للطريق عند كل نقطة يصل إليها الجسم.

الشكل (2-5)

والعلاقة (2-4) صحيحة سواء تحرك الجسم على خط مستقيم أو في مستو أو في الفضاء، ويكون له بشكل عام ثلاث مركبات على المحاور ox و oy وoz، أي:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{5-2}$$

حيث

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad و \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad و \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{6-2}$$

مثل 2-1

يتغير بعد سيارة تسير على خط مستقيم بالنسبة لمراقب وفق العلاقة $x(t) = 6t^2 - t + 1$ حيث تقدر x بالمتر وt بالثانية. (أ) مابعد السيارة عن المراقب في اللحظة t=0 وماسرعتها اللحظية عندئذ؟ (ب) ما السرعة اللحظية عندما t=3 s؟ (ج) ما إزاحة السيارة خلال الفترة الزمنية من t=0 s إلى t=3 s؟ (د) ما السرعة المتوسطة للسيارة بين هاتين اللحظتين؟

الحل: (أ) من الواضح أن موضع السيارة بالنسبة للمراقب عندما بدأ يراقبها t=0 s، هو $x(0)$=1 m. وبما أن السيارة تسير على خط مستقيم فإن العلاقة (2-4) تصير:

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}$$

أي أن:

$$v(t) = 12t - 1$$

ففي اللحظة t=0 نجد:

$$v(0) = -1 \text{ m/s}$$

أي أن السيارة كانت تبعد 1 m عن المراقب عندما بدأ بمراقبتها وتسير بسرعة 1 m/s بالاتجاه السالب لمحور السينات. فإذا كان المراقب يعتبر الاتجاه الموجب نحو الشرق مثلا فإن السيارة كانت تسير نحو الغرب لحظة بداية مراقبتها.

(ب) لإيجاد السرعة اللحظية بعد ثلاث ثواني من بدء المراقبة نضع t=3 s في معادلة السرعة أعلاه فنجد:

$$v(3) = 12(3) - 1 = +35 \text{ m/s}$$

أي أنه بعد ثلاث ثواني صارت السيارة تسير بسرعة 35 m/s بالاتجاه الموجب (نحو الشرق).

(ج) لحساب الإزاحة بين اللحظتين t=0 s وt=3 s نكتب:

$$s = \Delta x = x(3) - x(0) = 51 \text{ m}$$

(هل تمثل هذه الإزاحة المسافة الفعلية المقطوعة خلال ثلاث ثواني؟)

(د) أخيرا نجد السرعة المتوسطة بين اللحظتين t=0 s و t=3 s بكتابة:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{51}{3}=17\ \text{m/s}$$

ويمكن الحصول على متجه موضع الجسم إذا عرفنا متجه سرعته اللحظية بدلالة الزمن من العلاقة (2-4) بإجراء التكامل:

$$\boxed{\mathbf{r}=\int \mathbf{v}dt} \qquad (2-7)$$

مثل 2-2

يتغير متجه سرعة جسم يتحرك في الفضاء وفق العلاقة $\mathbf{v}(t)=2t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ حيث تقدر v بـ m/s و t بالثانية. (أ) ماسرعة الجسم في اللحظة t=0؟ (ب) ما متجه موضع الجسم في أي لحظة إذا كان على بعد 5 m وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات في اللحظة t=0؟

الحل: (أ) من الواضح أن للحصول على سرعة الجسم في اللحظة نعوض الزمن في معادلة السرعة فنجد $\mathbf{v}(0)=-3\mathbf{k}$ فسرعة الجسم لحظة بداية مراقبته، أي عندما t=0، تساوي 3 m/s ويتحرك الجسم بالاتجاه السالب لمحور العينات (أي للأسفل مثلا إذا اعتبرنا المحور oz للأعلى).

(ب) لإيجاد متجه موضع الجسم في أي لحظة نستخدم العلاقة (2-7) فنجد:

$$\mathbf{r}=\int \mathbf{v}dt=\int[2t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}-3\mathbf{k}]dt=t^2\mathbf{i}+\tfrac{1}{3}t^3\mathbf{j}-3t\mathbf{k}+\mathbf{c}$$

حيث $\mathbf{c}$ ثابت تكامل يتحدد من شروط البدء ويمثل موضع الجسم لحظة بداية مراقبته ونجده بوضع t=0 في العلاقة السابقة والاستفادة من أن الجسم كان في الموضع $\mathbf{r}=5\ \mathbf{i}$ m عندها أن $\mathbf{c}=5\ \mathbf{i}$ ويؤول $\mathbf{r}$ إلى:

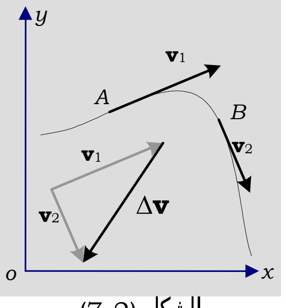
$$\mathbf{r}=(t^2+5)\mathbf{i}+\tfrac{1}{3}t^3\mathbf{j}-3t\mathbf{k}\ \text{m}$$

2-4 التسارع المتوسط واللحظي *(Acceleration)*

نقول إن لأي جسم متحرك تسارعا إذا تغير متجه سرعته اللحظية مع مرور الزمن. وهذا صحيح سواء تغيرت السرعة **بالقيمة** فقط، كحجر يسقط في بئر فتزيد قيمة سرعته لكن يبقى اتجاه الحركة للأسفل، أو **بالاتجاه** فقط، كدوران القمر حول الأرض فتبقى سرعته ثابتة بالقيمة (تقريبا) مع تغير اتجاهها بشكل مستمر، أو **بالقيمة والاتجاه**، ككرة تطير في الهواء) **فالتسارع هو دليل تغير متجه سرعة الجسم مع الزمن.**

ولتعريف تسارع جسم بدلالة تغير متجه سرعته مع الزمن نعتبر جسما يتحرك في الفضاء، كما في الشكل (2-7)، بحيث أن متجه سرعته اللحظية في اللحظة t_1 عند الموضع A هو $\mathbf{v}_1$ وفي اللحظة t_2 عند الموضع B هو $\mathbf{v}_2$. عندئذ نعرف تسارعه المتوسط بين هذين الموضعين بالعلاقة:

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{8-2}$$



الشكل (2-7)

ومن الواضح أن متجه التسارع المتوسط $\mathbf{a}_{av}$ يوازي $\Delta \mathbf{v}$ ويتناسب معه بالطول، بينما تعطى وحدته بوحدة السرعة مقسومة على الزمن، أي m/s^2.

الآن: إذا تحرك جسم بحيث تغير متجه سرعته اللحظية بشكل مستمر من لحظة لأخرى فإن تسارعه في لحظة معينة يصير مساويا للنهاية:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \tag{9-2}$$

فالتسارع اللحظي لمتحرك في أي لحظة هو مشتق السرعة اللحظية لهذا الجسم في تلك اللحظة.
وللتسارع بشكل عام ثلاث مركبات على المحاور الإحداثية ox وoy وoz، أي أن:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \tag{10-2}$$

حيث

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad \text{و} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{و} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{11-2}$$

ويمكن إيجاد متجه السرعة اللحظية للجسم من تسارعه اللحظي بكتابة:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\, dt \tag{12-2}$$

ويجب في هذه الحالة معرفة حالة الجسم في لحظة معينة (شروط لبدء) حتى تتحدد سرعته بشكل كامل في أي لحظة.

مثل 3-2

تتحرك سيارة على خط مستقيم بسرعة متغيرة بالشكل $v(t) = 3t + 5\ \mathrm{m/s}$. ماتسارع السيارة اللحظي وماالمسافة المقطوعة بعد ثلاث ثواني؟

الحل: بما أن السيارة تتحرك على خط مستقيم نكتب:

$$a = \frac{dv}{dt} = 3\ \mathrm{m/s^2}$$

فالتسارع ثابت ولايتغير مع الزمن.

أما المسافة المقطوعة بعد ثلاث ثواني فنجدها بتحديد موضع الجسم بالنسبة للمراقب في أي لحظة ونكتب:

$$x(t) = \int v dt = \int (3t + 5) dt = \tfrac{3}{2} t^2 + 5t + c$$

ثم نحسب المسافة المقطوعة خلال ثلاث ثواني:

$$s = x(3) - x(0) = [\tfrac{3}{2}(3)^2 + 5(3) + c] - [\tfrac{3}{2}(0)^2 + 5(0) + c] = 28.5\ \mathrm{m}$$

ونلاحظ أننا لم نضطر لتحديد الثابت c في هذه الحالة إطلاقا.

5-2 الحركة بتسارع ثابت

لعل أهم وأشهر تسارع يعرفه الإنسان هو تسارع الجاذبية الأرضية قرب سطح الأرض والذي يساوي، كما نعرف، $9.80\ \mathrm{m/s^2}$ ويتجه دوما نحو الأسفل، أي أنه ثابت بالقيمة والاتجاه. ولهذا ندرس في هذه الفقرة كيف تتحرك الأجسام الخاضعة لتسارعات ثابتة وكيف تتغير سرعاتها والمسافات التي تقطعها مع مرور الزمن لكثرة التطبيقات المتعلقة بهذه الحالات.

فإذا تحرك جسم بتسارع ثابت بالقيمة والاتجاه عندئذ نجد سرعته في أي لحظة من العلاقـة (12-2) فنجد:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0} \tag{13-2}$$

حيث $\mathbf{v}_0$ سرعة الجسم لحظة بداية مراقبته (السرعة الابتدائية) في اللحظة t=0.

كما نجد متجه موضع الجسم من العلاقة (7-2) ونكتب:

$$\boxed{\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0} \tag{14-2}$$

حيث $\mathbf{r}_0$ متجه موضع الجسم لحظة بداية مراقبته، أي في اللحظة t=0.

وبالطبع عندما يتحرك الجسم في الفضاء فإن لكل من التسارع والسرعة والموضع ثلاث مركبات على المحاور الإحداثية ox وoy وoz.
ومن المفيد أن نلاحظ أنه عندما يتحرك جسم بتسارع ثابت فإن سرعته المتوسطة بين نقطتين 1 و2 ترتبط بسرعته اللحظية عند كل واحدة منهما بالعلاقة:

$$\bar{\upsilon}_{AB} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{s}{t} \tag{15-2}$$

حيث s المسافة بين النقطتين المعنيتين وt الزمن اللازم للانتقال بينهما (برهن ذلك).
ومن المهم الإشارة مرة أخرى إلى أن بقاء سرعة جسم ثابتة بالقيمة لاتعني بالضرورة أن تسارعه يساوي الصفر لأنه من المحتمل أن يتحرك على مسار دائري (كالقمر حول الأرض) بسرعة ثابتة بالقيمة لكن اتجاهها يتغير باستمرار، مما يؤدي لتسارع الجسم باستمرار، وهذا ماسندرسه في فقرة لاحقة.
ونعيد التذكير بأن $\mathbf{r}_0$ و$\mathbf{v}_0$ تمثلان موضع وسرعة الجسم لحظة بداية مراقبته، أي في اللحظة $t=0$. ولذا عندما نقول إن الشروط الابتدائية لجسم هي $\mathbf{r}_0=5\ \mathbf{i}$ m و$\mathbf{v}_0=3\ \mathbf{j}$ m/s، مثلا، فإننا نعني أنه في اللحظة التي بدأنا متابعة حركة الجسم كان الأخير على بعد خمسة أمتار بالاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه الشرق) ويتحرك بسرعة ثلاثة أمتار بالثانية باتجاه محور الصادات الموجب (نحو الشمال)، وذلك بفرض أننا اعتمدنا محور السينات اتجاه شرق-غرب ومحور الصادات باتجاه شمال-جنوب.

6-2 الحركة على خط مستقيم

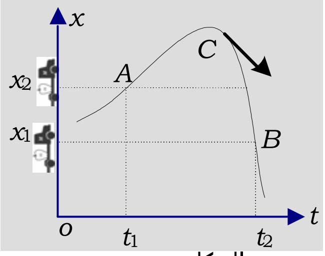
إذا تحرك جسم على خط مستقيم فإن معادلات الحركة تصير غاية في السهولة إذ لايبقى هناك حاجة لاستعمال المتجهات، ويكون لكل من الموضع والسرعة والتسارع مركبة واحدة على خط الحركة. وقد جرت العادة أن يرمز لذلك المحور بـ ox إذا تحرك الجسم على طريق أفقي، بينما يرمز له بـ oy عندما يتحرك شاقوليا للأعلى والأسفل.
فإذا افترضنا جسما يتحرك على المحور ox عندئذ تصير سرعته المتوسطة عندما ينتقل من الموضع x_1 إلى x_2 معطاة بالعلاقة:

$$\boxed{\upsilon_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}} \tag{16-2}$$

فإذا تحرك الجسم بحيث أن $x_2>x_1$ تكون سرعته موجبة أي أنه يتحرك بالاتجاه الموجب لمحور السينات (ولايعني ذلك بالضرورة أن الجسم موجود في الجهة الموجبة). وكذلك لو كان $x_1>x_2$ تكون سرعة الجسم سالبة أي أنه يتحرك بالاتجاه السالب. ونؤكد هنا على أن إشارة السرعة تدل فقط على اتجاه الحركة وليس لها علاقة بتسارع الجسم المتحرك أو تباطؤه. ولو اعتبرنا جسما يتحرك على خط مستقيم بحيث أن سرعته في لحظة ما -5 m/s وصارت بعد قليل -8 m/s فيجب أن نستنتج أنه يتحرك طوال الوقت بالاتجاه السالب ويتسارع لأن القيمة المطلقة لسرعته تزيد في ذلك الاتجاه. أما لو تغيرت سرعة جسم من $+6$ m/s مثلا إلى -4 m/s فلانستطيع تحديد فيما إذا تسارع أو تباطأ مباشرة لأن إشارة السرعة تغيرت مما يعني أنه حول اتجاهه من الجهة الموجبة للجهة السالبة، أي أنه توقف واستدار. فالجسم في هذه الحالة تباطأ أولا بالاتجاه الأول ثم تسارع في الاتجاه المعاكس. وبالطبع فإننا نجد السرعة اللحظية، كما فعلنا في فقرة سابقة، بالعلاقة:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad (17\text{-}2)$$

وإذا رسمنا تغيرات موضع جسم يتحرك على خط مستقيم بدلالة الزمن، كما في الشكل (2-8)، مثلا، واعتبرنا حركة الجسم بين النقطتين A وB فإن ميل القاطع AB يمثل السرعة المتوسطة بين هاتين النقطتين، بينما يعطي ميل المماس للمنحني عند أي نقطة مثل C، قيمة السرعة اللحظية عندها.



الشكل (3-8)

مثال 2-4

تتحرك سيارة على خط مستقيم بحيث يتغير موضعها في كل لحظة وفق العلاقة: $x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$، حيث تقدر x بالمتر وt بالثانية. (أ) ماموضع السيارة في اللحظات t=1,2,3,4 s؟ (ب) ما إزاحة السيارة بين اللحظتين t=0 s وt=4 s؟ (ج) ما السرعة المتوسطة للجسم بين اللحظتين t=2 s وt=4 s؟

الحل: لحساب موضع السيارة في اللحظات المذكورة نشكل جدولا بتغيرات x مع الزمن:

الزمن t(s)	0	1	2	3	4
الموضع x(m)	0	0	−2	0	12

لحساب إزاحة السيارة بين اللحظتين t=0 s وt=4 s نكتب:

$$s = x(4) - x(0) = 12 - 0 = 12 \text{ m}$$

(ج) لحساب السرعة المتوسطة بين اللحظتين t=2 s و t=4 s نكتب:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{12 - (-2)}{2} = 7 \text{ m}$$

(د) أخيرا لحساب السرعة اللحظية للجسم عندما t=3 s نستعمل العلاقة (2-17) ونكتب:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2 \quad \Rightarrow \quad v(3) = 6 \text{ m/s}$$

7-2 الحركة على خط مستقيم بتسارع ثابت

تعتبر حركة جسم بتسارع ثابت ذات أهمية خاصة لأن الكثير من الحركات في الطبيعة تتم كذلك، كما ذكرنا سابقا، كسقوط الأجسام بالقرب من سطح الأرض. فإذا تحرك جسم على خط مستقيم بتسارع ثابت فإن العلاقات (2-13) و (2-14) تصير:

$$\boxed{v = at + v_0} \tag{18-2}$$

و

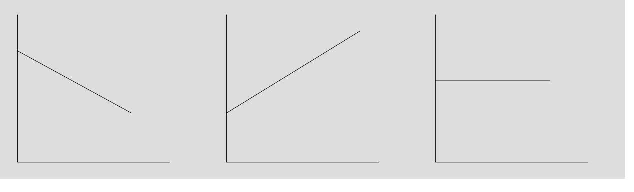
$$\boxed{x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \tag{19-2}$$

وباختصار الزمن بين العلاقتين الأخيرتين نجد:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = 2as} \tag{20-2}$$

حيث s الإزاحة من x_0 إلى x.

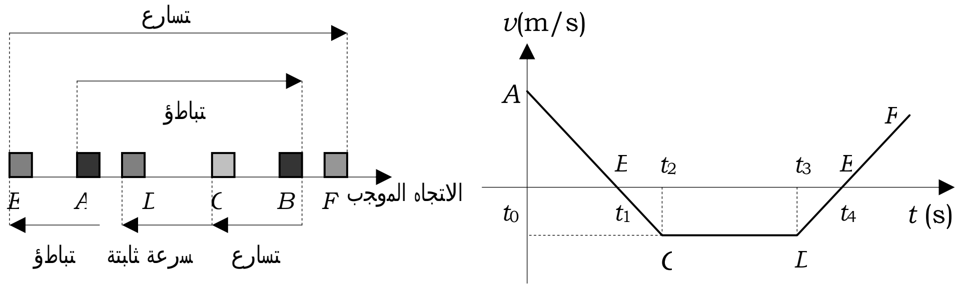
وتمثل العلاقة (2-18) تناسبا خطيا بين السرعة اللحظية والزمن. فإذا كان a يساوي الصفر فإن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة دوما،أما عندما يكون $a \neq 0$ فإن السرعة تتزايد أو تتناقص مع الزمن بشكل خطي، بحسب كون a موجبا أو سالبا، كما في الشكل (2-9).



الشكل (2-9)

مثال 2-5

تتغير السرعة اللحظية لجسم يتحرك على خط مستقيم مع الزمن كما هو موضح بالشكل (2-10). فسر كل مرحلة من مراحل الحركة.



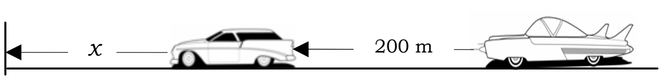
الشكل (2-10)

الحل: يمكن تحليل حركة الجسم بملاحظة أنه عندما بدأ المراقب متابعته في اللحظة t=0 كانت سرعة الجسم موجبة (النقطة A) ثم تناقصت تدريجيا مع مرور الزمن لكن بالاتجاه الموجب، فالجسم تباطأ بين اللحظتين t_0 وt_1 إلى أن توقف (النقطة B) ثم استدار وغير اتجاه حركته وتسارع بالاتجاه السالب خلال الفترة من t_1 وحتى t_2 (النقطة C)، ثم سار بعدها بسرعة ثابتة (بالاتجاه السالب) لفترة زمنية من t_2 وحتى t_3 (النقطة D)، حيث تباطأ في ذلك الاتجاه إلى أن توقف في اللحظة t_4 (النقطة E) مغيرا اتجاه حركته بالاتجاه الموجب ليتسارع بعد ذلك (النقطة F ومابعدها). ونذكر هنا أن حركة الجسم تتم على خط مستقيم لاعلى الخط المنكسر المرسوم. ويجدر فهم هذا المثل لأهميته في استيعاب الحركة على خط مستقيم.

مثال 2-6

تسير سيارة على خط مستقيم بسرعة 30 m/s وعلى بعد 200 m منها سيارة أخرى تسير أمامها على نفس الخط وبنفس الاتجاه بسرعة 10 m/s. لتجنب التصادم تتباطأ السيارة الأولى بمعدل 1 m/s^2، ماسرعتها عندما تلحق بالسيارة الثانية وما المسافة التي ستقطعها خلال ذلك؟

الحل: نفترض أن السيارة الثانية ستقطع مسافة x إلى أن تلحق بها الأولى التي ستكون قد قطعت مسافة 200+x ، كما هو موضح بالشكل (2-11)، وباستعمال العلاقة(2-19) نكتب لكل سيارة:



الشكل (2-11)

بالنسبة للسيارة الأولى $x + 200 = \frac{1}{2}at^2 + 30t$

بالنسبة للسيارة الثانية $x = 10t$

وبحل هاتين المعادلتين نجد: $x = 200\ (\text{m})$

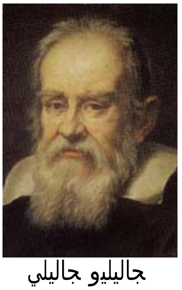
أي أن المسافة التي قطعتها السيارة الأولى هي:

$$x = 200 + x = 400\ \text{m}$$

ولإيجاد سرعة هذه السيارة عندما تلحق بالثانية نستعمل (2-20) ونكتب:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad \Rightarrow \quad v = 10\ \text{m/s}$$

8-2 السقوط الحر *(Free Fall)*


جاليليو جاليلي

درس **جاليليو جاليلي** *(Galileo Galilee* 1564-1642*)* حركة الأجسام الساقطة بشكل حر بالقرب من سطح الأرض بدءا من السكون فلاحظ أنها تقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية، بغض النظر عن كتلها (مهملا مقاومة الهواء وحركة الرياح)، فاستنتج أن لهذه الأجسام نفس التسارع أطلق عليه **تسارع الجاذبية الأرضية** *(gravitational acceleration)* قيمته قرب سطح الأرض $9.801\ \text{m/s}^2$ ويتجه دوما نحو الأسفل (مركز الأرض). وقد توصل جاليليو إلى نتائجه المهة هذه بعد إجراء العديد من التجارب على أجسام تتدحرج على سطوح مائلة بقياس المسافات التي تقطعها خلال فترات زمنية متساوية ومتعاقبة، كما كرر التجارب بزيادة ميل السطح إلى أن صار شاقوليا تقريبا حيث تؤول حركة الجسم إلى سقوط حر.

ويطلق على حركة كل جسم يتحرك شاقوليا تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط اسم سقوط حر، وإن لم يبدأ من السكون، ويكون تسارعه **ثابتا** بالقيمة ويرمز له بـ g **ويتجه للأسفل دوما** بغض النظر سواء كانت حركة الجسم للأعلى أوللأسفل في أي لحظة من الزمن.

فإذا اعتبرنا الاتجاه الشاقولي نحو الأعلى هو الاتجاه الموجب، أي أن $a=-g$، عندئذ تصير معادلات حركة الجسم (2-18) و (2-19) و (2-20) بالشكل:

$$v = -gt + v_0 \tag{21-2}$$

و

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \tag{22-2}$$

و

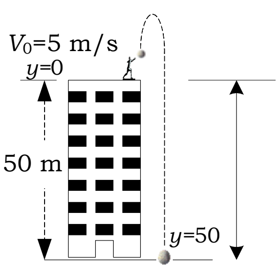
$$v^2 - v_0^2 = 2(-g)(y - y_0) = -2gs \qquad (23\text{-}2)$$

حيث وضعنا الإزاحة $s=y-y_0$.

ويجدر التنويه هنا إلى أنه كان بإمكاننا اختيار الاتجاه الموجب للأسفل ووضع $a=+g$ في العلاقات السابقة مع مراعاة ذلك بالنسبة لسرعة الجسم وإزاحته عندما يتحرك شاقوليا في الفضاء.

وكما ذكرنا سابقا فإن تسارع أي جسم ساقط بشكل حر ثابت بالقيمة والاتجاه لكن كونه موجبا أو سالبا يعتمد على طريقة اختيارنا للاتجاه الموجب للحركة. فيمكن أن نعتبر الاتجاه الموجب للأعلى وندرس حركة جسم يسقط للأسفل فنكتب تسارعه سالبا دوما، وتكون سرعته سالبة إلا أنها تزداد بالقيمة المطلقة مع مرور الزمن مما يعني أنه يتسارع. بينما لو تحرك الجسم للأعلى فتتناقص قيمة سرعته ويكون متباطأ عندئذ. ولذا نعيد التذكير بأن تزايد أو تناقص قيمة السرعة في اتجاه معين هي الدليل الوحيد على التسارع أو التباطؤ وليس إشارة السرعة أوالتسارع.

مثل 2-7



الشكل (2-11)

يقذف طفل يقف على سطح بناء ارتفاعه 50 m كرة بسرعة 5 m/s نحو الأعلى. (أ) ما أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة وماسرعتها عندما تعود لنفس ارتفاع نقطة الإطلاق؟ (ب) مازمن طيرانها؟

الحل: نفترض الاتجاه الموجب للأعلى ونقطة المبدأ (أي موضع المراقب الذي يدرس الحركة) تقع عند سطح البناء، كما في الشكل (2-11). لذا نكتب تسارع الكرة في أي مرحلة $a=-g$، أما سرعتها الابتدائية فهي $v_0=+5$ m/s، كما أن $y_0=0$.

(أ) لإيجاد أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة نلاحظ أن سرعتها تصير مساوية للصفر عندما تصل هناك، ومن ثم نستخدم (2-23) ونكتب:

$$v^2 - v_0^2 = 2(-g)(y - y_0) \Rightarrow \quad 0 - 25 = 2(-9.8)s \quad \Rightarrow \quad s = 1.28 \text{ m}$$

ولإيجاد سرعة الكرة عندما تعود لنفس ارتفاع نقطة إطلاقها نلاحظ أنها تسقط من ارتفاع ابتدائي $y_0=1.28$ m بسرعة ابتدائية معدومة إلى ارتفاع نهائي $y=0$ لذا نجد من (2-23):

$$v^2 - v_0^2 = 2(-g)(y - y_0) \Rightarrow \; v^2 - 0 = 2(-9.8)(0 - 1.28) \;\; \Rightarrow \;\; v_0 = -5 \text{ m/s}$$

حيث نضع الإشارة السالبة لأن الجسم يتحرك للأسفل. ونلاحظ من هذه النتيجة أن الكرة تعود لنفس الارتفاع بنفس السرعة، وهذه نتيجة عامة لأي جسم يسقط بشكل حر في الفضاء.

(ب) لحساب زمن الطيران من لحظة الإطلاق إلى أن تعود الكرة للأرض نعتبر حركتها الكلية بالنسبة لمراقب يقف على السطح، فنلاحظ أن ارتفاعها الابتدائي y_0=0، وسرعتها الابتدائية v_0=+5 m/s وارتفاعها النهائي عندما تصل للأرض y=–50 m، وذلك بفرض الاتجاه الموجب للأعلى، كما حددنا ببداية المثل. ومن ثم نستخدم العلاقة (2-22) فنجد:

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1}{2}(-9.8)t^2 + 5t - 50 \quad \Rightarrow \quad t = 3.75 \text{ s}$$

ويمكن حساب هذا الزمن بطريقة أخرى وذلك بحساب الزمن اللازم للكرة للوصول إلى أعلى ارتفاع t_1، ثم حساب الزمن اللازم للسقوط من ذلك الارتفاع t_2 وعندئذ يكون الزمن الكلي مساويا لـ $t=t_1+t_2$.

ونبدأ بحساب t_1 فنلاحظ أن الكرة قذفت بسرعة ابتدائية 5 m/s وأن سرعتها النهائية عند وصولها لأقصى ارتفاع تساوي الصفر، ولذلك نكتب:

$$v = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -9.8 t_1 + 5 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0.51 \text{ s}$$

ونجد t_2 بملاحظة أن الكرة ستسقط من ارتفاع y=–(50+1.28)=–51.28 m بدءا من السكون، ولذلك نكتب:

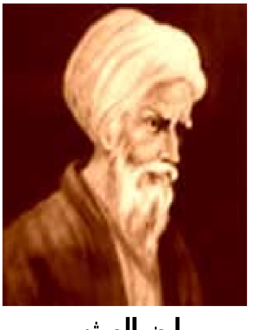
$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \quad \Rightarrow \quad -51.28 = -\tfrac{1}{2}(-9.8)t_2^2 + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3.24 \text{ s}$$

وبذلك يكون الزمن الكلي: $t = t_1 + t_2 = 3.75 \text{ s}$

وهي نفس النتيجة التي وجدناها سابقا.

من علماء الإسلام

محمد بن الحسن بن الهيثم البصري (ولد 354 هـ - 965 م وتوفي 427 هـ - 1038 م). عاش في عصر ازدهار العلوم والآداب في الدولة العباسية وانكب على دراسة البصريات والهندسة. فدرس ظواهر إنكسار الضوء وإنعكاسه بشكل مفصل، وخالف الآراء القديمة كنظريات بطليموس، فنفى أن الرؤية تتم بواسطة أشعة تنبعث من العين، وشرح العين تشريحا كاملا وبين وظيفة كل قسم منها، وأرسى أساسيات علم العدسات ممهدا لاستعمال العدسات المتنوعة في معالجة عيوب العين. له أكثر من 80 كتابا ورسالة، عرض فيها لسير الكواكب والقمر والأجرام السماوية وأبعادها من أشهر أعماله **المناظر - المرايا المحرقة بالدوائر - كيفـيات الإظلال** وغيرها.



ابن الهيثم

ملخص الفصل

السرعة المتوسطة	$v_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$
السرعة اللحظية	$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
التسارع المتوسط	$a_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$
التسارع اللحظي	$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$
قوانين الحركة بتسارع ثابت	$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2as \end{array}\right\}$
السقوط الحر(الاتجاه الموجب للأسفل)	$\left.\begin{array}{l} a = g \\ v = gt + v_o \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \end{array}\right\}$

تمارين ومسائل

السرعة المتوسطة

1-2 ما المسافة التي تقطعها سيارة تسير بسرعة 80 km/h خلال انشغال سائقها بالنظر إلى حادث على جانب الطريق لمدة ثانية واحدة؟

2-2 يهرول رجل بسرعة متوسطة 5 m/s لمدة خمس دقائق ثم يقف ليرتاح لمدة خمس دقائق أخرى. ماسرعته المتوسطة خلال العشر دقائق كلها؟

3-2 ركض كارل لويس مسافة 100 m خلال 10 s، بينما ركض العداء المغربي هشام الغروج مسافة 5000 m بزمن 13 دقيقة و49.39 ثانية خلال الألعاب الأولمبية عام 2004. ما السرعة المتوسطة لكل منهما؟ ولو استطاع كارل لويس المحافظة على سرعته لقطع 5000 m فما الزمن الذي سيستغرقه لذلك؟

4-2 تنتشر الإشارات الكهربائية في أعصاب الكائنات الحية بسرعة 100 m/s تقريبا. ما الزمن اللازم لحوت طوله 30 m ليشعر بعضة سمكة قرش في ذيله؟

5-2 تبتعد مجرة كونية بسرعة 21,600 km/h عن مجرتنا (درب التبانة) التي تبعد عنها حاليا حوالي 1.4×10^9 سنة ضوئية. ما الزمن الذي استغرقته هذه المجرة للوصول إلى هذا البعد بفرض أنها تسير بسرعة ثابتة؟ (السنة الضوئية هي المسافة التي يقطعها الضوء في سنة كاملة).

6-2 يعتبر الفهد أسرع كائن حي إذ تصل سرعته إلى 100 km/h، بينما يعتبر الظبي ثاني أسرع كائن حي إذ تصل سرعته إلى 88 km/h. (أ) ما الزمن اللازم لفهد ليلحق بظبي يبعد عنه 50 m وما المسافة التي سيقطعها الأخير خلال ذلك؟ (ب) بفرض أن الفهد لايستطيع العدو بهذه السرعة لأكثر من 20 s بينما يستطيع الظبي المحافظة على سرعته لفترة أطول بكثير. ما أكبر مسافة يمكن أن تفصل بينهما ليستطيع الأول اللحاق بالثاني؟

7-2 يقطع عداء مسافة 100 m خلال 10 s ويعود نفس المسافة ماشيا بزمن 80 s. (أ) ما متجه سرعته المتوسطة خلال كل مرحلة ولكل الرحلة؟ (ب) مامتوسط قيمة سرعته خلال الرحلة كلها؟

8-2 يتحرك جسم بين نقطتين بسرعة متوسطة 4 m/s ثم يرجع نفس الطريق بسرعة متوسطة 2 m/s. مامتوسط سرعته (قيمة فقط) خلال الرحلة كلها؟

9-2 يسير قطار بسرعة 60 km/h باتجاه الشرق، ثم يتحرك بنفس السرعة باتجاه°45 شمال الشرق ولمدة 20 دقيقة في كل مرحلة، ثم يتحرك غربا بنفس السرعة لمدة 50 دقيقة. ما سرعته المتوسطة في هذه الرحلة؟

10-2 يتحرك جسم بسرعة 18 m/s وبعد 2.4 s تصير سرعته 30 m/s بالاتجاه المعاكس. ماتسارعه المتوسط (قيمة واتجاه)؟

11-2 تمر سيارة بسرعة 20 m/s بالقرب من إشارة ضوئية في اللحظة t=0 وبعد خمس ثواني تمر سيارة أخرى بالقرب من نفس الإشارة وبنفس الاتجاه بسرعة 30 m/s. (أ) ارسم تغيرات المسافة x مع الزمن لكل سيارة. (ب) ما الزمن اللازم للسيارة الثانية لتلحق بالأولى وما المسافة التي ستكون الأخيرة قطعتها خلال ذلك؟

قوانين الحركة في الفضاء

12-2 تتسارع قمرة اختبار للطياريين من السكون إلى سرعة 1600 km/h خلال 1.8 s. ماتسارعها المتوسط؟ قارن إجابتك بالجاذبية.

13-2 يتغير بعد جسم عن المبدأ وفق العلاقة $\mathbf{r} = (t^2 + t)\mathbf{i} + (3t - 2)\mathbf{j} - (2t^3 - 4t^2)\mathbf{k}$ حيث تقدر $\mathbf{r}$ بالمتر وt بالثانية. ماسرعة وتسارع الجسم في كل لحظة وفي اللحظة t=2 s.

14-2 يعطى متجه موضع جسم متحرك في الفضاء بالعلاقة $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}$، حيث تقدر$\mathbf{r}$ بالمتر وt بالثانية. مامتجه سرعته وتسارعه اللحظيين؟

الحركة على خط مستقيم

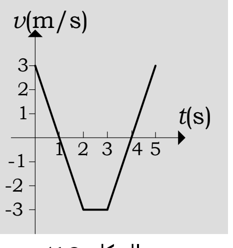
15-2 تستغرق سيارة سباق 2.2 s لتصل لسرعة 100 km/h بدءا من السكون. مامتوسط تسارعها وما المسافة التي تقطعها خلال ذلك؟

16-2 تصطدم مقدمة سيارة بحائط وتقف تماما بعد أن يتهشم 40 cm من مقدمتها. ما التباطؤ الذي عانته السيارة نتيجة التصادم بفرض أنه ثابت إذا كانت سرعتها الابتدائية 50 km/h؟

17-2 تسير سيارة بسرعة 100 km/h وعندما تكون على بعد 40 m من إشارة ضوئية تتحول الأخيرة للأحمر. ماذا يجب أن يكون تسارع السيارة حتى تقف إذا كان رد فعل السائق 0.4 s؟ (زمن رد الفعل هو الفترة الزمنية الفاصلة بين رؤية الإشارة وبدء تطبيق الكوابح).

18-2 يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $x(t) = 10t^2 - 0.5t^4 + 3$ ، حيث تقدر x بالمتر وt بالثانية. (أ) ماسرعة الجسم اللحظية عندما t=2 s و t=3 s؟ وماسرعته المتوسطة بينهما؟ (ب) ما المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة؟

19-2 يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث تتغير سرعته وفق العلاقة $v(t) = 2t + 3t^2 - 1$ حيث تقدر v بالمتر/ثانية وt بالثانية. ما المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثلاث ثواني من بدء الحركة؟



الشكل(2-12)

20-2 يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث تتغير سرعته كما هو موضح بالشكل (2-12). كيف يتغير بعد الجسم عن المبدأ في كل مرحلة من مراحل الحركة إذا كان في اللحظة t=0 عند x=1 m؟

21-2 تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة $x(t) = 50t + 10t^2$ حيث تقدر x بالمتر و t بالثانية. ماسرعته المتوسطة خلال الثواني الثلاث الأولى من حركته وما سرعته وتسارعه اللحظيين عندما t=3 s؟

22-2 في السباق المشهور بين الأرنب والسلحفاة، يستيقظ الأرنب فجأة ليرى أن السلحفاة التي تسير بسرعة ثابتة 0.1 m/s قد صارت على بعد 1 m من خط النهاية الذي يبعد عنه 100 m. ماذا يجب أن يكون تسارع الأرنب حتى يلحق بالسلحفاة قبل أن تربح السباق مع العلم أن سرعته الابتدائية معدومة (لأنه كان نائما)؟

23-2 تتحرك الإلكترونات داخل أنبوب التلفزيون بدءا من السكون لتصير سرعتها 3×10^6 m/s بعد قطع 4 cm. ماالتسارع المتوسط لهذه الإلكترونات؟

24-2 تقترب سيارة من إشارة ضوئية بسرعة 5 m/s وعندما تصير على بعد 20 m منها يلاحظ سائقها أن الضوء تحول للأصفر. ما التسارع الذي يجب أن تكتسبه السيارة حتى تتجاوز الإشارة، علما بأن الضوء يبقى أصفر لمدة ثلاث ثواني فقط؟

25-2 تتحرك سيارة بدءا من السكون فتصل لسرعة 60 km/h خلال 1.5 s. ما تسارعها المتوسط ومالمسافة المقطوعة خلال هذا الزمن؟ ما الزمن اللازم لتصل لسرعة 100km/h؟

26-2 تقلع طائرة بعد قطع مسافة 600 m بدءا من السكون خلال 15 s. ماسرعة الإقلاع بفرض أن التسارع ثابت؟

27-2 يتسارع قطار بمعدل $1.2\ m/s^2$ خلال منتصف المسافة بين محطتين، بينما يتباطأ بنفس المعدل خلال النصف الثاني من الطريق. ما الزمن اللازم للقطار للانتقال بين المحطتين إذا كانت المسافة بينهما 1100 m وما أعظم سرعة يصل إليها خلال رحلته؟

28-2 يدخل إلكترون مجالا كهربائيا بسرعة $5\times10^6\ m/s$ فيعاني تباطؤا بمعدل $1.25\ m/s^2$. ما المسافة التي يقطعها إلى أن يقف؟

29-2 يتحرك جسم بتسارع ثابت فيقطع مسافة 50 m خلال ثانيتين ثم يقطع 15 m بعد ثانيتين أخريين. ماتسارع الجسم وما سرعته الابتدائية؟

30-2 تتحرك سيارة بدءا من السكون بتسارع ثابت $1\ m/s^2$ وبعد ثانية يتوقف المحرك فتبدأ السيارة بالتباطؤ نتيجة احتكاك العجلات بالأرض بمعدل $5\ cm/s^2$ لمدة 10 s يبدأ بعدها السائق بتطبيق الكوابح لتقف السيارة بعد 5 s. ما المسافة الكلية المقطوعة؟

31-2 تسير سيارة على خط مستقيم فيسجل عداد السرعة القراءات التالية:

الزمن (s)	0	2	4	6	8	10	12	14
السرعة (m/s)	0	0	2	5	10	15	20	22

(أ) احسب متوسط السرعة بين كل ثانيتين. هل التسارع ثابت خلال أي مرحلة؟ (ب) ارسم محور الزمن أفقيا معتبرا كل $1\ cm\equiv1\ s$ ومحور السرعة رأسيا معتبرا كل $1\ cm\equiv2\ m/s$. ارسم النقاط (t,v) من الجدول أعلاه وصل بينهم بمنحن ملائم. ما المسافة الممثلة بالمساحة $1\ cm^2$؟ استخدم ميل المنحني لإيجاد التسارع اللحظي عندما t=8 s و t=13 s.

32-2 تتحرك سيارة بدءا من السكون بتسارع $4\ m/s^2$ لمدة 4 s ثم تسير بسرعة ثابتة لمدة 10 ثانية تتباطأ بعدها بمعدل $8\ m/s^2$ إلى أن تقف. ما المسافة الكلية المقطوعة في هذه الرحلة؟

33-2 تبعد سيارة مسافة d عن شاحنة عندما تبدأ كل منهما الحركة بنفس الاتجاه فتتسارع السيارة بمعدل $3\ m/s^2$ والشاحنة بمعدل $2\ m/s^2$ فتلحق السيارة بالشاحنة بعد أن تقطع الأخيرة مسافة 75 m. ماهي d وكم استغرقت السيارة لتصل للشاحنة؟

34-2 يتحرك جسم بتسارع ثابت فيقطع مسافة 60 m خلال 2 s وتصير سرعته 15 m/s. ماتسارع الجسم وماسرعته الابتدائية؟

35-2 يعدو حصانان في سباق بسرعة 10 m/s بحيث يتقدم أحدهما على الآخر مسافة 5 m، وعندما يصير الحصان المتقدم على بعد 40 m من خط النهاية يتعثر ويتباطأ بمعدل $1\ m/s^2$. من يربح السباق؟

36-2 تقترب سيارة من إشارة ضوئية بسرعة 15 m/s عندما يصير الضوء أحمر فتتباطأ السيارة بمعدل $5\ m/s^2$. ما المسافة المقطوعة لتقف إذا كان زمن رد فعل السائق 0.7 s؟

37-2 تقف سيارة عند إشارة ضوئية وعندما يصير الضوء أخضر تتسارع بمعدل $2\ m/s^2$ وفي تلك اللحظة تمر بها شاحنة تسير بسرعة ثابتة 10 m/s. ما المسافة التي تقطعها السيارة إلى أن تلحق بالشاحنة وماسرعتها عندئذ؟

38-2 تسير سيارة بسرعة 30 km/h على طريق زراعي عندما يرى سائقها بقرة على بعد 30 m فيستخدم الكوابح لتتباطأ السيارة بمعدل $8\ m/s^2$. مامصير البقرة إذا كان زمن رد فعل السائق 0.75 s؟

39-2 تسير سيارتان A وB على نفس الخط ونفس الاتجاه بسرعتين v_A وv_B بحيث أن المسافة بينهما d وعندئذ تتباطأ السيارة A بمعدل a لتفادي التصادم مع السيارة B أمامها. برهن أن شرط عدم التصادم هو أن يكون $v_A - v_B \leq \sqrt{2ad}$.

السقوط الحر

40-2 يقفز غطاس من ارتفاع 36 m. مازمن طيرانه وسرعته عندما يصل للماء؟

41-2 تسقط تفاحة من ارتفاع 380 m. مازمن طيرانها وسرعتها عندما تصل للأرض؟

42-2 يصمم قوس في رياضة رمي السهام ليطلق سهما بسرعة ابتدائية 90 m/s. (أ) إلى أي ارتفاع سيصل السهم إذا أطلق نحو الأعلى مباشرة؟ (ب) ما الزمن اللازم له للعودة للأرض وماسرعته عندئذ؟

43-2 يفلت طفل يقف على جسر حجرا من يده فيرتطم بالماء بعد 3 s. ما ارتفاع الجسر؟

44-2 خلال تصوير فلم مغامرات يحاول ممثل بديل *(stunt)* القفز من الطابق 23 لبناء لكنه يلقى حتفه نتيجة انفجار الفرشة التي كانت معدة لتحمل سقوطه. (أ) ماسرعته عندما يصطدم بها إذا سقط من ارتفاع 100 m بالنسبة لها؟ (ب) ما التباطؤ الذي سيعانيه المغدور لو لم تنفجر الفرشة علما بأن سمكها 140 cm؟

45-2 تتدحرج كرة على مستو مائل فتقطع مسافة 1 m خلال 4 s. (أ) ماتسارع الكرة إذا بدأت من السكون؟ (ب) ما المسافة الشاقولية التي يمكن للكرة أن تسقطها بشكل حر خلال نفس الزمن؟

46-2 يقذف رائد فضاء موجود على سطح القمر حجرا نحو الأعلى بسرعة ابتدائية 10 m فيلاحظ أنه يعدو إليه بعد 4 s. ماتسارع الجاذبية على سطح القمر؟

47-2 يقع حجر من سطح بناء فيصل للأرض بعد 3 s. ما ارتفاع البناء وماسرعة الحجر النهائية؟

48-2 تقذف طالبة تقف على سطح بناء ارتفاعه 60 m كرة أولى للأعلى بسرعة ابتدائية 5 m/s وتتبعها بكرة ثانية بنفس السرعة نحو الأسفل. ما سرعة الكرتين لحظة وصولهما للأرض؟

49-2 يسقط حجر سقوطا حرا من منطاد يهبط بسرعة ثابتة 12 m/s. ماسرعة الحجر وما المسافة التي يقطعها بعد 10 s؟ ماذا تكون الإجابة لو كان المنطاد يتحرك للأعلى بنفس السرعة؟

50-2 يقذف شاب حجرا للأعلى بسرعة 30 m/s. (أ) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر؟ (ب) ماسرعة الحجر بعد ثانيتين؟ (ج) ماسرعته بعد 6 s؟

51-2 برهن أن المسافة التي يقطعها جسم يسقط بشكل حر خلال الثانية n من حركته تساوي $(n–1/2)g$ مترا. كيف تصير الإجابة بالنسبة لجسم يتحرك من السكون بتسارع ثابت a.

52-2 تسقط تفاحة من يد شخص في مصعد يتحرك للأسفل بسرعة ثابتة 3 m/s. ما الزمن اللازم للتفاحة للوصول لأرض المصعد إذا سقطت من ارتفاع 2 m من السكون بالنسبة للمصعد؟

53-2 يقذف رجل يقف على سطح بناء كرة للأعلى بسرعة 29.4 m/s ثم يترك حجرا يسقط من يده بشكل حر بعد أربع ثواني. برهن أن الكرة ستتجاوز الحجر بعد أربع ثواني من سقوطه.

54-2 يطلق صاروخ رأسيا نحو الأعلى بتسارع $20\ m/s^2$ لمدة دقيقة واحدة ثم ينفد وقوده ليتابع ارتفاعه كجسم حر. ما المسافة التي سيقطعها بالنسبة للأرض إلى أن يقف ومازمن طيرانه؟

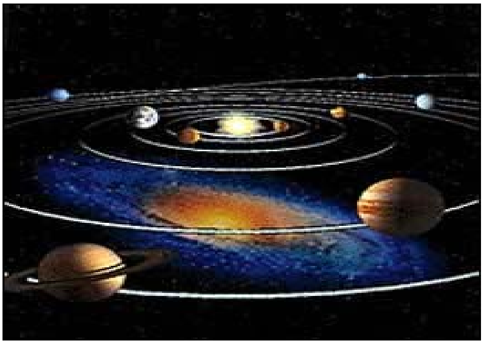
55-2 يقذف جسم كتلته 1 kg من سطح الأرض للأعلى بسرعة ابتدائية 15 m/s. احسب الكمية $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ لحظة إطلاق الجسم وعند وصوله لأعلى ارتفاع له وقارن النتيجتين، حيث h ارتفاع الجسم عن سطح الأرض في أي لحظة و m كتلته.

56-2 يقذف لاعب سيرك كراته رأسيا نحو الأعلى لمسافة 1 m. إلى أي ارتفاع يجب عليه أن يقذفها لتبقى في الهواء مدة تعادل ضعف زمنها الأول؟

الفصل الثالث

الحركة في مستو

(Plane Motion)

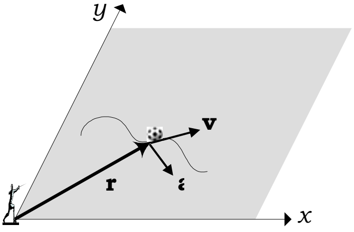


1-3 تمهيد

درسنا في الفصل السابق حركة الأجسام بشكل عام واستخرجنا المعادلات التي تعطي متغيراتها في الفضاء، ثم انتقلنا لحركة جسم على خط مستقيم وبخاصة السقوط الحر. إلا أن أهم الحركات الشائعة في الطبيعة، كالقمر حول الأرض أو الكواكب حول الشمس، تتم في مستو. لذا ندرس في هذا الفصل الحركة المستوية للأجسام، ثم ندرس حالة خاصة هي المقذوفات لأنها سهلة ولها تطبيقات يومية كثيرة. فنصفها ونحللها لمركبتين على محورين مناسبين، ونستخلص معادلات الحركة والمسار لها. ثم ندرس الحركة الدائرية المنتظمة التي تتم بسرعة ثابتة بالقيمة ونستخرج تسارعها المركزي ودورها وترددها. وندرس أخيرا مفهوم السرعة النسبية وبعض تطبيقاتها.

2-3 الحركة في مستو

إذا تابعنا حركة كرة تتدحرج على أرض الغرفة، كما في الشكل (1-3)، للاحظنا أنها تبقى دائما عند نفس الارتفاع لكنها تتحرك في مستو أرض الغرفة ولذا نقول إن حركتها مستوية. وتتحدد متغيرات حركة الكرة في أي لحظة بمتجه موضعها **r** وسرعتها **v** وتسارعها **a** حيث يكون لكل منها مركبتين فقط على المحورين ox (طول الغرفة) وoy (عرضها) مثلا.



الشكل (1-3)

ونكتب هذه المتجهات بالعلاقات:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \\ \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \end{cases} \qquad (1\text{-}3)$$

حيث تعطى مركبتي السرعة بالعلاقتين:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{و} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (2\text{-}3)$$

والتسارع:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{و} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (3\text{-}3)$$

مثل 1-3

تتدحرج كرة على سطح طاولة أفقية بسرعة $\mathbf{v}_0$=3 $\mathbf{i}$ m/s وتسارع $\mathbf{a}$=−$\mathbf{i}$+2$\mathbf{j}$ m/s^2 حيث $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ متجهي وحدة موازيين لطول وعرض الطاولة، على الترتيب. ماموضع الكرة وسرعتها بعد 5 s؟

الحل: بما أن التسارع ثابت بالقيمة والاتجاه لأنه لايتغير مع الزمن، لذا نستخدم معادلات الحركة بتسارع ثابت ونكتب:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})t + 3\mathbf{i} = (-t + 3)\mathbf{i} + (2t)\mathbf{j} \text{ m/s}$$

و

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 = \tfrac{1}{2}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})t^2 + (3\mathbf{i})t + 0 \text{ m}$$

حيث اعتبرنا الموضع الابتدائي للكرة عند طرف الطاولة $\mathbf{r}_0$=(0,0).

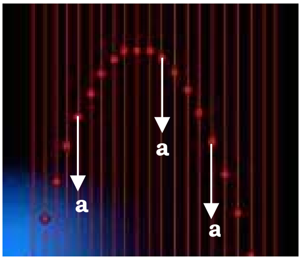
وعندما t=5 s نجد:

$$\mathbf{v}(5) = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \text{ m/s}$$

و

$$\mathbf{r}(5) = 2.5\mathbf{i} + 25\mathbf{j} \text{ m}$$

3-3 حركة المقذوفات *(Projectile Motion)*



إذا تحرك جسم في مستو أو في الفضاء تحت تأثير الجاذبية فقط فإننا نقول إنه مقذوف، ككرة قدم تطير في الهواء، أو ماء يندفع من نافورة. وتتم حركة المقذوف عادة في نفس المستوي إذا لم يكن هناك رياح أو قوى غير الجاذبية مؤثرة عليه. كما يكون

تسارعه مساويا لتسارع الجاذبية فقط، أي أن:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}\ \mathrm{m/s^2} \tag{4-3}$$

حيث نعتبر محور الصادات الموجب شاقوليا (عموديا على سطح الأرض) نحو الأعلى.
وبأخذ مركبتي التسارع على محور السينات الموازي لسطح الأرض ومحور الصادات نجد:

$$a_y = -g \quad \text{و} \quad a_x = 0 \tag{5-3}$$

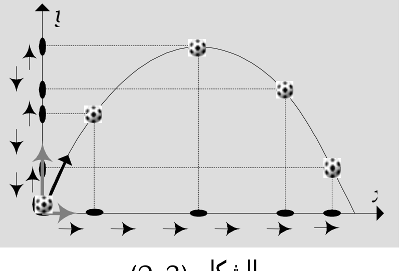
وبالاستفادة من معادلات الحركة بتسارع ثابت نجد سرعة وموضع الجسم في أي لحظة:

$$\begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_{0x} \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_{0y} \end{cases} \tag{6-3}$$

حيث v_{0x} وv_{0y} مركبتي سرعة القذيفة لحظة إطلاقها على المحورين ox وoy، على الترتيب.
كما تتغير المسافة السينية (الأفقية) والصادية (الشاقولية) التي تقطعها القذيفة في أي لحظة وفق العلاقتين:

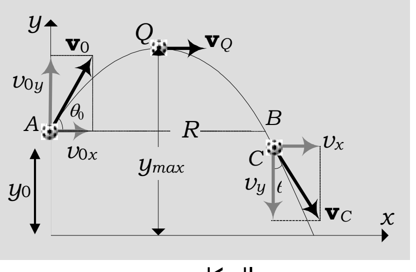
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_{0x} = v_{0x}t + x_{0x} \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases} \tag{7-3}$$

حيث (x_0,y_0) موضع القذيفة الابتدائي بالنسبة لمراقب موجود في الموضع (0,0).
ولفهم الطريقة التي يتحرك بها مقذوف نفترض أننا نراقب كرة تطلق بسرعة ابتدائية v_0، كما في الشكل (3-2)، بحيث تطير من نقطة الإطلاق فترتفع في الفضاء ثم تعود للأرض.
فلو تابعنا **ظل** الكرة على الأرض خلال طيرانها لرأينا بقعة تتحرك أفقيا بحيث يتغير موضعها باستمرار مع الزمن مبتعدا عن نقطة الإطلاق. إن **الحركة الأفقية** لهذا الظل على الأرض تمثل المركبة السينية لحركة الكرة. وتدل x في العلاقات (3-8) على بعد هذا الظل عن نقطة الإطلاق بعد زمن t بينما تدل v_x على سرعته و a_x على تسارعه. ونستنتج من كون $a_x=0$ أن تسارع هذا الظل على الأرض معدوم وأنه يتحرك بسرعة ثابتة تساوي السرعة التي بدأ بها من نقطة الإطلاق والتي رمزنا



الشكل (3-2)

لها بـ v_{ox}. أما لو تابعنا **ظل** الكرة على حائط شاقولي موازي للمحور oy لرأينا أيضا بقعة تتحرك على الحائط بحيث يتزايد ارتفاعها مبدئيا إلى أن يبلغ قيمة عظمى ثم يعود أدراجه للأسفل. ولو أمكن للمقذوف أن ينزل تحت مستوى نقطة الإطلاق لتابع هذا الظل حركته على الحائط للأسفل. إن **ارتفاع** هذا الظل هو مارمزنا له بالمركبة الصادية لمتجه موضعه، أي y، ونستنتج من (3-5) و(3-6) أن تسارع هذا الظل على الحائط يساوي $-g$ (بفرض الاتجاه الموجب للأعلى) وأن سرعته الشاقولية v_y تتغير مع مرور الزمن بحيث يزداد ارتفاعه لفترة معينة ثم يتناقص بعد ذلك أبدا. وبالطبع فإن الكرة الحقيقية لاتتحرك أفقيا على الأرض ولا شاقوليا على الحائط بل تطير في الهواء بشكل حر، كما في الشكل (3-2). وتكون سرعتها محصلة سرعتي الظلين المذكورين وموضعها محدد من محصلة موضعيهما كذلك.



الشكل (3-3)

ويمكن تحديد v_{0x} وv_{0y} لحظة إطلاق القذيفة من الشكل (3-3)، فنكتب:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases} \tag{8-3}$$

بينما نجد قيمة سرعتها واتجاهها في أي لحظة بالعلاقة:

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x} \end{cases} \tag{9-3}$$

وعادة مانحتاج لمعرفة أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة والزمن اللازم لذاك ومداها. ولهذا نحسب الزمن اللازم لتصل لأعلى ارتفاع أولا بملاحظة أن سرعتها الشاقولية v_y تصير صفر هناك.

لذا نكتب من العلاقة (3-6):

$$v_y = -gt_{\max} + v_{oy} = 0$$

ومنه

$$\boxed{t_{\max} = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin\theta}{g}} \tag{10-3}$$

ومن ثم نجد أعلى ارتفاع بتعويض t_{max} في (3-7):

$$y_{\max} = -\tfrac{1}{2} g t_{\max}^2 + v_{0y} t_{\max} + y_0$$

أي أن:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} + y_0 \qquad (11\text{-}3)$$

معادلة المسار:

من الواضح أن القذيفة تسير على منحنى غير دائري خلال طيرانها ويمكن أن نجد معادلة هذا المسار باختصار الزمن بين المعادلتين (3-7) فنجد:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}\right)x^2 + (\tan\theta_0)x + y_0 \qquad (12\text{-}3)$$

وهي معادلة مشابهة لـ $y = ax^2 + bx + c$ التي تمثل قطعا مكافئا متقعرا نحو الأسفل تقع ذروته عند النقطة Q في الشكل (3-3) ويعطى ارتفاعها بالمعادلة (3-11).

مدى القذيفة *(range)*:

نعرف مدى القذيفة **بالمسافة الأفقية التي تقطعها لتعود لنفس ارتفاع نقطة الإطلاق**. ففي الشكل (3-3) نكتب المدى مساويا إلى AB وعندها يكون $y=y_0$، فنجد من معادلة المسار (3-12):

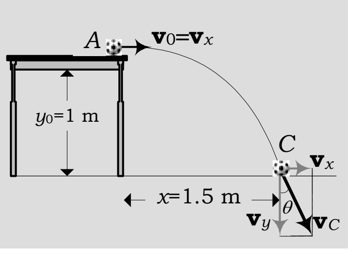
$$R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (13\text{-}3)$$

ونلاحظ مما تقدم أن جميع خصائص حركة المقذوف، كشكل الطريق الذي يتحرك عليه وأعلى ارتفاع يصل إليه ومداه، تتحدد جميعها من متجه سرعته الابتدائية (قيمة واتجاه) التي يطلق بها بالإضافة لتسارع الجاذبية في مكان الإطلاق. وتوضح الأمثلة التالية هذه المفاهيم.

مثل 3-2

تتدحرج كرة عن سطح طاولة ارتفاعها 1 m فتسقط على بعد 1.5 m من حافتها، كما في الشكل (3-4). (أ) ماسرعة الكرة الابتدائية؟ وزمن طيرانها؟ (ب) ماقيمة واتجاه سرعة الكرة لحظة وصولها للأرض؟

الحل: من المفيد عند حل مسائل المقذوفات أن نحدد في كل تمرين موضع المراقب الذي يدرس حركة المقذوف (أي نقطة مبدأ المحاور الإحداثية). فنفترض هنا أنه يقع على الأرض تحت نقطة إنطلاق الكرة من على الطاولة مباشرة، كما في الشكل (3-4)، فيكون $x_0=0$ و $y_0=1$ m. وزاوية إطلاق الكرة $\theta_0=0$ وتصير مركبتي سرعتها الابتدائية $v_{0x}=v_0$ و $v_{0y}=0$.



الشكل(3-4)

(أ) نلاحظ أنه عندما تطير الكرة عن الطاولة وتسقط للأرض يصير بعدها الأفقي x=1.5 m وارتفاعها النهائي y=0. وبتعويض هذه المعلومات في العلاقتين (2-7) نجد:

$$x=v_{0x}t+x_0=v_0t$$

و

$$y=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0=-\tfrac{1}{2}gt^2+1=0$$

ونستنتج من هاتين العلاقتين أن:

$$v_0=3.3 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad t=0.45 \text{ s}$$

(ب) لإيجاد سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض نعوض الزمن t في معادلات السرعة (3-6) فنجد:

$$v_x=v_{0x}=3.3 \text{ m/s}$$

و

$$v_y=-gt+v_{0y}=-4.4 \text{ m/s}$$

أي أن

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}=3.3\mathbf{i}-4.4\mathbf{j} \text{ m/s}$$

فقيمة السرعة عندئذ هي

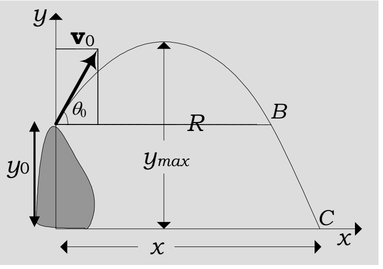
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=5.5 \text{ m/s}$$

ونجد اتجاهها من الزاوية التي يصنعها متجه السرعة مع محور السينات الموجب عند هذه النقطة، فنكتب:

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-4.4}{3.3}=-1.3 \;\Rightarrow\; \theta=-53^\circ$$

مثل 3-3

تطلق قذيفة من ذروة هضبة ارتفاعها 300 m بسرعة ابتدائية 20 m/s وتصنع زاوية °30 مع الأفق. جد: معادلة مسار القذيفة وأعلى ارتفاع تصل إليه ومداها وموضع ارتطامها بالسهل.



الشكل (3-5)

الحل: نحدد المحاور الإحداثية، كما في الشكل (3-5)، ونكتب الشروط الابتدائية:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 300 \text{ m},\ \upsilon_0 = 20 \text{ m/s},\ \theta_0 = 30°$$

بتعويض هذه القيم في معادلة المسار نجد:

$$y = -(\frac{9.8}{2(20)^2 \cos^2 30°})x^2 + (\tan 30°)x + 300 = -0.016x^2 + 0.58x + 300$$

ولإيجاد أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة نستعمل المعادلة (3-11) ونكتب:

$$y_{\max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} + y_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} + y_0 = 305.1 \text{ m}$$

كما نجد مدى القذيفة بوضع $y=y_0$ في معادلة المسار:

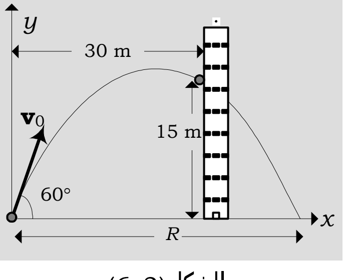
$$300 = -0.016x_B^2 + 0.58x_B + 300 \quad \Rightarrow \quad x_B = R = 36.2 \text{ m}$$

ونحصل على نقطة ارتطامها بالسهل بوضع $y=0$ في (3-12):

$$y = -0.016x^2 + 0.58x + 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 156.2 \text{ m}$$

مثل 3-4

تطلق قذيفة من سطح الأرض بزاوية °60 فوق الأفق فتصيب حائطا يبعد 30 m على ارتفاع 15 m ، كما في الشكل(3-6). (أ) ماسرعة الإطلاق ومأأعلى ارتفاع تصل إليه ومامداها؟



الشكل(3-6)

الحل: نضع المحاور عند نقطة الإطلاق ونكتب الشروط الابتدائية $x_0 = y_0 = 0$ ، كما نلاحظ أن إحداثيات القذيفة

عند اصطدامها بالحائط هي $x_0 = 30 \text{ m}, \quad y = 15 \text{ m}$ ، لذا نعوض في معادلة المسار فنجد:

$$15 = -(\frac{9.8}{2v_0^2 \cos^2 60°})(30)^2 + (\tan 60°)(30) + 0$$

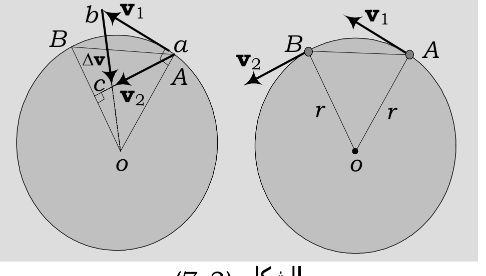
وبحل هذه المعادلة نجد v_0=21.8 m/s.

أما أعلى ارتفاع فنجده من العلاقة (3-11) مباشرة ونكتب:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = 18.3 \text{ m}$$

4-3 الحركة الدائرية المنتظمة *(Uniform Circular Motion)*

تعتبر الحركة الدائرية المنتظمة، كدوران القمر حول الأرض، أو الإلكترون حول البروتون في النموذج الأولي للذرة، من الأمثلة المهمة على الحركة الدائرية في مستو، حيث تبقى قيمة السرعة ثابتة إلا أن اتجاهها يتغير باستمرار من نقطة لأخرى مع بقاء الجسم الدوار في نفس المستوي دائما راسما دائرة مركزها الأرض في حالة القمر، أو البروتون في حالة ذرة الهيدروجين. وبما أن متجه سرعة جسم يدور تتغير بالاتجاه لذا فإن له تسارعا يمكن أن نجد قيمته واتجاهه من الشكل (3-7) الذي يمثل جسما يدور على دائرة نصف قطرها r وقيمة سرعته اللحظية عند أي موضع هي v، أي أن $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$.



الشكل (3-7)

فإذا افترضنا أنه يستغرق زمنا Δt للانتقال بين النقطتين A وB عندئذ نكتب متوسط تسارعه بينهما بالشكل:

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t}$$

ويتضح من هذه العلاقة أن $\mathbf{a}$ يوازي $\Delta\mathbf{v}$ حيث نلاحظ من الشكل (3-7) أنه **باتجاه مركز الدائرة** التي يدور عليها الجسم عندما تكون A قريبة من B. أما قيمة التسارع فتساوي حاصل

القسمة $\Delta v/\Delta t$ ونستنتج من الشكل (7-3) أن الخط AB يمثل الإزاحة Δs، كما أن المتجه $\overrightarrow{ac}$ يوازي ويساوي v_2. وعندئذ يكون الخط bc مساويا للفرق Δv. فإذا استفدنا من تشابه المثلثين OAB وabc، لأن كل منهما متساوي الساقين وزاوية الرأس $A\hat{O}B$ تساوي $b\hat{a}c$ بالتعامد، عندئذ نكتب من نسب التشابه:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{ac}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{r}{v}$$

ومنه

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = (\frac{\Delta s}{\Delta t})(\frac{r}{v})$$

فإذا صارت A قريبة جدا من B عندئذ يصير الزمن Δt صغيرا جدا وتؤول النسبة $\Delta v/\Delta t$ إلى التسارع اللحظي a كما تؤول النسبة $\Delta s/\Delta t$ إلى السرعة اللحظية v بحيث يصير التسارع

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}} \tag{14-3}$$

فلكل جسم يدور على مسار دائري نصف قطره r بسرعة ثابتة v تسارع مركزي قيمته v^2/r **ويتجه نحو مركز الدائرة**. ولهذه النتيجة أهمية كبيرة عند دراسة القوى إذ تعني أن جسما كهذا لايخضع لقوة طاردة بعيدة عن المركز، كما هو شائع، بل لقوة جاذبة نحوه كما سنرى لاحقا.

وتتميز كل حركة دائرية بالزمن اللازم للجسم للقيام بدورة واحدة كاملة على محيط الدائرة يسمى **الدور** *(period)* ويرمز له T، ويساوي حاصل قسمة المسافة المقطوعة $2\pi r$ على سرعة الجسم v، أي أن:

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}} \tag{15-3}$$

كما يسمى عدد الدورات التي يدورها الجسم في ثانية واحدة **التردد** *(frequency)* ويرمز له f.

ويرتبط التردد بدور الحركة بالعلاقة البسيطة:

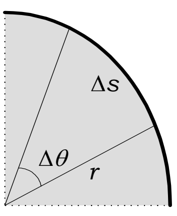
$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}} \tag{16-3}$$

وتعطى وحدته بـ $1/s$ أو هرتز (Hz)، أي أن $1\ Hz = 1\ s^{-1}$.

وتتميز كل حركة دائرية **بالسرعة الزاوية** *(angular velocity)* التي تدل على مقدار الزاوية التي يدورها الجسم في واحدة الزمن. فإذا افترضنا أنه دار زاوية $\Delta\theta$ خلال زمن Δt عندئذ نعرف سرعته الزاوية بالعلاقة:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \tag{17-3}$$

حيث تقدر الزوايا بالراديان والزمن بالثانية. ولذا تقدر السرعة الزاوية بـ rad/s. ويمكن أحيانا إعطاء السرعة الزاوية بعدد الدورات التي يدورها الجسم في زمن معين، مثل rev/min، حيث يمكن تحويل هذه القيمة لراديان بالثانية بملاحظة أن الدورة الواحدة (rev) تساوي 2π راديان، والدقيقة (min) تعادل 60 ثانية، أي نكتب: rev/min=2π/60 rad/s، وهكذا.



الشكل (3-8)

ويمكن الربط بين السرعة الزاوية ω لجسم يدور على دائرة وسرعته الخطية v إذا لاحظنا أن طول القوس الذي يدوره الجسم خلال زمن Δt يساوي $\Delta s = r\Delta\theta$، كما في الشكل (3-8)،وبقسمة طرفي هذه العلاقة على Δt وملاحظة أن $v = \Delta s/\Delta t$ و $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ نجد:

$$\boxed{v = r\omega} \tag{18-3}$$

مثل 3-5

يدور القمر حول الأرض في مسار دائري تقريبا مرة كل 29.5 يوما. ماسرعة القمر وتسارعه مع العلم أن المسافة بين الأرض والقمر هي 385,000 كم؟

الحل: نكتب المسافة التي يقطعها القمر في دورة واحدة:

$$s = 2\pi R = 2\pi(385\times10^6) = 2.4\times10^9\ \text{m}$$

كما أن زمن دورة كاملة للقمر حول الأرض هو:

$$T = 29.5\times24\times3600 = 2.5\times10^6\ \text{s}$$

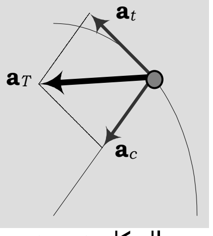
فتصير سرعة دوران القمر:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2.4\times10^9}{2.5\times10^6} = 9.6\times10^2\ \text{m/s}$$

ونحسب التسارع المركزي:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(9.6\times10^2)^2}{385\times10^6} = 2.4\times10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

ويجدر التنويه إلى أنه لو تحرك جسم على مسار دائري بسرعة غير ثابتة بالقيمة لكان له تسارعين: الأول يوازي السرعة ويغير قيمتها فقط نسميه **تسارع مماسي** *(tangential acceleration)* ويعطى بـ $a_t = dv/dt$، والآخر عمودي على السرعة لكن يغير اتجاهها ونسميه **تسارع مركزي** *(central acceleration)* وقيمته $a_c = v^2/r$، كما في الشكل (3-9). وبما أن هذين التسارعين متعامدين لذا يكون **التسارع الكلي** للجسم معطى بالعلاقة:



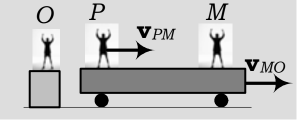
الشكل (3-9)

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \qquad (19\text{-}3)$$

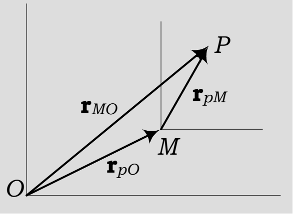
وقيمته:

$$a_T = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \qquad (20\text{-}3)$$

3-5 السرعة النسبية *(Relative Velocity)*



الشكل(3-10)



الشكل(3-11)

لنفترض أنك تجلس في قطار يسير بسرعة ثابتة 5 m/s وأن هناك شخص يتحرك داخل القطار بسرعة 3 m/s بالنسبة لك، كما في الشكل (3-10). عندئذ نتساءل ماسرعة هذا الشخص بالنسبة لمودع يقف على رصيف المحطة؟ من الواضح أنه إذا كان الشخص يسير بنفس اتجاه سرعة القطار لكانت سرعته بالنسبة للمودع (الأرض) هي 5+3=8 m/s، أما لو كان يسير بعكس اتجاه القطار لأصبحت سرعته بالنسبة للأرض 5+(−3)=2 m/s. فسرعة جسم تعتمد على حالة المراقب الذي يحددها.

ويمكن معرفة سرعة جسم P بالنسبة لمراقب M يتحرك بدوره بسرعة ثابتة أو ساكن تماما بالنسبة لمناط إسناد ساكن O، كما في الشكل (3-11)، فنكتب:

$$\mathbf{r}_{PO} = \mathbf{r}_{PM} + \mathbf{r}_{MO} \qquad (21\text{-}3)$$

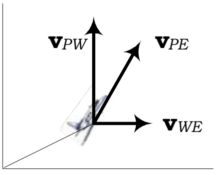
حيث $\mathbf{r}_{PO}$ متجه موضع P بالنسبة لـ O و$\mathbf{r}_{MO}$ متجه موضع M بالنسبة لـ O و$\mathbf{r}_{PM}$ متجه موضع P بالنسبة لـ M. وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة للزمن نجد:

$$\mathbf{v}_{PO} = \mathbf{v}_{PM} + \mathbf{v}_{MO} \qquad (22\text{-}3)$$

حيث $\mathbf{v}_{PO}$ و $\mathbf{v}_{MO}$ سرعة P و M بالنسبة لـ O و $\mathbf{v}_{PM}$ سرعة P بالنسبة لـ M .

مثل 6-3

تطير طائرة بسرعة 200 km/h نحو الشمال عندما تهب رياح قوية سرعتها باتجاه الشرق. ماذا تصير سرعة الطائرة بالنسبة للأرض؟



الشكل (3-12)

الحل: نلاحظ من الشكل (3-12) أن سرعة الطائرة بالنسبة للريح هي $\mathbf{v}_{PW}$=200 **j** (km/h)، كما أن سرعة الريح بالنسبة للأرض $\mathbf{v}_{WE}$=100 **i** (km/h)، حيث افترضنا محور السينات للشرق والصادات للشمال. ولذلك تصير سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي:

$$\mathbf{v}_{PE} = \mathbf{v}_{PW} + \mathbf{v}_{WE} = 100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} \text{ km/h}$$

فقيمة سرعة الطائرة هي

$$\upsilon_{PE} = \sqrt{(100)^2 + (200)^2} = 223 \text{ km/h}$$

وبزاوية

$$\tan\theta = \frac{200}{100} \quad \Rightarrow \quad \theta = 63°$$

من علماء الإسلام

أبو علي الحسين بن عبدالله بن سينا (ولد في أفشنة، قرب بخارى سنة 980 م وتوفي سنة 1036 م). أتم حفظ القرآن في سن العاشرة ودرس كثيرا من كتب الأدب. كان أبوه بقالا، إلا أنه كان عليما بالحساب فأرسله إلى رجل يعلمه الحساب ودرس العلوم العقلية والشرعية، وأنهى تحصيل جميع العلوم المعروفة في عصره وهو في سن السادسة عشرة وأصبح حجة في الطب والفلك والرياضة والفلسفة، ولم يبلغ العشرين عاما. ثم درس ابن سينا الفقه وطرق البحث والمناظرة، وظل يتنقل بين قصور الأمراء يشتغل بالتعليم والسياسة وتدبير شؤون الدولة، حتى تجاوزت مصنفاته المائتين، بين كتب ورسائل تدل على سعة ثقافته وبراعته في العلوم الفلسفية وغيرها، منها (**الشفاء**) و (**النجاة**) وهو مختصر للشفاء والإشارات والتنبيهات. ظل ابن سينا عمدة الأطباء طيلة العصور الوسطى ، كما ظل أعظم عالم بالطب منذ 1100- 1500 م.

ابن سينا

ملخص الفصل

معادلات حركة المقذوفات
$$\left.\begin{aligned} &a_y=-g \quad , \quad a_x=0 \\ &v_x=v_{0x}=v_0\cos\theta_0 \\ &v_y=-gt+v_{oy}=-gt+v_0\sin\theta_0 \\ &x=v_{0x}t+x_0 \\ &y=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0 \end{aligned}\right\}$$

أعلى ارتفاع للقذيفة $y_{\max}=\dfrac{v_{0y}^2}{2g}+y_0=\dfrac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}+y_0$

مدى القذيفة $R=\dfrac{2v_{0x}v_{0y}}{g}=\dfrac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$

معادلة المسار $y=-(\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0})x^2+(\tan\theta_0)x+y_0$

التسارع المركزي $a=v^2/r$

دور وتردد الحركة الدائرية المنتظمة $T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{2\pi r}{v}$

السرعة الزاوية $\omega=\Delta\theta/\Delta t$

العلاقة بين السرعة الخطية والزاوية $v=r\omega$

السرعة النسبية $\mathbf{v}_{PO}=\mathbf{v}_{PM}+\mathbf{v}_{MO}$

تمارين ومسائل

الحركة في مستو

1-3 تدور سيارة على منعطف زاوية $90°$ بسرعة ثابتة 25 m/s خلال 6 s. ماتسارعها المتوسط خلال هذه الفترة؟

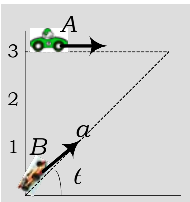
2-3 يتحرك جسم في مستو بتسارع $\mathbf{a}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ m/s^2 مارا من الموضع $\mathbf{r}_0=0$ في اللحظة $t=0$ بسرعة $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ m/s . ماسرعة الجسم والمسافة التي يقطعها على محور السينات بعد 2 s؟

3-3 يعطى متجه موضع جسم بالعلاقة $\mathbf{r}=(6+2t^2)\mathbf{i}+(3-2t+3t^2)\mathbf{j}$ حيث تقدر r بالمتر وt بالثانية. ماسرعة وتسارع الجسم اللحظيين عندما t=2 s؟

4-3 يتغير بعد سيارة تسير في مستو عن المبدأ وفق العلاقة $\mathbf{r}=(2t^3-3t^2)\mathbf{i}+(t^2-2t+1)\mathbf{j}$، حيث تقدر r بالمتر وt بالثانية. (أ) ماموضع السيارة في اللحظة t=1 s؟ (ب) ماقيمة سرعة وتسارع السيارة في اللحظة t=0؟

5-3 يتحرك جسم في مستو فتتغير سرعته من $3.6\mathbf{i}-2.9\mathbf{j}$ m/s إلى $5.6\mathbf{i}+7.1\mathbf{j}$ m/s خلال أربع ثواني. ماتسارعه؟

6-3 ماتسارع كرة تسير على سطح أفقي بسرعة $\mathbf{v}_0=6.3\mathbf{i}-8.4\mathbf{j}$ m/s فتتوقف بعد ثلاث ثواني؟



الشكل (3-13)

7-3 تسير سيارة A على الخط y=3 بسرعة ثابتة 3 m/s بالاتجاه الموجب ولحظة مرورها من النقطة x=0 تبدأ سيارة شرطة B بملاحقتها منطلقة من النقطة O بتسارع ثابت 4 m/s^2 باتجاه يصنع زاوية θ مع المحور ox، كما في الشكل (3-13). ماذا يجب أن تكون θ لتلحق B بـ A؟

8-3 يتحرك جسم في مستو بحيث تعطى إحداثياته بالعلاقتين $x=t^2$ و$y=(t-1)^2$ (أ) مامعادلة المسار الذي يتحرك عليه الجسم؟ (ب) متى تكون سرعة الجسم أصغر مايمكن؟ (ج) ما إحداثيات الجسم عندما تكون سرعته 5 m/s وماتسارعه في اللحظة t=1 s؟

9-3 يتحرك جسم على دائرة بحيث تعطى إحداثياته بالعلاقتين $x=\text{A}\cos\omega t$ و $y=\text{A}\sin\omega t$ ماسرعة الجسم وتسارعه في أي لحظة؟

10-3 يمر جسم يتحرك في مستو بنقطة المبدأ في اللحظةt=0 بتسارع $\mathbf{a}=-\mathbf{i}-0.5\mathbf{j}$ m/s^2 وسرعة $\mathbf{v}_0=3\mathbf{i}$ m/s . مامتجه سرعة الجسم عندما يكون عند أقصى نقطة له على محور السينات وأين يكون عندئذ؟

حركة المقذوفات

11-3 تطلق قذيفة من حافة جبل ارتفاعه h بسرعة ابتدائية 100 m/s وتصنع زاوية 30° مع الأفق، فتسقط على بعد 1000 m من الحافة. ما ارتفاع الجبل ومازمن طيران القذيفة؟

12-3 تقذف كرة من ارتفاع 1 m عن سطح الأرض بسرعة ابتدائية 30 m/s وتصنع زاوية 37° فوق الأفق. ما ارتفاع الكرة عندما يكون بعدها الأفقي x=20 m ؟

13-3 يسقط جسم من طائرة تطير أفقيا بسرعة 500 km/h على ارتفاع 10 km. ما المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم إلى أن يصطدم بالأرض وما زمن طيرانه؟

14-3 تتدحرج كرة من على سطح طاولة أفقية ارتفاعها 1 m بسرعة ابتدائية 3 m/s. (أ) ما المسافة الأفقية التي تقطعها إلى أن تصطدم بالأرض؟ ومامركبات متجه سرعتها عندئذ؟

15-3 يركل حارس مرمى كرة فتصل لنقطة تبعد عنه 46 m خلال 4.5 s. ماقيمة واتجاه السرعة الابتدائية علما بأن قدم الحارس لحظة الركل كانت على ارتفاع 1 m؟

16-3 يركل لاعب كرة بزاوية $60°$ فتصل لنقطة تبعد عنه $60\ m$ وعلى ارتفاع $10\ m$ عن سطح الأرض. ماسرعة الإطلاق؟

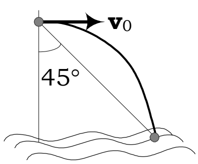
17-3 يتبارز شخصان بالمسدسات على بعد $50\ m$ من بعضهما فيطلقان أفقيا بسرعة $100\ m/s$ للأول و$150\ m/s$ للثاني. من سيصيب الآخر إذا كانت فوهة كل مسدس على ارتفاع $1\ m$؟

18-3 يركل لاعب كرة بسرعة $19.6\ m/s$ بزاوية $45°$. بأي سرعة يجب على حارس مرمى الفريق الخصم أن يركض ليلتقط الكرة لحظة وصولها للأرض إذا كان يبعد $55\ m$ عن اللاعب؟

19-3 يقذف حجر من سطح الأرض فتصير سرعته $7.6\mathbf{i} + 6.1\mathbf{j}\ m/s$ على ارتفاع $9.1\ m$. ما أعلى ارتفاع يصل إليه وما أكبر مسافة أفقية يقطعها وماسرعته لحظة وصوله للأرض؟

20-3 عند أي زاوية إطلاق يصير مدى قذيفة مساويا لأعلى ارتفاع تصل إليه؟

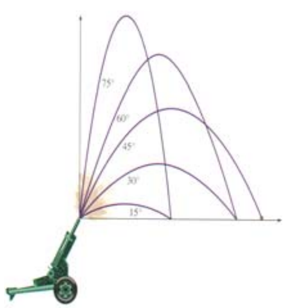
21-3 كيف يتغير مدى قذيفة وزمن طيرانها إذا أطلقت على سطح القمر بالمقارنة مع الأرض إذا كانت الجاذبية هناك تعادل $1/6$ من جاذبية الأرض؟



الشكل(3-14)

22-3 يقذف حجر أفقيا من جسر ارتفاعه $40\ m$ فوق الماء. (أ) مازمن طيرانه؟ (ب) ماذا يجب أن تكون سرعته الابتدائية حتى يصنع الخط الواصل بين نقطة الإطلاق ونقطة الارتطام بالماء $45°$، كما في الشكل (3-14)؟ (ج) ما اتجاه سرعة الحجر لحظة ارتطامه بالماء؟

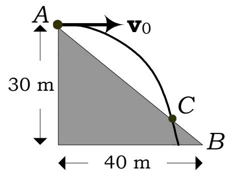
23-3 يطلق مدفع مضاد للطائرات قذيفة باتجاه طائرة فوقه على ارتفاع h. ماذا يجب أن تكون زاوية الإطلاق لتصيب الطائرة عند أعلى ارتفاع للقذيفة؟



24-3 برهن أننا نحصل على أكبر مدى لقذيفة عند زاوية إطلاق $45°$ لنفس سرعة الإطلاق.

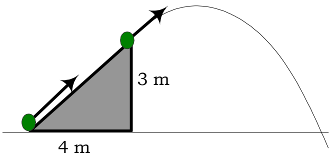
25-3 تطلق قذيفة بسرعة ابتدائية $\mathbf{v}_0$ باتجاه هدف يبعد عنها مسافة R (مدى القذيفة). برهن أن هناك زاويتي إطلاق يمكن استخدامهما لإصابة الهدف.

26-3 تطلق قذيفة من بعد $250\ m$ بسرعة ابتدائية $100\ m/s$ تصنع زاوية $30°$ مع الأفق باتجاه بناء مرتفع فيرى ذلك شخص يقف على سطح البناء ويلقي بنفسه خوفا بعد ثانية من إطلاق القذيفة ويسقط سقوطا حرا فتصيبه القذيفة اثناء سقوطه. ما ارتفاع البناء؟



الشكل(3-15)

3-27 تقذف كرة أفقيا بسرعة 10 m/s من ذروة مستو مائل، كما هو موضح بالشكل (3-15). ما المسافة التي تقطعها على المستوي؟ (مساعدة: جد نقطة تقاطع المستقيم AB مع مسار القذيفة).



الشكل(3-16)

3-28 يدفع جسم على مستو مائل بزاوية 37° بسرعة ابتدائية 10 m/s فيصل لذروته بعد 0.6 s لينطلق كقذيفة، كما في الشكل (3-16). ما أعلى ارتفاع يصل إليه بالنسبة لقعر المستوي؟

3-29 تقذف كرة من ارتفاع 1 m بسرعة 30 m/s وزاوية 30°. ما ارتفاعها عندما تصير على بعد 75 m ومامداها وأعلى ارتفاع تصل إليه؟

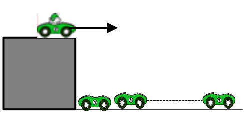
3-30 صمم أرخميدس منجنيقا لقذف الحجارة بزاوية 45° بحيث يقطع مسافة أفقية 180 m. ما سرعة إطلاق القذيفة؟

3-31 ينطلق لاعب، في لعبة "القذيفة البشرية" بسيرك، من فوهة مدفع بسرعة 87 km/h وزاوية 45°. (أ) ما الزمن اللازم له للوصول لأعلى ارتفاع وماهو هذا الارتفاع؟ (ب) مابعد النقطة التي سيصل إليها بالنسبة لنقطة الإطلاق؟

3-32 تصمم بندقية صيد لتطلق رصاصات بسرعة 630 m/s. (أ) على أي نقطة فوق هدف يبعد 700 m يجب على الرامي التصويب لإصابته؟ (ب) ما أعلى ارتفاع ستصل إليه القذيفة ومازمن طيرانها؟

3-33 تصل سرعة متزلج إلى 110 km/h عند نهاية أفقية لمنحدر ثلجي ارتفاعه 150 m ليطير بعد ذلك في الهواء عائدا للأرض بعد قطع مسافة أفقية x. ماهي x؟

3-34 يبلغ مدى قذيفة 70 m في منطقة تبلغ الجاذبية فيها $9.8728\ m/s^2$. كم يصير المدى في منطقة ثانية الجاذبية فيها $9.7967\ m/s^2$؟



الشكل (3-17)

3-35 في محاولة لكسر الرقم العالمي للقفز فوق السيارات يقوم سائق متهور بالانطلاق بسيارته من ارتفاع 2 m فوق عشر سيارات طول كل واحدة 2.4 m، كما في الشكل (3-17). ما أقل سرعة يجب أن ينطلق بها لينجح؟

3-36 ما أقل سرعة أفقية يجب على غطاس أن يقفز بها من ذروة صخرة ارتفاعها 36 m لتجاوز اللسان الصخري الممتد داخل البحر مسافة 6.4 m؟

الحركة الدائرية

37-3 ماالتسارع المماسي والمركزي للأرض بفرض أنها تدور حول الشمس بسرعة ثابتة على بعد 1.5×10^{11} m؟

38-3 يخضع الطيارون لتمارين لدراسة تأثير التسارعات العالية على جسم الإنسان، فيوضع الواحد منهم في حجيرة متصلة بذراع أفقي طوله 15 m وتدور 24 دورة بالدقيقة. ماتسارع الحجيرة؟

39-3 يدور صبي حجرا في دائرة أفقية ارتفاعها 2 m عن سطح الأرض بواسطة حبل طوله 1.5 m فينقطع الحبل خلال الدوران ويطير الحجر ليسقط على بعد 10 m. ماتسارعه المركزي؟

40-3 ما التسارع المركزي لكرة مربوطة بطرف خيط طوله 2 m ويدور بسرعة ثابتة 4 m/s في دائرة أفقية؟ هل يتغير التسارع لو صارت الدائرة شاقولية؟

41-3 ماسرعة دوران كرة تدور على دائرة نصف قطرها 0.6 m مرة كل ثانيتين؟

42-3 ماسرعة دوران الكرة في المسألة السابقة إذا كان تسارعها $2.4\ m/s^2$؟

43-3 في نموذج بور للذرة يدور الإلكترون حول البروتون في دائرة نصف قطرها 5×10^{-11} m وتسارع مركزي قيمته $9\times10^{22}\ m/s^2$. ماسرعة دوران الإلكترون؟ قارن بسرعة الضوء.

44-3 تدور سفينة فضاء في مسار دائري بسرعة 1/10 من سرعة الضوء. ما أصغر نصف قطر يمكن أن تدور عليه إذا كانت لاتتحمل تسارعا مركزيا أكبر من 20 g وما الزمن اللازم لها لتدور $90°$ عندئذ؟

45-3 تدور سفينة فضاء في مسار دائري على ارتفاع 640 km فوق سطح الأرض مرة كل 98 دقيقة. ماتسارع الجاذبية هناك إذا كان نصف قطر الأرض 6400 km؟

46-3 يدور جسم على دائرة نصف قطرها 60 cm بدور 2 s. مامتجه سرعته عندما تكون مركبة متجه موضعه السينية تساوي 48 cm في الربع الأول؟ ما المركبة الصادية لتسارعه المركزي عندئذ؟

47-3 تدور سيارة على منعطف نصف قطره 200 m بسرعة 20 m/s وخلال الدوران يضغط السائق على مزود الوقود فتزداد قيمة سرعته بمعدل $1\ m/s^2$. ما التسارع المماسي والمركزي للسيارة في تلك اللحظة وماتسارعه الكلي بالقيمة والاتجاه؟

48-3 ما أكبر سرعة يمكن أن تدور بها سيارة على منعطف نصف قطره 30 m إذا كانت عجلاتها لاتتحمل تسارعا أكبر من $8\ m/s^2$ بدون أن تنزلق؟

السرعة النسبية

49-3 يحاول طيار الطيران شمالا بسرعة 300 km/h بالنسبة للأرض عندما تهب رياح قوية سرعتها 100 km/h غربا. في أي اتجاه يجب أن يطير وبأي سرعة بالنسبة للرياح؟

50-3 تسقط قطرات المطر عموديا على سطح الأرض لكنها تبدو أنها تميل بزاوية $30°$ مع الشاقول بالبنسبة لراكب في قطار يسير أفقيا بسرعة 10 m/s. مامتجه سرعة القطرة بالنسبة للأرض والراكب؟

51-3 يحدد طيار اتجاهه نحو الغرب بسرعة 240 km/h. بعد نصف ساعة يجد نفسه فوق مدينة تقع على بعد 150 km غربا و40 km جنوب نقطة البدء. ماسرعة الرياح التي أثرت عليه؟ وبفرض أن كانت تهب جنوبا بسرعة 120 km/h فما الاتجاه الذي يجب أن يتبعه الطيار ليطير بسرعته المقررة؟

52-3 يقف رجل على سلم متحرك *(escalator)* فيستغرق 60 s للوصول للطابق الثاني، بينما يحتاج لـ 90 s ليصعد إذا كان السلم معطلا؟ ما الزمن اللازم للرجل ليصعد بنفس الوقت الذي يتحرك فيه السلم؟

53-3 ينتشر الصوت في الهواء بسرعة 330 m/s. ماسرعة الصوت المتجه للشمال إذا هبت رياح باتجاه الغرب بسرعة 30 m/s؟

54-3 يرتفع منطاد بسرعة 0.5 m/s في يوم عاصف تهب فيه رياح أفقية بسرعة 12 m/s. ماسرعة المنطاد بالنسبة للأرض؟

55-3 يبحر زورق بسرعة 10 km/h باتجاه $50°$ شرق الشمال فتهب رياح سرعتها 25 km/h باتجاه $10°$ شرق الشمال بالنسبة له. ماقيمة واتجاه سرعة الرياح بالنسبة للأرض؟

56-3 يركض طفل بسرعة 4 m/s غربا بالنسبة للأرض في قطار متحرك بسرعة 5 m/s شرقا. ماسرعة الطفل بالنسبة للقطار؟

57-3 تسقط صخرة من ارتفاع 5 m على سيارة قادمة بسرعة 90 km/h. (أ) ماسرعة الصخرة عند ارتطامها بالسيارة بالنسبة للسائق المسكين؟ (ب) مازاوية ارتطامها بالسيارة بالنسبة لمتفرج على الطريق؟

الفصل الرابع

تحريك الأجسام

(Dynamics)

1-4 تمهيد

درسنا حتى الآن كيف تتحرك الأجسام بتحديد موضعها وسرعتها وتسارعها في كل لحظة من الزمن، واستخلصنا العلاقات الرابطة بين متغيرات الحركة دون التطرق للسبب الذي يجعل الأجسام تتحرك بهذا الشكل أو ذاك. وقد درس يوهان كبلر (*Johannes Kepler* 1571-1630) حركة الكواكب في المجموعة الشمسية فترة طويلة وتابع حركة كل منها مع مرور الزمن، وتوصل إلى أن كل منها يسير في مسار محدد حول الشمس على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند أحد محرقيه (بؤرتيه) وماسحا خلال دورانه مساحات متساوية في أزمنة متساوية، وغير ذلك من القوانين التي تسمى قوانين كبلر. وكذلك فإن جاليليو جاليلي درس السقوط الحر للأجسام ووجد أن لها تسارعا ثابتا قرب سطح الأرض وأنها تتحرك شاقوليا للأسفل دوما. لكن كبلر وجاليلي لم يعطيا السبب الذي يجعل الأجسام تتحرك بهذا الشكل أو ذاك. ويسمى هذا في الميكانيك **علم الحركة** *(kinematics)*.

لكن دراسة سبب حركة الأجسام بدأ بقوانين التحريك (أو مايسمى أحيانا قوانين نيوتن) التي تجيب على السؤال المهم وهو لماذا تتحرك الأجسام أصلا وما الذي يحدد نوع الحركة وشكل المسار وغيرها. لذا ندرس في هذا الفصل **متغيرات التحريك** وأهمها **القوة والعطالة** (أو **القصور الذاتي**)، ونربطهما بمتغير الحركة الأساس وهو **التسارع**، من خلال **قوانين التحريك** *(dynamics)*. ثم ندرس أهم القوى التي تؤثر عادة على الأجسام وكيف نحددها في كل مسألة. وننتقل بعد ذلك

لدراسة بعض تطبيقات قوانين التحريك كاتزان الأجسام، وحركات المصاعد والوزن الظاهري، وانزلاق جسم على مستو مائل، وحركة منظومة جسيمات مرتبطة ببعضها، والقوى المركزية ومصادرها. ثم ننهي الفصل بدراسة قوة الجاذبية وتغيرها مع المسافة لأهميتها.

2-4 الكتلة *(mass)*

عندما نتكلم عن أجسام مادية فإننا نصفها بخواص معينة، فنقول إن الجسم صغير أو كبير، مشحون أو غير مشحون، ممغنط أو غير ممغنط، وغير ذلك. وتتميز كل خاصة من هذه الخواص بالتأثير الناتج عنها على الأجسام الأخرى. وسنعرف في هذه الفقرة خاصية الكتلة حيث اعتاد البعض تعريفها **بمقدار مايحويه الجسم من مادة**. إلا أن هذا التعريف لايفسر مانعنيه بكلمة كتلة إذ أن المادة المحتواة في جسم مؤلفة من كتلة، أي أننا نعرف الكتلة بالكتلة! لذا نلجأ لتعريف الكتلة بطريقة مختلفة. فإذا طلبنا من شخص أن يتأكد فيما إذا كان لجسم ما كتلة فإنه يقوم بوزنه لكن وزن الجسم لايظهر لولا وجود الأرض (كتلة أخرى) تجذبه للأسفل فيظهر تأثيرها عليه بما نسميه قوة الثقل أو الوزن. فلمعرفة فيما إذا كان لجسم كتلة احتجنا لكتلة أخرى لتحسس التأثير المتبادل بينهما، ولو اختفت كتلة واحد منهما لاختفى هذا التأثير مباشرة. لذا نعطي للكتلة **تعريفا تأثيريا** *(operational definition)* فنقول إن للجسم كتلة إذا استطاع أن يؤثر على غيره من الكتل بقوة التجاذب الكتلي. والتعريف السابق ينطبق على أي خاصة طبيعية أودعها الله عز وجل في المواد، كالكتلة والشحنة والفتل والخواص الأخرى التي توصف بها الأجسام الأولية. فإن كان لجسم خاصة ما عندئذ يؤثر على أجسام تحوي تلك الخاصة فقط. فالكتل تؤثر على بعضها بقوة الجاذبية، والشحنات تؤثر على بعضها بقوة كولوم الكهربائية، وهكذا. لكن خاصية الكتلة لاعلاقة لها بخاصية الشحنة بمعنى أن جسما مشحونا لايؤثر على آخر غير مشحون بقوة تجاذب أو تنافر كهربائي، كما أن جسما له كتلة لايؤثر بقوة تجاذب كتلي على آخر عديم الكتلة.

وتكون كتلة جسم كبيرة بالمقارنة مع غيره من الأجسام إذا كان تأثيره عليها أوضح من تأثره بها، أي إذا كان تسارعها نتيجة تأثرها به أكبر من تسارعه نتيجة تأثيرها عليه. ومن أفضل الأمثلة على ذلك قوة التجاذب بين الأرض وكرة تطير في الهواء إذ أن لكل واحدة منهما كتلة وتؤثر على الأخرى بقوة الجاذبية لكن الكرة تكتسب تسارعا أكبر لأن كتلتها أصغر بينما تبقى الأرض ساكنة تقريبا لأن كتلتها كبيرة جدا بالمقارنة مع الكرة. أما لو تابعنا حركة الأرض بالنسبة للشمس لوجدنا أن الأرض هي التي تتحرك في هذه الحالة لأن الشمس أكبر منها بكثير.

وتقدر الكتلة في النظام الدولي للوحدات بالكيلوغرام kg، كما نعلم.

3-4 **القوة** *(force)*

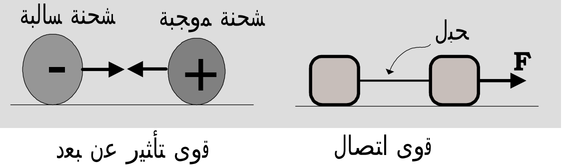
إن تعريف القوة ليس صعبا للغاية، فشد صندوق بواسطة حبل، أو دفع سيارة معطلة، أو رفع أثقال، ماهي إلا أمثلة على بعض القوى التي نطبقها أو نشعر بها يوميا. ونلاحظ أن كل قوة من هذه القوى تحرك الجسم الذي تؤثر عليه إن كان ساكنا، أو تغير سرعته إن كان متحركا. **فالقوة هي مؤثر يغير الحالة التحركية** للجسم وينتج عنها تسارع يغير قيمة و/أو اتجاه سرعة الجسم.

ويرمز للقوة عادة بـ **F** وتقدر وحدتها في النظام الدولي **بالنيوتن** N، وهي مشتقة من الوحدات الأساس بحيث أن:

$$1\ N = 1\ kg.m/s^2$$

ويمكن "تحسس" قيمة النيوتن لو حملنا بيدنا 100 غرام عندئذ يكون الثقل الذي نشعر به مساويا لواحد نيوتن تقريبا. فوحدة النيوتن ليست كبيرة بالمقارنة مع الأثقال التي نتعامل معها يوميا.

وتتميز بعض القوى أنه يمكن تطبيقها مباشرة على الأجسام الخاضعة لها، كأن نشد جسما موضوعا على الأرض بحبل، أو نضغط زنبركا مثبتا بالحائط. وتسمى هذه القوى **قوى اتصال** *(contact force)*، أي أن هناك تلامس مباشر بين مصدر القوة والجسم الخاضع لها. لكن هناك قوى تؤثر عن بعد كقوة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على الأجسام القريبة منها، أو قوى التجاذب والتنافر الكهربائي بين الأجسام المشحونة، حيث لايوجد تماس مباشر بين مصدر القوة والجسم الخاضع لها، لذا تسمى هذه القوى **قوى تأثير عن بعد** *(action at a distance)*. ولايوجد فرق بين هذين النوعين من القوى لأنه لو تمعنا بماهية قوى الاتصال لتبين لنا أنها قوى تأثير عن بعد بين الذرات والجزيئات المكونة لمادة الاتصال. انظر الشكل (4-1).



الشكل (4-1)

4-4 **قانون نيوتن الأول** *(Newton's First Law)*

من المعروف أنه إذا دفع جسم على الأرض فإنه ينزلق عليها مسافة معينة ثم يتباطأ إلى أن يقف. وقد اعتقد القدماء أن سبب ذلك يعود إلى أن طبيعة المادة هي السكون، بمعنى أن حركة أي شي تؤول للسكون. إلا أن التجارب العلمية أظهرت أن ذلك يعود لوجود قوى مقاومة لحركة الجسم المنزلق تعمل على إبطائه حتى يقف، ولو لم تكن موجودة لتابع سيره باستمرار. يطلق على

ماتقدم اسم **قانون نيوتن الأول** الذي نصيغه بالشكل: **يبقى أي جسم على حالته التحركية من سكون أو سرعة ثابتة (قيمة واتجاها) مالم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية غير معدومة** ونكتب هذا القانون بالشكل:

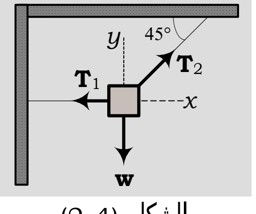
$$\mathbf{F}_T = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = \text{constant} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم و$\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ متجهي سرعته وتسارعه، على الترتيب. ونلاحظ من العلاقة السابقة أن كون التسارع مساويا للصفر يعني أن سرعة الجسم ستبقى ثابتة وهذا يسمى **اتزانا** *(equilibrium)*. فإن كانت سرعته مساوية للصفر، أي كان ساكنا ومحصلة القوى عليه تساوي الصفر، فسيبقى كذلك ونقول إنه **متزن سكونيا** *(static equilibrium)*. أما إن كان الجسم يتحرك بسرعة ما ومحصلة القوى عليه معدومة فسيبقى متحركا بنفس السرعة ونفس الاتجاه ونقول إنه في حالة **اتزان حركي** *(static equilibrium)*. ولذلك نطلق على التسارع (أي تغير السرعة) اسم **دليل التحريك** بينما نسمي القوة **سبب التحريك**.

ونستنتج عندئذ من قانون نيوتن الأول أنه **إذا لم يكن هناك سبب للتحريك** ($\mathbf{F}_T$=0) **فسيختفي دليله** ($\mathbf{a}$=0). ولابأس من التنويه إلى أن العلاقة (4-1) ليست قانونا يربط بين متغيرات مختلفة بل هي تعريف للقوة كمسبب لتحريك الجسم. ويستفاد من قانون نيوتن الأول لدراسة الاتزان السكوني للأجسام، كما في المثل التالي.

مثل 4-1

يتزن جسم تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل (4-2). ماقيمة كل شد إذا كان w=50 N؟



الشكل (4-2)

الحل: بما أن الجسم متزن نكتب محصلة القوى تساوي الصفر:

$$\mathbf{w} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = 0$$

وبأخذ مركبات هذه العلاقة على المحورين ox وoy الموضحين في الشكل(4-2) نجد:

$$T_1 \cos 45° = T_2$$

و

$$T_1 \sin 45° = w$$

ومنه:

$$T_1 = 71 \text{ N}$$

و

$$T_2 = 50 \text{ N}$$

5-4 **قانون نيوتن الثاني** *(Newton's second Law)*

نعالج في هذه الفقرة الحالة الأساس في الميكانيك عندما تكون محصلة القوى الخارجية المؤثرة على جسم ما (أي سبب التحريك) لاتساوي الصفر. حيث نلاحظ من قانون نيوتن الأول أنه عندما تكون $\mathbf{F}_T \neq 0$ فإن $\mathbf{a}_T \neq 0$ أيضا. فهناك ارتباط بين وجود الأول ووجود الثاني. ويمكن التحقق من نوع التناسب بينهما بدفع جسم بقوة ما على سطح ناعم جدا كالجليد، بحيث يمكن إهمال الاحتكاك بينهما، فنجد أنه يكتسب تسارعا معينا ولو ضاعفنا القوة لتضاعف التسارع مباشرة. أي أن **التسارع يتناسب طردا مع القوة المؤثرة**. من جهة أخرى، لو أبقينا القوة التي ندفع بها الجسم ثابتة وضاعفنا كتلته لوجدنا أن التسارع يتناقص إلى النصف. أي أن **التسارع يتناسب عكسا مع كتلة الجسم**. ونكتب هاتين النتيجتين بالشكل:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m}} \qquad (2\text{-}4)$$

وتكتب العلاقة السابقة بالشكل الشائع:

$$\boxed{\mathbf{F}_T = m\mathbf{a}} \qquad (3\text{-}4)$$

ويطلق على أي من (2-4) أو (3-4) اسم قانون نيوتن الثاني الذي نصيغه على النحو: **يتناسب تسارع جسم طرديا مع محصلة القوى المؤثرة عليه وعكسيا مع كتلته**. وبالحقيقة فإن (2-4) ليست قانونا بالمعنى الحرفي بل هي **تعريف تحريكي للكتلة** *(dynamic definition)*، حيث نلاحظ أنه إذا أثرنا على جسمين ساكنين بقوة واحدة فإن تحريك الجسم الأكبر أصعب من تحريك الجسم الآخر. وكذلك، إذا كان الجسمان يتحركان بنفس السرعة وحاولنا إيقافهما بالتأثير عليهما بنفس القوة للاحظنا أن الأكبر يمانع ذلك أكثر من الجسم الأصغر. أي أنه كلما زادت كتلة الجسم كلما أصبح من الصعب أن نغير حالته التحركية سواء كانت سكونا أم حركة. فالكتلة تمثل ممانعة *(inertia)* ونقول إن **الكتلة هي مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحريكية الانتقالية**. ونستفيد من تعريف الكتلة بهذا الشكل التحريكي لصياغة قانون التحريك الأساس للأجسام (العلاقة (2-4)) بالشكل: **يتناسب دليل تحريك الأجسام طردا مع سببه وعكسا مع ممانعته**. وسنرى لاحقا كيف نستفيد من هذا التعريف العام لكتابة تسارع أي منظومة مباشرة مهما كان نوع الحركة.

مثل 2-4

يتحرك جسم كتلته 2 kg بدءا من السكون على خط مستقيم بتسارع ثابت فيقطع مسافة 8 m خلال ثانيتين، ثم يسير بسرعة ثابتة لمسافة 20 m أخرى. ما القوة المؤثرة عليه في كل مرحلة من مراحل الحركة؟

الحل: نحسب تسارع الجسم خلال المرحلة الأولى فنكتب:

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad \Rightarrow \quad 8 = \tfrac{1}{2}a(2)^2$$

ومنه: $a = 4\ \mathrm{m/s^2}$

وبوضع: $F = ma$

نجد: $F = 8\ \mathrm{N}$

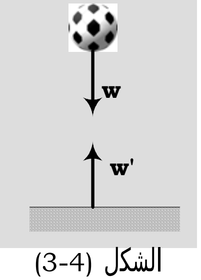
أما في المرحلة الثانية فإن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة لذلك تكون القوة المؤثرة عليه معدومة.

6-4 قانون نيوتن الثالث: الفعل ورد الفعل *(Action & Reaction)*

تحدث القوى بشكل مزدوج أو ثنائي دوما. فأي شخص حاول دفع سيارة معطلة لابد وأن شعر بدفع معاكس متناسب مع قوة دفعه لها. وإذا قمنا بشد حبل مربوط طرفه الآخر بجسم ما فإننا نعاني من شد معاكس ناتج عن ذلك الجسم. وتتلخص هذه الملاحظات قانون نيوتن الثالث الذي نصيغه بالشكل: **إذا أثر جسم أول بقوة $\mathbf{F}_{12}$ على جسم ثاني فإن الجسم الثاني يؤثر على الأول بقوة $\mathbf{F}_{21}$ بحيث أن $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$**، حيث يدل الرمز $\mathbf{F}_{nm}$ إلى القوة التي يؤثر بها الجسم n على m.

ويطلق على $\mathbf{F}_{12}$ و $\mathbf{F}_{21}$ اسم الفعل ورد الفعل، ولايهم أي منهما هي الفعل أو رد الفعل.

وكثيرا مايقرأ القانون الثالث بالشكل **لكل فعل رد فعل يساويه بالقيمة ويعاكسه بالاتجاه** لكن يجب الانتباه إلى أن هاتين القوتين لاتؤثران على نفس الجسم بل هما قوتان متبادلتان بين جسمين مختلفين دوما. وكمثل مباشر على ذلك نعتبر كرة تسقط سقوطا حرا في الهواء، كما في الشكل (4-3)، وبالتالي فهي تخضع لقوة جذب الأرض لها (الوزن)، كما أنها تجذب الأرض للأعلى بقوة مساوية ومعاكسة لوزنها (وزن الكرة). ونلاحظ أن هاتين القوتين لاتؤثران على نفس الجسم، فواحدة تؤثر على الكرة والثانية تؤثر على الأرض لكننا نلاحظ حركة الكرة فقط لأن ممانعتها (كتلتها) صغيرة جدا بالمقارنة مع ممانعة الأرض.



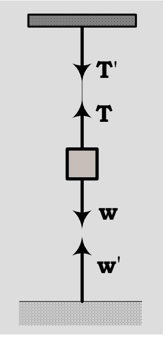
الشكل (4-3)

مثل 3-4

حدد قوى الفعل ورد الفعل المؤثرة على النظام المؤلف من كيس كتلته m معلق بسقف الغرفة بواسطة حبل، كما هو موضح بالشكل (4-4).

الحل: نلاحظ أن الجسم يخضع لجذب الأرض بقوة $\mathbf{w}$ نحو الأسفل لذا يجذبها نحو الأعلى بقوة $\mathbf{w}'$. كما أن السقف يشد الجسم للأعلى بقوة $\mathbf{T}$ فيشده الأخير بدوره بقوة $\mathbf{T}'$ للأسفل. وبحسب القانون الثالث يكون:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}' \quad \text{و} \quad \mathbf{w} = -\mathbf{w}'$$



الشكل (4-4)

فالشد والوزن ليستا قوتي فعل ورد فعل، كما يعتقد البعض، بل قوتان مختلفتان تؤثران على الجسم، لكن إذا كان الجسم متزنا عندئذ تكون محصلة القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر، أي أن $\mathbf{T} = -\mathbf{w}$. أما إذا كان الوزن أكبر من الشد فإن الحبل سينقطع ويسقط الكيس للأسفل، ولو كان الشد أكبر من الوزن عندئذ يتحرك الجسم للأعلى (كمصعد يرتفع).

لكل فعل رد فعل: من يدفع من في هذه الصورة؟

7-4 أمثلة على القوى وأنواعها

تمثل $\mathbf{F}_T$ في العلاقة (4-3) المجموع المتجه لكافة القوى المؤثرة على الجسم. ومن المصاعب التي يواجهها الطلبة عادة تحديد قيمة واتجاه كل قوة. لذا سنعرف في هذه الفقرة أهم القوى التي نصادفها في المسائل المطروحة عند هذا المستوى في الميكانيك.

1- الوزن $\mathbf{w}$ *(weight)*

إذا تركنا جسما يسقط سقوطا حرا في الفضاء فإنه يكتسب تسارع الجاذبية الأرضية $\mathbf{g}$ وتكون القوة المؤثرة عليه هي:

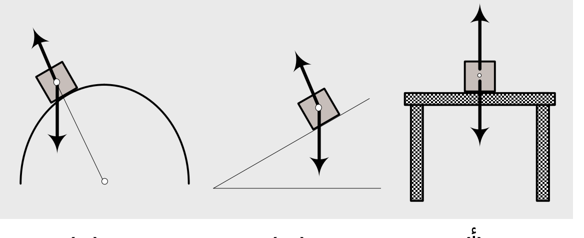
$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{w} = m\mathbf{g}} \qquad (4\text{-}4)$$

حيث يسمى $\mathbf{w}$ وزن الجسم ويتجه دوما نحو الأسفل (مركز الجذب).

ونلاحظ أن وزن جسم يعتمد على كتلته وتسارع الجاذبية في المكان الذي يوجد به. وبالطبع فإن كتلة الجسم لاتتغير (طالما كانت سرعته صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء) بينما يمكن أن يختلف تسارع الجاذبية من موضع لآخر. ولهذا إذا انتقل جسم من منطقة لأخرى تبقى كتلته ثابتة لكن وزنه يمكن أن يتغير.

2- رد فعل السطح N *(surface reaction or normal force)*

إذا وضعنا جسما على طاولة أفقية، كما في الشكل (4-5أ)، فإننا نلاحظ أنه يبقى ساكنا إذا لم نحاول تحريكه على الرغم من وجود وزن له يحاول سحبه للأسفل، ولو اختفت الطاولة من تحت الجسم لسقط مباشرة تحت تأثير وزنه. نستنتج إذا أن وجود سطح الطاولة يؤدي لوجود قوة معينة على الجسم نطلق عليها اسم **رد فعل السطح** ونرمز لها بـ **N**. وقد يعتقد البعض أن رد الفعل يعاكس الوزن دوما وهذا غير صحيح، إذ لو وضعنا الجسم على سطح مائل بزاوية كبيرة بعض الشئ، كما في الشكل (4-5ب)، لوجدنا أن الجسم ينزلق على السطح مما يعني أن القوة الكلية عليه لاتساوي الصفر. أي أن اتجاه رد الفعل لايعاكس الوزن في هذه الحالة. وبالفعل فإن **رد فعل السطح يتجه دوما عموديا على السطح وبعيدا عنه**. فإذا تحرك الجسم على سطح كرة مثلا فإن رد الفعل يتجه عموديا عليها عند كل نقطة من سطحها، كما في الشكل (4-5ج).



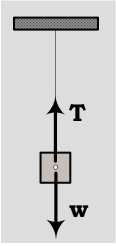
(ج) (ب) (أ)

الشكل (4-5)

وبحسب تعريفه، فإن رد فعل سطح على جسم يضغط عليه يختفي في اللحظة التي ينتهي التماس بينهما، كأن يرتفع الجسم للأعلى مثلا، أو يختفي ضغط الجسم على السطح كصورة معلقة على حائط إذ لاتضغط عليه وبالتالي لاتعاني من قوة رد فعل منه.

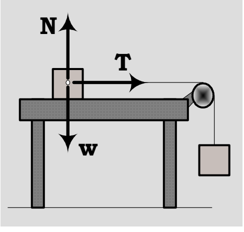
إلى أين يتجه رد فعل الأرض؟

3- الشد T *(Tension)*



الشكل(4-6)

إذا علقنا جسما بطرف حبل مثبت طرفه الآخر بسقف المختبر، كما في الشكل(4-6) لوجدنا أنه يبقى ساكنا ممايعني أن هناك قوة تساوي وتعاكس الوزن نتيجة ارتباط الجسم بالسقف بواسطة الحبل، ونقول إن السقف يؤثر على الحبل بقوة نرمز لها بـ **T**. ولاشك بأن السقف ماكان ليشد الجسم لولا وجود الحبل الواصل بينهما، ولذلك نستنتج أن كل جسم مربوط بحبل يخضع لقوة شد على امتداد الحبل. لكن يجب أن نتذكر أن هذا لايتحقق إلا إذا كان الطرف الآخر للحبل متصل بمؤثر ما، كالسقف في هذا المثل، وإلا فإن ربط سيارة معطلة بحبل وتركه ملقى على الأرض لن يفيد كثيرا في شدها لمحطة لإصلاحها.

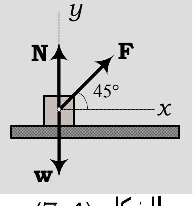


الشكل (4-7)

وكما أن رد فعل السطح **N** لايساوي أو يعاكس الوزن دوما، فإن الشد **T** لايساوي أو يعاكس الوزن بالضرورة. وبالفعل فإننا نرى في الشكل (4-7) أن الجسم يخضع لقوتي الوزن **w** ورد فعل السطح **N** المتساويتين والمتعاكستين في هذه الحالة، إلا أن الشد **T** يؤثر عليه بقوة أفقية تزلقه على السطح إن لم تمنعه قوى الاحتكاك من ذلك، كما سنرى في الفقرة التالية.

مثل 4-4

يشد طالب جسما كتلته 10 kg على طاولة أفقية ملساء بقوة تميل بزاوية 45°، كما في الشكـل (4-7). ماقيمة F ورد فعل السطح إذا تسارع الجسم بمعدل $2\ \text{m/s}^2$؟



الشكل (4-7)

الحل: من الواضح أن الجسم خاضع لثلاث قوى هي الوزن ورد فعل السطح وF. لذا نكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{w} = m\mathbf{a}$$

وباختيار المحورين ox و oy، كما في الشكل (4-7)، وأخذ مركبات العلاقة السابقة على كل واحد منهما نجد:

$$0 + 0 + F\cos 45° = ma$$

و

$$N - w + F\sin 45° = 0$$

حيث نلاحظ أن تسارع الجسم على المحور oy يساوي الصفر لأنه لايتحرك في ذلك الاتجاه.

وبحل المعادلتين السابقتين بالنسبة لـ F و N نجد:

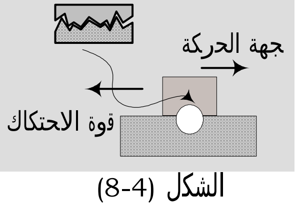
$$N = 78\ \text{N} \quad \text{و} \quad F = 28.3\ \text{N}$$

ومن المفيد هنا التأكيد على أنه كان بالإمكان كتابة التسارع مباشرة من مفهوم تناسب دليل التحريك طردا مع سببه وعكسا مع ممانعته، حيث نلاحظ أن سبب التحريك في هذا المثل هو مركبة القوة الأفقية على محور السينات أي $F\cos45°$، أما ممانعته فهي كتلة النظام، أي m. ومن ثم نكتب:

$$a = \frac{F\cos 45°}{m} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{ma}{\cos 45°} = 28.3\ \text{N}$$

4- قوة الاحتكاك *(Friction)*

عندما يتحرك جسم أو يحاول الحركة على سطح خشن أو في وسط لزج فإنه يخضع لقوة معاكسة لحركته، تسمى قوة الاحتكاك ناتجة عن التأثير المتبادل بين ذرات الجسم وذرات السطح الملامس له. وتكون **قوة الاحتكاك موازية للسطح بعكس اتجاه الحركة أو الاتجاه الذي يحاول الجسم التحرك نحوه دوما**، كما في الشكل (4-8).



الشكل (4-8)

ومن الواضح أن معرفة تفاصيل قوة الاحتكاك ليس سهلا، كما أن طبيعتها تعتمد على عوامل كثيرة كدرجة الحرارة بين الجسمين المتلامسين والرطوبة وغيرها، لكنها تنتج أساسا من القوى الذرية والجزيئية المتبادلة بين ذرات الجسم والسطح، ولذا فهي تعتمد على نوع وطبيعة كل منهما. وتعطي نتائج التجارب العملية قوانين الاحتكاك التالية:

أ- **قوة الاحتكاك السكوني** *(static friction)*: إذا حاول جسم الحركة على سطح خشن لكنه بقي ساكنا نقول إنه خاضع لقوة احتكاك سكوني بعكس الاتجاه الذي يحاول أن يتحرك نحوه، وتعطى قيمتها بالمتراجحة:

$$0 \le F_s \le \mu_s N \tag{5-4}$$

فتتراوح قيمة قوة الاحتكاك السكوني بين الصفر عندما **لايحاول** الجسم الحركة بتاتا على السطح، وتصل لقيمة عظمى

$$(F_s)_{\max} = \mu_s N \tag{6-4}$$

عندما يصير الجسم **على وشك الحركة** (دون أن يتحرك)، حيث N رد فعل السطح و μ_s ثابت يسمى **معامل الاحتكاك السكوني** *(coefficient of static friction)*.

ب- **قوة الاحتكاك الحركي** *(kinetic friction)*: إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركي بعكس الاتجاه الذي يتحرك نحوه، وتعطى قيمتها بالعلاقة:

$$\boxed{F_k = \mu_k N} \qquad (7\text{-}4)$$

حيث N رد فعل السطح و μ_k **معامل الاحتكاك الحركي** *(coefficient of kinetic friction)*.

ويعتمد كل من μ_s و μ_k على طبيعة الجسم والسطح، كما ذكرنا سابقا، لكنه لايعتمد على مساحة السطوح المتماسة أو كتلة الجسم المتحرك.

ويجدر الانتباه إلى أن العلاقتين (6-4) و(7-4) تربطان بين قيمة قوة الاحتكاك وقيمة رد فعل السطح لابين اتجاهيهما، إذ أن الأولى موازية للسطح دوما بينما الأخيرة عمودية عليه.

مثل 4-5

يسحب جسم كتلته 2 kg على طاولة أفقية خشنة بواسطة قوة متغيرة F. ماقوة الاحتكاك المؤثرة على الجسم عندما تكون تأخذ F القيم التالية: 6 N, 4 N, 1 N، إذا معامل الاحتكاك السكوني 0.2 والحركي 0.1؟

الحل: لنحسب أولا أكبر قيمة ممكنة لقوة الاحتكاك السكوني فنكتب:

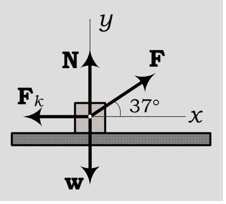
$$(F_s)_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg = 4\ \mathrm{N}$$

الآن: إذا تركنا الجسم على السطح دون أن نؤثر عليه بأي قوة فإنه يبقى ساكنا ولايخضع لأي قوة احتكاك لذا تكون قوة الاحتكاك السكوني عندئذ مساوية لقيمتها الصغرى أي صفر. وإذا أثرنا بقوة 1 N فإن السطح يؤثر بقوة احتكاك سكوني معاكسة بقيمة 1 N أيضا بحيث يبقى الجسم ساكنا. وبزيادة القوة الخارجية تدريجيا من 1 N إلى 4 N تزداد قوة الاحتكاك السكوني إلى أن تصير أكبر مايمكن، أي 4 N، وتبقى مانعة للجسم عن الحركة. ولكن عندما تصير القوة الخارجية 4 N تماما يصير الجسم على وشك الحركة بحيث لو زادت عن 4 N **بأي مقدار** لتغلبت على أكبر قوة احتكاك سكوني ولتحرك الجسم على السطح وعندئذ يتحول الاحتكاك إلى حركي وتصبح قوة الاحتكاك حركية تعطى بالعلاقة:

$$F_k = \mu_k N = \mu_k mg = 2\ \mathrm{N}$$

فقيمة قوة الاحتكاك عندما تصير القوة الخارجية 6 N هي ثابتة وتساوي 2 N.

مثل 6-4



الشكل (9-4)

يسحب جسم كتلته 5 kg على طاولة أفقية خشنة بواسطة قوة F=40 N تميل بزاوية 37°، كما في الشكل (9-4). ماتسارع الجسم على الطاولة إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينهما 0.4؟

الحل: نكتب قانون التحريك للجسم حيث نلاحظ أن القوى المؤثرة عليه هي وزنه $\mathbf{w}$ ورد فعل الطاولة $\mathbf{N}$ والقوة المطبقة $\mathbf{F}$ وقوة الاحتكاك الحركي $\mathbf{F}_k$، فنجد:

$$\mathbf{w}+\mathbf{N}+\mathbf{F}+\mathbf{F}_k=m\mathbf{a}$$

وباختيار المحور ox باتجاه حركة الجسم وoy عموديا على الطاولة، كما في الشكل (9-4)، نجد من المركبة السينية للعلاقة السابقة أن:

$$F\cos 37°-F_k=ma$$

ومن المركبة الصادية:

$$N-w+F\sin 37°=0$$

فحتى نستطيع حساب التسارع يجب معرفة قوة الاحتكاك الحركي. وبما أنها تساوي $\mu_k N$ لذا نحسب قيمة رد فعل الطاولة N من المركبة الصادية فنجد (حيث نضع g=10 m/s^2 لسهولة الحساب):

$$N=w-F\sin 37°=50-40\sin 37°=26 \text{ N}$$

أي أن:

$$F_k=\mu_k N=10.4 \text{ N}$$

وبالتالي نعوض هذه القيمة في معادلة التسارع فنجد:

$$(40)\cos 37°-10.4=5a \;\Rightarrow\; a=4.32 \text{ m/s}^2$$

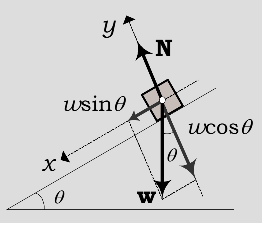
8-4 تطبيقات على قوانين نيوتن

1- انزلاق جسم على مستو مائل بدون احتكاك

لنحدد تسارع جسم m ينزلق على سطح يميل بزاوية θ بدون احتكاك (أي أن السطح ناعم لدرجة يمكن إهمال الاحتكاك بينه وبين الجسم بالمقارنة مع القوى الأخرى)، كما في الشكل (10-4).

فنحدد أولا القوى المؤثرة على الجسم فنلاحظ أن له كتلة أي أن له وزنا $\mathbf{w}$ نحو الأسفل، كما أنه موجود على سطح فهناك رد فعل $\mathbf{N}$ عمودي على السطح وبعيدا عنه. ونظرا لأننا أهملنا الاحتكاك فلا توجد قوة احتكاك في هذه الحالة، ونكتب بحسب قانون نيوتن الثاني:

$$\mathbf{w} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$$



الشكل(10-4)

فإذا اخترنا محور السينات موازيا للسطح باتجاه حركة الجسم، ومحور الصادات عموديا على السطح وبعيدا عنه، كما في الشكل (10-4)، وأخذنا مركبات العلاقة السابقة على كل محور نجد أولا من المركبة السينية:

$$w \sin\theta = ma$$

أي أن:

$$a = \frac{w \sin\theta}{m}$$

ونستنتج من هذه العلاقة أن التسارع يتناسب طردا مع سبب التحريك وهي مركبة الوزن الموازية لسطح المستوي $w\sin\theta$، وعكسا مع ممانعة التحريك m.

وبوضع $w=mg$ يصير تسارع جسم ينزلق على مستو مائل بدون احتكاك معطى بالعلاقة:

$$\boxed{a = g \sin\theta} \qquad (8\text{-}4)$$

فتسارع الجسم مستقل عن كتلته.

كما نجد من المركبة الصادية:

$$N = mg \cos\theta$$

وهي قيمة رد فعل السطح في هذه الحالة.

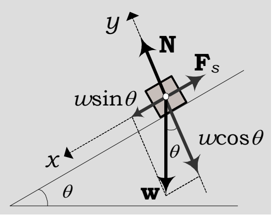
ويمكن البرهان انه لو دفعنا الجسم على السطح المائل للأعلى بسرعة ابتدائية ما وتركناه فإنه يتحرك بداية للأعلى بتباطؤ يساوي:

$$a = -g \sin\theta$$

فيصل لنقطة يتوقف عندها ويعود متحركا على المستوي للأسفل بتسارع معطى بـ (8-4).

2- انزلاق جسم على مستو مائل خشن

لنفترض أننا وضعنا جسما m على مستو أفقي خشن. فإذا رفعنا المستوي من أحد طرفيه بحيث يصنع زاوية صغيرة مع الأرض فإننا نلاحظ أن الجسم يبقى ساكنا تماما بسبب وجود قوة احتكاك



الشكل (4-11)

سكوني معاكسة لحركته وتزداد كلما زاد ميل المستوي، إلى أن يصل لزاوية كبيرة يصير عندها الاحتكاك السكوني أكبر مايمكن ويصبح الجسم على وشك الحركة لكنه يبقى ساكنا ولايتحرك. فإن زاد ميل المستوي أكثر من ذلك انزلق الجسم وتحولت قوة الاحتكاك من سكونية إلى حركية.

ويمكن إيجاد الزاوية التي يصير عندها الجسم على وشك الانزلاق على السطح الخشن حيث تصل قوة الاحتكاك السكوني لقيمتها العظمى وتساوي مركبة الوزن التي تحاول سحب الجسم للأسفل، كما هو موضح بالشكل (4-11). وبما أن الجسم لايزال متزنا، ولو أنه على وشك الانزلاق، لكن محصلة القوى عليه تبقى مساوية للصفر ونكتب:

$$\mathbf{w}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_s=0$$

وباختيار المحورين ox و oy كما هو موضح نجد من المركبة السينية:

$$w\sin\theta-F_s=0$$

أي أن

$$F_s=w\sin\theta_s$$

فقوة الاحتكاك السكوني تساوي مركبة الوزن التي تحاول زلق الجسم على المستوي طالما بقي ساكنا عليه.

كما نجد من المركبة الصادية:

$$N-w\cos\theta_s=0\Rightarrow N=w\cos\theta_s$$

وبما أن الجسم على وشك الحركة لذا فإن قوة الاحتكاك السكوني تكون أكبر مايمكن، أي أن:

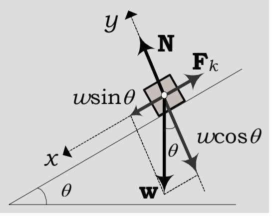
$$F_s=(F_s)_{\max}=\mu_s N=\mu_s w\cos\theta_s$$

ونجد من العلاقات السابقة:

$$\boxed{\tan\theta_s=\mu_s} \qquad (9\text{-}4)$$

حيث θ_s زاوية ميل المستوي التي يصير الجسم عندها على وشك الانزلاق عليه.

لنفترض الآن أن زاوية ميل المستوي أكبر من θ_s بحيث ينزلق الجسم على المستوي وتصير قوة الاحتكاك حركية F_k. عندئذ نكتب من قانون نيوتن الثاني والشكل (4-12):



الشكل (4-11)

$$\mathbf{w}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_k = m\mathbf{a}$$

وبأخذ مركبة العلاقة على ox نجد:

$$w\sin\theta - F_k = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{w\sin\theta - F_k}{m}$$

حيث نلاحظ أن سبب التحريك لايزال مركبة الوزن الموازية للمستوي لكنها تناقصت بسبب الاحتكاك الذي يقاوم الحركة دوما، بينما لاتزال الممانعة هي m لعدم تغير كتلة النظام. وبوضع

$$F_k = \mu_k N = \mu_k w\cos\theta$$

يصير التسارع

$$\boxed{a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)} \qquad (4\text{-}10)$$

فلا يزال التسارع مستقل عن كتلة الجسم لكن الاحتكاك يجعله أقل من حالة الانزلاق بدون احتكاك طبعا.

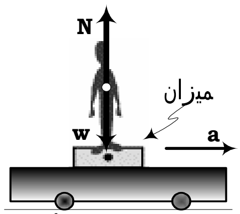
3- حركة المصاعد والوزن الظاهري

نستفيد من قانون نيوتن الثاني لتفسير بعض الظواهر اليومية التي نشعر بها. ومنها الشعور الذي ينتاب راكب مصعد عندما يبدأ الحركة للأعلى أو الأسفل، إذ يشعر أن وزنه تغير فجأة "وبهبوط في القلب" وهذا مماثل لراكب الطائرة خلال الإقلاع والهبوط، أو من يتأرجح على مرجوحة أو يغطس في الماء. ويسمى هذا الشعور بتغير الوزن **الوزن الظاهري** *(apparent weight)*.

وسنعتبر فيمايلي حركة المصاعد فقط لسهولتها مع أنه يمكن تعميمها لأوساط أخرى، مثل دافعة أرخميدس التي سنتطرق إليها في فصل لاحق. لكن قبل البدء بدراسة حركة المصاعد لابد أن نذكر شيئا عن الطريقة التي نستعملها لمعرفة وزن أي واحد منا. فعندما يقف أحدنا على ميزان زنبركي أفقي ساكن فإن الميزان يخضع لقوة الثقل، أي وزن الشخص الواقف عليه، فينضغط الزنبرك الموجود فيه ويؤثر بقوة معاكسة للأعلى إلى أن تصير قوة الزنبرك مساوية للوزن. فطالما بقي الميزان ساكنا كانت قوة الزنبرك (أي رد فعل الميزان) مساوية للوزن وهذا مانقرأه عادة. أما إذا تسارع السطح الذي يوجد عليه الميزان عندئذ ستكون هناك قوى أخرى نتيجة ذلك ولايعود رد الفعل مساويا للوزن بالضرورة بل قد يختلف عنه حسب جهة الحركة ونوعها، وهذا مانسميه الوزن الظاهري.

ولدراسة هذه الظاهرة نعتبر شخصا كتلته m يقف على ميزان موضوع على سطح أفقي، كما في الشكل (4-13)، كمصعد في بناء مرتفع. حيث نلاحظ أن القوى المؤثرة على الشخص هي وزنه ورد فعل الميزان ولذلك نكتب قانون نيوتن الثاني بالشكل:

$$\mathbf{w} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$$

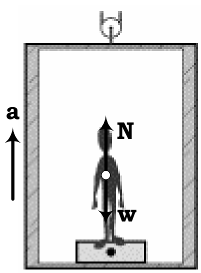


الشكل (4-13أ)

ونميز هنا الحالات التالية:

(أ) السطح يتحرك أفقيا، كما في الشكل (4-13أ):

في هذه الحالة لايتسارع الجسم للأعلى أو الأسفل لذا تبقى قيمة رد فعل السطح $\mathbf{N}$ مساوية للوزن $\mathbf{w}$، أي أن قراءة الميزان تعطي الوزن الصحيح للشخص.



الشكل (4-13ب)

(ب) السطح يتحرك شاقوليا للأعلى أو الأسفل بتسارع $\mathbf{a}$:

إذا كان السطح يتحرك للأعلى، كما في الشكل (4-13ب) نعتبر الاتجاه الموجب للأعلى فتؤول العلاقة السابقة للشكل:

$$N - mg = ma$$

وبالتالي يكون رد فعل السطح مساويا إلى:

$$\boxed{w' = N = w + ma = m(g + a)} \qquad (4\text{-}11)$$

فإذا أعتبرنا حركة مصعد يرتفع للأعلى فإنه يتسارع في بداية حركته ($a > 0$) ويكون $w' > mg$، أي أن الوزن المقروء (الظاهري) أكبر من الوزن الحقيقي. ثم يتحرك المصعد بسرعة ثابتة، أي $a = 0$ ويكون $w' = mg$، أي أن الوزن الظاهري يساوي الوزن الحقيقي. وفي المرحلة الأخيرة من الصعود للأعلى يبدا المصعد بالتباطؤ ليقف، أي $a < 0$، وعندها يصير $w' < mg$ ويكون الوزن الظاهري أصغر من الوزن الحقيقي.

أما إذا كانت حركة السطح للأسفل كنزول المصعد مثلا، عندئذ تؤول معادلة الحركة إلى:

$$w - N = ma$$

أي أن:

$$\boxed{w' = N = w - ma = m(g - a)} \qquad (4\text{-}12)$$

فعند بداية النزول يكون $a > 0$ ، أي أن $w' < mg$ ، فقراءة الميزان أصغر من الوزن الحقيقي. وإذا تحرك المصعد بسرعة ثابتة يتساوى الإثنان، وأخيرا يتباطأ المصعد ليقف خلال نزوله، $a < 0$ ، فيصير $w' > mg$ أي أن الميزان يقرأ وزنا أكبر من الوزن الحقيقي للشخص.

(ج) السطح يتحرك بشكل مائل:

يلاحظ الوزن الظاهري في كل وسط متسارع بشكل غير أفقي أي أن تغير قراة الميزان لاتحدث في أوساط متسارعة للأعلى أوالأسفل فقط بل في أوساط متسارعة بشكل مائل، كالطائرات خلال الإقلاع والهبوط، أو عند انزلاق جسم على مستو مائل. ولمعرفة الوزن الظاهري في حالات كهذه يجب أخذ مركبة التسارع الشاقولية فقط عند استخدام العلاقات (4-11) و (4-12) لحساب رد فعل الميزان (المفترض بقاؤه أفقيا)، لأن المركبة الأفقية للتسارع لاتغير من قيمة رد الفعل.

مثال 4-7

يقف رجل كتلته 70 kg في مصعد يتحرك للأعلى فيقرأ وزنه 850 N. ماتسارع المصعد؟

الحل: بما أن حركة المصعد نحو الأعلى لذا نكتب:

$$N - w = ma$$

وبتعويض كل من m=70 kg و w=mg=686 N و w'=N=850 N نجد

$$a = 2.3\ \mathrm{m/s^2}$$

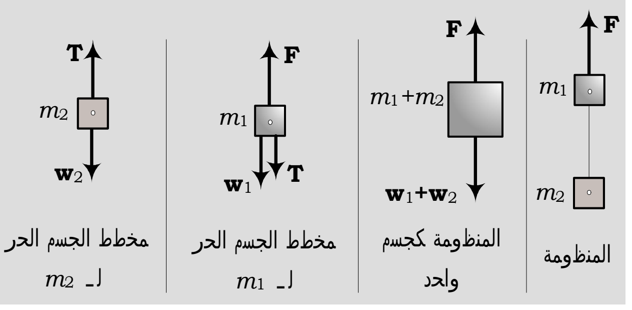
فالمصعد يتسارع في حركته للأعلى.

4-9 حركة منظومة جسيمات وطريقة الجسم الحر *(Free Body Diagram)*

يمكن تطبيق قانون نيوتن على جسم واحد أو عدة أجسام سواء كانت مرتبطة ببعضها أو مستقلة عن بعضها، بحيث نأخذ بعين الاعتبار كتلة الجزء المدروس والقوى الخارجية بالنسبة له والمؤثرة عليه فقط. فإذا اخترنا جسما ما من منظومة مؤلفة من عدة أجسام عندئذ نحدد القوى المؤثرة عليه سواء كان مصدرها أجسام أخرى من المنظومة نفسها أم أجسام خارجية عنها. ويطلق على الشكل الناتج اسم **مخطط الجسم الحر**.

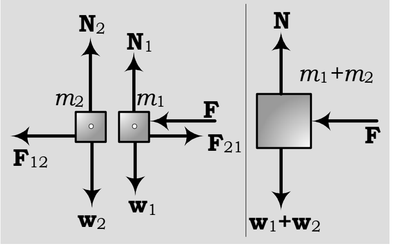
فإذا كان لدينا مثلا جسمان مرتبطان ببعضهما بخيط، كما في الشكل (4-14)، وأردنا دراسة حركتهما كجسم واحد عندئذ نعتبر القوى الخارجية المؤثرة عليهما حيث نلاحظ أنها مؤلفة من

وزنيهما وشد السقف لهما، بينما نهمل الشد في الخيط الواصل بينهما لأنه قوة داخلية متبادلة بين الجسمين ومحصلتها معدومة. أما إذا درسنا حركة أحد الجسمين فقط، مثل m_2، عندئذ نعتبر القوى الخارجية عنه والمؤثرة عليه فقط، فنلاحظ أنها وزنه وشد الجسم الآخر له بواسطة الخيط بينهما، أما السقف فلايؤثر عليه مباشرة ولذلك لانأخذه بعين الاعتبار. ولو أردنا دراسة حركة m_1 فنلاحظ أن القوى المؤثرة عليه هي وزنه وشد السقف فوقه وشد m_2 تحته، وهكذا.



الشكل (14-4)

مثل 8-4



الشكل (15-4)

ماتسارع الكتلتين m_1=2 kg و m_2=3 kg الموضحتين بالشكل (15-4) وما القوة التي يؤثر بها m_1 على m_2 إذا كانت القوة الخارجية المؤثرة على النظام F= 10 N؟

الحل: سنستخدم هذا المثل لتوضيح فكرة الجسم الحر. فنبدأ أولا بحساب تسارع المنظومة كجسم واحد مؤلف من الجسمين المتلاصقين كتلته مجموع الكتليتين والقوى الخارجية عنه هي وزنه ورد فعل السطح الذي يتحرك عليه والقوة F، من ثم نكتب قانون التحريك له:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$$

وبما أن رد فعل السطح في هذه الحالة يساوي ويعاكس الوزن لذا نجد:

$$F = ma = (m_1 + m_2)a$$

أي أن:

$$a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} = 2\ \text{m/s}^2$$

فتسارع المنظومة يتناسب طردا مع القوة الفاعلة المحركة وهي القوة الخارجية في هذه الحالة، وعكسا مع ممانعة النظام الكلية، أي كتلة الجسمين معا.

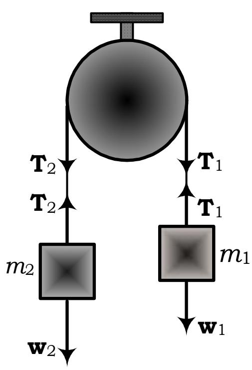
الآن: لإيجاد القوة التي يؤثر بها m_1 على m_2 ندرس حركة الأخير فقط، ونحدد القوى عليه. فنلاحظ أن m_2 يخضع لجذب الأرض، أي وزنه $\mathbf{w}_2$، ورد فعل السطح الذي يتحرك عليه $\mathbf{N}_2$ والقوة $\mathbf{F}_{12}$ التي يؤثر بها m_1 عليه (لاحظ أن m_2 يؤثر على m_1 بقوة $\mathbf{F}_{21}$ مساوية ومعاكسة لـ $\mathbf{F}_{21}$ حسب قانون نيوتن الثالث أي أن $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$). وبكتابة قانون التحريك لـ m_2 وملاحظة أن رد فعل السطح عليه يساوي ويعاكس وزنه، نجد:

$$F_{12} = m_2 a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{12}}{m_2}$$

فتسارع m_2 يتناسب طردا مع القوة الفاعلة المؤثرة عليها، F_{12}، وعكسا مع ممانعتها m_2. ويكون:

$$F_{12} = 6 \text{ N}$$

مثل 4-9 آلة آتوود *(Atwood Machine)*



الشكل (4-16)

آلة أتوود هي مثل على الرافعة التي نستعملها وهي من أقدم الآلات التي استخدمها الإنسان لرفع الأجسام لبساطة تركيبها وسهولة استعمالها. وتتألف من كتلتين m_1 وm_2 مرتبطتين ببعضهما بواسطة خيط خفيف يمر على بكرة نصف قطرها r مثبتة في مكانها، كما في الشكل (4-16)، وسنحدد تسارع المنظومة والشد في الخيط الواصل بين الكتلتين.

الحل: سنفترض أن البكرة ملساء ومهملة الكتلة حتى يمكن تجنب حركتها الدورانية التي سندرسها بالتفصيل لاحقا، ولذلك يكون الشد في الخيط الواصل بين الكتلتين واحدا، أي أن $T_1=T_2$. ومن ثم نعتبر النظام مؤلف من كتلة واحدة m_1+m_2 وخاضع لمحصلة قوة خارجية $\mathbf{F}_T=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$ بينما نهمل الشد بين الجسمين لأنه قوة داخلية متبادلة بينهما ومحصلته معدومة. وبذلك نكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{a}$$

فإذا افترضنا m_2 تتحرك نحو الأسفل عندئذ نعتبر الاتجاه الموجب للأسفل أيضا وتؤول العلاقة السابقة إلى:

$$w_2 - w_1 = (m_1 + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{w_2 - w_1}{m_1 + m_2}$$

ونلاحظ من هذه النتيجة أن القوة المحركة للمنظومة هي الفرق بين وزني الكتلتين، إذ لو كان لهما نفس الكتلة لما تحركت المنظومة على الإطلاق. أما الممانعة فهي كتل كل الأجسام الموجودة في المنظومة بغض النظر عن جهة حركة أي منها سواء تحركت أم لم تتحرك.

وبتعويض w=mg في التسارع نجد:

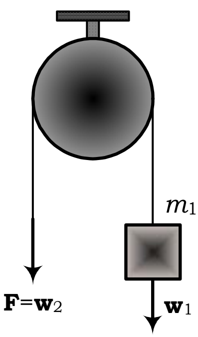
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

الآن: لحساب الشد في الخيط الواصل بين الكتلتين نستخدم طريقة الجسم الحر وندرس حركة أحد الجسمين، مثلm_1، فنكتب قانون نيوتن الثاني لها:

$$T - m_1 g = m_1 a$$

وبتعويض قيمة التسارع a في العلاقة السابقة نجد:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



الشكل (4-17)

تعليق: لنفترض أننا استبدلنا m_2 بقوة شد (بواسطة اليد مثلا) قيمتها F=m_2g، كما في الشكل (4-17) فهل يتغير تسارع المنظومة؟ قد يبدو لأول وهلة أنه لن يتأثر لأن القوة المحركة F-m_1g=(m_2-m_1)g لم تتغير نتيجة استبدال m_2. لكن لو أمعنا النظر إلى المنظومة لتبين لنا أن ممانعتها قد صارت m_1 فقط. ولذلك تتغير قيمة التسارع إلى:

$$a = \frac{F - m_1 g}{m_1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1} g$$

10-4 القوى المركزية *(Central Forces)*

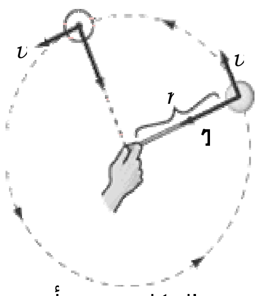
وجدنا في الفصل الثالث أنه إذا تحرك جسم على مسار دائري نصف قطره r بسرعة v فإنه يكتسب تسارعا مركزيا يتجه نحو مركز الدائرة وقيمته:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

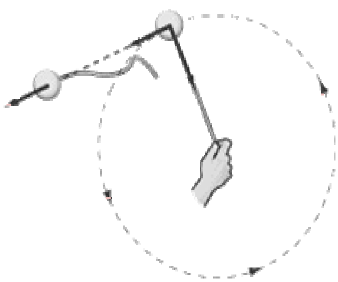
وبحسب القانون الثاني في التحريك يجب أن تكون هناك قوة مؤثرة على الجسم معطاة بالعلاقة:

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (13\text{-}4)$$

وتتجه هذه القوة، كالتسارع، **نحو مركز الدائرة.** ومن الأخطاء الشائعة عند البعض افتراض أن القوة تتجه بعيدا عن المركز ويطلقون عليها **–خطأ-** اسم **القوة الطاردة.** لكن هذا غير صحيح إذ لاوجود لقوة طاردة مؤثرة على جسم يتحرك حركة دائرية منتظمة، بل إن القوة المؤثرة عليه **جاذبة** نحو المركز *(central)* تعطى قيمتها بالعلاقة (13-4). ويمكن فهم هذه النقطة لو تابعنا حركة كرة مربوطة بخيط، كما في الشكل (18-4أ)، للاحظنا أنها خضعة لقوة شد من يد الشخص الذي يلوح بها، تتجه نحو المركز. وبحسب قانون نويتن الثالث، فإن الكرة تؤثر على يده بقوة مساوية بالقيمة ومعاكسة بالاتجاه، أي بعيدا عن المركز. ولذلك يعتقد البعض أن هناك قوة طاردة أو نابذة. ولو أن الشخص أفلت الكرة من يده لطارت كمقذوف باتجاه مماسي للدائرة لحظة الإفلات، كما في الشكل (18-4ب)، إلا أننا نعتقد أنها تطير بعيدا عنا لأننا عندما نتابع حركتها بالعين نراها تبتعد عنا فنقول إنها خاضعة لقوة طاردة وهذا غير صحيح.



الشكل (18-4أ)



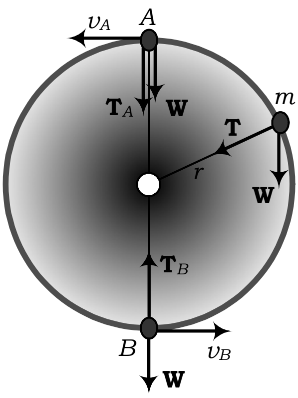
الشكل (18-4ب)

ولابأس من الإشارة إلى أن العلاقة (13-4) هي علاقة رياضية بحتة، بمعنى أننا حصلنا عليها بطريقة رياضية فقط. وبالتالي فعندما يكون هناك جسم يدور على دائرة، أي خاضع لقوة مركزية، فإن أول مايجب أن نسأله هو مامصدر هذه القوة ومالذي يدور هذا الجسم؟ ففي حالة القمر الذي يدور حول الأرض في مسار دائري نلاحظ أن مصدر القوة المركزية المؤثرة عليه هو الأرض التي تجذبه بقوة الجاذبية. وكذلك في حالة الإلكترون الذي يدور حول البروتون في ذرة الهيدروجين حيث يخضع لقوة مركزية مصدرها البروتون الذي يجذبه بقوة كولوم الكهربائية، وهكذا.

مثل 4-11 دوران جسم على دائرة شاقولية

يدور جسم مربوط بخيط خفيف في مسار دائري شاقولي نصف قطره r، كما في الشكل (19-4). ما الشد المؤثر على الجسم عند أخفض وأعلى نقطة من مساره؟

الحل: بما أن الجسم يدور في مسار دائري لذا نلاحظ أن لمحصلة القوى عليه عند أي نقطة من مساره مركبتين واحدة باتجاه المركز وتساوي القوة المركزية mv^2/r التي تغير اتجاه الحركة، والثانية بالاتجاه المماسي وتساوي كتلة الجسم مضروبة بالتسارع المماسي، والتي تغير قيمة سرعة الجسم. فلو اعتبرنا النقطة A من مسار الجسم نجد أن محصلة القوى هناك هي مجموع الشد والوزن وتتجه نحو المركز فنكتب:



الشكل (4-19)

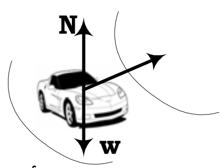
$$T_A + mg = m\frac{v_A^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T_A = m\frac{v_A^2}{r} - mg$$

أما عند النقطة B فإن محصلة القوى هي الفرق بين الشد والوزن وبما أنها يجب أن تتجه نحو المركز (لماذا؟) لذا يكون الشد أكبر من الوزن ونكتب:

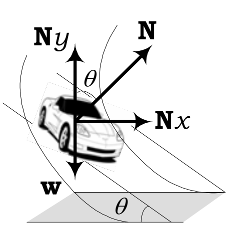
$$T_B - mg = m\frac{v_B^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T_B = m\frac{v_B^2}{r} + mg$$

وسنرى من حفظ الطاقة أن $v_B > v_A$ لذاك يكون $T_B > T_A$.

مثل 4-12 دوران سيارة على منعطف



الشكل (4-20أ)



الشكل (4-20ب)

عندما تدور سيارة على منعطف فإنها تحتاج لقوة مركزية لتحقيق ذلك. ففي شوارع المدينة يقوم الاحتكاك عادة بتوفير القوة المركزية الضرورية لأن سرعات السيارات تكون منخفضة عموما. أما في مخارج الطرق السريعة فيتم تصميمها بحيث تكون مائلة بعض الشئ لتوفر القوة المركزية الضرورية. فإذا اعتبرنا سيارة تدور على منعطف بسرعة v فماذا يجب أن تكون زاوية الميل حتى لاتنزلق عليه؟

الحل: من الواضح أن السيارة تخضع لمحصلة قوتين هما وزنها نحو الأسفل ورد فعل الطريق العمودي عليه. فلو كانت الطريق أفقية، كما في الشكل (4-20أ)، لكانت هذه المحصلة مساوية للصفر ولما توفرت القوة المركزية الجاذبة نحو مركز المنعطف واللازمة لتدور السيارة عليه. أما لوكانت الطريق مائلة بزاوية θ، كما في الشكل (4-20ب)، لأصبح لرد الفعل مركبتين إحداهما $\mathbf{N}_y$ تساوي

وتعاكس وزن السيارة وتمنع انهيار الأرض تحتها، والثانية $\mathbf{N}_x$ تتجه نحو مركز المنعطف وتؤدي لدوران السيارة. ولذلك نكتب من الشكل (4-20ب):

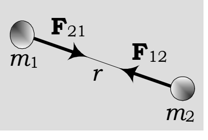
$$N_y = N\cos\theta = mg \quad \text{و} \quad N_x = N\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

وبأخذ نسبة هاتين العلاقتين نجد:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

وتصمم المنعطفات مائلة بحيث يؤخذ بعين الاعتبار حدود السرعة المسموح بها على الطرق السريعة.

4-11 قانون الجاذبية العام *(Gravity)*



الشكل (4-21)

عرفنا في فقرة سابقة وزن جسم بالعلاقة $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ حيث g تسارع الجاذبية الأرضية. وقد كان من المفروض أن نعرف قوة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على الجسم أولا لنستخلص منها تسارع الجاذبية الأرضية. وقد وضع نيوتن **قانون الجاذبية العام** بين أي كتلتين نقطتيين m_1 وm_2 بينهما مسافة r، كبيرة بالمقارنة مع أبعاد أي منهما، بالعلاقة:

$$\boxed{F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}} \qquad (4\text{-}14)$$

حيث G ثابت الجاذبية وقيمته $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}$.

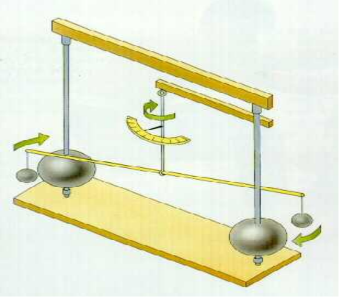
وتتجه قوة الجاذبية التي تؤثر بها m_1 على m_2 **نحو** m_1، كما في الشكل (4-21)، أي أنها قوة تجاذب ولذلك نكتب هذه القوة بشكل متجه على النحو:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1} \qquad (4\text{-}15)$$

حيث $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من m_1 (مصدر القوة) إلى m_2 (الجسم الخاضع لها).

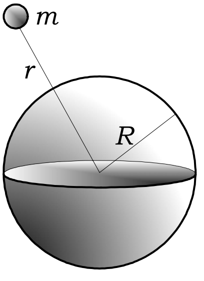
ويمكن التأكد من قانون الجذب العام تجريبيا بإجراء تجربة مماثلة لتلك التي قام بها **هنري كافنديش** *(Henri Cavendish* 1731-1810*)* عام 1798 مستخدما جهازا مماثلا لذلك الموضح بالشكل (4-22)، حيث تحمل كتلتان متساويتان m على طرفي قضيب خفيف معلق من منتصفه

بسلك ليفي *(fiber)* رفيع، ثم تقرب كتلتان كبيرتان M منهما فتدور كل كتلة m متأثرة بعزم قوة الجاذبية حيث يتم قياس زاوية الدوران بواسطة مؤشر.



الشكل(4-22)

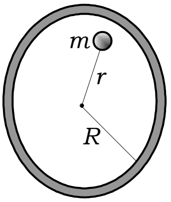
ولابأس من التنويه إلى أن قانون الجاذبية العام (4-15) صحيح بين كتل نقطية فقط (أي تلك التي تكون المسافة بينها كبيرة لدرجة لايمكن تحديد أبعاد أي منها من موقع الآخر فيبدو على شكل نقطة). أما لو أردنا حساب الجاذبية بين أجسام كبيرة فيجب إجراء عمليات تكامل معقدة عموما ولن نتعرض لها في هذا الكتاب. لكننا سنعطي بعض النتائج المفيدة، كما يمكن للقارئ العودة للمراجع المذكورة في آخر الكتاب للاستزادة في هذا الموضوع.



الشكل(4-23)

1- يمكن اعتبار أي جسم كروي نقطة عند حساب قوة الجاذبية الناتجة عنه على أجسام نقطية أخرى. فإذا كان لدينا جسيم نقطي كتلته m على بعد r من مركز جسم كروي كبير كتلته M ونصف قطره $r<R$، كما في الشكل (4-23)، عندئذ نكتب قيمة قوة التجاذب بينهما بالشكل:

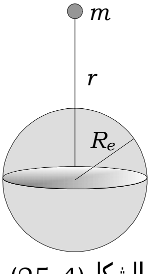
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



الشكل(4-24)

2- محصلة قوة الجاذبية الناتجة عن قشرة كروية على أي جسم داخلها تساوي الصفر. فإذا كان لدينا كرة مفرغة ووضعنا داخلها جسيما m فلايخضع لأي قوة جاذبية إطلاقا، كما في الشكل (4-24). أما إن كان الجسم خارجها فنتعبرها نقطة موجودة في المركز، مثل الحالة السابقة.

12-4 تغير تسارع الجاذبية مع الارتفاع عن السطح



الشكل(4-25)

عرفنا في فقرة سابقة وزن أي جسم mg، لكن هذا الوزن ماهو إلا قوة جذب الأرض له، أي أن قيمتها تعطى بالعلاقة (4-14) ولذلك نستنتج أن تسارع الجاذبية الأرضية على بعد r من مركز الأرض، كما في الشكل (4-25)، هو:

$$\boxed{g = \frac{GM}{r^2}} \qquad (16\text{-}4)$$

فتسارع الجاذبية يعتمد على بعد الجسم عن مركز الأرض ويساوي عند سطح الأرض $r=R_e$:

$$g_R = \frac{GM_e}{R_e^2} \tag{17-4}$$

حيث M_e وR_e كتلة الأرض ونصف قطرها، على الترتيب. وهذه هي القيمة التي نستخدمها لتسارع الجاذبية الأرضية قرب سطح الأرض، أي أن:

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} = 9.801\ \mathrm{m/s^2}$$

مثل 13-4

على أي ارتفاع عن سطح الأرض ينخفض تسارع الجاذبية لنصف قيمته على سطحها؟

الحل: نكتب من العلاقة (16-4):

$$g = \frac{GM_e}{r^2} = \frac{g_R}{2} = \frac{GM_e}{2R_e^2}$$

أي أن: $r^2 = 2R_e^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2}R_e = R_e + h \;\Rightarrow\; h \approx 0.4R_e$

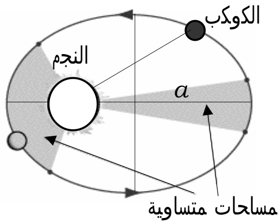
حيث h ارتفاع الجسم عن سطح الأرض. وبتعويض R_e=6370 km نجد h=2640 km تقريبا.

13-4 قوانين كبلر *(Kepler's Laws)*

يوهان كبلر

استحوذت حركة الكواكب والنجوم والأجسام السماوية على اهتمام الإنسان منذ بداية الحياة البشرية. وكان للمسلمين باع طويل في تطوير علم الفلك والإبداع فيه، فرصدوا الكثير من الكواكب والنجوم والمجرات وأطلقوا عليها أسماء لاتزال معروفة حتى يومنا هذا، ورسموا خرائط مفصلة للسماء وطوروا البوصلة الفلكية التي تستخدم من قبل البحارة والرحالة في كل أنحاء العالم. كما درس الإغريق واليونان القدماء، مثل **بطليموس**، الفلك واعتبروا الأرض مركز الكون، إلى أن جاء **نيكولاس كوبرنيكوس** *(Nicolaus Copernicus* 473-1543*)* ووضع نظرية مركزية الشمس للكون واعتبر أن الكواكب تدور حولها في دوائر. ثم قام **تايكو براهي** *(Tyco Brahe* 1546-1601*)* بمتابعة حركة مايزد عن 777 جسما سماويا لمدة عشرين سنة تقريبا، وأجرى حسابات دقيقة لمواضعها

مع مرور لزمن. ثم جاء طالبه **يوهان كبلر** *(Johannes Kepler* 1571-1630*)* وحلل هذه المعلومات متوصلا إلى قوانين مهمة تتعلق بحركة الكواكب تسمى **قوانين كبلر** وهي:



الشكل(4-25)

1- قانون المسارات: تتحرك الكواكب (أو الأقمار) في مسارات قطوع ناقصة حول مركز جذبها الذي يقع عند أحد المحرقين (البؤرتين)، كما في الشكل(4-25).

2- قانون المساحات: يمسح الخط الواصل من مركز الجذب إلى الكوكب (أو القمر) مساحات متساوية في أزمنة متساوية.

3- قانون التناسب: يتناسب مربع دور حركة الكوكب (أو القمر) مع مكعب نصف القطر الكبير لمساره، فإذا كان دور الحركة T و نصف القطر الكبير a، عندئذ يكون:

$$T^2 \propto a^3 \qquad (18\text{-}4)$$

ويمكن برهان أن هذه القوانين هي نتيجة مباشرة لقوانين التحريك التي درسناها في هذا الفصل. وكمثل على ذلك سنبرهن قانون التناسب لجسم يدور في مسار دائري نصف قطره a حول مركز جذب كتلته M، عندئذ تكون قوة الجذب التي يخضع لها مركزية قيمتها:

$$F = \frac{GMm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}$$

وبملاحظة أن دور الحركة يعطى بالعلاقة:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi a}{v} \;\Rightarrow\; v = \frac{2\pi a}{T}$$

وبتعويض السرعة في علاقة القوة نجد:

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3} \qquad (19\text{-}4)$$

فمربع دور الحركة يتناسب فعلا مع مكعب نصف القطر. وهذه العلاقة صحيحة من أجل مسارات قطعية أيضا. ونعطي في الجدول 4-1 بعض خواص كواكب المجموعة الشمسية.

مثل 4-14

ماسرعة قمر صناعي يدور على ارتفاع 1000 km فوق سطح الأرض؟

الحل: نكتب أن قوة جذب الأرض للقمر مركزية بحيث أن:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

حيث M كتلة الأرض و r بعد القمر عن مركزها، أي أن:

$$r = R_e + h = 6370 + 1000 \text{ km} = 7370 \times 10^3 \text{ m}$$

حيث h ارتفاع القمر عن سطح الأرض. وبتعويض الثوابت الواردة في علاقةالسرعة نجد:

$$v = \frac{6.67 \times 10^{-11}\text{N.m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\text{kg})}{(7370 \times 10^3\text{m})} \Rightarrow v = 7.35 \times 10^3 \text{ m/s}$$

الجدول 4-1

الجسم	الكتلة (كتلة أرضية)	متوسط نصف القطر (نصف قطر الأرض)	طول السنة (سنة أرضية)	البعد عن الشمس (بعد الأرض)
عطارد (Mercury)	0.05	0.38	0.24	0.39
الزهرة (Venus)	0.82	0.95	0.61	0.72
الأرض (Earth)	1.00	1.00	1.00	1.00
المريخ (Mars)	0.11	0.53	1.88	1.52
المشتري (Jupitor)	317.70	10.97	11.85	5.20
زحل (Saturn)	94.98	9.18	29.63	9.56
أورانوس (Uranus)	14.52	3.66	83.62	19.18
نيبتون (Neptune)	17.22	3.47	165.40	30.08
بلوتو (Pluto)	0.02	0.47	247.78	39.50
القمر (Moon)	0.01	0.27	-	-
الشمس (Sun)	3.33x105	109.26	-	-

ملخص الفصل

قانون نيوتن الأول	$\mathbf{F}_T = 0 \Rightarrow \mathbf{v} =$ ثابت
قانون نيوتن الثاني	$\mathbf{F}_T = m\mathbf{a}$
قانون نيوتن الثالث:	لكل فعل (من جسم أول على جسم ثاني) رد فعل(من الجسم الثاني على الجسم الأول)
وزن جسم	$\mathbf{w} = m\mathbf{g}$
قوة الاحتكاك السكوني	$0 \le F_s \le \mu_s N$
قوة الاحتكاك الحركي	$F_k = \mu_k N$
القوة المركزية	$F_c = m\dfrac{v^2}{r}$
قانون الجذب العام	$F = \dfrac{Gm_1 m_2}{r^2}$
تسارع الجاذبية على بعد r من مركز الأرض	$g = \dfrac{GM}{r^2}$

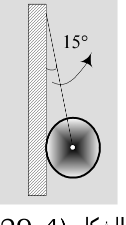
تمارين ومسائل

قانون نيوتن الأول

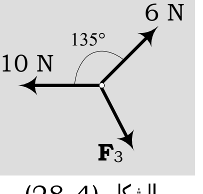
1-4 تعلق كتلتان متساويتان وزن كل واحدة 10 N على طرفي حبل يمر على بكرة معلقة بالسقف بواسطة سلسلة معدنية. ما الشد في الحبل وفي السلسلة، كما في الشكل (4-27)؟

2-4 يخضع جسم مهمل الكتلة إلى ثلاث قوى، كما في الشكل (4-28)، بحيث يتحرك أفقيا بسرعة ثابتة. ماقيمة واتجاه $\mathbf{F}_3$؟

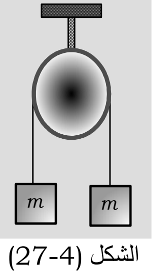
3-4 ما القوة التي يدفع الحائط بها الكرة الموضحة بالشكل (4-29) حتى تبقى متزنة وما الشد في الحبل، مع العلم أن وزن الكرة 800 N؟



الشكل (4-29)

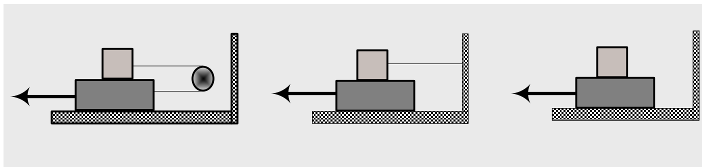


الشكل (4-28)



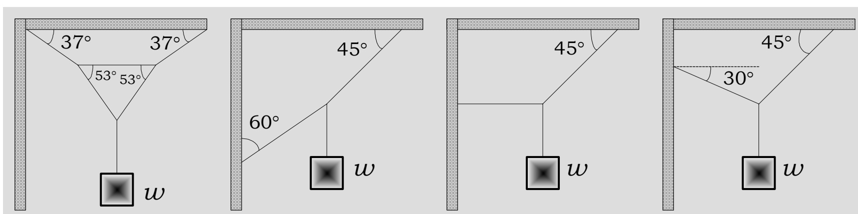
الشكل (4-27)

4-4 توضع الكتلة A فوق B، كما في الأشكال (30-4). ما القوة اللازمة لسحب B بسرعة ثابتة في كل حالة إذا كان وزن A هو 4 N ووزن B هو 8 N ومعامل الاحتكاك بين جميع السطوح المتماسة 0.25؟

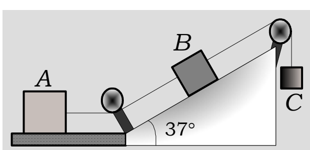


الشكل (30-4)

5-4 ما الشد في كل حبل من الحبال الموضحة بالأشكال (31-4) إذا كان w=20 N؟

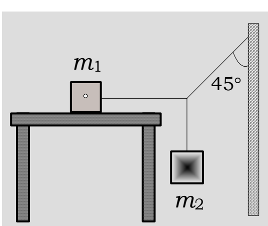


الشكل (31-4)



الشكل (32-4)

6-4 تربط الكتل A وB وC كما في الشكل (32-4)، بحيث يتحرك النظام بسرعة ثابتة. (أ) وضح القوى على كل كتلة. (ب) ما الشد في الخيط الوصل بين A وB إذا كان وزن كل واحدة 20 N ومعامل الاحتكاك الحركي بين كافة السطوح المتماسة 0.5؟ (ج) ماوزن C؟



الشكل (32-4)

7-4 ماذا يجب أن يكون معامل الاحتكاك بين m_1 والطاولة في الشكل (32-4) حتى يتزن النظام؟

قانون نيوتن الثاني

8-4 ما الفرق في وزن سبيكة ذهبية كتلتها 500 g بين موضعين تسارع الجاذبية بالأول $9.7996\ m/s^2$ والثاني $9.8094\ m/s^2$؟

هل يعني ذلك أن سعر الذهب يختلف من بلد لآخر؟

9-4 ما تسارع طفل ينحدر على لوح تزلج إلى أسفل تلة مائلة بمقدار 1.5 وماسرعته بعد قطع 50 m بدءا من السكون إذا أهملنا الاحتكاك؟ (ميل مستوي=ظل الزاوية التي يصنعها مع الأفق).

10-4 يتزلج متسابق كتلته 65 kg على منحدر ثلجي ميله°37. (أ) ارسم شكلا مبسطا للقوى المؤثرة عليه وآخر موضحا محصلتها. (ب) ماقيمة واتجاه كل قوة بالنسبة للأفق وماقيمة واتجاه المحصلة؟ (ج) ماتسارع المتزلج؟ (أهمل الاحتكاك).

11-4 تسقط حقيبة كتلتها 40 kg على أرض عربة قطار يتحرك بتسارع ثابت $2\ m/s^2$. (أ) ماقوة الاحتكاك المؤثرة على الحقيبة إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينها وبين أرض العربة هو 0.3 والحركي 0.2؟ ماذا تصير إذا تباطأ القطار بمعدل $-3\ m/s^2$؟

12-4 يخضع جسم كتلته 15 kg موضوع على طاولة أفقية ملساء لقوة أفقية مقدارها 30 N. ماتسارع الجسم وما المسافة التي يقطعها خلال 10 ثانية إذا بدأ من السكون وماسرعته عندئذ؟

13-4 يدخل عدة أشخاص مصعدا لايتحمل كابله شدا أكبر من 24000 N. ما أكبر تسارع يمكن أن يتحرك به المصعد إذا كانت كتلته مع الركاب 2000 kg؟ كيف تتغير الإجابة لو نقل المصعد والركاب إلى القمر حيث الجاذبية 1/6 من قيمتها على الأرض؟

14-4 ماوزن شخص كتلته 60 kg على سطح القمر؟

15-4 تؤثر قوة أفقية موازية لمحور السينات مقدارها 200 N على جسم كتلته 1 kg موجود عند نقطة المبدأ لمدة خمس ثواني فقط ثم تختفي. (أ) ماموضع الجسم وسرعته لحظة زوال القوة؟ (ب) ماسرعة الجسم إذا أعدنا تطبيق القوة بعد 15 ثانية من بداية الحركة؟

16-4 يتحرك جسم كتلته 10 kg على طاولة أفقية خشنة بسرعة ثابتة مقدارها 5 m/s. ماقيمة القوة الخارجية المؤثرة عليه إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينه وبين الطاولة 0.2 وما الزمن اللازم ليقف إذا اختفت القوة الخارجية؟

17-4 ما أقصر مسافة ستقف خلالها سيارة كتلتها 1000 kg تسير بسرعة 80 km/h إذا تركها السائق لتقف بفعل الاحتكاك مع الأرض إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.3؟

18-4 ما أكبر تسارع يمكن لرجل معلق بحبل أن يتسارع به إذا كانت كتلته 60 kg وكان الحبل لايتحمل شدا أكبر من 425 N؟

19-4 يضغط رجل بقوة ثابتة $\mathbf{F}$ على يد ممسحة تصنع زاوية θ مع الأرض. ماتسارع الممسحة وكم يجب أن تكون $\mathbf{F}$ لتسير بسرعة ثابتة إذا كان معامل احتكاكها مع الأرض μ؟

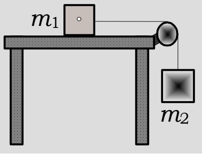
20-4 ماتسارع جسم ينزلق على مستو مائل بزاوية °30 إذا كان المستوي أملسا، أو خشنا بمعامل احتكاك 0.2؟

21-4 يتحرك جسم كتلته 20 kg على مستو مائل بزاوية °37 تحت تأثير قوة أفقية مقدارها 300 N تدفع الجسم للأعلى. (أ) مارد فعل المستوي على الجسم؟ (ب) ماقوة الاحتكاك على الجسم؟ (ج) ماذا يجب أن تكون القوة ليتحرك الجسم بسرعة ثابتة للأعلى؟

22-4 يقف رجل على ميزان في مصعد متحرك للأعلى بتسارع $2.5\ m/s^2$ فيقرأ وزنه 600 N. (أ) ماكتلة الرجل؟ (ب) بين كيف يتحرك المصعد عندما يقرأ الميزان 300 N. (ج) ماقراءة الميزان إذا انقطع الكابل الحامل للمصعد؟

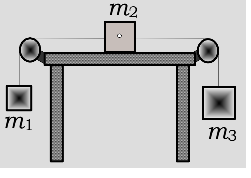
23-4 يرفع جسم كتلته 5 kg بواسطة حبل نحو الأعلى بتسارع ثابت $2\ m/s^2$. (أ) ما الشد في الحبل؟ (ب) كيف يتحرك الجسم لو تغير الشد إلى 50 N؟ (ج) ماسرعة الجسم إذا انقطع الحبل فجأة والشد فيه 50 N فارتفع بعد ذلك 2 m وتوقف لحظيا وسقط عائدا للأرض بعد ذلك؟

24-4 يقذف جسم كتلته 2 kg على مستو مائل بزاوية °37 للأعلى بسرعة ابتدائية 20 m/s. (أ) ما المسافة التي يقطعها إلى أن يقف وما الزمن اللازم لذلك إذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين المستوي 0.3؟ (ب) ما الزمن اللازم للجسم لينزلق على المستوي عائدا للنقطة التي بدأ منها؟



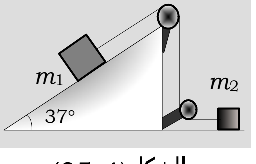
الشكل(4-33)

25-4 ماتسارع النظام الموضح في الشكل (4-33) وما الشد في الخيط إذا كان معامل الاحتكاك بين m_1 والطاولة هو μ؟



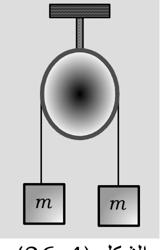
الشكل(4-34)

26-4 تتحرك m_2 في الشكل (4-34) إلى اليمين بتسارع $2\ m/s^2$. ماقيمة m_3 والشد في كل خيط إذا كان معامل الاحتكاك بين m_2 والطاولة هو 0.1 بفرض أن m_1=2 kg وm_2=20 kg؟



الشكل(4-35)

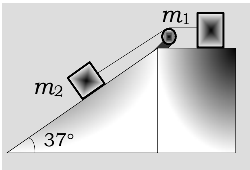
27-4 ماتسارع النظام الموضح في الشكل (4-35) أذا كان: m_1=m_2=40 kg وما الشد في الخيط إذا أهملنا الاحتكاك ووزن البكرة؟ (ب) ما الزمن اللازم لـ m_2 لتقطع مسافة متر واحد؟



الشكل (4-36)

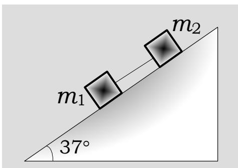
28-4 (أ) ماتسارع آلة آتوود الموضحة بالشكل (4-36) إذا كانت m_1=3 kg و m_2=2 kg وماسرعة كل كتلة بعدد ثانية واحدة إذا بدأ النظام الحركة من السكون؟ (ب) ما المسافة التي ستقطعها m_2 خلال 2 s بعد أن تصير m_1 تساوي 2 kg فجأة بعد ثانيتين من بدء حركة الكتلتين عندما كانتا غير متساويتين، وما الشد في الخيط في هذه الحالة؟

29-4 ماتسارع النظام الموضح بالشكل (37-4) إذا أهملنا الاحتكاك وكان m_1=10 kg و m_2=1 kg؟



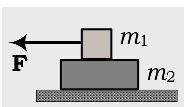
الشكل(37-4)

30-4 تنزلق m_1=4 kg و m_2=8 kg على المستوي المائل الموضح بالشكل (38-4) . ماتسارع كل كتلة وما الشد في الخيط إذا كان معامل الاحتكاك بين m_1 والمستوي هو 0.25 وبين m_2 والمستوي 0.5؟



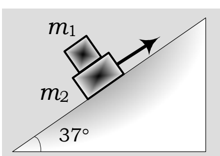
الشكل(38-4)

31-4 تتحرك m_1=10 kg في الشكل (39-4) إلى اليسار تحت تأثير قوة أفقية مقدارها 100 N. ما تسارع m_1 وm_2 إذا كانت m_2=40 kg ومعامل الاحتكاك بين الكتلتين 0.4 وبين m_2 والطاولة مهمل تماما؟



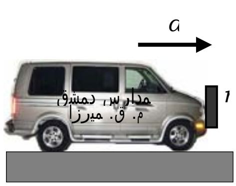
الشكل(39-4)

32-4 ما الشد اللازم تطبيقه على m_2=10 kg في الشكل (40-4) لتتحرك للأعلى بينما تنزلق m_1=5 kg للأسفل إذا كان معامل الاحتكاك بين جميع السطوح المتماسة 0.2؟



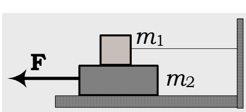
الشكل(40-4)

33-4 تسير العربة A في الشكل (41-4) إلى اليمين بتسارع a. ما أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين العربة والكتلة m كي لاتسقط على الأرض؟



الشكل (41-4)

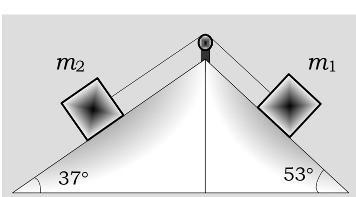
34-4 ماقيمة **F** في الشكل (42-4) لتتحرك m_2 بتسارع 2.5 m/s² إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين جميع السطوح المتماسة 0.6 والحركي 0.4 و m_1=6 kg و m_2=10 kg؟



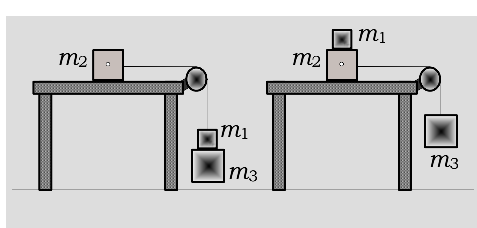
الشكل (42-4)

35-4 يتحرك النظام الموضح في الشكل(43-4أ) بسرعة ثابتة عندما توضع m_1=0.2 kg على m_2=0.8 kg ما تسارع النظام عندما تعلق m_1 بـ m_3=0.2 kg، كما في الشكل (43-4ب) وما الشد في الخيط عندئذ؟

36-4 ماتسارع النظام الموضح بالشكل (44-4) وما الشد في الخيط بإهمال الاحتكاك حيث m_1=50 kg و m_2=100 kg؟



الشكل (43-4)



الشكل (43-4)

القوة المركزية

37-4 تدور شفرات مروحة طائرة سمتية بسرعة زاوية 155 rev/min (أ) ما السرعة الخطية لنقطة على طرف المروحة إذا كان نصف قطرها 2 m؟ وما تسارعها المركزي؟ (ب) ما القوة المؤثرة على جسيم صغير كتلته 0.1 kg موجود عند تلك النقطة؟

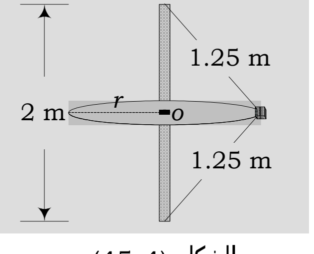
38-4 ما القوة المؤثرة على جسم كتلته 0.2 kg يدور على دائرة نصف قطرها 20 cm بدور 0.2 s؟

39-4 يربط شاب سطل ماء بحبل طوله 1 m ويدوره في دائرة شاقولية. ماذا يجب أن تكون سرعة السطل عند أخفض نقطة من مساره حتى لايسقط الماء منه؟

40-4 يربط حجر كتلته 1 kg بحبل طوله 1 m ولايتحمل شدا أكبر من 500 N ويوضع على طاولة أفقية ملساء بينما يثبت الطرف الآخر للحبل على الطاولة. ما أكبر سرعة يمكن أن يدور بها الحجر دون أن ينقطع الحبل؟

41-4 يقوم طيار كتلته 90 kg بألعاب بهلوانية فينقض بطائرته بسرعة 650 km/h نحو الأسفل ثم يبدأ بالدوران بدائرة شاقولية نحو الأعلى. ما أصغر نصف قطر يمكن أن يدور عليه بحيث لايتجاوز تسارعه عند أخفض نقطة من مساره $7g$ (g تسارع الجاذبية الأرضية) وما وزنه الظاهري عندئذ؟

42-4 يتأرجح جسم كتلته 0.1 kg مربوط بحبل طوله 1 m في مستو شاقولي فتصل سرعته 2 m/s في اللحظة التي يصنع الحبل زاوية 30° مع الشاقول. (أ) حدد القوى على الجسم وحللها لمركبتين مماسية لمساره وعمودية عليه (قطرية)، واستفد من ذلك لإيجاد كل من التسارع المماسي والمركزي؟ (ب) ماقيمة واتجاه التسارع الكلي للجسم عند هذه النقطة؟ (ج) ما الشد في الخيط عندئذ؟



الشكل (4-45)

43-4 يربط جسم كتلته 4 kg بعمود شاقولي بواسطة خيطين طول كل منهما 1.25 m، كما في الشكل (4-45)، بحيث يدور الجسم دائريا حول العمود. (أ) ما الشد في الخيط السفلي وماعدد الدورات التي يدورها الجسم بالدقيقة إذا كان الشد في الخيط العلوي 60 N؟

44-4 تدور سيارة على منعطف مائل نصف قطره 200 m بحيث لاتنزلق عليه إذا كانت سرعتها 15 m/s. ما أقل معامل احتكاك مطلوب بين العجلات والطريق حتى لاتنزلق السيارة عندما تدور عليه بسرعة 30 m/s؟

قوة الجاذبية

45-4 جد محصلة قوة الجاذبية على جسم كتلته 1 kg على بعد 0.15 m من كتلة 600 kg و0.2 m من كتلة أخرى 800 kg إذا كان البعد بين الكتلتين 0.25 m.

46-4 عند أين نقطة بين الشمس والأرض تتساوى جاذبيتهما إذا كانت المسافة بينهما تساوي 1.5×10^{8} m؟

47-4 تعلق كتلتان متساويتان بميزان ساكن بحيث تقع إحداهما مسافة h أعلى من الثانية. برهن أن الفرق بين وزنيهما بسبب اختلاف الارتفاع هو $8\pi\rho Gmh/3$ حيث ρ الكثافة الكتلية للأرض (الكتلة/الحجم).

48-4 يدور القمر حول الأرض مرة كل 27.3 يوما وعلى بعد 3.85×10^{5} km منها. ماكتلة الأرض؟

49-4 ما تسارع الجاذبية على سطح كوكب نصف قطره 500 km إذا كان تسارع الجاذبية على ارتفاع 100 kmعن سطحه $2.1\ m/s^{2}$؟ ماكتلة هذا الكوكب؟

50-4 ما السرعة الأفقية التي يجب أن يطلق بها قمر صناعي على ارتفاع 160 km فوق سطح الأرض ليدور حولها في مسار دائري؟

51-4 توضع ثلاث كرات بحيث تقع m_1=2 kg عند مبدأ منظومة محاور إحداثية متعامدة، وm_2=3 kg عند النقطة (2,0) و m_3=4 kg عند (4,0). (أ) ماقيمة واتجاه قوة الجاذبية التي تخضع لها الأخيرة؟ (ب) ماقيمة واتجاه قوة الجاذبية التي تخضع لها الثانية؟

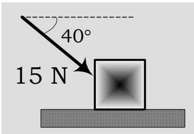
52-4 مادور حركة المريخ حول الشمس إذا كان بعده عنها يعادل 1.52 من بعد الأرض عنها؟

53-4 (أ) ماكتلة رجل على سطح كوكب له ضعف قطر الأرض ونفس الكثافة علما أن كتلته على الأرض 100 kg؟ (ب) ماتسارع الجاذبية على سطح ذلك الكوكب؟ (ج) ماسرعة قمر صناعي قرب سطح الكوكب إذا كانت سرعته قرب سطح الأرض 8 km/h؟

مسائل عامة

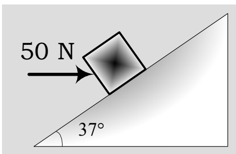
54-4 يوضع جسم كتلته 3.5 kg على مستو خشن مائل معامل احتكاكه السكوني 0.25 والحركي 0.1. (أ) ماقوة الاحتكاك التي سيخضع لها عندما تكون زاوية ميل المستوي 10°؟ (ب) ماقوة الاحتكاك المؤثرة على الجسم عند زاوية ميل 30° وماتسارع الجسم عندئذ؟

55-4 (أ) ما معامل الاحتكاك السكوني بين عجلات سيارة وأرض الشارع اللازم لإيقافها خلال مسافة100 m إذا كانت سرعتها الابتدائية 85 km/h؟ (ب) كم يجب أن يكون معامل الاحتكاك حتى تدور السيارة على منعطف نصف قطره 60 m؟



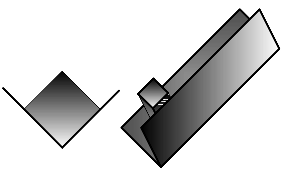
الشكل(4-46)

4-56 يتحرك جسم كتلته 3.5 kg على أرض أفقية خشنة معامل احتكاكها الحركي 0.25 تحت تأثير قوة ثابتة مقدارها 15 N وتميل بزاوية 40° تحت الأفق، كما في الشكل (4-46). ماقوة الاحتكاك المؤثرة على الجسم وما تسارعه؟



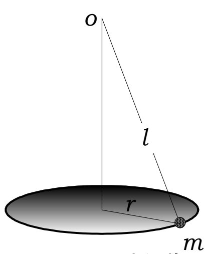
الشكل(4-47)

4-57 يخضع جسم كتلته 5 kg موضوع على مستو مائل بزاوية 37° لقوة أفقية مقدارها 50 N، كما في الشكل (4-47). (أ) ماتسارع الجسم إذا تحرك للأعلى على المستوي؟ (ب) ما المسافة التي سيقطعها عليه إذا كانت سرعته الابتدائية 4 m/s نحو الأعلى؟ (ج) كيف سيتحرك الجسم إذا زال تأثير القوة عليه عند وصوله لأعلى نقطة على المستوي إذا علمت أن معامل الاحتكاك السكوني بينهما 0.4 والحركي 0.3؟



الشكل (4-48)

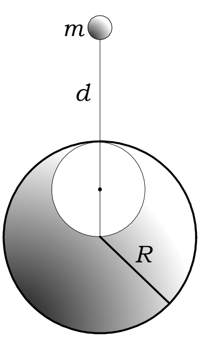
4-58 ينزلق جسم كتلته 2 kg داخل قناة تميل بزاوية 37°، كما في الشكل (4-48). ما تسارع الجسم إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينه وبين سطح القناة 0.2؟



الشكل (4-49)

4-59 يدور بندول مخروطي كتلته m=50 kg وطوله l=1.2 m في دائرة أفقية نصف قطرها r=25 cm، كما في الشكل (4-49). (أ) ما سرعة وتسارع الكتلة؟ (ب) ما الشد في الخيط؟

4-60 توضع قطعة نقود كتلتها 100 g على بعد 5 cm من مركز أسطوانة تدور بدور 3.14 s دون أن تنزلق عليها. (أ) ما سرعة وتسارع القطعة؟ (ب) ماقيمة واتجاه قوة الاحتكاك المؤثرة عليها؟ (ج) ما معامل الاحتكاك بين القطعة والاسطوانة إذا بدأت الأولى الانزلاق عندما صار بعدها عن مركز الاسطوانة 10 cm؟

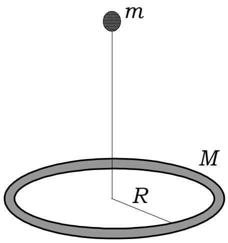


الشكل(4-50)

4-61 يدور نجم نيوتروني عالي الكثافة نصف قطره 20 km مرة كل ثانية. ما أصغر كتلة لهذا النجم حتى لايطير عنه جسم موجود على سطحه؟

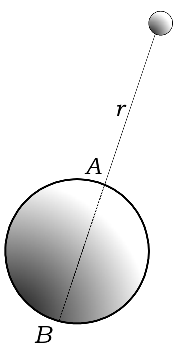
4-62 ماقوة الجاذبية التي يخضع لها جسيم كتلته m على بعد d من مركز كرة نصف قطرها R وكثافتها الكتلية ρ انتزع منها جزء كروي قطره R، كما في الشكل (4-50)؟

63-4 ماقوة الجاذبية التي تؤثر بها إحدى حلقات كوكب زحل على كتلة صغيرة m تقع على محورها على بعد h من مركزها، كما في الشكل (4-51)، إذا كانت كتلة الحلقة M ونصف قطرها R؟



الشكل(4-51)

64-4 (أ) ماقيمة واتجاه قوة الجاذبية التي يؤثر بها القمر على قطرة ماء على سطح الأرض عند A، كما في الشكل (4-52)؟ كم تصير قيمة القوة لو كانت القطرة عند مركز الأرض؟ (ب) برهن أن الفرق بين القوتين يساوي $F = 2GMmR/r^3$. تسمى F **قوة المد والجزر للقمر** *(tidal force)*. (ج) كرر السؤال السابق عندما تقع القطرة عند B واحسب قيمة واتجاه قوة المد والجزر هناك. علل وجود انتفاخين في سطح الأرض أحدهما نحو القمر والآخر بعيدا عنه.



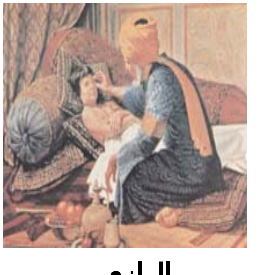
الشكل (4-52)

65-4 يقف رجل على ميزان في مصعد يتسارع نحو الأعلى فيقرأ وزنه 960 N وعندما يحمل صندوقا كتلته 20 kg تصير قراءة الميزان 1200 N. ماكتلة الرجل وما تسارع المصعد؟

66-4 يحاول لص الهرب من نافذة ارتفاعها 15 m بواسطة حبل لايتحمل شدا أكبر من 360 N مع أن وزنه 600 N ولايجب أن يصطدم بالأرض بسرعة أكبر من 10 m/s حتى لاتتكسر عظامه. برهن أنه لن يستطيع الهرب بهذه الطريقة.

من علماء الإسلام

محمد بن زكريا الرازي، أبو بكر،(313هـ،925م-250هـ،854 م) ويعرف في الغرب باسم Rhazes. طبيب وكيماوي وفيلسوف مسلم. أجمع المؤرخون على أنه أعظم أطباء الإسلام، وأشهر أطباء القرون الوسطى وأحد مشاهير أطباء العالم في كل زمن. كان واسع الإطلاع إلى درجة الإحاطة بكل علم وفن. درس الرياضيات، والفلك، والفلسفة، والكيمياء، والمنطق، والأدب. ثم درس الطب بعد أن تجاوز الأربعين من عمره، فحقق فيه إنجازات مهمة ونال شهرة واسعة. وعمل رئيسا لبيمارستان الري، ثم رئيسا لبيمارستان بغداد الذي بناه الخليفة العباسي المقتدر. ويعتبر تشخيص مرض الجذري ومرض الحصبة من أعظم منجزاته الطبية، ويعترف الغربيون بابتكاراته في أمراض النساء والولادة، وفي الأمراض التناسلية، وجراحة العيون. كما تعرض لشلل الوجه وأسبابه، ووصف تشعب الأعصاب في القفص الصدري. له مؤلفات لاتحصى من أشهرها **الحاوي في علم التداوي**، و**الجدري والحصبة**، و**المنصوري في التشريح**، و**الكافي في الطب**، و**من لا يحضره الطبيب**.



الرازي

الفصل الخامس

الشغل والطاقة

(Work & Energy)

5-1 تمهيد

درسنا في الفصول السابقة كيف ولماذا تتحرك الأجسام، ووجدنا أنه عندما تؤثر محصلة قوى لاتساوي الصفر على جسم فإنه يتحرك بشكل أو بآخر. ونتساءل الآن ما الفائدة من حركة وتحريك الأجسام؟ ولماذا نزعج أنفسنا بهذه التفاصيل؟ تأتي الإجابة في شقين؛ أولاهما أن الإنسان بفضوله الدائم يسعى لتفسير الظواهر الطبيعية وأسبابها وماينتج عنها. وثانيهما أن الإنسان يريد الاستفادة بما أنعم الله عز وجل علينا وسخره لنا، فهو يريد سيارة تنقله من مكان لآخر، ومصابيح كهربائية لإنارة المدن والبيوت، وغير ذلك. وبالطبع فإن كل هذا لن يتحقق مالم نعرف كيف نتحكم بالأشياء ونستفيد من حركاتها، سواء كانت إلكترونات صغيرة تعطينا إشارات كهربائية أو أجسام كونية تسبب دوران الأرض وتعاقب الليل والنهار.

لذلك سندرس في هذا الفصل كيف نستفيد من حركة جسم فنعرّف **طاقة الحركة**، وكيف نستفيد من تحريكه فنعرّف **الشغل** و**طاقة الوضع**. ثم نربط بين هذه الكميات بواسطة **نظرية الشغل والطاقة**. ونعرّف بعد ذلك القوى التي تحافظ على الطاقة وتلك التي لاتحافظ عليها وصولاً **لمبدأ حفظ الطاقة**. ثم نعرّف أبسط الآلات التي استخدمها الإنسان ونقارن بينها بحساب **القدرة** الناتجة عن كل واحدة ومردودها.

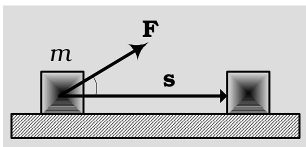
2-5 الشغل *(Work)*

إذا أثرت قوة **F** على جسم خلال انتقاله مسافة **s**، كما في الشكل (5-1)، فإننا نعرف شغل هذه القوة (أو بالأحرى شغل مصدر القوة) بالعلاقة:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\phi \qquad (1\text{-}5)$$

حيث ϕ الزاوية بين القوة **F** والمسافة **s**.

ونلاحظ من المعادلة (5-1) أن وحدة الشغل هي قوة مضروبة بمسافة، أي N.m ويطلق عليها في نظام الوحدات الدولي **جول** (Joule) ويرمز لها اختصاراً J، أي أن: $1\ J=1\ N.m=1\ kg.m^2/s^2$.

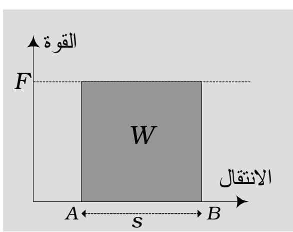


الشكل(5-1)

وبحسب تعريفه، فإن الشغل ينتج عن الضرب العددي لمتجهي المسافة والقوة، ولذلك فهو **كمية عددية** ليس له اتجاه إلاّ أنه يمكن أن يكون موجباً أو سالباً. فإن كان موجباً فهذا يعني أن مصدر القوة **يقوم** فعلاً بشغل، وإن كان سالباً فإن مصدر القوة **يضيع** الشغل، كما سنوضح لاحقاً.

وباستخدام العلاقة (5-1) نلاحظ أنه إذا كانت القوة ثابتة وموازية لجهة انتقال الجسم عندئذ يصير شغلها مساوياً إلى:

$$W = Fs$$

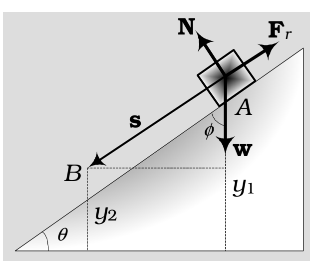


الشكل (5-2)

ويمثل الشكل (5-2) تغيرات القوة مع المسافة في هذه الحالة ونستنتج منه أن الشغل يمثل المساحة المحصورة تحت منحنى القوة بين نقطتي الانتقال. وهذه نتيجة عامة حتى وإن لم تكن القوة موازية لخط الانتقال.

مثل 5-1 شغل الوزن ورد فعل السطح والاحتكاك

ينزلق جسم كتلته 5 kg مسافة 5 m على مستو خشن مائل بزاوية 37°، كما هو موضح بالشكل (5-3). ماشغل كل من وزن الجسم ورد فعل السطح والاحتكاك إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.2؟



الشكل (5-3)

الحل: (أ) **شغل الوزن:** نكتب شغل الوزن من العلاقة (5-1) بالشكل:

$$W_w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = ws\cos\phi$$

ونلاحظ من الشكل (5-3) أن:

$$ws\cos\phi = y_1 - y_2$$

حيث y_1 الارتفاع الابتدائي وy_2 الارتفاع النهائي للجسم عن سطح الأرض. ومن ثم نكتب شغل الوزن:

$$\boxed{W_w = mg(y_1 - y_2)} \qquad (5\text{-}2)$$

ونلاحظ من هذه النتيجة أن شغل الوزن لايعتمد على شكل الطريق الذي يتبعه الجسم للانتقال من الموضع الابتدائي للموضع النهائي، ولا على موضع الأرض نفسها، بل يعتمد على **الفرق بين الارتفاع الابتدائي والنهائي** للجسم عن سطحها. ولذلك يمكن اختيار مستوى الأرض كيفما نشاء شرط أن نلتزم به عند حل مسألة معينة. ومن المفضل وضعه عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم خلال حركته.

ففي هذا المثل نضع الأرض عند النقطة B فنجد أن $y_1 = 5\cos 53° = 3\ \text{m}$ و $y_2 = 0$ ويصير شغل الوزن مساوياً

$$W_w = 5(9.8)(3.0) = 147\ \text{J}$$

ومن الواضح أننا لم نكن بحاجة لاستعمال (5-2) لحساب شغل الوزن بل كان بالإمكان تطبيق (5-1) مباشرة مع وضع s=5 m وϕ=53° فنحصل على نفس النتيجة بسهولة، إلاّ أن العلاقة (5-2) مهمة لتعريف طاقة الوضع لجسم خاضع لقوة الجاذبية والتي سنتعرض لها بعد قليل.

(ب) **شغل رد فعل السطح:** بما أن قوة رد فعل السطح **N** عمودية دوماً على السطح الذي يتحرك عليه الجسم لذا تكون الزاوية بين **N** و **s** مساوية لـــ °90 دوماً ويكون شغل رد الفعل هو:

$$\boxed{W_N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s} = 0} \qquad (5\text{-}3)$$

فلا يوجد شغل لقوة رد فعل السطح و**هذه النتيجة صحيحة لأي قوة عمودية على اتجاه الحركة.**

(ج) **شغل قوة الاحتكاك:** بما أن قوة الاحتكاك التي يؤثر بها سطح خشن على جسم يتحرك عليه تعاكس اتجاه الحركة دوماً لذا تكون الزاوية بين المسافة **s** والقوة $\mathbf{F}_r$ هي °180 ويصير شغل قوة الاحتكاك:

$$W_N = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{s} = -F_k s = -\mu_k N s \qquad (4\text{-}5)$$

فشغل الاحتكاك سالب دوماً أي أن السطح الخشن يضيع بعضاً من الشغل الذي تبذله جاذبية الأرض خلال انزلاق الجسم عليه. كما نلاحظ من العلاقة (4-5) أننا استعملنا قوة الاحتكاك الحركي الذي يظهر عندما يتحرك الجسم فعلاً على السطح، أما لو بقي ساكناً عندئذ يصير الاحتكاك سكونياً وبالتالي لاتوجد مسافة مقطوعة على السطح ويكون **شغل الاحتكاك السكوني مساوياً للصفر دوماً**.

ونحسب شغل الاحتكاك في مثالنا هذا بحساب قوة الاحتكاك فنكتب:

$$F_k = \mu_k N$$

حيث N رد فعل السطح الذي نجده من المركبة الصادية لمعادلة الحركة، كما في الشكل (3-5):

$$N - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta$$

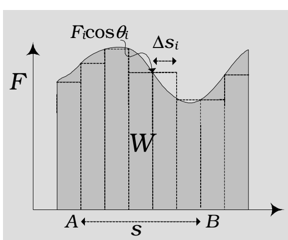
أي أن:

$$F_k = \mu_k mg\cos\theta \;\Rightarrow\; W_{F_k} = -F_k s = -\mu_k (mg\cos\theta) s = -39 \text{ J}$$

(د) شغل محصلة القوى: بما أن الشغل كمية عددية نكتب أن شغل محصلة القوى يساوي مجموع أشغال القوى المختلفة المؤثرة على الجسم بغض النظر عن اتجاهاتها، أي أن:

$$W_T = W_{mg} + W_N + W_{F_k} = 147 + 0 + (-39) = 108 \text{ J}$$

3-5 شغل قوة متغيرة



الشكل (4-5)

افترضنا عند تعريف الشغل في العلاقة (1-5) أن القوة $\mathbf{F}$ تبقى ثابتة بالقيمة والاتجاه خلال انتقال الجسم المسافة $\mathbf{s}$، إلاّ أنه في كثير من الحالات لايكون الأمر كذلك، إذ يمكن أن تتغير القوة بقيمتها أو اتجاهها أو كلاهما. لذلك لحساب شغل قوة تتغير خلال انتقال الجسم من نقطة أولى A إلى نقطة ثانية B نجزء الطريق الذي يتحرك عليه الجسم إلى أجزاء $\Delta\mathbf{s}_1$ و $\Delta\mathbf{s}_2$ و $\Delta\mathbf{s}_3$ وهكذا، كما في الشكل (4-5)، بحيث يمكن اعتبار القوة المؤثرة عليه خلال كل جزء ثابتة بالقيمة والاتجاه. وعندئذ نكتب الشغل المبذول خلال كل جزء على النحو:

$$\begin{cases} \Delta W_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \Delta \mathbf{s}_1 = F_1 \Delta s_1 \cos \phi_1 \\ \Delta W_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \Delta \mathbf{s}_2 = F_2 \Delta s_2 \cos \phi_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad \vdots \\ \Delta W_N = \mathbf{F}_N \cdot \Delta \mathbf{s}_N = F_N \Delta s_N \cos \phi_N \end{cases} \tag{5-5}$$

ويصير الشغل الكلي مساوياً إلى:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_N = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum F_i \Delta s_i \cos \phi_i \tag{6-5}$$

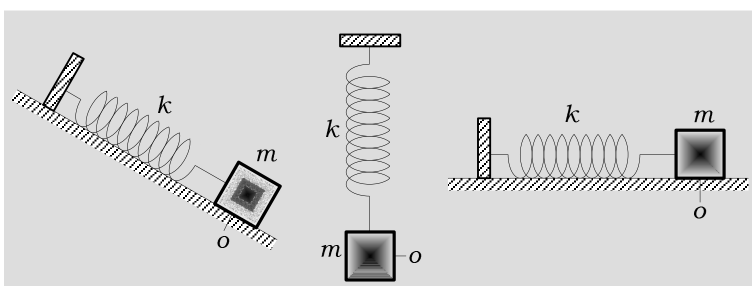
وإذا كانت القوة متغيرة بشكل مستمر لأي إزاحة صغيرة للجسم عندئذ ينتهي الانتقال العنصري $\Delta \mathbf{s}_i$ إلى ds وتتحول العلاقة (5-6) إلى تكامل من الشكل:

$$\boxed{W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\phi \, ds} \tag{7-5}$$

حيث يمتد التكامل من أول الطريق الذي يسير عليه الجسم إلى نهايته، بينما تمثل ϕ الزاوية بين اتجاه القوة واتجاه الحركة عند كل نقطة منه.

5-4 شغل قوة الإرجاع *(restoring force)*

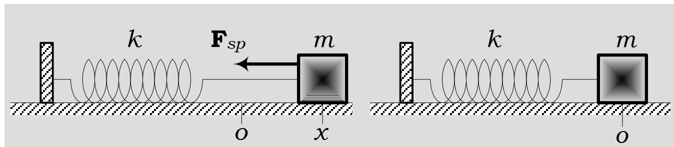
تعتبر قوة الإرجاع من أشهر القوى المتغيرة التي نصادفها في الميكانيك. وأفضل تمثيل لها القوة التي يؤثر بها زنبرك على جسم مربوط به، كما في الشكل (5-5)، حيث نعرّف نقطة اتزان الجسم o عند الموضع الذي يكون عنده ساكناً تماماً سواء كان الزنبرك أفقياً أو شاقولياً أو بأي وضع آخر.



الشكل (5-5)

ونجد من التجربة أنه إذا حاولنا إبعاد الجسم عن وضع الاتزان o مسافة x فإن الزنبرك يؤثر عليه بقوة تتناسب مع x لكن بالاتجاه المعاكس، كما في الشكل (5-6)، بحيث نكتب:

$$F_{sp} = -kx \tag{5-8}$$

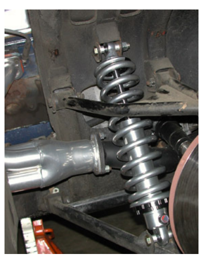


(ب) الجسم يبعد x عن الاتزان (أ) الجسم عند وضع الاتزان

الشكل (5-6)

وتسمى F_{sp} في العلاقة (5-8) **قوة الإرجاع** أو **قوة المرونة** للزنبرك، بينما يسمى k **ثابت مرونة الزنبرك** *(spring force constant)* ووحدته، كما نلاحظ من العلاقة (5-8)، هي N/m، وتمثل ليونة أو صلابة الزنبرك، أي مقدار القوة اللازمة لتغيير طوله متراً واحداً. فكلما كانت k كبيرة كلما كان الزنبرك صلباً ويحتاج لقوة كبيرة لضغطه أو شده مسافة صغيرة، وبالعكس إذا كان مرناً أو ليناً فإنه يستطيل وينضغط بسهولة تحت تأثير قوة صغيرة. ومن أفضل الأمثلة على زنبرك لين الميزان الذي يستخدمه بائع المجوهرات حيث يتحسس أي كتلة صغيرة توضع عليه ولذلك نقول إنه حساس. أما الميزان المستخدم في سوق الخضار، أو تلك التي تحمل سيارة (ماصات الصدمات *(shock absorbers)*) فيحوي زنبركاً صلباً للغاية لايتأثر إلاّ إذا علقت به كتلة كبيرة نسبياً، ولذلك نقول إنه قليل الحساسية. وتسمى العلاقة (5-8) **قانون هوك في المرونة** *(Hooke's law)*.

ميزان مجوهرات حساس



زنبرك ماص الصدمات

لنحسب الآن شغل قوة الإرجاع الذي يبذله زنبرك عندما ينتقل الجسم المربوط به من بعد x_1 عن وضع الاتزان إلى x_2 فنجد من العلاقة (5-7):

$$W_{sp} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \tfrac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

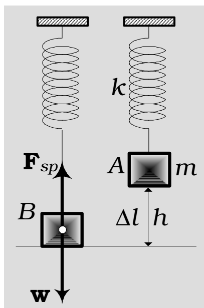
أي أن:

$$W_{sp} = \tfrac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) \qquad (9\text{-}5)$$

فشغل قوة الزنبرك تعتمد على الموضع الابتدائي والنهائي للجسم فقط لاعلى شكل الطريق المتبع للانتقال بينهما، وهذا مشابه تماماً لقوة الجاذبية (الوزن). وسنرى أهمية هذا الموضوع في حفظ الطاقة لاحقاً.

مثل 5-2 تحديد ثابت المرونة لزنبرك تجريبياً

يمكن تحديد ثابت مرونة زنبرك تجريبياً بتعليق جسم كتلته m بزنبرك طوله الطبييعي l_0 مدلى من سقف المختبر بحيث نسند الجسم باليد ليهبط ببطء إلى أن يقف فيستطيل الزنبرك خلال ذلك بمقدار Δl. ماثابت المرونة لهذا الزنبرك؟



الشكل(5-7)

الحل: بما أن الجسم يصل لحالة اتزان في وضع شاقولي لذا تكون محصلة القوى عليه معدومة وتساوي محصلة الوزن mg وقوة الإرجاع $F_{sp} = kx = k\Delta l$ (حيث كتبنا قيمتها لأننا نعرف اتجاهها للأعلى بعكس استطالة الزنبرك)، ومن ثم نجد من الشكل (5-7) أن:

$$k\Delta l = mg$$

أي أن:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} \qquad (10\text{-}5)$$

ويتم تجريبياً تغيير الكتلة m عدة مرات وقياس الاستطالة Δl كل مرة ثم رسم تغيرات الاستطالة مع الكتلة واستخدام ميل الخط المستقيم الناتج لتحديد k.

5-5 نظرية الشغل والطاقة *(Work-Energy Theorem)*

عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة أو أكثر فإن شغل هذه القوى ماهو إلاّ طاقة تصرف أو تضيع من قبل كل واحدة منها. ولذا نسأل أين يذهب هذا الشغل؟ للإجابة على هذا السؤال نعتبر جسماً m يتحرك مسافة s تحت تأثير محصلة قوى F_T بحيث تتغير سرعته من v_1 إلى v_2. فإذا حسبنا شغل F_T نجد:

$$W_T = F_T s$$

ولكن وبحسب قانون نيوتن الثاني فإن:

$$F_T = ma$$

وبفرض أن F_T ثابتة عندئذ يكون a ثابتاً أيضاً بحيث نستخدم علاقات الحركة بتسارع ثابت ونكتب:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as$$

وبتعويض F_T و a في علاقة الشغل نجد:

$$\boxed{W_T = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2} \qquad (11\text{-}5)$$

ونظراً لضرورة تناسق الوحدات على طرفي المعادلة السابقة يجب أن تكون وحدة كل حد من الطرف الأيمن هي جول. وبالفعل لو كتبنا وحدة $\frac{1}{2}mv^2$ لوجدنا:

$$\left[\tfrac{1}{2}mv^2\right] = \text{kg.(m/s)}^2 = \text{kg.(m/s}^2\text{).m} = \text{N.m}$$

أي أنها وحدة طاقة فعلاً، ولذلك نكتب الكمية $\frac{1}{2}mv^2$ بالشكل:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}mv^2} \qquad (12\text{-}5)$$

ويطلق عليها اسم **طاقة حركة** *(kinetic energy)* لأنها تتعلق بخواص الجسم فقط من كتلة وسرعة بغض النظر عن أي مؤثر خارجي، بحيث أنه إذا كان للجسم كتلة m وسرعة v عندئذ يكون له طاقة حركة معطاة بالعلاقة (5-12)، أياً كان موضعه أوالقوى المؤثرة عليه. وللنتيجة الأخيرة أهمية كبيرة إذ سنرى فيما بعد أن هناك طاقة أخرى للجسم تسمى **طاقة وضع** ليست مستقلة عن الوسط الذي يوجد به وتظهر نتيجة تاثير القوى الخارجية المؤثرة عليه.

ونلاحظ أن طاقة الحركة مثل أي شغل أو طاقة هي كمية عددية ليس لها اتجاه فسواء تحرك الجسم للأعلى أو للأسفل، أو للشرق أو للغرب، فإن طاقته الحركية هي نفسها طالما أن كتلته وسرعته لم تتغيرا.

وبتعويض الطاقة الحركية المعطاة بـــ (5-12) في معادلة الشغل الكلي (5-11) نجد:

$$\boxed{W_T = K_2 - K_1 = \Delta K} \qquad (13\text{-}5)$$

فشغل القوى الكلية المؤثرة على جسم يتحول لتغيير طاقته الحركية. وتسمى العلاقة الأخيرة **نظرية الشغل والطاقة** التي تنص على أن **شغل محصلة القوى المؤثرة على جسم عندما ينتقل بين نقطتين يساوي تغير طاقته الحركية بينهما.**

وننوه أخيراً إلى أنه على الرغم من أننا استخرجنا نظرية الشغل والطاقة لمحصلة قوة ثابتة، إلاّ أنها صحيحة من أجل أي قوة ولو كانت متغيرة بالقيمة أو الاتجاه أو كليهما.

مثل 5-3

ما شغل محصلة القوى المؤثرة على جسم كتلته 0.5 kg عندما ينتقل بين نقطتين فتتغير سرعته من $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m/s إلى $\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{j}$ m/s ؟ ($\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ متجهي وحدة على كل من ox و oy، على الترتيب).

الحل: لحساب شغل محصلة القوى نستخدم نظرية الشغل والطاقة فنكتب:

$$v_1^2 = 9 + 25 = 34 \text{ m/s}^2$$

و

$$v_2^2 = 49 \text{ m/s}^2$$

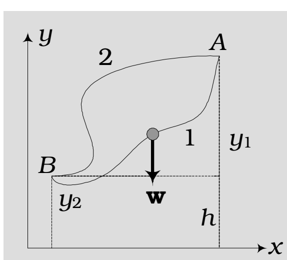
ومن ثم نجد من (5-13) أن:

$$W_T = \tfrac{1}{2}(0.5)(49) - \tfrac{1}{2}(0.5)(34) = 3.75 \text{ J}$$

5-6 القوى المحافظة وغير المحافظة (conservative & non-conservative forces)

لنفترض أن لدينا جسماً كتلته m ينتقل على الطريق1 في الشكل (5-8) من نقطة أولى A ارتفاعها y_1 إلى نقطة ثانية B ارتفاعها y_2، ولنحسب الشغل الذي تقوم به قوة الجاذبية خلال ذلك. فنكتب من (5-2):

$$W_{A\to B} = mg(y_1 - y_2)$$



الشكل (5-8)

وإذا عاد الجسم من B إلى A على الطريق 2 عندئذ يكون شغل الجاذبية:

$$W_{B\to A} = mg(y_2 - y_1)$$

ولهذا يكون شغل الجاذبية في الرحلة المغلقة من A إلى B ثم عودة إلى A هو:

$$W_{A\to B\to A}=0 \tag{14-5}$$

أي أن قوة الجاذبية تتصف بالصفات التالية:

1- لايعتمد شغلها على الطريق المتبع بل 2- يعتمد على الموضع (أو الارتفاع) الابتدائي والنهائي للجسم و3- يساوي الصفر إذا سار الجسم على طريق مغلقة تنتهي عند نقطة البداية.

تسمى كل قوة تتصف بالصفات المذكورة أعلاه **قوة محافظة** لأنها تحافظ على طاقة الجسم الخاضع لها خلال حركته. **فقوة الجاذبية هي قوة محافظة.**

ومن القوى الأخرى المهمة المحافظة **قوة الإرجاع**. فقد وجدنا سابقاً أن شغل قوة الزنبرك عندما يتغير بعد جسم مربوط به عن وضع الاتزان من x_1 إلى x_2 يعطى بالعلاقة (9-5):

$$W_{1\to 2}=\tfrac{1}{2}k(x_1^2-x_2^2)$$

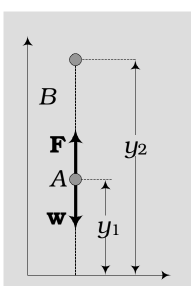
وعندما ينتقل الجسم من x_2 إلى x_1 يصير شغل قوة الزنبرك:

$$W_{2\to 1}=\tfrac{1}{2}k(x_2^2-x_1^2)$$

أي أن الشغل الكلي المبذول عندما يتحرك الجسم على الطريق المغلقة $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_1$ يساوي الصفر، كما أنه مستقل عن الطريق المتبع، ولايعتمد إلاّ على الموضعين الابتدائي والنهائي للجسم بالنسبة لوضع الاتزان. **فقوة الإرجاع** تشبه قوة الجاذبية في صفاتها ولذا نقول إنها **قوة محافظة**.

ومن البديهي أن هناك قوى كثيرة لاتحقق خواص القوى المحافظة كالاحتكاك الحركي التي تضيع الطاقة بشكل مستمر. يطلق على هذا النوع اسم **قوى غير محافظة** لأنها لاتحافظ على الطاقة.

7-5 طاقة الوضع *(Potential Energy)*



الشكل (9-5)

لنفترض أننا رفعنا جسماً كتلته m من نقطة أولى A ارتفاعها y_1 إلى نقطة ثانية B ارتفاعها y_2، كما في الشكل (9-5)، بحيث يتحرك الجسم بسرعة ثابتة، وبذلك تكون القوة التي نبذلها مساوية بالقيمة ومعاكسة بالاتجاه لوزن الجسم، وبالتالي يكون شغلنا هو:

$$W_{AB}=mgh=mg(y_2-y_1) \tag{15-5}$$

فإذا وصل الجسم للنقطة B وتوقف هناك فإننا نتساءل أين ذهب شغلنا؟

وهل للجسم أي طاقة في ذلك الموضع؟ من الواضح أنه لايملك طاقة حركة لأنه ساكن، لكنه يملك طاقة أخرى لأننا لو افلتناه لتحرك للأسفل مكتسباً طاقة حركة تتزايد كلما كان ارتفاع النقطة B التي وصل إليها أكبر. ولذلك نقول إن الشغل قد تحول لطاقة أعطيت للجسم وبقيت كامنة فيه إلى أن تركناه يسقط للأسفل. يطلق على هذه الطاقة اسم **طاقة كامنة** أو **طاقة وضع** لأنها تعتمد على الارتفاع (أي الموضع) الذي وصل الجسم إليه.

ويمكن تحديد الطاقة الكامنة بكتابة (5-15) بالشكل:

$$W_{AB} = mgy_2 - mgy_1 \qquad (16\text{-}5)$$

حيث نلاحظ أن الشغل الذي قمنا به يساوي الفرق بين حدين متماثلين تماماً ووحدة كل منهما هي وحدة طاقة، أي جول (تأكد من ذلك)، ولذلك نكتب:

$$\boxed{U = mgy} \qquad (17\text{-}5)$$

حيث نسمي U طاقة وضع الجسم عندما يكون على ارتفاع y عن سطح الأرض (الذي يمثل وضع الاتزان بالنسبة للأرض). ونستنتج مماتقدم أن شغل الجاذبية عندما ينتقل الجسم من A إلى B هو:

$$\boxed{W_g = mgy_1 - mgy_2 = U_1 - U_2 = -\Delta U} \qquad (18\text{-}5)$$

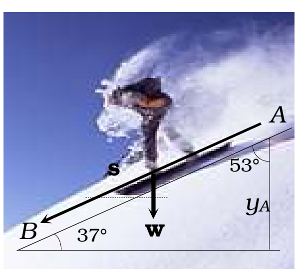
فشغل قوة الجاذبية عندما يتحرك جسم خاضع لها بين نقطتين يساوي سالب تغير طاقة وضعه بينهما (لأن تغير أي كمية يعني القيمة النهائية مطروحاً منها القيمة الابتدائية).

مثال 5-4

يتزلج شخص كتلته 70 kg مسافة 100 m على منحدر مائل بزاوية °37، كما في الشكل(5-10). ماطاقة وضعه الابتدائية والنهائية؟ وماشغل الجاذبية خلال هذا الانتقال؟

الحل: نكتب طاقة وضع الجسم على النحو:

U=mgy



الشكل (5-10)

ونظراً لأن موضع الأرض (y=0) لم يفرض علينا في هذه المسألة لذا نختاره عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم، أي B فيكون y_B=0 ونكتب:

$$U_A = mgy_A = mg\sin 37° = (70\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(100\,\text{m})\sin 37° = 41.3\ \text{kJ}$$

كما أن

$$U_B = mgy_B = 0$$

أما شغل قوة الجاذبية فيساوي الفرق في طاقة الوضع بين البداية والنهاية (أي سالب التغير) ونكتب:

$$W_g = -\Delta U = -(U_B - U_A) = 41.3\ \text{kJ}$$

سنحدد الآن طاقة الوضع الناتجة عن قوة المرونة لزنبرك حيث وجدنا أنه إذا كان لدينا جسم m مربوط بزنبرك وأزحناه مسافة x عن وضع الاتزان، فإن الشغل الذي نقوم نحن به يساوي (تأكد من ذلك):

$$W = \tfrac{1}{2}kx^2$$

وإذا أبقينا الجسم عند ذلك الموضع فإننا نتساءل أين ذهب الشغل الذي قمنا به؟ والجواب أنه تخزّن في النظام المؤلف من الجسم والزنبرك على شكل طاقة كامنة أو طاقة وضع. وبالتالي فإننا نعرّف طاقة وضع جسم مرتبط بالزنبرك بالعلاقة:

$$\boxed{U_{sp} = \tfrac{1}{2}kx^2} \qquad (19\text{-}5)$$

حيث x مقدار ابتعاد الجسم عن وضع الاتزان.

ويجدر التنويه هنا إلى أن طاقة الوضع تعتمد على القوى المؤثرة على الجسم المعني، فلو اختفي تسارع الجاذبية في العلاقة (17-5) أو اختفى الزنبرك (k) في العلاقة (19-5) لاختفت طاقة الوضع أيضاً. وحيث أن لكل قوة مصدر ما، كالأرض في حالة الجاذبية والزنبرك في الحالة الثانية، فإننا نقول إن U هي طاقة وضع **النظام** *(system)* المؤلف من الجسم ومصدر القوة المؤثرة عليه. أي أن طاقة الوضع ناتجة عن متغيرات تحريك الجسم، ولذا كان من الواجب أن نسميها **طاقة تحريك** *(dynamic energy)*، أما طاقة الحركة *(kinetic energy)* فهي مرتبطة بالجسم فقط بغض النظر عن القوى المؤثرة عليه. فطالما أن له كتلة وسرعة فله طاقة حركة، اي أنها ناتجة عن متغيرات حركة الجسم.

مثل 5-5

يعلق جسم كتلته 5 kg بنهاية زنبرك طوله الطبيعي 15 cm فيصير طوله 17 cm عندما يتزن الجسم. (أ) ماثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ما طاقة وضع الجسم إذا أبعدناه 5 cm عن وضع اتزانه؟

الحل: (أ) وجدنا في المثل (5-2) أن ثابت مرونة زنبرك يتحدد عملياً من العلاقة $k = mg/\Delta l$ حيث Δl استطالة الزنبرك بعد تعليق الجسم به، ولذلك نكتب:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{(5\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)}{(0.02\,\text{m})} = 2450\,\text{N/m}$$

(ب) عند إزاحة الجسم 5 cm عن وضع الاتزان فإن طاقة وضعه تعطى بالعلاقة:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(2450\,\text{N/m})(0.05\,\text{m})^2 = 3\,\text{J}$$

8-5 العلاقة بين طاقة الوضع والقوى المحافظة

عرّفنا في الفقرة السابقة طاقة وضع جسم خاضع لقوة الجاذبية فقط بالعلاقة:

$$U_g = mgy$$

حيث يدل الرمز الأسفل g إلى أن هذه الطاقة ناتجة عن كون الجسم موجوداً في منطقة خاضعة لقوة الجاذبية وهذا مايطلق عليه عادة اسم **مجال الجاذبية** *(gravitational field)*. وبكتابة قوة الجاذبية المؤثرة على جسم بالشكل:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$$

وافتراض الاتجاه الموجب للأعلى يمكن الحصول على طاقة وضع الجاذبية من قوة الجاذبية بالتكامل:

$$\boxed{U_g = -\int_0^y \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{y}} \qquad (20\text{-}5)$$

وترتبط هذه العلاقة بين قوة الجاذبية وطاقة الوضع الناتجة عنها. وسنرى بعد قليل أنه عندما نعرّف قوة التجاذب بين جسمين من قانون الجاذبية العالمي فإن العلاقة السابقة تبقى صحيحة باشتثناء حدود التكامل التي يجب أن تكون دائماً من الموضع الذي تكون عنده طاقة وضع الجسم معدومة، أي $U(y_1=0)$، إلى الموضع y المراد حساب طاقة الوضع عنده.

وبنفس الشكل نربط بين القوة وطاقة الوضع لجسم مربوط بزنبرك عندما يكون على بعد x من وضع الاتزان بملاحظة أن القوة المؤثرة عليه هي $F_{sp}=-kx$، كما أن طاقة وضعه $U_s=\frac{1}{2}kx^2$، ولذا يمكن الربط بينهما مباشرة على النحو:

$$U_{sp}=-\int_0^x \mathbf{F}_{sp}\cdot d\mathbf{x} \qquad (21\text{-}5)$$

حيث افترضنا الاتجاه الموجب مع محور السينات الذي يتحرك عليه الجسم ووضعنا حدود التكامل من $x_1=0$ حيث $U_1=0$ إلى x حيث نريد معرفة طاقة الوضع.

ويمكن استخلاص القوة من طاقة الوضع في حال الجاذبية أو قوة الإرجاع باشتقاق طاقة الوضع بالنسبة للموضع فنكتب:

$$F=-\frac{dU}{dx} \qquad (22\text{-}5)$$

ويمكن تعميم العلاقة السابقة عندما يتحرك الجسم في الفضاء بحيث يتحدد موضعه بثلاثة إحداثيات (x,y,z) وتصير طاقة وضعه معتمدة عليها، أي أن $U=U(x,y,z)$، ويصير للقوة المؤثرة على الجسم ثلاث مركبات تعطى بالعلاقة:

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{و} \quad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{و} \quad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (23\text{-}5)$$

حيث يدل الرمز على الاشتقاق الجزئي لطاقة الوضع بالنسبة للإحداثي المعني.

مثل 5-6

يخضع جسم لقوة إرجاع تعطى بالعلاقة $F=-3x-5x^2$. ماطاقة وضعه عند $x=2$؟

الحل: بتطبيق (5-21) نجد:

$$U(x)=-\int_0^x F dx=-\int_0^x(-3x-5x^2)dx=\left[\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{5}{3}x^3\right]_0^2=19.3\,\mathrm{J}$$

ونلاحظ أننا وضعنا الحد الأدنى للتكامل عند $x_1=0$ حيث يكون $U(x)=0$.

مثل 7-5

يخضع جسم لقوة مركزية جاذبة تعطى بالعلاقة $F=-k/r^2$ حيث k ثابت. ماطاقة وضع الجسم عند أي موضع r؟

الحل: بتطبيق (5-21) نجد:

$$U(r)=-\int_{\infty}^{r}(-\frac{k}{r^2})dr=\left|-\frac{k}{r}\right|_{\infty}^{r}=-\frac{k}{r}$$

حيث نلاحظ مرة أخرى أننا وضعنا الحد الأدنى للتكامل عند $r=\infty$ حيث يكون $U(r)=0$.

9-5 الطاقة الميكانيكية الكلية *(Total Mechanical Energy)*

وجدنا في الفقرة (5-7) أنه عندما ينتقل جسم بين نقطتين ارتفاع الأولى y_1 والثانية y_2 تحت تأثير قوة الجاذبية فقط فإن الشغل الذي تقوم به هذه القوة هو:

$$W_g=U_1-U_2$$

حيث U_1 و U_2 طاقتي وضع الجسم عند النقطتين 1 و 2، على الترتيب. ولكن بحسب نظرية الشغل والطاقة فإن هذا الشغل يساوي تغير طاقة الحركة للجسم بينهما، أي أن:

$$W_g=K_2-K_1$$

ومن ثم نستنتج من العلاقتين السابقتين أنه عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة الجاذبية فقط يكون:

$$K_2-K_1=U_1-U_2 \tag{24-5}$$

أي أن:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \tag{25-5}$$

ونلاحظ أن الطرف الأيمن يمثل مجموع طاقة الحركة والوضع عند النقطة الأولى، بينما يمثل الطرف الأيسر هذا المجموع عند النقطة الثانية. فإذا رمزنا لـــ $K+U$ بـــ E وأطلقنا عليه اسم **الطاقة الميكانيكية الكلية**، أي أن:

$$\boxed{E=K+U} \tag{26-5}$$

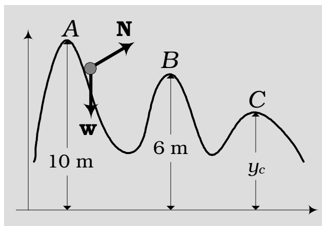
عندئذ نكتب (5-25) بالشكل:

$$\boxed{\Delta E=E_2-E_1=0} \tag{27-5}$$

فالطاقة الميكانيكية الكلية عند النقطة الأولى تساوي الطاقة الميكانيكية الكلية عند النقطة الثانية، لذا نقول إنه عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة الجاذبية فقط فإن طاقته الميكانيكية الكلية لاتتغير. هذه حالة خاصة من **مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية.**

مثل 5-8

ينزلق جسم كتلته 1 kg على المنحني الموضح بالشكل (5-11) مبتدءاً عند A من السكون. ماسرعته عند B وما ارتفاع C إذا وصل إليها بسرعة 2 m/s بفرض أن الاحتكاك مهمل؟



الشكل (5-11)

الحل: نلاحظ من الشكل (5-11) أن الجسم يخضع لقوتين فقط هما وزنه وهي قوة محافظة، ورد فعل السطح الذي وجدنا سابقاً أن شغله يساوي الصفر دوماً أي يمكن اعتبار رد فعل السطح قوة محافظة. ومن ثم فالطاقة الميكانيكية الكلية محفوظة ونكتب:

$$E_A = E_B = E_C$$

ولكن

$$U_A = mgy_A \quad K_A = 0 \;\Rightarrow\; E_A = mgy_A$$

لأن $\upsilon_A=0$. كما أن:

$$E_B = mgy_B + \tfrac{1}{2} m\upsilon_B^2$$

وبوضع $E_A = E_B$ والتعويض عن القيم المعطاة نجد υ_B=8.8 m/s.

وبنفس الشكل، نكتب طاقة النقطة C:

$$E_C = \tfrac{1}{2} m\upsilon_C^2 + mgy_C = E_A$$

وبملاحظة أن υ_C=2 m/s وتعويض القيم المعطاة نجد y_C=9.8 m.

ويمكن أيضاً استخلاص مبدأ حفظ الطاقة لجسم خاضع لقوة إرجاع الزنبرك. فقد وجدنا أن قوة المرونة هي قوة محافظة، كما أن الشغل الذي تقوم به عندما ينتقل جسم من نقطة تبعد مسافة x_1 عن وضع الاتزان لنقطة ثانية x_2 يساوي:

$$W_{sp} = \tfrac{1}{2} kx_1^2 - \tfrac{1}{2} kx_2^2$$

ولكن طاقة الوضع عند x هي $U = \frac{1}{2}kx^2$ ولذا يصير الشغل مساوياً إلى:

$$W = U_1 - U_2$$

ولكن بحسب نظرية الشغل والطاقة فإن:

$$W = K_2 - K_1$$

أي أن:

$$U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

ونكتب العلاقة الأخيرة بدلالة الطاقة الميكانيكية الكلية E على النحو:

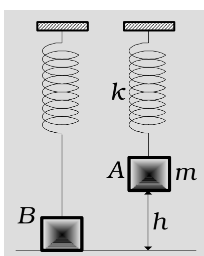
$$\boxed{\Delta E = E_2 - E_1 = 0} \qquad (28\text{-}5)$$

فالطاقة الميكانيكية الكلية ثابتة أيضاً في هذه الحالة لأن القوة المؤثرة على الجسم هي قوة محافظة.

ونستنتج مما تقدم **مبدأ حفظ الطاقة** الذي ينص على أنه **إذا تحرك جسم تحت تأثير قوى محافظة فإن طاقته الميكانيكية الكلية لاتتغير.**

مثل 5-9

يعلق زنبرك ثابت مرونته 98 N/m بوضع شاقولي بحيث تبقى نهايته السفلى حرة ويعلق بها جسم صغير كتلته 0.5 kg ويُمسك باليد حتى لايستطيل الزنبرك بتاتاً. ما أكبر مسافة يسقطها الجسم عند إفلاته؟



الشكل (5-12)

الحل: نفترض أن مستوى الأرض يقع عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم، كما في الشكل (5-12)، عندئذ تصير الطاقة الميكانيكية الكلية عند الموضع الابتدائي:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = mgh$$

وعند أخفض نقطة يستطيل الزنبرك أكبر مايمكن عند مسافة $x = h$ حيث تصير سرعته هناك صفراً، لذا نكتب طاقة الجسم الكلية:

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kh^2$$

وبما أن الجسم لايخضع إلاّ لقوتي الجاذبية والإرجاع لذا تبقى طاقته الميكانيكية ثابتة، أي أن:

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad E_B - E_A = 0 \quad \Rightarrow \quad E_A = E_B$$

وبتعويض القيم المعطاة نجد:

$$mgh = \tfrac{1}{2}kh^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2mg}{k} = 0.1\,\mathrm{m}$$

10-5 الشكل العام لمبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية

وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا خضع جسم أو منظومة لقوى محافظة فإن الطاقة الميكانيكية الكلية تبقى ثابتة نظراً لعدم ضياعها بأي شكل من الأشكال. لكن إذا كانت هناك قوى مضيعة للطاقة، كالاحتكاك، فإن E لاتبقى كما هي خلال انتقال المنظومة من وضع أول لوضع ثاني، ولذلك نعرف **القوى غير المحافظة** بأنها **القوى التي لاتحافظ على طاقة الجسم أو النظام الذي تؤثر عليه، ويعتمد شغلها على الطريق الذي يسلكه الجسم**، لأن الشغل يعتمد على المسافة. فقوة الاحتكاك مثلاً تضيع طاقة أكبر لو تحرك الجسم الخاضع لها بين نقطتين على طريق متعرج بدلاً من الانتقال مباشرة.

ونستنتج مما تقدم أنه إذا تحرك جسم خاضع لقوى محافظة وغير محافظة فإن طاقته الميكانيكية الكلية تتغير بمقدار الشغل الذي تبذله القوى غير المحافظة، أي أن:

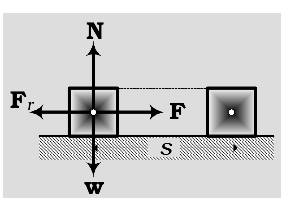
$$\boxed{\Delta E = W'} \qquad (29\text{-}5)$$

حيث تدل W' على شغل كل القوى غير المحافظة المؤثرة على النظام.

ولابأس من التنويه إلى أن تحديد القوى المحافظة وغير المحافظة ليس بالأمر السهل دوماً ولذلك سنعتمد في هذا الكتاب وعلى هذا المستوى من المادة أن **كل القوى غير محافظة باستثناء قوتي الجاذبية والإرجاع** (لأننا أخذنا شغل كل واحدة منهما بعين الاعتبار من خلال طاقة وضع الجسم). وعندها يكون W' شاملاً لشغل كل القوى ماعداهما.

مثل 10-5

يشد رجلٌ صندوقاً كتلته 50 kg أفقياً بدءاً من السكون مسافة 20 m على أرض خشنة معامل احتكاكها معه 0.2 فتصير سرعة



الشكل (13-5)

الصندوق 20 m/s. استخدم مبدأ حفظ الطاقة لتحديد قوة شد الرجل.

الحل: نوضح في الشكل (5-13) انتقال الصندوق والقوى المؤثرة عليه، ونكتب من مبدأ حفظ الطاقة:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W'$$

حيث $E_1=0$ لأن الصندوق كان ساكناً في البداية فليس له طاقة حركة، وموضوع على الأرض فارتفاعه يساوي الصفر فلاطاقة وضع له أيضاً. كما أن $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ لأن الصندوق لايزال على نفس المستوى وتبقى طاقة وضعه معدومة.

أما شغل القوى غير المحافظة فيشمل شغل الشد والاحتكاك، بينما لايوجد شغل لرد فعل السطح كما ذكرنا سابقاً، ولذلك نكتب:

$$W' = W_T + W_{F_k}$$

حيث شغل الشد $W_T = Ts$، وشغل الاحتكاك $W_{F_k} = -F_k s = -\mu_k mgs$.

وتصير علاقة حفظ الطاقة:

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 - 0 = Ts - \mu_k mgs$$

وبتعويض القيم المعطاة نجد $T \approx 600\ \mathrm{N}$.

5-11 طاقة وضع قوة الجاذبية العامة

عرّفنا في الفقرة (5-6) طاقة وضع جسم على ارتفاع h عن سطح الأرض بالشكل mgh لكن هذا التعريف غير دقيق تماماً بسبب تغير قيمة تسارع الجاذبية مع الارتفاع، كما وجدنا في الفصل السابق. ولذلك سنعيد تعريف طاقة وضع الجاذبية لمنظومة مؤلفة من جسمين أو أكثر. فنكتب قوة الجاذبية التي تخضع لها كتلة صغيرة m_1 على بعد r من كتلة صغيرة أخرى m_2 على النحو:

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1$$

حيث $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من m_2 إلى m_1.

وباستخدام (5-21) نكتب طاقة وضع المنظومة المؤلفة من m_1 و m_2 بالشكل:

$$U = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^{r} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,dr \qquad (5\text{-}30)$$

وباختيار الموضع الابتدائي $r_0 = \infty$ حيث تنعدم القوة المتبادلة بين الجسمين ويكون عندها $U(\mathbf{r}_0)=0$ نجد:

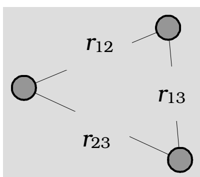
$$\boxed{U = -\frac{Gm_1m_2}{r}} \qquad (31\text{-}5)$$

وتعطي هذه النتيجة طاقة وضع **النظام** المؤلف من الكتلتين معاً إذ لو اختفت إحداهما لاختفت طاقة الوضع مباشرة.

وبنفس الشكل يمكن البرهان أن طاقة وضع منظومة مؤلفة من عدة أجسام تعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} U = &-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_1m_4}{r_{14}} \cdots \\ &-\frac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \frac{Gm_2m_4}{r_{24}} - \frac{Gm_2m_5}{r_{25}} \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (32\text{-}5)$$

حيث r_{ij} المسافة بين الجسمين i و j ، كما في الشكل (5-14). وتمثل U في العلاقة السابقة مقدار الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية لوضع هذه الجسيمات قرب بعضها بهذا الشكل.



الشكل (5-14)

مثل 5-11

ماطاقة وضع منظومة مؤلفة من ثلاث كتل متساوية كتلة الواحدة 10 kg موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 10 cm ، وما الشغل اللازم لانتزاع إحدى هذه الكتل إلى مالانهاية؟

الحل: نستخدم (5-32) ونكتب:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}$$

وبتعويض الكتل والمسافات نجد $U = -2\times10^{-7}$ J.

الآن، عندما ننزع إحدى الكتل ونبعدها إلى مالانهاية تصير طاقة وضع المنظومة:

$$U' = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} = -0.7\times10^{-7}\ \text{J}$$

ويكون الشغل المبذول لإبعاد الكتلة مساوياً للفرق بين الطاقتين، أي:

$$W = U' - U = 1.3\times10^{-7}\ \text{J}$$

12-5 الطاقة الميكانيكية الكلية للأقمار والكواكب

وجدنا سابقاً أن الكواكب والأقمار تتحرك في مسارات قطوع ناقصة حول مركز جذبها (كالشمس في حالة الكواكب، والكواكب في حالة الأقمار). وسنفترض في هذه الفقرة أن مسار كوكب (كالأرض) أو قمر ما mحول مركز جذبه M دائري تماماً ونصف قطره r، وأن مركز الجذب كبير جداً بحيث يمكن اعتباره ساكناً دوماً (وهذا تقريب معقول في حالة دوران الأرض حول الشمس أو قمر صناعي حول الأرض). وعندها نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية لـــ m على النحو:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \tag{33-5}$$

ونظراً لأن الجسم يتحرك على مسار دائري فإن قوة الجذب المؤثرة عليه مركزية وقيمتها:

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \tag{34-5}$$

أي أن:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r} \tag{35-5}$$

وتصير الطاقة الكلية للجسم:

$$E = -\frac{GmM}{2r} \tag{36-5}$$

ونلاحظ أن الطاقة الكلية سالبة وتنعدم عندما يصير الجسم على بعد كبير من مركز الجذب بحيث يمكن اعتبار $r \to \infty$، ولذلك نقول إن الجسم **مقيد** بمركز الجذب أو **مرتبط** به *(bound)* طالما أنه قريب منه.

وإذا أردنا للجسم أن يفلت من ارتباطه بمركز جذبه فيجب أن نعطيه طاقة أكبر أو تساوي على الأقل طاقة ارتباطه (5-36).

مثل 12-5 سرعة الإفلات *(escape velocity)*

يُطلق قمر صناعي كتلته m من سطح الأرض بسرعة v_0. ما أعلى ارتفاع سيصل إليه وماذا يجب أن تكون v_0 حتى لايعود إلى الأرض مطلقاً؟

الحل: نكتب أن الطاقة الكلية للقمر عند سطح الأرض E_R تساوي طاقته عند أعلى ارتفاع r_{max} يصل إليه، أي أن $E_R = E_{r_{\max}}$ حيث:

$$E_R = \tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{R}$$

وعندما يصير القمر الصناعي عند أعلى ارتفاع تصير سرعته تساوي الصفر وطاقته الكلية طاقة وضع، أي:

$$E_{r_{\max}} = -\frac{GmM}{r_{\max}}$$

ولذلك يكون:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r_{\max}}$$

ولتحديد السرعة الابتدائية اللازمة ليفلت القمر من جاذبية الأرض نضع $r_{\max} \to \infty$ في العلاقة السابقة فنجد (لاحظ أن تسارع الجاذبية قرب سطح الأرض هو $g_R = GM/R^2$):

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 g_R R}$$

وتساوي في حالة الأرض حوالي 11 km/s!

مثل 13-5 أين mgh في طاقة الوضع لجسم على ارتفاع h فوق سطح الأرض

عرّفنا سابقاً طاقة وضع جسم على ارتفاع h فوق سطح الأرض بـــ mgh والآن نقول إنها $-GmM/r$ حيث M كتلة الأرض وr بعد الجسم عن مركز الأرض، فأيهما الصحيح؟

الحل: كلاهما. ومانعني بـــ mgh إنما الفرق في طاقة الوضع عندما يكون الجسم على سطح الأرض تماماً وعندما يكون على ارتفاع h صغير بالمقارنة مع نصف قطر الأرض. ويمكن استنتاج ذلك بكتابة (5-31) في الحالة الأولى على النحو:

$$U_1(r = R) = -\frac{GmM}{R}$$

وفي الحالة الثانية:

$$U_2(r=R+h)=-\frac{GmM}{R+h}$$

ونلاحظ أن الفرق بين هاتين الطاقتين هو:

$$U_2(r=R+h)-U_1(r=R)=-\frac{GmM}{R+h}-(-\frac{GmM}{R})=\frac{GmM}{R}(1-\frac{R}{R+h})$$

فإذا كان $h<<R$ عندئذ يمكن أن نكتب

$$1-\frac{R}{R+h}=\frac{h}{R+h}=\frac{h}{R(1+h/R)}\approx\frac{h}{R}$$

حيث نهمل الحد h/R بالمقارنة مع الواحد. ويصير الفرق في طاقة الوضع مساوياً إلى:

$$\Delta U=\frac{GmM}{R}\frac{h}{R}=m(\frac{GmM}{R^2})R$$

ولكن $g_R=GM/R^2$ تسارع الجاذبية عند سطح الأرض. ولذلك بوضع $\Delta U\equiv U$ التي تدل على طاقة وضع الجسم **بالنسبة لسطح الأرض**، نجد:

$$U=mgh$$

وهو المطلوب إثباته.

13-5 القدرة *(power)*

لنفترض أننا نراقب عمالاً يحملون أكياس رمل من الطابق الأول للطابق الخامس من بناء. فنرى عاملاً يرفع أربعين كيساً خلال ساعة ونصف، وآخر يرفع خمسة وعشرين كيساً بخمس وخمسين دقيقة، وثالث يرفع كيسين كل أربع دقائق. ونتساءل أيهم أكثر كفاءة؟ لاشك بأن الإجابة مباشرة صعبة بعض الشئ لكن لو حسبنا الشغل الذي يقوم به كل عامل خلال نفس الزمن لصار بالإمكان مقارنتهم. لذلك نعرف **القدرة المتوسطة** *(average power)* بأنها الشغل المبذول على الزمن اللازم لبذله، أي:

$$\boxed{P_{av}=\frac{\Delta W}{\Delta t}} \qquad (37\text{-}5)$$

وتعطى وحدة القدرة بـــ جول/ثانية=وات (W=J/s). وكثيراً مانستخدم الكيلوواط ($kW=10^3$ W) أو ميغاوات ($MW=10^6$ W) للتعبير عن القدرة الكهربائية المستهلكة في المنازل والمصانع.

وإذا افترضنا أن القوة المؤثرة على جسم أو منظومة غير ثابتة عندئذ يكون شغلها متغيراً من موضع لآخر ولذا نعرّف **القدرة اللحظية** *(instantaneous power)* بالعلاقة:

$$\boxed{P = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}} \tag{38-5}$$

14-5 العلاقة بين القدرة اللحظية والسرعة

إذا خضع جسم لقوة $\mathbf{F}$ خلال قطعه مسافة $\Delta\mathbf{s}$ في زمن Δt عندئذ نكتب القدرة المتوسطة لهذه القوة بالشكل:

$$P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F} g\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} g\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} g\mathbf{v}_{av}$$

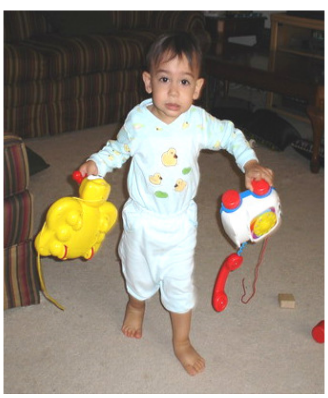
حيث $\mathbf{v}_{av}$ السرعة المتوسطة للجسم خلال انتقاله للمسافة $\Delta\mathbf{s}$. ومن ثم يمكن أن نكتب القدرة اللحظية لهذه القوة مباشرة بتعويض السرعة اللحظية بدلاً من السرعة المتوسطة، أي:

$$\boxed{P = \mathbf{F} g\mathbf{v}} \tag{39-5}$$

ونلاحظ من العلاقة الأخيرة، أن القدرة، كالسرعة، تعتمد على المراقب أو مناط الإسناد في تحديدها. فمثلاً إذا كان هناك شخص يحمل جسماً في مصعد يتحرك للأعلى بسرعة ثابتة فإنه لايصرف قدرة على هذا الجسم بالنسبة لمراقب معه في نفس المصعد لأن سرعة الجسم تساوي الصفر بالنسبة له. أما بالنسبة لمراقب خارج المصعد فإن الشخص يبذل قدرة "موجبة" على الجسم بينما تبذل الجاذبية قدرة "سالبة".

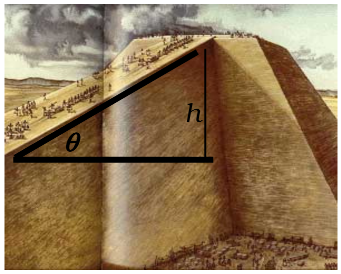
15-5 الآلات ومردودها *(Efficiency)*

كان الإنسان القديم أول آلة في الطبيعة، فكان يكسر الحجارة وينقلها من مكان لآخر، ويقطع الأشجار ويحرث الأرض، وهكذا. ومما لاشك فيه أن هذا ليس بالأمر السهل ويتطلب قوة وجهداً كبيرين. ولذلك قام الإنسان بتصنيع آلات تساعده في عمله كرفع الأجسام ونقلها وغيره.



عبد الله: أصغر آلة بشرية

ومن أبسط الآلات التي استخدمها الإنسان **المستوي المائل** حيث يمكن سحب جسم عليه لارتفاعات مختلفة مع بذل قوة صغيرة نسبياً. وقد استخدم العمال المصريون القدماء هذه الوسيلة لبناء الأهرامات، إذ قاموا برفع تلك الحجارة الضخمة بواسطة مستويات مائلة يزداد طولها مع ارتفاع الهرم، كما في الشكل (5-15) الذي نلاحظ منه أن الشغل اللازم لرفع حجر كتلته m لارتفاع h يساوي mgh لكن القوة المبذولة ستكون mg لورفعناه للأعلى مباشرة أو $mg\sin\theta$ لو سحبناه على المستوي المائل. وبالطبع فكلما قل هذا الميل كلما صارت القوة المطلوبة أقل، وهذا مهم حتى يمكن رفع تلك الأحجار الثقيلة إلى تلك الارتفاعات.

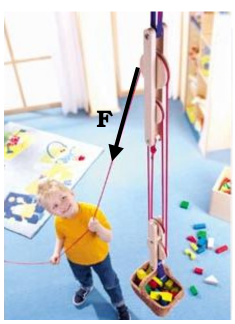


الشكل (5-15)

ومن الآلات الأخرى التي كانت أول ما استخدم الإنسان الحجر والعصا التي تطورت لرافعة السيارة في العصر الحديث، كما في الشكل (5-16)، حيث تطبق قوة F_1 عند الطرف البعيد ليد الجهاز المرتكزة عند o فترفع السيارة الثقيلة F_2 عند النهاية الأخرى القريبة. وسنرى لاحقاً أن عزم قوة يتناسب طرداً مع ذراعها وهذا ما توفره هذه الآلة البسيطة لأن ذراع F_1 أكبر من ذراع F_2 وبالتالي يمكن رفع (أو تدوير) جسم كتلته أكبر من القوة F_1 بهذه الوسيلة الفعالة.

الشكل (5-16)

وهناك أيضاً آلة بسيطة هي البكرة والحبل (آلة آتوود) التي تستخدم لرفع الأجسام حيث يربط الجسم المراد رفعه بحبل يمر حول البكرة المثبتة عند الوضع المطلوب رفع الجسم إليه، بينما يُسحب الطرف الآخر للحبل وهو يميل بزاوية كبيرة حتى تكون القوة اللازمة أصغر من وزن الجسم، كما في الشكل (5-17).



الشكل (5-17)

وتتميز الآلات عن بعضها بمردودها *(efficiency)* الذي يساوي نسبة الطاقة المأخوذة من الآلة *(W_{in})* إلى الطاقة المعطاة لها *(W_{out})*، أي أن:

$$e = \frac{W_{out}}{W_{in}} \qquad (5\text{-}40)$$

فإذا قامت آلة أو شخص بعمل ولم يستفاد إلاّ من جزء منه فإن مردود هذه الآلة أو الشخص يساوي نسبة ماتم من الشغل إلى الشغل الفعلي المبذول.

ومما لاشك فيه أن مردود أي آلة أو شخص يتناقص مع الزمن أو سوء الاستخدام أو التصنيع. فإذا كان الاحتكاك على المستوي المائل في الشكل (5-15) أو مع البكرة في الشكل (5-17)، مثلاً، عالياً فإن جزءاً كبيراً من الطاقة سيضيع بدون فائدة. وكذلك الحال إذا كان محرك سيارة قديماً، أو أن عجلاتها ليست ممتلئة بالهواء بشكل صحيح، مما يسبب إهدار الوقود باستمرار.

مثل 5-14

يُستعمل محرك قدرته 10 kW لرفع مصعد كتلته 1800 kg مسافة 10 m. ماشغل هذا المحرك خلال رفع المصعد إذا كان مردوده 60% وما الزمن الذي سيستغرقه لرفع المصعد؟

الحل: لنحسب الشغل الذي نريد المحرك أن يقوم به وهو رفع المصعد مسافة 10 m فنكتب:

$$W_{out} = mgh = (1800 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) = 17.6\times10^4 \text{ J}$$

وبما أن مردود المحرك 60% لذلك نجد الشغل الذي يستهلكه المحرك:

$$e = \frac{W_{out}}{W_{in}} = 0.6 \;\Rightarrow\; W_{in} = \frac{W_{out}}{0.6} = 29.4\times10^4 \text{ J}$$

فالمحرك يستهلك 294 kJ حتى يعطينا 176 kJ وهذه خسارة كبيرة للطاقة!

أما الزمن اللازم لرفع المصعد فنجده بكتابة:

$$P = \frac{W_{ouy}}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{W_{out}}{P} = \frac{17.6\times10^4 \text{ J}}{10\times10^3 \text{ W}} = 17.6\ s$$

من علماء الإسلام

البتاني

هو ابن عبد الله محمد بن سنان المعروف باسم **البتاني** (243–317 هـ). يعتبر من أعظم فلكيي العالم، ووضع نظريات مهمة في الفلك والجبر وحساب المثلثات. واشتهر برصد الكواكب والأجرام السماوية على الرغم من عدم توافر الآلات الدقيقة وتمكن من جمع أرصاد ما زالت محل إعجاب العلماء وتقديرهم. ترك عدة مؤلفات في علوم الفلك والجغرافيا. وله جداوله الفلكية المشهورة التي تعتبر من أصح الزيج حتى الآن. كان ضليعاً في المثلثات وأدخل اصطلاح جيب التمام. من أهم منجزاته الفلكية أنه أصلح قيم الاعتدالين الصيفي والشتوي، وعين قيمة ميل فلك البروج على فلك معدل النهار (أي ميل محور دوران الأرض حول نفسها على مستوى دورانها حول الشمس). ووجد أنه يساوي ′35 °23 وقاس طول السنة الشمسية بدقة عالية وصلت لدقيقتين و22 ثانية فقط.

ملخص الفصل

شغل قوة ثابتة	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\phi$
شغل قوة متغيرة	$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B Fds\cos\phi$
الطاقة الحركية	$K = \frac{1}{2}mv^2$
طاقة الوضع لقوة الجاذبية	$U(y) = mgy$
طاقة الوضع لقوة الإرجاع	$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$
نظرية الشغل والطاقة	$W_T = K_2 - K_1$
الطاقة الميكانيكية	$E = K + U$
حفظ الطاقة للقوى المافظة	$\Delta E = 0$
حفظ الطاقة للقوى غير المحافظة	$\Delta E = W'$
طاقة الوضع في مجال الجاذبية	$U(r) = -Gm_1m_2 / r$
الطاقة الكلية في مجال الجاذبية	$E = \frac{1}{2}mv^2 - GmM / r$
سرعة الإفلات	$v_{esc} = \sqrt{2g_R R}$
القدرة المتوسطة	$P_{av} = \Delta W / \Delta t$
القدرة اللحظية	$P = dW / dt$
مردود الآلة	$e = W_{out} / W_{in}$

تمارين ومسائل

الشغل

1-5 تحتاج سيارة لقوة 300 N لتتحرك على طريق أفقية. ما الشغل اللازم لدفعها مسافة 5 m؟

2-5 ما الشغل الذي يقوم به رباع في رفعة الخطف عندما يرفع 260 kg مسافة 2 m؟ وكم يعمل للبقاء في ذلك الوضع لمدة 20 ثانية؟

3-5 ما الشغل اللازم لقص قطعة خشب بمنشار يحتاج لقوة 40 N لدفعه مسافة 15 cm للأمام والخلف؟

4-5 يتحرك جسم مسافة 2 m تحت تأثير قوة أفقية مقدارها 2 N وقوة احتكاك 0.4 N. ماشغل كل قوة؟

5-5 يسحب عامل صندوقاً كتلته 2 kg على أرض أفقية خشنة مسافة 20 m بقوة مقدارها 50 N وتصنع زاوية °37 فوق الأفق. ماشغل كل قوة مؤثرة على الصندوق إذا كانت قيمة قوة الاحتكاك 15 N؟

6-5 ما السرعة التي سيصل إليها الصندوق المذكور في المسألة السابقة بعد قطع مسافة 20 m؟

7-5 يشد رجل عربة كتلتها 150 kg على أرض أفقية خشنة مسافة 1.5 m بسرعة ثابتة بواسطة حبل يصنع زاوية °30 فوق الأفق. ماشغل الرجل، علماً بأن معامل الاحتكاك بين العربة والأرض 0.1؟

8-5 يُدفع جسمٌ كتلته 10 kg مسافة 5 m على أرض أفقية خشنة معامل احتكاكها 0.25 بواسطة قوة أفقية مقدارها 100 N تصنع زاوية °30 فوق الأفق. ما شغل كل قوة مؤثرة على الجسم؟

9-5 يُسحب صندوق كتلته 40 kg بسرعة ثابتة مسافة 5 m على أرض أفقية خشنة معامل احتكاكها معه 0.25 بواسطة قوة **F** تصنع زاوية °30 تحت الأفق. (أ) ماشغل كل قوة مؤثرة؟ (ب) ماقيمة **F**؟

10-5 يشد عامل صندوقاً بقوة 50 N ترتفع زاوية °30 فوق الأفق مسافة 3 m بينما تعاكسه قوة احتكاك مقدارها 40 N. ما الشغل المبذول على الصندوق؟

شغل قوة متغيرة

11-5 يُجذب جسم على محور السينات بقوة $F(x) = -6x^3$. (أ) ماقيمة F اللازمة لإبقاء الجسم على بعد 1 m من المبدأ؟ (ب) ما الشغل اللازم لنقل الجسم من x_1=1 m إلى x_2=2 m إذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين الأرض 0.25؟

12-5 يخضع جسم يتحرك على المحور ox لقوة متغيرة $F(x) = -24/x^4$. برهن أن شغل هذه القوة عندما يسير الجسم على طريق مغلقة بحيث ينتهي عند نقطة البداية يساوي الصفر. (ب) جد شغل F عندما ينتقل الجسم من x=2 m إلى اللانهاية.

13-5 ماشغل القوة $F(x) = 2x^3 + 8x$ التي تحرك جسم على محور السينات من x_1=0 إلى x_2=2 m؟

14-5 يُعلق صندوق كتلته 230 kg بحبل طوله 12 m مثبت بالسقف ثم يُدفع جانباً مسافة 1.2 m بواسطة قوة أفقية دائمة. (أ) ماقيمة القوة اللازمة لإبقائه في ذلك الوضع؟ (ب) ما الشغل المبذول لإبقائه في ذلك الوضع؟ (ج) ماشغل كل من الجاذبية والشد والقوة الأفقية خلال انتقال الجسم مسافة 1.2 m؟ (د) ما الشغل الكلي المبذول خلال هذا الانتقال؟

15-5 يخضع جسم كتلته 1 kg يتحرك على محور السينات لقوة $F(x) = -3x - 5x^2$. (أ) ماطاقة وضع الجسم عندما يكون عند x=2 m؟ (ب) ما أقصى مسافة سيقطعها الجسم على محور السينات إذا كانت سرعته 4 m/s– عندما كان في الموضع x=5 m؟

16-5 تُلقى سلسلة طولها l وكتلتها m على طاولة أفقية بحيث يتدلى 1/5 منها من حافة الطاولة. برهن أن الشغل اللازم لسحب هذا الجزء لسطح الطاولة يساوي $mgl/50$.

قوة الإرجاع

17-5 تستطيل مطاطة بمقدار 5 cm تحت تأثير قوة 4 N و15 cm تحت تاثير قوة 8 N. هل تحقق المطاطة قانون هوك في المرونة؟

18-5 يبلغ الطول الطبيعي لزنبرك 15 cm وثابت مرونته150 N/m. ما القوة اللازمة لشده ليصير طوله 30 cm؟

19-5 ينضغط ميزان زنبركي 1 cm عندما تقف سيدة كتلتها 60 kg عليه. ماثابت مرونة الزنبرك وما الشغل المبذول عليه خلال انضغاطه؟

20-5 تتصل إطارات السيارة بهيكلها بواسطة أربعة زنبركات عالية المرونة *(shock absorbers)* لتتحمل الصدمات التي تتعرض لها. مامقدار انضغاط كل زنبرك في سيارة كتلتها 1200 kg إذا كان ثابت مرونة الزنبرك الواحد 20 kN؟

21-5 يُعلق جسم كتلته1.5 kg بنهاية زنبرك مربوط شاقولياً بالسقف فيستطيل مسافة 0.2 m. (أ) ماثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ماقيمة واتجاه قوة الزنبرك عندما يُسحب الجسم المعلق مسافة 10 cm للأسفل بعيداً عن وضع الاتزان؟ (ج) صف حركة الجسم عندما يُترك من وضعه الجديد وهو معلق بالزنبرك.

22-5 مامقدار انضغاط كل زنبرك في سيارة كتلتها 1200 kg إذا رُفعت لعلو 0.8 m وتركت لتسقط على إطاراتها إذا كان ثابت مرونة كل زنبرك 70 kN؟

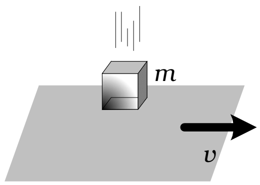
نظرية الشغل والطاقة

23-5 يتحرك جسم كتلته 2 kg على أرض أفقية ملساء بواسطة قوة أفقية مقدارها 2 N. استخدم نظرية الشغل والطاقة لحساب السرعة النهائية للجسم إذا كانت سرعته الابتدائية 10 m/s.

24-5 ما الطاقة الحركية لسيارة كتلتها 1200 kg تسير بسرعة 20 m/s؟ وكم تتغير هذه الطاقة عندما تتضاعف سرعة السيارة؟

25-5 يركض رجل وطفل بحيث أن الطاقة الحركية للرجل تساوي نصف الطاقة الحركية للطفل. عندما يزيد الرجل سرعته بمقدار 1 m/s تتساوى طاقته الحركية مع الطفل. ما السرعة الابتدائية لكل منهما إذا كانت كتلة الرجل ضعف كتلة الطفل؟

26-5 (أ) ما القوة اللازمة لرفع جسم كتلته 5 kg نحو الأعلى بسرعة ثابتة 4 m/s؟ (ب) ماشغل هذه القوة عندما يرتفع الجسم مسافة 12 m؟ (ج) ماتغير الطاقة الحركية للجسم؟



الشكل(5-18)

27-5 تسقط علبة كتلتها m على حزام نقل *(conveyer belt)* يتحرك بسرعة أفقية ثابتة v، كما في الشكل (5-18). (أ) ما الفترة الزمنية اللازمة لتصل العلبة لحالة عدم انزلاق على الحزام إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينهما μ_s والحركي μ_k؟ (ب) ما المسافة التي تقطعها عليه خلال ذلك؟ (ج) ما الطاقة الضائعة خلال هذه الفترة؟

حفظ الطاقة الميكانيكية

28-5 يحاول شخص منع كتلة 45 kg من الانزلاق على مستو مائل طوله 1.5 m وارتفاعه 0.9 m بالتأثير عليها بقوة أفقية F لتتحرك بسرعة ثابتة. (أ) ماقيمة F إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة والمستوي0.1؟ (ب) ماشغل كل قوة مؤثرة على الكتلة خلال انزلاقها؟ (ج) ماتغير طاقتها الحركية؟

29-5 يُدفع جسم كتلته 2kg على مستوي خشن مائل بزاوية $37°$ نحو الأعلى مسافة 20 m بواسطة قوة ثابتة موازية للمستوي مقدارها 120 N. (أ) ماشغل كل قوة مؤثرة على الجسم إذا كان معامل الاحتكاك 0.25؟ (ب) ما التغير في كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع والطاقة الميكانيكية للجسم؟

30-5 تخترق رصاصة كتلتها 30 g وسرعتها 50 m/s قطعة خشبية مسافة 12 cm. مامتوسط القوة التي أثرت على الرصاصة داخل الخشبة؟

31-5 من أي ارتفاع يجب أن يسقط جسم ليكتسب طاقة حركة مساوية لتلك عند سرعة 890 km/h؟

32-5 ما الشغل المبذول لتسريع بروتون في سايكلوترون إلى 3×10^7 m/s؟

33-5 تضغط كتلة 2 kg على زنبرك أفقي مهمل الكتلة ثابته 200 N/m مسافة 15 cm ثم تترك لتتحرك مسافة 60 cm على طاولة أفقية خشنة وتقف. مامعامل الاحتكاك بين الكتلة والطاولة؟

5-34 يضع طفل كرة صغيرة كتلتها 10 g داخل فوهة مسدس زنبركي ثابت مرونته 500 N/m ويضغطها مسافة 5 cm. ما السرعة التي ستنطلق بها الكرة؟ كم ستكون لو تعرضت لقوة مقاومة 10 N؟

5-35 تسقط كتلة 2 kg من ارتفاع 40 cm على زنبرك ثابت مرونته 2000 N/m موضوع شاقولياً على أرض أفقية. ما أكبر مسافة سينضغطها الزنبرك؟

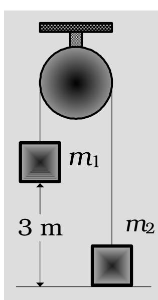
5-36 تُطلق قذيفة كتلتها 8 kg بسرعة 300 m/s وزاوية 45° مع الأفق، ثم تطلق قذيفة ثانية بنفس السرعة لكن بزاوية 90°. ما أعلى ارتفاع تصل إليه كل قذيفة؟ برهن أن الطاقة الميكانيكية الكلية للقذيفتين هي نفسها عند أي ارتفاع (استخدم الطاقة فقط).

5-37 تتدحرج كرة صغيرة كتلتها 0.1 kg عن سطح طاولة أفقية ارتفاعها 0.8 m فتصل للأرض بسرعة 5 m/s. ماسرعتها لحظة مغادرة الطاولة؟

5-38 يُقذف حجر كتلته 1 kg من ذروة جبل ارتفاعه 200 m بسرعة 15 m/s تصنع زاوية 30° فوق الأفق. ماسرعته لحظة وصوله للأرض؟ (استخدم الطاقة فقط).

5-39 تسقط بيضة وزنها 0.5 N من سطح بناء ارتفاعه 15 m. ماسرعتها لحظة ارتطامها بالرصيف؟ مامتوسط القوة المؤثرة على البيضة لو سقطت على أرض رملية ناعمة فاخترقتها 30 cm لتقف؟

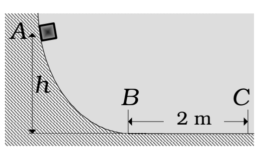
5-40 يجلس طفل على مرجوحة طول حبلها 7 m مربوطة بالسقف. ماسرعة الطفل عند أخفض نقطة يصل إليها إذا كانت أعلى نقطة تبعد 3 m من السقف؟



الشكل (5-19)

5-41 تبدأ آلة آتوود الموضحة بالشكل (5-19) الحركة من السكون عندما كانت m_1=12 kg على ارتفاع 3 m بالنسبة لـ m_2=4 kg. ما السرعة التي ستصل بها m_1 للأرض؟ (استخدم الطاقة).

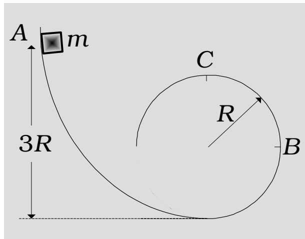
5-42 ينزلق جسم كتلته 2 kg بدءاً من السكون من النقطة A إلى النقطة B على الجزء الدائري الخشن من الطريق الموضح بالشكل (5-20) فيصلها بسرعة 4 m/s، ثم يتابع حركته على الجزء الأفقي الخشن ليقف عند C.



الشكل (5-20)

(أ) مامعامل الاحتكاك بين الجسم والطريق الأفقي إذا كان نصف قطر الجزء الدائري h=1 m؟ (ب) ما الشغل الضائع على الجزء الدائري من الطريق؟

5-43 تنزلق كتلة صغيرة m على السلك الدائري الموضح بالشكل (5-21) بدءاً من السكون عند A. (أ) ما التسارع المركزي

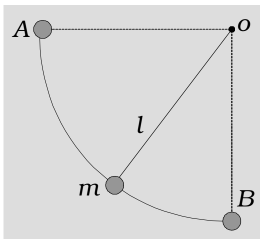


الشكل (5-21)

والمماسي لـــ m عند B؟ (ب) ما الطاقة الحركية للكتلة عند B؟

5-44 ما أقل ارتفاع للنقطة A في المسألة السابقة حتى لاتقع الكتلة عند C؟

5-45 تُسحب كتلة بندول بسيط m طوله l لوضع أفقي تماماً ثم تُترك لتهوي في دائرة شاقولية، كما في الشكل (5-22). ما سرعة الكتلة عند النقطة B وما الشد في الخيط عندئذ؟



الشكل(5-22)

5-46 برهن أنه لو تحركت m في المسألة السابقة في دائرة كاملة فإن $T_D - T_C = 6mg$.

طاقة وضع قوة الجاذبية وسرعة الإفلات

5-47 تطلق قذيفة من سطح الأرض رأسياً نحو الأعلى بسرعة 10 km/s. ما أعلى ارتفاع تصل إليه؟

5-48 (أ) ماسرعة الإفلات من كوكب نصف قطره 500 km وتسارع الجاذبية على سطحه $3\ m/s^2$؟ (ب) ما أعلى ارتفاع تصل إليه قذيفة أطلقت من سطح هذا الكوكب بسرعة رأسية 1 km/s؟

5-49 يبلغ نصف قطر المريخ 3450 km وكتلته 0.11 من كتلة الأرض. (أ) ما الكثافة الكتلية للمريخ بالمقارنة مع الأرض؟ (ب) ماتسارع الجاذبية على سطح المريخ؟ (ج) ماسرعة الإفلات منه؟

5-50 ماقوة الجاذبية التي تخضع لها كتلة m=1 kg موضوعة بين كتلتين m_1=0.2 kg و m_2=0.8 kg بحيث تبعد 4 cm عن الأولى و8 cm عن الثانية؟ (ب) ماطاقة وضع m؟ (ج) ما الشغل اللازم لوضع m في ذلك الموضع؟

5-51 تُعطى قيمة وموضع ثلاث كتل في المستوي xy بحيث m_1=20 kg عند(0,5,1) و m_2=40 kg عند (1,0,1−−) و m_3=60 kg عند (0,0,−0.5). (أ) ماقوة الجاذبية المؤثرة على جسيم كتلته 20 kg موضوع عند المبدأ؟ (ب) ماطاقة وضع هذا الجسم؟

5-52 يُطلق قمر صناعي من سطح الأرض نحو الأعلى فتصير سرعته 5 km/s على ارتفاع 100 km عندما ينفد وقوده تماماً. إلى أي ارتفاع سيصل وماسرعته عند عودته لسطح الأرض؟

5-53 يتجاذب نجمان متماثلان على بعد 10^{10} m من بعضهما بدءاً من السكون. (أ) ماسرعة كل منهما عندما يبعدان 5×10^{9} m عن بعضهما؟ (ب) ماسرعة كل منهما قبل أن يتصادما مباشرة؟

5-54 تقع كتلتان ساكنتان m و M على بعد لانهائي من بعضهما عندما تتحرك كل واحدة باتجاه الأخرى تحت تأثير قوة الجاذبية بينهما. برهن أن سرعة كل واحدة بالنسبة للأخرى عندما تصيران على بعد d من بعضهما هي $\sqrt{2G(m+M)/d}$.

القدرة

5-55 تسير سيارة على طريق أفقية بسرعة ثابتة 65 km/h خاضعة لقوى مقاومة محصلتها 500 N. مامعدل الطاقة الضائعة في الساعة ومن أين يتم تعويضها؟

5-56 يقوم طيار بتشغيل محرك طائرته الورقية الخفيفة برجليه فيولد قدرة متوسطة 0.32 W خلال الرحلة التجريبية التي يبلغ طولها 2.4 km بحيث تطير الطائرة بسرعة متوسطة 4 m/s. ما الطاقة التي يبذلها الطيار خلال هذه الرحلة؟

5-57 يرفع ثلاثة عمال عارضة خشبية وزنها 3000 N لسطح بناء ارتفاعه 30 m بواسطة رافعة مؤلفة من بكرة وحبل. ما الزمن اللازم لرفع العارضة إذا كانت قدرة كل عامل 200 W ومردود الرافعة 70%؟

5-58 يُستعمل محرك قدرته 10 kW لرفع مصعد كتلته 1800 kg إلى ارتفاع 10 m. (أ) ما شغل المحرك إذا كان مردوده 60%؟ (ب) ما الزمن اللازم لرفع المصعد؟

5-59 تستغرق طائرة DC-3 مدة 10 s لتصل لسرعة الإقلاع البالغة 100 km/h بدءاً من السكون. مامتوسط القدرة التي يعطيها محرك الطائرة إذا كانت كتلتها مع الركاب 11,000 km؟

5-60 يشد حصان عربة كتلتها 300 kg على أرض خشنة مائلة بزاوية 8° للأعلى ويعطي قدرة تعادل حصاناً واحداً (745.7 W). ما أكبر سرعة يمكن أن تكسبها العربة إذا كان معامل الاحتكاك بينها وبين الأرض 0.12 وما الطاقة الضائعة التي يبذلها الحصان لمقاومة الجاذبية والاحتكاك؟

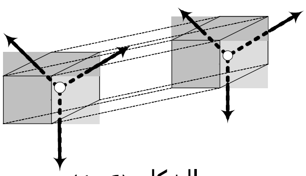
الفصل السادس

حركة منظومة جسمات

(Motion of System of Particles)

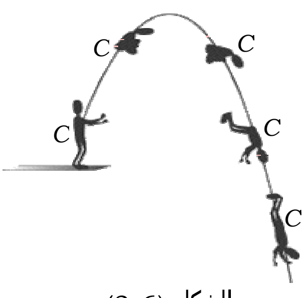
1-6 تمهيد: مركز الكتلة *(center of mass)*

خلال دراستنا لحركة وتحريك الأجسام لم نعر حجمها أو أبعادها أي اهتمام، واكتفينا بتمثيلها في أغلب الأحيان بنقطة أو دائرة صغيرة أو مستطيل. وافترضنا أن القوى المؤثرة على الجسم تمر كلها من نقطة واحدة تقع في منتصفه، كما في الشكل (6-1).



الشكل (6-1)

إلا أن هذا التبسيط غير صحيح في كل الأحوال إذ لايوجد جسم صغير لدرجة يمكن تمثيله بنقطة واحدة، ولو نظرنا لجسم كبير يتحرك بشكل انتقالي (أو انسحابي *translational*) فقط لوجدنا أن كل نقطة منه تتحرك بنفس الشكل تماما، وبالتالي فإن اعتبار هذا الجسم مكافئ لنقطة واحدة ممكن في هذه الحالة. إلا أنه لو كان لدينا جسم كبير يتحرك عشوائيا (كانتقال ودوران) لتحركت كل نقطة منه بشكل مختلف عن غيرها كشخص يقفز للماء، كما في الشكل (6-2)، فنلاحظ أن كل نقطة منه تتحرك بشكل معقد بحيث تدور وتنتقل بنفس الوقت ولايتحرك على مسار القذيفة القطعي الذي وجدناه في الفصل الثالث. لكن لو أمعنا النظر في الشكل (6-2) لرأينا نقطة معينة من

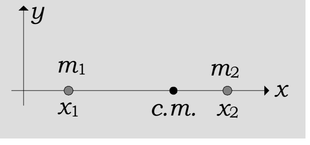


الشكل (6-2)

الجسم، C، تتحرك فعلا على مسار قطع مكافئ، وكأنها جسم يطير تحت تاثير الجاذبية. نطلق على هذه النقطة اسم **مركز الكتلة** *(center of mass)* والتي تبدو وكأن كل الجسم متجمع عندها وخاضعة لمحصلة القوى المؤثرة عليه. وسندرس في هذا الفصل كيف نحدد موضع مركز كتلة مجموعة نقاط صغيرة أو جسم كبير ثم نستخلص المعادلات التي تحدد كيف يتحرك هذا المركز وتطبيقاتها على حركة منظومة كبيرة.

2-6 مركز كتلة جسيمين نقطيين

نقول إن لدينا جسيم نقطي (أي صغير جدا) إذا كانت أبعاده من طول وعرض وارتفاع صغيرة جدا بالمقارنة مع بعده عنا، كالنجوم التي نراها في السماء التي نعتبرها نقاطا مضيئة لكنها في الواقع أكبر من أرضنا بملايين المرات. لنعتبر إذا جسيمين نقطيين (أي أن المسافة بينهما كبيرة جدا بالمقارنة مع أبعاد أي منهما) m_1 وm_2 في الموضعين x_1 و x_2 على محور السينات، على الترتيب، بالنسبة لمراقب موجود عند نقطة المبدأ، كما في الشكل (6-3). عندئذ نعرف مركز كتلة هذين الجسيمين بالنسبة لهذا المراقب بالعلاقة:



الشكل(6-3)

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) \qquad (1\text{-}6)$$

حيث وضعنا الكتلة الكلية $M = m_1 + m_2$.

مثل 1-6

أين يقع مركز كتلة جسيمين نقطيين m_1=1 kg و m_2=4 kg يبعدان عن بعضهما 3m؟

الحل: نعتبر الخط الواصل بين الجسيمين محور السينات، كما نضع نقطة المبدأ (أي موضع المراقب الذي يحدد مركز كتلتهما) عند m_1 مثلا، فيصير إحداثي الجسيم الأول x_1=0 والثاني x_2=3 m. ثم نستخدم العلاقة (6-1) ونكتب:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2\ \text{kg})(0) + (4\ \text{kg})(3\ \text{m})}{6\ \text{kg}} = 2\ \text{m}$$

فمركز الكتلة يبعد 2 m عن الجسيم m_1.

3-6 مركز كتلة عدة جسيمات

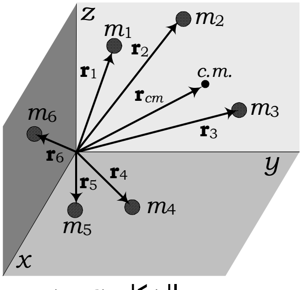
يمكن تعميم العلاقة (6-1) لتحديد موضع عدة جسيمات m_1 و m_2 و... m_3، موجودة في الفضاء عند المواضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ ... ، على الترتيب، كما في الشكل (6-4).

عندئذ نجد مركز الكتلة من العلاقة:

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \tag{2-6}$$

وبأخذ مركبات العلاقة الأخيرة على المحاور ox و oy و oz نجد مركبات موضع مركز الكتلة:

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned} \tag{3-6}$$



الشكل (6-4)

مثل 6-2

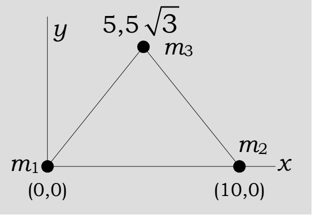
جد مركز كتلة التوزع الآتي: m_1=1 kg عند (1,2,2) وm_2=0.5 kg عند (0,2,1) وm_3=2 kg عند (−1,0,0) و m_4=1.5 kg عند (2, −1, −2).

الحل: باستعمال العلاقات (6-3) نكتب:

$$x_{c.m.} = \frac{1((1) + 0.5(0) + 2(-1) + 1.5(2)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = 0.4\ \text{m}$$
$$y_{c.m.} = \frac{1((2) + 0.5(2) + 2(0) + 1.5(-1)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = 0.3\ \text{m}$$
$$z_{c.m.} = \frac{1((2) + 0.5(1) + 2(0) + 1.5(-2)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = -0.1\ \text{m}$$

مثل 3-6

جد موضع مركز كتلة ثلاث كتل m_1=1 kg وm_2=2 kg وm_3=3 kg موضوعة على رأس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 10 cm، كما في الشكل (5-6).



الشكل (5-6)

الحل: لنختر المحورين ox وoy، كما في الشكل (5-6)، فتكون إحداثيات الكتل هي (0,0) و (10,0) و$(5,5\sqrt{3})$.

وباستعمال العلاقات (3-6) نكتب:

$$x_{c.m.} = \frac{1(0)+2(10)+3(5)}{1+2+3} = 5.8 \text{ cm}$$

$$y_{c.m.} = \frac{1(0)+2(0)+3(5\sqrt{3})}{1+2+3} = 4.3 \text{ cm}$$

ويجدر التنويه إلى أن **موقع مركز الكتلة لايعتمد على طريقة اختيارنا للمحاور الإحداثية**، بل على نوع وتوزع الجسيمات المؤلفة للنظام المدروس فقط. ففي المثال السابق سيبقى موضع مركز الكتلة نفسه سواء اخترنا المحاور بالطريقة أعلاه أو غيرها، ويبقى بعده عن الخط الواصل بين الكتلتين m_1 و m_2 (أي $y_{c.m.}$) مساويا إلى 4.3 cm دوما.

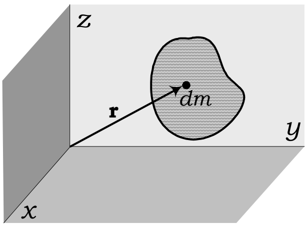
4-6 مركز كتلة جسم صلب، الكثافة *(density)*

تتألف الأجسام الصلبة من عدد كبير من الجسيمات بحيث يمكن اعتبارها توزعا مستمرا للكتلة الكلية M للجسم على حجمه الكلي V. ولذلك لتحديد موضع مركز كتلة الجسم في هذه الحالة نعتبره مجموعةمن الجسيمات الصغيرة جدا Δm_i يتحدد موضع كل منها بمتجه $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$، ومن ثم نجد موضع الكتلة بالعلاقات التقريبية التالية:

$$\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)x_i \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)y_i \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)z_i \end{cases} \qquad (4\text{-}6)$$

وتعتبر العلاقات المذكورة تقريبية لأن كل كتلة عنصرية Δm_i تحتل حجما صغيرا في الجسم الصلب، بينما يحدد المتجه $\mathbf{r}_i$ موضع نقطة واحدة منه وليس موضع كل نقاطه. فإذا أردنا جعل

العلاقات (4-6) أكثر دقة وجب علينا جعل الكتلة العنصرية Δm_i أصغر مايمكن بحيث يمكن اعتبارها نقطية نرمز لها عندئذ بـ dm، كما في الشكل (6-6)، ممايجعل عددها كبيرا جدا ويتناهى المجموع في العلاقات (4-6) إلى تكامل من الشكل:



الشكل (6-6)

$$\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \lim\limits_{\Delta m_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} (\Delta m_i) x_i = \dfrac{1}{M} \int\limits_V x dm \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \lim\limits_{\Delta m_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} (\Delta m_i) y_i = \dfrac{1}{M} \int\limits_V y dm \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \lim\limits_{\Delta m_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} (\Delta m_i) z_i = \dfrac{1}{M} \int\limits_V z dm \end{cases} \quad (5\text{-}6)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقات بالاستفادة من مفهوم الكثافة إذ تختلف الأجسام الصلبة عن بعضها بحسب نوعها. فهناك عناصر ثقيلة وأخرى خفيفة ومايميزها عن بعضها هو كثافتها التي نعرفها بكمية الكتلة الموجودة في واحدة الحجم، أي

$$\boxed{\rho = \frac{M}{V}} \quad (6\text{-}6)$$

وإذا كان الجسم مركب من عناصر مختلفة أو بتوزع غير متجانس عندئذ نعرف كثافة كتلة عنصرية Δm بالشكل:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (7\text{-}6)$$

وإذا كانت Δm صغيرة جدا عندئذ يصير حجمها ΔV صغيرا جدا أيضا وتؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (8\text{-}6)$$

وبالتعويض عن dm في العلاقات (5-6) تصير إحداثيات مركز الكتلة معطاة بالشكل:

$$\boxed{\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \int\limits_V \rho x dV \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \int\limits_V \rho y dV \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M} \int\limits_V \rho z dV \end{cases}} \quad (9\text{-}6)$$

فتحديد موضع مركز كتلة جسم صلب ليس سهلا بل قد يكون غاية في التعقيد لأنه يعتمد على شكل الجسم وكيفية توزع الكتلة فيه. لذا نكتفي في هذا الكتاب بالأجسام ذات الكثافة المنتظمة وفق العلاقة (6-6) فقط، ويمكن البرهان عندئذ أن **مركز كتلة جسم متجانس ينطبق على مركزه الهندسي**. فإذا كان لدينا كرة صلبة متجانسة فإن مركز كتلتها يقع في مركزها الهندسي. بينما لو كانت غير متجانسة، أي مؤلفة من عناصر مختلفة عندئذ من المحتمل أن لايقع مركز كتلتها في مركزها الهندسي بالضرورة.

5-6 حركة مركز الكتلة

سندرس في هذه الفقرة كيف يتغير موضع مركز كتلة منظومة عندما تتحرك أجزاؤها تحت تأثير قوى مختلفة. فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من عدد من الجسيمات m_1 و m_2 وm_3 .. و m_n متواجدة عند $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و$\mathbf{r}_3$ .. و$\mathbf{r}_n$، على الترتيب. عندئذ نكتب متجه موضع مركز الكتلة بكتابة العلاقة (2-6) بالشكل:

$$M\mathbf{R}_{c.m.} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n \tag{10-6}$$

وباشتقاق طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$M\frac{d\mathbf{R}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

حيث نلاحظ أن $d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{v}_i$ سرعة الجسيم i، كما أن $d\mathbf{R}_{c.m.}/dt = \mathbf{V}_{c.m.}$ هي سرعة مركز الكتلة. ولذا نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\boxed{M\mathbf{V}_{c.m.} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n} \tag{11-6}$$

وتربط هذه النتيجة بين سرعة مركز كتلة منظومة والأجزاء المؤلفة لها.

وبنفس الشكل نجد تسارع مركز الكتلة باشتقاق (6-11):

$$M\frac{d\mathbf{V}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

ولكن $d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{a}_i$ هو تسارع الجسيم i، كما أن $d\mathbf{V}_{c.m.}/dt = \mathbf{a}_{c.m.}$ تسارع مركز الكتلة، فيكون:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \cdots + m_n\mathbf{a}_n \tag{12-6}$$

لنبحث الآن عن الطريقة التي يتحرك بها مركز الكتلة عندما تخضع أجزاؤها لقوى مختلفة. فنلاحظ أن الحد $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ يمثل محصلة القوى المؤثرة على الجسيم i من الجسيمات الأخرى والقوى الخارجية عن المنظومة. ولذلك نكتب (6-12) بالشكل:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_{ext})_T \tag{13-6}$$

حيث تمثل $(\mathbf{F}_{ext})_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة، بينما نعتبر محصلة القوى المتبادلة بين أجزائها تساوي الصفر بحسب قانون نيوتن الثالث في الفعل ورد الفعل. ومن ثم نكتب قانون نيوتن الثاني لحركة مركز الكتلة من (6-13):

$$\boxed{(\mathbf{F}_{ext})_T = M\mathbf{a}_{c.m.}} \tag{14-6}$$

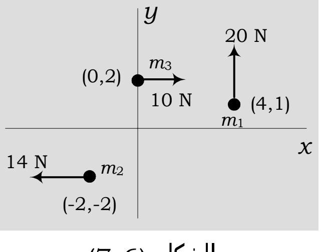
أي أن مركز الكتلة يتحرك وكأنه جسم حقيقي كتلته تساوي كتلة النظام كله ويخضع لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه. إلا أنه يجب الانتباه إلى أن مركز الكتلة ليس إلا مفهوم نظري فقط ولايمثل جسما حقيقيا بحد ذاته. ولو نظرنا لحلقة مفرغة تطير في الهواء مثلا لرأينا أن مركز كتلتها الذي يقع في مركزها الهندسي عبارة عن نقطة في الفراغ ولايوجد هناك شئ مادي، لكننا نقول إن الحلقة تتحرك في الهواء **وكأنها كتلة صغيرة موجودة في ذلك المركز**. ولو نظرنا للمنظومة المؤلفة من الأرض والقمر مثلا للاحظنا أن الأرض تخضع لجذب القمر والشمس وبقية الكواكب في المجموعة الشمسية. وكذلك فإن القمر يخضع لجذب الأرض والشمس وبقية الكواكب. لكن لو اعتبرنا حركة المنظومة المؤلفة من الأرض والقمر معا وتتبعنا حركة مركز كتلتهما للاحظنا أن محصلة القوى عليهما هي قوى جذب الشمس وبقية الكواكب والتي هي قوى خارجية عن هذه المنظومة. أما قوى التجاذب بينهما فمحصلتها الصفر لأنها متساوية ومتعاكسة بين الأرض والقمر.

مثل 4-6

تتحرك الكتل الثلاث m_1=1 kg و m_2=2 kg و m_3=3 kg الموضحة في الشكل (6-7) بدءا من السكون تحت تأثير القوى المبينة. ماموضع وتسارع مركز الكتلة لحظة البداية؟

الحل: نحدد موضع مركز الكتلة لحظة البدء بكتابة:

$$\mathbf{r}_{c.m.} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3)$$



الشكل (6-7)

وبأخذ مركبات العلاقة السابقة على ox و oy نجد:

$$x_{c.m.} = \tfrac{1}{6}[1(4)+2(0)+3(-2)] = -0.33\ \text{m}$$
$$y_{\text{c.m.}} = \tfrac{1}{6}[1(1)+2(2)+3(-2)] = -0.17\ \text{m}$$

كما نكتب تسارع مركز الكتلة بكتابة:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

ونأخذ مركباتها أيضا:

$$6a_x = 0 + 10 - 14 = -4 \;\Rightarrow\; a_x = -0.67\ \text{m/s}^2$$
$$6a_y = 20 + 0 - 0 = 20 \;\Rightarrow\; a_y = 3.33\ \text{m/s}^2$$

فتصير قيمة التسارع:

$$a_{c.m.} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3.40\ \text{m/s}^2$$

ونحدد اتجاهه بالزاوية θ التي يصنعها مع محور السينات:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = -5 \;\Rightarrow\; \theta \approx -79°$$

6-6 الزخم الخطي *(Linear Momentum)*

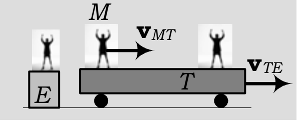
لنفترض أنك تلعب مع صديقك في الشارع عندما ترى سيارة تتجه نحوك بسرعة ما بنفس الوقت الذي يقذف صديقك كرة باتجاهك بنفس السرعة. فأيهما ستقرر أن تلتقط ياترى؟ لاشك بأنك تبتعد عن السيارة بسبب كتلتها الكبيرة بالمقارنة مع الكرة ولو أن لهما نفس السرعة. وماذا يحدث لو استبدلنا رصاصة صغيرة جدا لكن سرعتها كبيرة بدلا من السيارة. أيضا ستقرر الابتعاد عنها لأنها سريعة جدا. نلاحظ إذا أن المهم في العملية ليست كتلة الجسم المتحرك أو سرعته فقط بل كلاهما. وقد اصطلح على تعريف كمية فيزيائية تحويهما تسمى **الزخم الخطي** للتعبير عن تأثير شئ ما على غيره. وهذه الكلمة العربية جميلة وتفي بالغرض تماما لأنها تعبر فعلا عما نقصده منها. فعندما تسمع أن نشاطا ما له زخم عال فإنك تستنتج مباشرة أنه مجدي وفعال. فإذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك بسرعة $\mathbf{v}$ فإننا نعرف زخمه الخطي بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}} \qquad (15\text{-}6)$$

وقد كان من الشائع استعمال **كمية التحرك** *(quantity of motion)* لكن المصطلح العلمي العالمي المتفق عليه الآن لـ **p** هو الزخم الخطي. ونلاحظ من العلاقة السابقة أن الزخم الخطي كمية متجهة ووحدته kg.m/s. كما يعتمد، مثل السرعة، على المراقب الذي يدرس حركة الجسم، أي على منظومة المحاور الإحداثية التي تتحدد السرعة بالنسبة لها، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 6-5

يسير قطار بسرعة 10 m/s على سكة مستقيمة. ما الزخم الخطي لراكب كتلته 60 kg يركض داخل القطار بسرعة 2 m/s بالنسبة لراكب ساكن فيه ومودع يقف على رصيف المحطة، كما في الشكل (6-8)؟



الشكل(6-8)

الحل: يوضح الشكل(6-8) المتحرك داخل القطار ومراقبيه A وB حيث افترضنا أن الشخص يركض بنفس اتجاه حركة القطار. ونكتب الزخم الخطي للرجل بشكل عام $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ حيث نلاحظ أن سرعته بالنسبة للراكب في القطار v_{MT} هي v_{MT}=2 m/s، ويصير زخمه الخطي:

$$P_{MT} = mv_{MT} = (60\,\text{kg})(2\,\text{m/s}) = 120\,\text{kg.m/s}$$

أما الزخم الخطي للراكب بالنسبة لمودع على رصيف المحطة فنجده من سرعته بالنسبة للقطار v_{MT} وسرعة القطار بالنسبة للأرض v_{TE}، ونكتب:

$$v_{ME} = v_{MT} + v_{TE} = 2 + 10 = 12\ \text{m/s}$$

فيصير الزخم:

$$p_{ME} = (60\,\text{kg})(12\,\text{m/s}) = 720\,\text{kg.m/s}$$

6-7 الشكل العام لقانون نيوتن الثاني

عرفنا الزخم الخطي في الفقرة السابقة بالعلاقة:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

وباشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

وبفرض أن الكتلة m ثابتة يكون:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

لكن $m\mathbf{a}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم $(\mathbf{F}_{ext})_T$، لذا يصير مشتق الزخم الخطي هو:

$$\boxed{(\mathbf{F}_{ext})_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt}} \qquad (16\text{-}6)$$

فمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على جسم تساوي معدل تغير زخمه الخطي بالنسبة للزمن. هذا هو **الشكل العام لقانون نيوتن الثاني.**

ويمكن تعميم العلاقة السابقة على منظومة مؤلفة من عدة جسيمات أو جسم صلب حيث نشتق العلاقة(6-2) فنجد:

$$M\frac{d\mathbf{R}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

وبتعويض

$$\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i / dt \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{p}_i = m_i d\mathbf{r}_i / dt$$

و

$$\mathbf{V}_{c.m.} = d\mathbf{R}_{c.m.} / dt \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{P}_{c.m.} = M d\mathbf{R}_{c.m.} / dt$$

نجد

$$\boxed{\mathbf{P}_{c.m.} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n} \qquad (17\text{-}6)$$

فالزخم الخطي لمركز الكتلة يساوي الزخم الخطي الكلي للمنظومة.

ونحصل على الشكل العام لقانون نيوتن الثاني للمنظومة باشتقاق (6-17) بالنسبة للزمن فنجد:

$$\frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\mathbf{p}_n}{dt}$$

لكن $\mathbf{F}_i = d\mathbf{p}_i / dt$ يمثل محصلة القوى (الداخلية والخارجية) المؤثرة على الجسيم i لذا تؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$$

وبحسب قانون نيوتن الثالث فإن محصلة القوى الداخلية المتبادلة بين جسيمات المنظومة تساوي الصفر، ولذلك تصير محصلة القوى $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$ هي القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة فقط $(\mathbf{F}_{ext})_T$، وتؤول (6-26) إلى الشكل:

$$\boxed{(\mathbf{F}_{ext})_T = \frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt}} \qquad (17\text{-}6)$$

فمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على منظومة جسيمات تساوي معدل تغير الزخم الخطي لمركز الكتلة بالنسبة للزمن. هذا هو **الشكل العام لقانون نيوتن الثاني لمنظومة جسيمات** (أو جسم صلب).

8-6 مبدأ حفظ الزخم الخطي

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على منظومة مساوية للصفر خلال فترة معينة من الزمن فإننا نجد من (6-17) أن:

$$(\mathbf{F}_{ext})_T = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{P}_{c.m.} = \text{ثابت} \qquad (18\text{-}6)$$

ونستنتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة على منظومة تساوي الصفر فإن الزخم الخطي لمركز الكتلة، أي الزخم الخطي الكلي، لايتغير خلال هذه الفترة. يطلق على هذه النتيجة اسم **مبدأ حفظ الزخم الخطي** *(conservation of linear momentum)*.

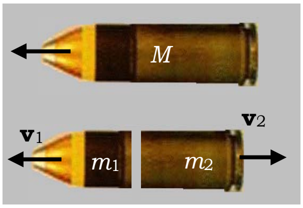
وتكمن أهمية هذا المبدأ عندما يتغير الزخم الخطي لجزء من منظومة خاضعة لمحصلة قوى مساوية للصفر، إذ يجب أن يتغير الزخم الخطي لأجزاء أخرى منها حتى يبقى الزخم الخطي الكلي ثابت.

كما نلاحظ أن المعادلة (6-18) هي علاقة متجهة بمعنى أنه إذا كانت لمحصلة القوى على محور ما مركبة مساوية للصفر فإن مركبة الزخم الخطي الكلي على ذلك المحور لاتتغير، أي أن:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{ext})_{Tx} = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; (P_{c.m.})_x = \text{ثابت} \\ (\mathbf{F}_{ext})_{Ty} = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; (P_{c.m.})_y = \text{ثابت} \\ (\mathbf{F}_{ext})_{Tz} = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; (P_{c.m.})_z = \text{ثابت} \end{aligned} \qquad (19\text{-}6)$$

ولابأس من الإشارة إلى أن مبدأ حفظ الزخم الخطي صحيح في حالة مراقب ثابت بالنسبة للجسم أو المنظومة المدروسة طالما بقيت محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها مساوية للصفر. فقد يقرر عدة مراقبين قيما مختلفة للزخم الخطي لجسم، كل بحسب سرعة الجسم بالنسبة له، لكنهم يقررون جميعا أن هذا الزخم لايتغير (بالنسبة لكل واحد منهم) طالما بقيت القوى الخارجية معدومة.

مثل 6-6



الشكل (8-6)

يتحرك جسم كتلته 8 kg على خط مستقيم بسرعة 2 m/s دون أن تؤثر عليه أي قوة عندما ينشطر لقسمين كتلة إحداهما 3 kg ويتحرك بسرعة 6 m/s بنفس اتجاه الحركة الأصلية للجسم، كما في الشكل (8-6). ماسرعة القسم الثاني واتجاهه؟

الحل: بما أن الجسم لم يكن خاضعا لأي قوة خارجية قبل الانشطار، وخلال الانشطار يؤثر كل قسم على الآخر بقوة مساوية ومعاكسة للقوة التي يخضع لها منه، كما في الشكل (8-6)، وفق قانون نيوتن الثالث، فتبقى محصلة القوى معدومة. ولذلك يكون الزخم الخطي للمنظومة ثابتا ونكتب:

$$\mathbf{P}(\text{قبل الانشطار}) = \mathbf{P}(\text{بعد الانشطار})$$

حيث

$$\mathbf{P}(\text{قبل الانشطار}) = M\mathbf{v}$$

و

$$\mathbf{P}(\text{بعد الانشطار}) = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

ومن ثم نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$M\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

أي أن

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{m_2}(M\mathbf{v} - m_2\mathbf{v}_2)$$

وباعتبار الاتجاه الموجب مع السرعة الأصلية للجسم $\mathbf{v}$، نجد:

$$v_2 = -0.4\,\mathrm{m/s}$$

فسيتحرك القسم الثاني بالاتجاه السالب أي بعكس الحركة الأصلية للجسم.

مثل 7-6

يبدأ رجل كتلته 70 kg بالسير بسرعة 1 m/s على عربة ساكنة كتلتها 1000 kg، بالنسبة لرصيف المحطة، ويتوقف بعد قطع مسافة 10 m على العربة. كيف تتحرك العربة وما المسافة التي تقطعها بالنسبة للرجل وبالنسبة لرصيف المحطة؟ ماذا يحدث بعد أن يتوقف الرجل؟

الحل: نعتبر الرجل والعربة منظومة واحدة فنلاحظ أن زخمها الخطي الكلي قبل أن يسير الرجل على العربة يساوي الصفر. وخلال حركته يكون:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

حيث m_1 و$\mathbf{v}_1$ وm_2 و$\mathbf{v}_2$ كتلة وسرعة الرجل وكتلة وسرعة العربة بالنسبة لرصيف المحطة (مراقب ثابت)، على الترتيب.

الآن إذا أهملنا الاحتكاك بين العربة والأرض فإن محصلة القوى على المنظومة قبل وبعد حركة الرجل تساوي الصفر لأن لكل من وزن الرجل والعربة رد فعل. أما خلال حركة الرجل فإنه يدفعها بقدمه للخلف بقوة الاحتكاك فتدفعه للأمام بقوة مساوية ومعاكسة (قانون نيوتن الثالث) بحيث أن محصلة هاتين القوتين تساوي الصفر. لهذا يكون الزخم الخطي الكلي للمنظومة ثابتا ونكتب:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$$

أي أن:

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_1$$

فالعربة تتحرك بعكس اتجاه حركة الرجل بسرعة قيمتها

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = 0.07\,\mathrm{m/s}$$

الآن: لحساب المسافة التي ستقطعها العربة نحسب الزمن الذي يستغرقه الرجل لقطع مسافة 10 m عليها. فنلاحظ أن سرعته بالنسبة للعربة $\mathbf{v}$ هي:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

وبتعويض v_1 وv_2 نجد:

$$v = (1 + m_1/m_2)v_1 = 1.01\,\mathrm{m/s}$$

ومن ثم نجد الزمن اللازم للرجل ليقطع مسافة 10 m على العربة هو:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = s/v = 9.90\,\mathrm{s}$$

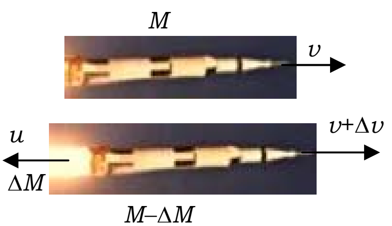
ولذلك تكون المسافة التي تتحركها العربة على الأرض تساوي:

$$s' = v_2 t = (0.07\,\mathrm{m/s})(9.90\,\mathrm{s}) = 0.70\,\mathrm{m}$$

أما المسافة التي تقطعها العربة بالنسبة للرجل الذي تحرك عليها فتساوي مسافته هو أي $10\,\mathrm{m}$.
أخيرا، عندما يتوقف الرجل تتوقف العربة أيضا ليبقى الزخم الخطي محفوظا ومساويا للصفر.

9-6 الكتلة المتغيرة وحركة الصواريخ (اختياري)

افترضنا في دراستنا حتى الآن أن الكتلة الكلية للجسم أو المنظومة المتحركة لاتتغير، أما في حركة الصواريخ فإن احتراق الوقود بشكل مستمر يؤدي لتناقص كتلة الصاروخ وتغير زخمه. ونربط في هذه الفقرة بين سرعةالصاروخ وسرعة خروج الوقود منه ومعدل تغير زخمه.



الشكل(9-6)

فإذا اعتبرنا صاروخا كتلته الكلية مع وقوده في لحظة ما t هي M ويسير في الفضاء الخارجي بعيدا عن أي مجال جاذبية بسرعة v عندما تعمل محركاته لتنطلق منه كمية من الوقود ΔM بسرعة u بالنسبة للصاروخ خلال زمن Δt، كما في الشكل (9-6)، لتصير كتلة الصاروخ الجديدة $(M - \Delta M)$ وسرعته $(v + \Delta v)$.

وبما أن النظام معزول عن أي مؤثر خارجي عندما يكون بعيدا عن مجال الجاذبية وأي قوى أخرى لذا يبقى زخمه ثابتا ونكتب:

$$Mv = (M - \Delta M)(v + \Delta v) + (\Delta M)v'$$

حيث v' سرعة خروج الوقود بالنسبة لمراقب ثابت لايتحرك مع الصاروخ. وبإصلاح المعادلة السابقة نجد:

$$\Delta M(v - v') = M\Delta v \qquad (20\text{-}6)$$

حيث أهملنا الحد $\Delta M \Delta v$ لصغره بالمقارنة مع بقية الحدود. وبما أن سرعة خروج الوقود بالنسبة لمراقب خارجي v' تساوي سرعة الوقود بالنسبة للصاروخ u بالإضافة لسرعة الصاروخ بالنسبة للمراقب الخارجي $v + \Delta v$ (مع أخذ الاتجاهات بعين الاعتبار)، أي أن:

$$v' = (v + \Delta v) - u$$

لذا تصير العلاقة (20-6):

$$\Delta M u = M\Delta v$$

وبتقسيم طرفي العلاقة الأخيرة على Δt وأخذ نهاية النسبة عندما $\Delta t \to 0$ نجد:

$$\boxed{u\frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}} \qquad (21\text{-}6)$$

تسمى هذه العلاقة **معادلة الصاروخ الأولى**.

ونكتب العلاقة الأخيرة بشكل مختلف قليلا بوضع $R = dM/dt$ التي تمثل معدل استهلاك الوقود في الصاروخ، كما نضع $a = dv/dt$ تسارع الصاروخ، فنجد:

$$Ru = Ma \qquad (22\text{-}6)$$

حيث نلاحظ أن الكمية Ru لاترتبط بحركة الصاروخ من سرعة وتسارع بل على تصميمه فقط الذي يتم بحيث ينطلق منه الوقود بمعدل وسرعة معينين.

واذا نطلق على Ru اسم **النفث** *(thrust)* ويرمز له بـ T . ومن ثم تصير (22-6) على النحو:

$$T = Ma \qquad (23\text{-}6)$$

أي أن حاصل ضرب كتلة الصاروخ بتسارعه ثابت ويساوي نفثه.

ويمكن معرفة مقدار تغير سرعة الصاروخ عندما تتغير كتلته من M_1 إلى M_2 من (21-6) فنكتب:

$$u\frac{dM}{M} = dv$$

وبمكاملة هذه المعادلة نجد:

$$\boxed{v_2 - v_1 = u\ln\frac{M_1}{M_2}} \qquad (24\text{-}6)$$

تسمى هذه العلاقة **معادلة الصاروخ الثانية**.

وتفسر النتيجة الأخيرة سبب استخدام الصواريخ ذات المراحل المتعددة إذ يتم التخلص من كل مرحلة بعد استهلاك ماتحويه من وقود فيكتسب الصاروخ سرعة أكبر بتكلفة أقل ويحتفظ بقمرة القيادة فقط في آخر مرحلة من الرحلة.

مثل 8-6

يندفع الوقود من صاروخ كتلته في لحظة معينة 450×10^3 kg بمعدل $R=1.2\times10^3$ kg/s وسرعة 2800 m/s بالنسبة للصاروخ. مانفث الصاروخ وما تسارعه في تلك اللحظة؟

الحل: لحساب نفث الصاروخ نكتب:

$$T = Ru = (1.2\times10^{3}\ \text{kg/s})(2800\ \text{m/s}) = 3.36\times10^{6}\ \text{N}$$

ونجد تسارع الصاروخ الابتدائي بوضع:

$$T = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T}{M} = 7.47\ \text{m/s}^2$$

ملخص الفصل

مركز كتلة مجموع جسيمات	$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{r}_i$
مركز كتلة جسم صلب	$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{1}{M}\int \rho \mathbf{r}\, dV$
الزخم الخطي لجسم	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
الزخم الخطي لمركز كتلة عدة جسيمات	$\mathbf{P}_T = \sum \mathbf{p}_i$
الشكل العام لقانون نيوتن الثاني	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
مبدأ حفظ الزخم الخطي	$\mathbf{F}_T = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T =$ ثابت
معادلة الصاروخ الأولى	$u\frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}$
معادلة الصاروخ الثانية	$v_2 - v_1 = u \ln\frac{M_1}{M_2}$

تمارين ومسائل

مركز الكتلة

1-6 أين يقع مركز كتلة ثلاث كتل قيمة كل واحدة 2.5 kg موجودة على رؤوس مثلث قائم الزاوية طول ضلعيه 2 m و1.5 m؟

2-6 أين يقع مركز كتلة نظام مؤلف من ثلاث كتل متوزعة كما يلي m_1=1 kg في الموضع (0,0) و m_2=1 kg عند (3,0) و m_3=2 kg عند (3,4)؟

3-6 أين يقع مركز كتلة نظام مؤلف من كتلتين m_1=73 kg وm_2=59 kg بينهما مسافة 3.6 m؟

4-6 أين يقع مركز كتلة قطعة معدنية منتظمة على شكل حرف L طول ضلعها الأول 2.5 cm والثاني 3.5 cm إذا أهملنا سمك وعرض أضلاعها؟

5-6 أين يقع مركز كتلة الأرض والقمر إذا كانت المسافة بينهما 3.8×10^{8} m؟

6-6 برهن أن نسبة بعدي جسمين عن مركز كتلتهما تتناسب عكسا مع نسبة كتلتيهما؟

7-6 تنقل طوافة منتظمة ومتجانسة كتلتها 7400 kg طولها 40 m وعرضها 20 m سيارات عبر قناة مائية فتحتل ثلاث سيارات كتلة الواحدة 1400 kg ثلاث زوايا. أين يقع مركز الكتلة؟

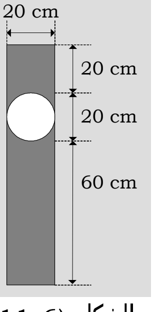
8-6 أين يقع مركز كتلة ثلاثة سطوح متجاورة من مكعب متجانس طول ضلعه L؟

9-6 أين يقع مركز كتلة سطحين متجاورين من مكعب طول ضلعه L إذا كانت كتلة أحدهما ضعف كتلة الآخر؟

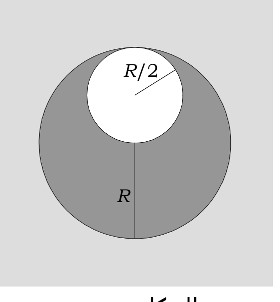
10-6 أين يقع مركز كتلة ثلاثة قضبان متجاورة منتظمة ومتماثلة تشكل حرف U؟

11-6 أين يقع مركز كتلة الجسم المتجانس الموضح بالشكل (6-10)؟

12-6 أين يقع مركز كتلة الكرة الموضحة بالشكل (6-11)؟



الشكل (6-11)

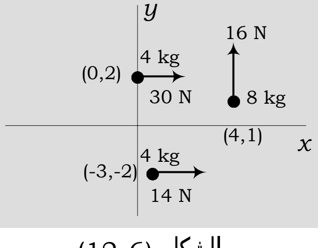


الشكل (6-12)

حركة مركز الكتلة

13-6 يقترب بروتون طاقته 1.6×10^{-13} J من بروتون آخر ساكن. ماسرعة مركز كتلتهما ؟

14-6 ماتسارع مركزكتلة النظام الموضح بالشكل (6-12) إذا خضعت الكتل إلى القوى المبينة إزاء كل واحدة؟



الشكل (6-12)

15-6 ما الزخم الخطي لكتلتين $m_2=m_1=35$ kg تتحركان بسرعتين $\mathbf{v}_1=12\mathbf{i}-\mathbf{j}$ m/s و$\mathbf{v}_2=-20\mathbf{i}+14\mathbf{j}$ m/s؟

16-6 تتجاذب كتلتان $m_1=0.1$ kg و $m_2=0.3$ kg بدءا من السكون بقوتين متساويتين ومتعاكستين قيمة الواحدة 0.01 N.

(أ) ماتسارع مركز الكتلة؟ (ب) مابعد m_1 عن وضعها الابتدائي عندما تصطدم بـ m_2 إذا كانت المسافة بينهما 1 m؟

الزخم الخطي

17-6 ماذا يجب أن تكون سرعة سيارة اقتصادية كتلتها 816 kg حتى يكون لها نفس زخم سيارة فخمة كتلتها 2650 kg وسرعتها 16 km/h؟

18-6 ماتغير زخم جسم كتلته 1 kg خاضع لقوة متغيرة $\mathbf{F}=26\mathbf{i}-12t^2\mathbf{j}$ N بين اللحظتين $t_1=1$ s و $t_2=3$ s؟

19-6 تصطدم كرة كتلتها 145 g وتسير بسرعة 30 m/s على محور السينات الأفقي بحائط مائل بحيث تصنع معه زاوية 45° فترتد عنه بنفس السرعة على محور الصادات الشاقولي. ماتغير زخمها الخطي؟

20-6 تسير شاحنة كتلتها 20,000 kg شمالا بسرعة 40 km/h ثم شرقا بسرعة 50 km/h. (أ) ماتغير زخمها الخطي؟ (ب) ماتغير طاقتها الحركية؟

حفظ الزخم الخطي

21-6 يركل رجل ساكن كتلته 80 kg حجرا كتلته 0.5 kg فيتحرك الأخير بسرعة 2 m/s للأمام. كيف يتحرك الرجل؟

22-6 يطلق مدفع رشاش عشر قذائف بالثانية كتلة الواحدة 50 g وسرعتها 500 m/s باتجاه حائط كبير ثابت بحيث تتوقف القذائف فيه. (أ) مازخم وطاقة حركة كل قذيفة؟ (ب) مامتوسط القوة التي تؤثر بها القذائف على الحائط بالثانية؟

23-6 تتعرض قطعة خشب كتلتها 10 kg لوابل رصاصات كتلة الواحدة 40 g وسرعتها 1km/s. ماسرعة الخشبة بعد أن تستقر بها 15 رصاصة إذا كانت تتحرك على سطح أملس؟

24-6 يمسك رجل مدفعا رشاشا بقوة 180 N ويطلق قذائف كتلة الواحدة 50 g بسرعة 100 m/s. ما أكبر عدد من القذائف يمكنه أن يطلق بالثانية؟

25-6 تشع نواة ساكنة كتلتها 5.8×10^{-26} kg بإصدار إلكترون زخمه الخطي 1.2×10^{-22} kg.m/s ونيوترينو زخمه الخطي 6.4×10^{-23} kg.m/s بحيث يتحرك الإثنان بسرعتين متعامدتين. ما الزخم الخطي للنواة المرتدة وما طاقتها الحركية؟

26-6 يتحرك جسم كتلته 8 kg بسرعة 2 m/s على خط مستقيم دون أو تؤثر عليه أي قوة خارجية عندما ينشطر لقسمين متساويين بالكتلة ويتحركان على نفس الخط. ماسرعة كل قسم إذا اكتسبا طاقة حركية 16 J نتيجة الانشطار؟

27-6 يقف متزلجان كتلة الأول 50 kg والثاني 70 kg على ارض جليدية ملساء وعلى بعد 8 m من بعضهما. (أ) أين يقع مركز كتلتهما بالنسبة للمتزلج الأخف؟ (ب) ما المسافة الفاصلة بينهما

إذا أمسك الأثقل بحبل يمسكه الثاني وجذبه فتحرك الأخير مسافة 2.2 m؟ (ج) ما المسافة التي يقطعها الأثقل إلى أن يصطدم بزميله؟

28-6 ترتبط كتلتان متساويتان m_2=m_1=0.5 kg ببعضهما بواسطة خيط خفيف وبكرة ملساء نصف قطرها 0.5 m، كما في آلة آتوود، بحيث تكونان ساكنتين على نفس الارتفاع. (أ) أين يقع مركز كتلتهما؟ (ب) أين يصير هذا المركز إذا نقلنا 20 g من واحدة للأخرى وكيف يتحرك؟

29-6 يتعلق رجل كتلته m بحبل مدلى من منطاد ساكن كتلته M ويبدأ بالتسلق للأعلى بسرعة v بالنسبة للمنطاد. (أ) في أي اتجاه سيتحرك المنطاد بالنسبة للأرض؟ (ب) ماذا يحدث عندما يتوقف الرجل؟

30-6 تنطلق رصاصة كتلتها 15 g بسرعة 650 m/s من بندقية ساكنة كتلتها 10 kg. ماسرعة ارتداد البندقية؟

31-6 يقفز أسد كتلته 120 kg بسرعة أفقية 12 m/s على صياد يحمل بندقية تطلق رصاصات كتلة الواحدة 15 g وسرعتها 630 m/s. كم رصاصة يجب أن يطلقها الصياد لإيقاف الأسد بفرض أن جميع رصاصاته تصيب الأخير وتستقر بجسمه؟

32-6 تصطدم سيارتان رأسيا كتلة الأولى 700 kg والثانية 1500 kg وتسيران باتجاهين متعاكسين بسرعة 65 km/h فتصبحا قطعة واحدة. ماسرعة الحطام؟

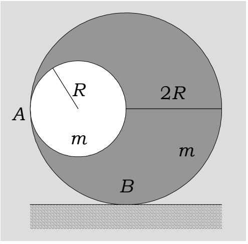
33-6 تتحرك سفينة فضاء بسرعة 4000 km/h بالنسبة للأرض عندما ينفصل عنها خزان الوقود بسرعة 80 km/h بالنسبة لقمرة القيادة بالاتجاه الخلفي. ماسرعة القمرة بعد الانفصال إذا كانت كتلتها ربع كتلة الخزان؟

34-6 يقف رجل وزنه w على عربة وزنها W تتحرك على خط أفقي بسرعة v_0 لليمين. ماتغير سرعة العربة عندما يسير الرجل لليسار بسرعة v_{rel} بالنسبة لها قبل أن يقفز عند نهايتها؟

35-6 هل تكتسب العربة المذكورة في المسألة السابقة سرعة أكبر بدءاً من السكون لو ركض عليها n شخص بنفس السرعة بشكل تتابعي أم جماعي؟

36-6 يقف طفل كتلته 20 kg عند الطرف البعيد لزورق ساكن كتلته 50 kg وطوله 5 m ويبعد 10 m عن الشاطئ. (أ) مابعد الطفل عن الشاطئ؟ (ب) ماذا يصير هذا البعد إذا سار الطفل 2 m على الزورق باتجاه الشاطئ؟ (أهمل الاحتكاك).

37-6 يقف رجل كتلته 80 kg عند مؤخرة زورق جليدي كتلته 400 kg وطوله 18 m يتحرك بسرعة 4 m/s عبر منطقة جليدية ملساء. كيف يتحرك الزورق إذا سار الرجل لمقدمته بسرعة 2 m/s بالنسبة له؟



الشكل(6-13)

38-6 يجلس الطالب ذكي على بعد 3 m من الطالب ناجح في زورق ساكن كتلته 30 kg على سطح بحيرة ساكنة بحيث يقع مركز كتلة الزورق بينهما. وعندما يتبادلا مكانيهما يلاحظ ذكي أن الزورق تحرك 0.4 m بالنسبة للشاطئ فاستطاع معرفة كتلة زميله ناجح. ماكتلة الأخير إذا كانت كتلة ذكي 80 kg؟ **39-6** تطلق قذيفة بسرعة 500 m/s من سطح الأرض صانعة زاوية 60° مع الأفق. وبعد 50 s من إطلاقها تنشطر لجزئين متساويين أحدهما ساكن بعد الانشطار مباشرة ليسقط للأسفل. مابعد مكان سقوط الجزء الثاني عن نقطة الإطلاق؟

40-6 تتدحرج كرة كتلتها m ونصف قطرها R داخل كرة كبيرة مجوفة لها نفس الكتلة ونصف قطرها $2R$ موضوعة على سطح افقي أملس بدءا من النقطة A، كما في الشكل (6-13)، لتستقر عند B. ما المسافة التي يتحركها مركز كتلة الكرة الكبيرة وفي أي اتجاه.

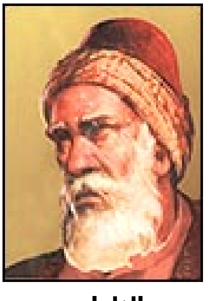
حركة الصواريخ والكتلة المتغيرة

41-6 تطلق مركبة فضائية كتلتها 6000 kg للأعلى. (أ) ماكتلة الوقود الخارج منها بالثانية إذا كان ينطلق منها بسرعة 1000 m/s بالنسبة لها حتى يتغلب نفثها على وزنها؟ (ب) كم تصير هذه الكتلة إذا أردنا إعطاء المركبة تسارعا رأسيا $20\ m/s^2$؟ لاحظ أن للجاذبية دور مهم في هذه المسألة.

42-6 تشغل محركات مركبة فضائية كتلتها مع وقودها 2.6×10^5 kg ساكنة في الفضاء فيخرج منها الوقود بمعدل 480 kg/s بسرعة 3.3 km/s بالنسبة للمركبة لمدة 20 s. مانفث المحركات وما السرعة النهائية التي تصل إليها المركبة؟

43-6 تطير طائرة بسرعة 180 m/s بينما يخرج منها الوقود بسرعة 490 m/s بالنسبة لها. مانفث المحركات إذا كان معدل استهلاك الوقود هو 3 kg/s؟

من علماء الإسلام


الفارابي

محمد بن محمد بن طرخان بن أوزلغ، أبو نصر **الفارابي** (339-257هـ/950-870م). من أكبر فلاسفة المسلمين درس الفلسفة والمنطق والطب العلوم اللسانية العربية والموسيقي وكانت له إسهامات مهمة في علوم أخرى كالرياضيات والطب والفيزياء. فقد برهن في الفيزياء على وجود الفراغ. وتتجلى أهم إسهاماته العلمية في كتابه "إحصاء العلوم" الذي وضع فيه المبادئ الأساس للعلوم وتصنيفها وبرز في الموسيقى. وكان أول من طرح فكرة اللوغارتم لتقدير شدة الصوت واختلاف الأصوات عن بعضها.

الفصل السابع

التصادمات

(Collisions)

1-7 تمهيد

وجدنا في الفصل الرابع أن حركة جسم حر ستبقى كما هي من سكون أو سرعة ثابتة بالقيمة والاتجاه ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تكسبه تسارعا يؤدي لتغيير متجه سرعته، أي تغيير زخمه الخطي. ولهذا نستنتج أنه إذا تغير الزخم الخطي لجسم فإن قوة ما قد أثرت عليه. ولو عرفنا معدل تغير هذا الزخم بالنسبة للزمن لأمكن معرفة القوة التي سببت ذلك. فإذا قذفنا كرة باتجاه حائط فإنها سترتد نتيجة ارتطامها به مما يعني أن الحائط أثر عليها بقوة معينة يمكن معرفة قيمتها واتجاهها لو استطعنا حساب معدل تغير الزخم الخطي للكرة. وكذلك لو اقترب جسيم نووي (بروتون أو نيوترون مثلا) من نواة ثقيلة فإنه يتسارع أو يتباطأ وينحرف عن مساره أو يتشتت، فيتغير زخمه الخطي بسبب القوى النووية بينه وبين النواة. ويمكن معرفة تفاصيل هذه القوى بدراسة تغير زخم هذا الجسيم.

وتتميز التصادمات أنها بسيطة من حيث القوانين التي تتحكم بها إلا أنها توفر معلومات هامة عن طبيعة الأجسام المتصادمة وتركيب المواد المؤلفة لها ومايمكن أن ينتج عن التصادم من توليد أو امتصاص للطاقة. لذلك سندرس في هذا الفصل كيف يصطدم جسمان ببعضهما والقوى التي تؤثر على كل منهما خلال ذلك، وكيف تتغير حركة كل جسم نتيجة التصادم. كما نعرف قوى الدفع ونربطها بتغير الزخم الخطي للجسم ومبدأ حفظ الزخم الخطي. ونركز على ظاهرة تصادم جسمين على خط مستقيم أو في مستو لأهميتها في الفيزياء وتطبيقاتها المتعددة.

2-7 دفع القوة والزخم *(Impulse & Momentum)*

لنفترض أن لدينا جسما كتلته m يخضع لقوة $\mathbf{F}$ لفترة زمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ عندئذ نكتب قانون نيوتن الثاني:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (1\text{-}7)$$

حيث $\mathbf{p}$ الزخم الخطي للجسم. وبضرب طرفي المعادلة بـ dt نحصل على:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$$

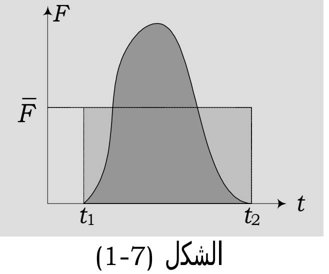
وبمكاملة هذه المعادلة من t_1 إلى t_2 نجد:

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt} \qquad (2\text{-}7)$$

حيث يسمى تغير الزخم $\mathbf{J} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ **دفع القوة** ووحدته في النظام الدولي N.s أو kg.m/s.

وتكمن أهمية الدفع وقوى الدفع، التي تؤثر على جسم ما لفترة زمنية قصيرة نسبيا خلال التصادمات، أنها تؤدي لتغيير مسار الجسم وتشتيته عن مساره الأصلي. ويستفاد من هذا بشكل أساس في الفيزياء الذرية والنووية لدراسة تركيب الذرة والنواة أو معرفة طبيعة المواد المركبة.

ولابأس من التنويه إلى أن كلمة تصادم لاتعني بالضرورة أن يتلامس الجسمان المتصادمان ببعضهما تماما بل يكفي أن يؤثر كل منهما على الآخر بحيث يتغير مسار أحدهما أو كلاهما لنقول إن حادثة تصادم قد تمت فعلا. ومن أفضل الأمثلة على ذلك انحراف بروتون عن مساره عند اقترابه من نواة موجبة الشحنة نتيجة تأثره بقوة كولوم الكهربائية. فنلاحظ في هذه الحالة أن البروتون لايلمس النواة على الإطلاق بل ينحرف عن مساره ويبتعد عنها ومع ذلك نسمي هذه العملية تصادما.



الشكل (1-7)

ومما لاشك فيه أن معرفة طبيعة القوى التي يخضع لها جسم خلال فترة التصادم ليس سهلا لأن هذه القوة تتغير مع الزمن خلال تلك الفترة، إذ أنها تكون مساوية للصفر عندما يكون الجسمان على بعد كبير من بعضهما وتزداد باضطراد لتصل لقيمة عظمى عندما يصيران أقرب مايمكن وتتناقص بعد ذلك تدريجيا مع تباعدهما مرة أخرى. ويمكن تمثيل تغيرات قوة الدفع بيانيا كما هو موضح بالشكل (1-7)، حيث نلاحظ أنه يمكن تقدير متوسط قوة الدفع $\overline{F}$ لتصير المساحة تحت المنحني، أي

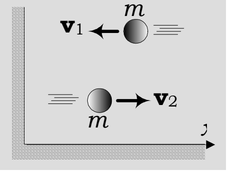
التكامل المعطى بالعلاقة (7-2)، مساوية لـ $\overline{F}\Delta t$ الذي يعادل مساحة المستطيل الموضح. وهذا مقبول عمليا لأن زمن تأثير القوة الفعال Δt صغير نسبيا، وعندها نكتب الدفع بالشكل:

$$J = \overline{F}\Delta t \tag{3-7}$$

مثال 7-1

تصطدم كرة كتلتها 0.4 kg تسير أفقيا بسرعة 30 m/s بحائط وترتد عنه بسرعة 20 m/s. ما القوة التي أثر بها الحائط على الكرة ومتوسط القوة المتبادلة بينهما إذا كان زمن التماس 0.1 s؟

الحل: يعطي هذا المثل دليلا جيدا على كيفية تغير قوة الدفع التي يتعرض لها جسم خلال عملية التصادم. إذ أنها تساوي الصفر قبل وصول الكرة للحائط ثم تزداد تدريجيا لتصل لقيمة عظمى عندما يصير التماس بينهما أكبر مايمكن، ثم تتناقص تدريجيا لتعود للصفر عندما ينتهي التماس تماما.



الشكل (7-2)

ونوضح في الشكل (7-2) حركة الكرة قبل وبعد التصادم ونعتبر الاتجاه الموجب لمحور السينات بالاتجاه النهائي لحركتها، ومن ثم نكتب الزخم قبل وبعد التصادم:

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1 = (0.4\,\mathrm{kg})(-30\,\mathrm{m/s})\mathbf{i} = (-12\,\mathrm{kg.m/s})\,\mathbf{i}$$

و

$$\mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_2 = (0.4\,\mathrm{kg})(20\,\mathrm{m/s})\mathbf{i} = (8\,\mathrm{kg.m/s})\,\mathbf{i}$$

ويصير الدفع مساويا إلى:

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (20\,\mathrm{kg.m/s})\,\mathbf{i}$$

ونحسب متوسط قوة الدفع من (7-3) مباشرة فنجد:

$$J = \overline{F}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{20\,\mathrm{kg.m/s}}{0.1\,\mathrm{s}} = 200\,\mathrm{N}$$

وبالطبع فإن $\overline{F}$ تتجه بنفس اتجاه الدفع J أي باتجاه محور السينات الموجب.

3-7 التصادمات وحفظ الزخم الخطي

ندرس في هذه الفقرة حادثة تصادم بين جسيمات صغيرة بحيث يمكن إهمال أوزانها بالمقارنة مع قوى الدفع التي تتعرض لها خلال التصادم. وهذا مقبول عمليا لأن أغلب التصادمات التي تهمنا تتعلق بالإلكترونات والجسيمات النووية الخفيفة جدا، لكننا نتكلم عن كرات وغيرها هنا لأنها أقرب للتصور الحياتي اليومي.

فنفترض أن لدينا جسيمين m_1 وm_2 يتحركان بسرعتين $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$، على الترتيب، فيصطدمان ببعضهما بحيث يؤثر أحدهما على الآخر بقوة دفع $\overline{\mathbf{F}}_{12}$ تساوي وتعاكس القوة $\overline{\mathbf{F}}_{21}$ التي يؤثر بها الجسيم الثاني عليه، فتصير سرعتيهما بعد التصادم $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ ، على الترتيب. ونكتب:

$$\overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21}$$

حيث:

$$\overline{\mathbf{F}}_{21} = \frac{\Delta \mathbf{P}_1}{\Delta t}$$

و

$$\overline{\mathbf{F}}_{12} = \frac{\Delta \mathbf{P}_2}{\Delta t}$$

فيكون:

$$\Delta \mathbf{P}_1 = -\Delta \mathbf{P}_2$$

ومنه:

$$\Delta \mathbf{P}_1 + \Delta \mathbf{P}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = 0$$

أي أن:

$$\mathbf{P}_T\,(\text{بعد التصادم}) = \mathbf{P}_T\,(\text{قبل التصادم}) \qquad (4\text{-}7)$$

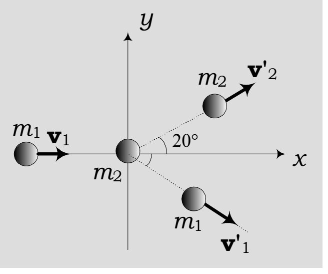
فالزخم الخطي الكلي للجسيمين لايتغير نتيجة التصادم. وهذا هو **مبدأ حفظ الزخم الخطي** الذي نعيد كتابته بدلالة كتلتي وسرعتي الجسمين قبل وبعد التصادم مباشرة بالشكل:

$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2} \qquad (5\text{-}7)$$

ومن المهم الانتباه إلى أن الزخم الخطي الكلي يبقى محفوظا خلال عملية التصادم فقط حيث تكون محصلة القوى معدومة، أما قبل التصادم أو بعده بفترة ما فيمكن أن تتحرك الأجسام تحت تأثير قوى خارجية مختلفة.

مثل 2-7

يصطدم جسم كتلته 4 kg يتحرك على محور السينات بسرعة 10 m/s بجسم مماثل ساكن فيتحرك الأخير بنصف سرعة الأول باتجاه °20 مع محور السينات. ما السرعة النهائية للأول؟



الشكل(3-7)

الحل: هذا المثل يعطي إحدى احتمالات التصادمات النووية مثل تشتت رزرفورد الذي سنذكره لاحقا. ونوضح في الشكل (3-7) حادثة التصادم، إذ يمكن حساب السرعة النهائية للجسم الأول مباشرة من العلاقة (5-7) حيث نكتب:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$

أي أن:

$$\mathbf{v}_1' = \frac{1}{m_1}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 - m_2\mathbf{v}_2')$$

وبتحليل هذه العلاقة على محوري السينات والصادات نجد:

$$\upsilon_{1x}' = (m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} - m_2\upsilon_{2x}')/m_1$$

و

$$\upsilon_{1y}' = (m_1\upsilon_{1y} + m_2\upsilon_{2y} - m_2\upsilon_{2y}')/m_1$$

حيث:

$$\upsilon_{1x} = 10\,\mathrm{m/s},\quad \upsilon_{1y} = 0$$

و

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_{2y} = 0,\ \upsilon_{2x}' = 5\cos20° = 4.70\ \mathrm{m/s},\ \upsilon_{2y}' = 5\sin20° = 1.71\ \mathrm{m/s}$$

وبتعويض هذه القيم وملاحظة أن m_1=m_2 نجد:

$$\upsilon_{1x}' = \upsilon_{1x} + \upsilon_{2x} - \upsilon_{2x}' = 10 + 0 - 4.70 = 5.30\ \mathrm{m/s}$$

و

$$\upsilon_{1y}' = \upsilon_{1y} + \upsilon_{2y} - \upsilon_{2y}' = 0 + 0 - 1.71 = -1.71\ \mathrm{m/s}$$

فقيمة السرعة النهائية للجسم الأول هي:

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_{1x}'^2 + \upsilon_{1x}'^2} = \sqrt{(5.30)^2 + (-1.71)^2} = 5.57\ \mathrm{m/s}$$

و اتجاهها مع محور السينات هو:

$$\tan\theta = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{-1.71}{5.30} = -0.32 \quad \Rightarrow \quad \theta = -17.9^\circ$$

فالجسم يتحرك تحت محور السينات بزاوية 18° تقريبا.

4-7 التصادمات المرنة وغير المرنة *(elastic & inelastic collisions)*

وجدنا في الفقرة السابقة أن الزخم الخطي الكلي يبقى ثابت في عملية التصادم. ويمكن الاستفادة من الطاقة الحركية للأجسام المتصادمة لتصنيف التصادمات إلى نوعين:

أ- التصادمات المرنة *(elastic collisions)*

وهي التصادمات التي تبقى فيها الطاقة الحركية الكلية للأجسام المتصادمة ثابتة دوما، ولايتغير عددها أو نوعها. ونكتب في حالة تصادم جسمين فقط:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (6\text{-}7)$$

ب- التصادمات غير المرنة *(inelastic collisions)*

وهي التصادمات التي تتغير فيها الطاقة الحركية الكلية للأجسام المتصادمة، كما يمكن أن يتغير عدد ونوع الأجسام المتصادمة. ونكتب في حالة تصادم جسمين فقط:

$$[\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2] - [\tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2] = Q \qquad (7\text{-}7)$$

حيث Q كمية الطاقة الناتجة أو اللازم إعطاؤها للأجسام المتصادمة حتى يمكن للتصادم أن يتم. فإذا كانت $Q > 0$ فإن بعض الطاقة الأصلية للجسمين المتصادمين تتحرر ونقول إن التصادم **مصدر للطاقة**. أما إذا كانت $Q < 0$ فيجب عندئذ تزويد أحد الجسمين المتصادمين أو كلاهما بهذه الطاقة حتى يصير التصادم ممكنا، ونقول عندئذ إن التصادم **ماص للطاقة**.

وتصنف التصادمات غير المرنة لصنفين:

1- التصادمات غير المرنة جزئيا *(partially inelastic collisions)*

وهي التصادمات التي يبقى فيها عدد الأجسام ثابت، سواء تغير نوعها أم لا، مع تغير الطاقة الحركية الكلية للمنظومة. فيمكن أن يصطدم بروتون بنواة هيدروجين ثقيل (^3H) (تريتيوم) فينتج

بروتون وتريتيوم، أو نيوترون وهيليوم (^4He)، مع تغير في الطاقة في كلا الحالتين، ونسمي التصادم غير مرن جزئيا.

2- التصادمات غير المرنة كليا *(totally inelastic collisions)*

وهي التصادمات التي يتغير فيها عدد الأجسام المتصادمة فيمكن أن يزيد كما في الانشطار *(fission)* حيث ينقسم جسم لجسمين أو أكثر، أو يتناقص، كما في الاندماج *(fusion)* حيث يلتحم جسمان عادة لتشكيل جسم واحد.

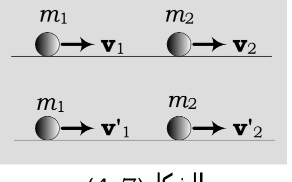
ونعيد التذكير بأنه وفي كلا النوعين من التصادمات (المرنة وغير المرنة) فإن الزخم الخطي الكلي لايتغير.

5-7 التصادمات المرنة على خط مستقيم

نعتبر في هذه الفقرة تصادما مرنا بين جسمين m_1 و m_2 يتحركان على خط مستقيم بسرعتين v_1 و v_2، على الترتيب، عندما يصطدما ببعضهما فتتحول سرعتاهما إلى v'_1 و v'_2، على الترتيب أيضا. عندئذ نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي (7-5):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

حيث نستغني عن استخدام المتجهات ونفترض أن الجسمين يتحركان بنفس الاتجاه طوال الوقت، كما في الشكل (7-4)، ولو كان أحدهما يتحرك قبل أو بعد التصادم بالاتجاه المعاكس عندئذ نغير إشارة سرعته في العلاقة السابقة.



الشكل(7-4)

ونظرا لأن التصادم مرن نستخدم المعادلة (7-6) ونكتب:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

وبحل المعادلتين السابقتين يمكن إيجاد سرعتي الجسمين المتصادمين بعد التصادم v'_1 و v'_2.

ونعطي فيما يلي نتيجة الحل ونترك للقارئ التحقق من صحة ذلك:

$$\boxed{\begin{aligned} v'_1 &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2 \\ v'_2 &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2 \end{aligned}} \tag{8-7}$$

مثل 3-7

يصطدم جسيم ألفا α، اصطداما مرنا على خط مستقيم بنواة ذرة ذهب ساكنة. مامعدل الطاقة التي يخسرها α بالمقارنة مع طاقته الابتدائية، إذا كانت $m_\alpha=4$ و$m_{Au}=197$ وحدة ذرية؟

الحل: نستخدم مبدأ حفظ الزخم الخطي ونكتب:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

ولأن التصادم مرن نكتب:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد:

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \left(\frac{4-197}{4+197}\right) v_1 = -0.96 v_1$$

و

$$v_2' = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \left(\frac{8}{4+197}\right) v_1 = -0.04 v_1$$

ثم نحسب الطاقة الحركية النهائية لـ α فنجد:

$$K' = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \tfrac{1}{2} m_1 (-0.96 v_1)^2 = (0.92)(\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2) = 0.92 K_1$$

فالطاقة الحركية النهائية لألفا تساوي 0.92 من طاقتها الابتدائية، بينما تأخذ نواة ذرة الذهب الـ 0.08 الباقية منها.

6-7 سرعة التقارب والتباعد النسبية ومعامل الارتداد

(relative speed of approach and separation and coefficient of restitution)

إذا افترضنا أن لدينا جسمان m_1 و m_2 يتحركان بسرعتين $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بالنسبة لمراقب ثابت، عندئذ نسمي $|v_2 - v_1|$ **السرعة النسبية** بينهما، أي سرعة الأول بالنسبة للثاني أو سرعة الثاني بالنسبة للأول. وسنستفيد من هذه الكمية في حالة التصادم المرن على خط مستقيم بين جسمين حيث نجد من معادلة حفظ الطاقة:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

أن

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2)$$

ومنه

$$m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2(v_2 + v_2')(v_2 - v_2') \qquad (9\text{-}7)$$

كما نكتب من حفظ الزخم الخطي:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

أو

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2 - v_2') \qquad (10\text{-}7)$$

لذلك نجد من (9-7) و (10-7) أن:

$$(v_1 + v_1') = (v_2 + v_2')$$

أي أن:

$$\boxed{(v_1 - v_2) = (v_1' - v_2')} \qquad (11\text{-}7)$$

فسرعة التقارب النسبية $(v_1 - v_2)$ قبل التصادم تساوي سرعة التباعد النسبية $(v_1' - v_2')$ بعد التصادم. ويستفاد من هذه النتيجة المهمة لحل الكثير من مسائل التصادم المرن لجسمين على خط مستقيم.

أما لو كان التصادم غير مرن عندئذ نعرف **معامل الارتداد** *(coefficient of restitution)* بنسبة سرعة التباعد النسبية لسرعة التقارب النسبية، أي:

$$\boxed{e = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}} \qquad (12\text{-}7)$$

حيث نستنتج مباشرة أن $e=1$ في حالة التصادم المرن بينما يختلف عن ذلك في الحالات الأخرى.

7-7 حالات خاصة في التصادمات المرنة على خط مستقيم

1- اصطدام جسم صغير بآخر أكبر منه بكثير $(m_2 >> m_1)$

إذا كانت $m_2 >> m_1$ عندئذ نكتب العلاقتين (8-7) على النحو:

$$v_1' = \left(\frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1}\right) v_1 + \left(\frac{2}{m_1/m_2 + 1}\right) v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1}\right) v_1 + \left(\frac{1 - m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1}\right) v_2$$

حيث نلاحظ أن$m_1/m_2 <<1$ ولذلك يمكن إهمال هذا الحد بالمقارنة مع الواحد لتؤول العلاقتان السابقتان إلى:

$$\begin{cases} v_1' = -v_1 + 2v_2 \\ v_2' = v_2 \end{cases} \tag{13-7}$$

فالجسم الكبير m_2 يتابع حركته بنفس السرعة غير متأثر بالصغير، وهذا منطقي تماما، بينما تتغير سرعة الجسم الصغير بشكل كبير. ولو كان الجسم الكبير ساكنا قبل التصادم، أي أن $v_2=0$، عندئذ نجد:

$$\begin{cases} v_1' = -v_1 \\ v_2' = 0 \end{cases} \tag{14-7}$$

فسيبقى الجسم الكبير ساكنا بينما يرتد الصغير للخلف تماما بنفس سرعته الابتدائية، وهذه نتيجة طبيعية وتحقق مانتوقعه عندما تصطدم كرة بسيارة ساكنة حيث ترتد الأولى للخلف وتبقى السيارة في مكانها!

2- اصطدام جسم كبير بآخر أصغر منه بكثير $(m_1 >> m_2)$

إذا كانت $m_1 >> m_2$ عندئذ نكتب العلاقتين (7-8) على النحو:

$$v_1' = \left(\frac{1 - m_2/m_1}{m_2/m_1 + 1}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2/m_1}{m_2/m_1 + 1}\right)v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2}{m_2/m_1 + 1}\right)v_1 + \left(\frac{m_2/m_1 - 1}{m_2/m_1 + 1}\right)v_2$$

حيث نلاحظ أن$m_2/m_1 << 1$ ولذلك يمكن إهمال هذا الحد بالمقارنة مع الواحد لتؤول العلاقتان السابقتان إلى:

$$\begin{cases} v_1' = v_1 \\ v_2' = 2v_1 \end{cases} \tag{15-7}$$

فيتابع الجسم الكبير m_1 حركته بنفس السرعة غير متأثر بوجود الصغير m_2، بينما يندفع الأخير بسرعة مساوية لضعف سرعة الجسم الذي صدمه. وهذه أيضا نتيجة طبيعية لما نتوقعه عندما تصدم سيارة كرة ساكنة مثلا حيث تتابع السيارة حركتها لكن الكرة تندفع بضعف سرعة السيارة!

3- اصطدام جسمين متساويين بالكتلة $(m_1=m_2)$

إذا كانت $m_1=m_2$ عندئذ تؤول العلاقتان (7-8) مباشرة إلى:

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = v_1 \end{cases} \qquad (16\text{-}7)$$

أي يتبادل الجسمان سرعتيهما نتيجة التصادم المرن بينهما!

مثل 7-4

تخترق رصاصة كتلتها $10\ \mathrm{g}$ وسرعتها $150\ \mathrm{m/s}$ قطعة خشبية كتلتها $500\ \mathrm{g}$ معلقة بالسقف بواسطة حبل خفيف طوله $1\ \mathrm{m}$، بحيث تستقر الرصاصة فيها وتتحرك الإثنتان معا كبندول بسيط لترتفعا مسافة عظمى h، كما في الشكل (7-5). (أ) ما الطاقة الضائعة في هذا التصادم؟ (ب) ما الارتفاع h؟

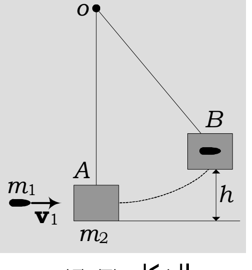
الحل: يوضح هذا المثال التصادم غير المرن كليا حيث يلتحم الجسمان ببعضهما نتيجة التصادم. وسنرى كيف أن هناك طاقة ضائعة بالضرورة في هذه الحالة.

(أ) نبدأ بالتصادم بين الرصاصة والخشبة ونكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v'$$

فنجد:

$$v' = 2{,}9\ \mathrm{m/s}$$



الشكل (7-5)

وبحساب الطاقة الحركية للرصاصة قبل التصادم نجد:

$$K_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = 112.5\ \mathrm{J}$$

بينما تصير الطاقة الحركية للنظام بعد التصادم:

$$K' = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = 2.2\ \mathrm{J}$$

فالطاقة الضائعة نتيجة التصادم:

$$Q = K_1 - K' = 110.3\ \mathrm{J}$$

(ب) لحساب الارتفاع الذي يصل إليه البندول القذفي بعد التصادم نستخدم مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية ونكتب:

$$E_A = E_B$$

حيث:

$$E_A = K' = 2.2 \text{ J}$$

و

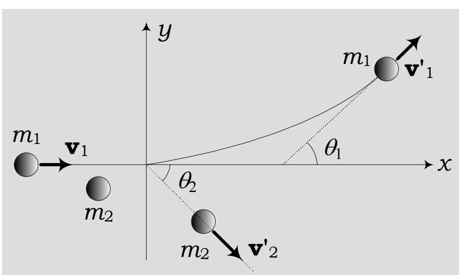
$$E_B = (m_1 + m_2)gh \approx 5h$$

أي أن:

$$h = 0.4 \text{ m}$$

8-7 التصادمات في المستوي وتشتت رزرفورد

هناك نوع هام جدا من التصادمات التي تتم تحت تأثير القوى الطبيعية كالجاذبية وقوة كولوم الكهربائية، حيث يقترب جسم أول (صغير عادة) من جسم كبير ساكن، فينحرف الأول عن مساره لتأثره بقوة تجاذب أو تنافر ناتجة عن الآخر الذي يرتد بعض الشئ (أو يبقى ساكن عمليا). وقد استخدم الفيزيائي **أرنست رزرفورد** *(Ernst Rutherford 1837-1937)* هذه الظاهرة لدراسة طبيعة الذرة بقذف صفيحة ذهبية رقيقة بحزمة جسيمات ألفا فوجد أن بعضها قد انحرف عن مساره بزوايا كبيرة، مما يعني أن كل واحدة منها واجهت جسما أكبر منها ومن الإلكترونات المحيطة بالنواة. فاستنتج رزرفورد أن كتلة الذرة الفعلية وشحنتها الموجبة متجمعة في مركزها، ليظهر النموذج النووي للذرة.



الشكل (7-6)

وتتم هذه الحادثة بحيث تبقى حركة كل من القذيفة α والهدف (نواة الذرة) في نفس المستوي لذا تسمى تصادما في مستو أو **تصادم جانبي** *(glancing collisions)*، بينما نسمي التصادمات التي تبقى على نفس الخط **تصادمات رأسية** *(head-on collisions)*.

لدراسة هذه الظاهرة نعتبر تصادما جانبيا بين جسم m_1 يتحرك بسرعة $\mathbf{v}_1$ وآخر m_2 ساكن، ليتحركا بعد التصادم بسرعتين v_1' و v_1'، على الترتيب، كما في الشكل (7-6).

فنكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$$

ونأخذ مركبتي هذه العلاقة على المحورين ox وoy فنجد:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1 + m_2 v_2' \cos\theta_2 \qquad (17\text{-}7)$$

و

$$0 = m_1 v_1' \sin\theta_1 - m_2 v_2' \sin\theta_2 \qquad (18\text{-}7)$$

وإذا كان التصادم مرنا عندئذ نكتب من معادلة حفظ الطاقة الحركية:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (19\text{-}7)$$

وهذه هي العلاقات التي يمكن استخدامها لمعرفة سرعة واتجاه كل جسم بعد التصادم، أي أن هناك أربعة مجاهيل بينما لايوجد إلا ثلاث معادلات. لذا من الضروري تحديد أحد هذه المجاهيل، كسرعة أحد الجسمين أو اتجاهه بعد التصادم، حتى يمكن إيجاد الحل الكامل للمسألة، كما هو مبين في المثل التالي.

مثل 7-5

يصطدم جسم α سرعته 2.0×10^{7} m/s بنواة ذهب ساكنة فيتشتت عن مساره بزاوية $30°$ بالنسبة لاتجاه الحركة الأصلي. ماسرعة كل جسم بعد التصادم بفرض أن كتلة الذهب تعادل 50 كتلة α تقريبا؟

الحل: نعتبر α الجسم الأول في الشكل (7-6) ونواة الذهب الجسم الثاني، وعندئذ نكتب من العلاقتين (7-17) و(7-18):

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1 + m_2 v_2' \cos\theta_2 \;\Rightarrow\; 2\times10^{7} = v_1' \cos 30° + 50 v_2' \cos\theta_2$$

و

$$0 = m_1 v_1' \sin\theta_1 - m_2 v_2' \sin\theta_2 \;\Rightarrow\; 0 = v_1' \sin 30° - 50 v_2' \sin\theta_2$$

كما نكتب من معادلة الطاقة:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \;\Rightarrow\; 4\times10^{14} = v_1'^2 + 50 v_2'^2$$

وبحل المعادلات الثلاث بالنسبة لكل من θ_2 وv_1' و v_2' نجد:

$$v_2' \approx 0.02\times10^{7}\ \text{m/s} \text{ و } v_1' \approx 1.9\times10^{7}\ \text{m/s} \text{ و } \theta_2 \approx 72°$$

مثل 7-6

تصطدم كرة كتلتها m اصطداما رأسيا مرنا بأخرى ساكنة فترتد عنها للخلف بسرعة تساوي ثلث سرعتها الأصلية. ما كتلة الكرة الثانية؟

الحل: نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$

كما أن التصادم مرن، أي أن:

$$\tfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$$

وبتعويض

$$\mathbf{v}_1' = -\tfrac{1}{3}\mathbf{v}_1$$

في العلاقتين السابقتين نجد:

$$\mathbf{v}_2' = \frac{4m_1}{3m_2}\mathbf{v}_1$$

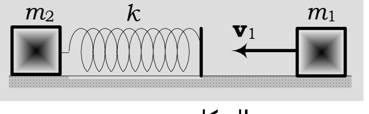
و

$$\upsilon_2'^2 = \frac{8m_1}{9m_2}\upsilon_1^2$$

أي أن:

$$m_2 = 2m_1$$

مثل 7-7



الشكل (7-7)

تتحرك كتلة m_1=3.5 kg على طاولة أفقية ملساء بسرعة 8 m/s باتجاه كتلة ثانية m_2=6 kg ساكنة يرتبط بها زنبرك ثابته 750 N/m بحيث يمكن أن ينضغط عند اصطدام m_1 به، كما في الشكل (7-7). ما السرعة النهائية للجسمين الملتصقين بعد التصادم وما أكبر مسافة سينضغطها الزنبرك؟

الحل: بما أن الكتلتين ستلتصقان ببعضهما تماما لفترة زمنية معينة بسبب الزنبرك بينهما، لذا فالتصادم غير مرن كليا ونستخدم حفظ الزخم الخطي فقط فنكتب:

$$m_1\mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}'$$

فنجد سرعة الجسمين بعد التصادم:

$$\upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = 2.9 \text{ m/s}$$

ولحساب أكبر مسافة ينضغطها الزنبرك نكتب أن الطاقة الضائعة في التصادم ستتخزن به عند انضغاطه، أي أن:

$$E_1 - E_2 = \tfrac{1}{2}kx^2$$

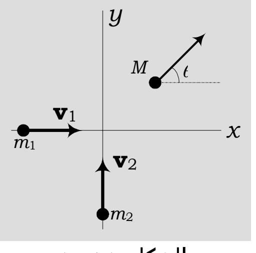
حيث
$$E_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = 112 \text{ J}$$

و
$$E_2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = 41.3 \text{ J}$$

ومن ثم نجد:
$$x = 43.4 \text{ m}$$

مثل 7-7 اصطدام غير مرن كليا في مستو

تصطدم كتلتان m_1=80 kg سرعتها 6 km/h و m_2=50 kg سرعتها 8 km/h عمودية على الأولى، اصطداما غير مرن كليا لتلتحما وتصيرا جسما واحدا، كما في الشكل(7-8). ما الطاقة الضائعة في هذا التصادم؟



الشكل (7-8)

الحل: نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:
$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}'$$

ونأخذ مركبتي هذه العلاقة على ox و oy الموضحين بالشكل (7-8) فنجد:
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \cos\theta$$

و
$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \sin\theta$$

كما نلاحظ أن:
$$\tan\theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \approx 0.8$$

فنستنتج من هذه المعادلات أن:
$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)\cos\theta} \approx 4.8 \text{ km/h}$$

لذلك نحسب الطاقة الضائعة في التصادم بحساب الفرق بين الطاقة قبله وبعده، حيث:
$$K_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}(80\,\text{kg})(6\,\text{km/h})^2 + \tfrac{1}{2}(50\,\text{kg})(8\,\text{km/h})^2 = 235 \text{ J}$$

و
$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = \tfrac{1}{2}(130\,\text{kg})(4.8\,\text{km/h})^2 = 116 \text{ J}$$

فالطاقة الضائعة هي:
$$\Delta K = K_2 - K_1 = -119 \text{ J}$$

ملخص الفصل	
الدفع	$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{P} = \int \mathbf{F}\Delta t$
متوسط قوة الدفع	$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$
مبدأ حفظ الزخم الخطي	$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} =$ ثابت
حفظ الزخم الخطي لجسيمين	$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2$
التصادمات المرنة:	الطاقة الحركية الكلية ثابتة قبل وبعد التصادم
التصادمات غير المرنة جزئيا:	تتغير الطاقة الحركية ويبقى عدد الأجسام ثابت
التصادمات غير المرنة كليا	تتغير الطاقة الحركية وعدد الأجسام المتصادمة
معامل الارتداد	$e = \lvert \upsilon'_2 - \upsilon'_1 \rvert / \lvert \upsilon_2 - \upsilon_1 \rvert$

تمارين ومسائل

الدفع وقوة الدفع

1-7 تصطدم كرة تنس كتلتها 60 g وسرعتها 65 m/s بمضرب لاعب وتبقى ملامسة له مدة 0.03 s فترتد للخلف بنفس السرعة. مامتوسط القوة المؤثرة على الكرة؟

2-7 يصطدم جسم كتلته 0.2 kg وسرعته 30 m/s بحائط ويرتد للخلف بسرعة 50 m/s. ماتغير زخمه الخطي ودفع القوة المؤثرة عليه خلال تماسه مع الحائط؟

3-7 تخترق رصاصة كتلتها 50 g وسرعتها 400 m/s قطعة خشبية ساكنة فتقطع داخلها مسافة 10 cm لتقف. (أ) ماتسارع الرصاصة بفرض أن القوة المؤثرة عليها داخل الخشبة ثابتة؟ (ب) مامتوسط هذه القوة؟ (ج) مازمن تأثير القوة؟ (د) ما دفع القوة؟

4-7 تصطدم كرة كتلتها m وسرعتها v بحائط صانعة معه زاوية $45°$ فترتد بنفس السرعة والزاوية. مادفع القوة التي أثرت بها الكرة على الحائط؟

5-7 يدفع رائد فضاء كتلته مع لباسه 150 kg بقدميه على مركبته الفضائية ليسبح في الفضاء بسرعة 2.5 m/s. (أ) ما التغير في سرعة المركبة إذا كانت كتلتها 2200 kg؟ (ب) مامتوسط القوة التي أثر بها رائد الفضاء على المركبة إذا كان زمن التلامس بينهما 0.4 s؟ (ج) ما الطاقة الحركية لكليهما بعد الدفع؟

6-7 تسقط كرة كتلتها 0.5 kg من ارتفاع 4 m على صفيحة مسطحة فتصطدم بها اصطداما مرنا وترتد للأعلى بنفس السرعة. (أ) ما الدفع الذي اكتسبته الكرة؟ (ب) مامتوسط القوة المؤثرة عليها خلال التصادم إذا كان زمن تماسها مع الصفيحة 2 ms؟

7-7 يندفع ماء أفقيا من فوهة خرطوم بمعدل 300 cm^3/s فيصطدم بحائط بسرعة 5 m/s. مامتوسط القوة المؤثرة على الحائط إذا لم يرتد الماء عنه بتاتا؟

8-7 تخضع رصاصة كتلتها m تنطلق من فوهة بندقية لقوة متغيرة $F = 480 - 1.6 \times 10^5 t$ (مقدرة بالنيوتن) لمدة 3 ms. (أ) ارسم تغيرات القوة خلال تلك الفترة وقدر الدفع الذي اكتسبته الرصاصة من المنحني المرسوم. (ب) احسب الدفع بواسطة التكامل وقارن مع (أ). (ج) جد كتلة الرصاصة إذا كانت سرعتها نتيجة الدفع 320 m/s.

حفظ الزخم الخطي

9-7 تخترق رصاصة كتلتها 10 g بندولا قذفيا كتلته 2 kg فيرتفع الإثنان معا 12 cm. ما السرعة الابتدائية للرصاصة قبل اصطدامها بالبندول مباشرة؟

10-7 ينزلق صندوق كتلته 6 kg على أرض ملساء بسرعة 9 m/s عندما يسقط عليه من الأعلى مباشرة علبة كتلتها 12 kg. كيف تتغير سرعة الصندوق؟

11-7 تصطدم كرة كتلتها 300 g وسرعتها 6 m/s بحائط صانعة معه زاوية 30° فترتد بنفس السرعة والزاوية. ما الدفع الذي اكتسبته الكرة وما متوسط القوة التي خضعت لها إذا كان زمن تماسها مع الحائط 10 ms؟

التصادم على خط مستقيم

12-7 تصطدم كرة كتلتها 0.6 kg اصطداما رأسيا مرنا بكرة ثانية ساكنة فتتحرك الأخيرة بنصف السرعة الابتدائية للأولى. ماكتلة الكرة الثانية وما طاقتها الحركية؟

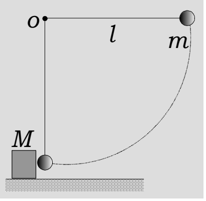
13-7 تتحرك كرتان متماثلتان على نفس الخط باتجاهين متعاكسين بسرعتين 2 m/s و3 m/s، على الترتيب، فتصطدمان اصطداما مرنا. ماسرعة كل واحدة بعد التصادم؟

14-7 يصطدم جسم كتلته 2 kg اصطداما مرنا بجسم آخر ساكن ويتابع حركته على نفس الخط بربع سرعته الابتدائية. ما كتلة الجسم الثاني؟

15-7 تصطدم عربة قطار فارغة كتلتها 10,000 kg تسير بسرعة 2 m/s بعربة محملة كتلتها 20,000 kg تقف في طريقها فتلتصق العربتان بعد التصادم. (أ) ما السرعة النهائية لهما؟ (ب) ما الطاقة الضائعة في التصادم؟ (ج) ماذا يجب أن تكون سرعة العربة الثانية قبل التصادم لتتوقف العربتان بعده؟

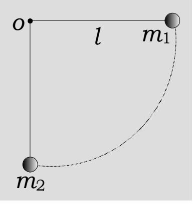
16-7 تدخل رصاصة كتلتها 4.5 g قطعة خشبية كتلتها 1.8 kg ساكنة على سطح أفقي خشن معامل احتكاكه 0.2 فتستقر فيها وتتحرك الاثنتان معا مسافة 1.8 m حتى تتوقفا. ماسرعة الرصاصة الابتدائية؟

17-7 تنفجر كتلة m تتحرك بسرعة v في وسط عديم الجاذبية لقسمين متساويين أحدهما ساكن تماما. ما الطاقة الحركية التي اكتسبها النظام؟



الشكل (7-9)

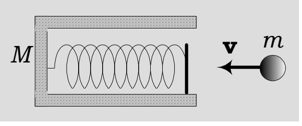
18-7 تهوي كرة بندول بسيط كتلته 0.5 kg وطوله 70 cm من وضع أفقي تماما لتصطدم عند وصولها لوضع شاقولي اصطداما مرنا بكتلة ثانية ساكنة مقدارها 2.5 kg موضوعة على سطح أفقي أملس، كما في الشكل (7-9). ماسرعة كل جسم بعد التصادم مباشرة؟



الشكل(7-10)

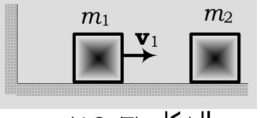
19-7 يهوي البندول m_1 في الشكل (7-10) من ارتفاع l ليصطدم اصطداما غير مرن كليا بالبندول m_2 ويلتصق به تماما ليرتفعا معا مسافة h. جد h.

20-7 تدخل كرة كتلتها 1 kg وسرعتها 20 m/s فوهة مدفع زنبركي كتلته 100 kg ساكن على سطح أملس، كما في الشكل (7-11)، فتلتصق الكرة بالزنبرك ضاغطة إياه أكبر مسافة ممكنة. ما الطاقة المخزونة بالزنبرك نتيجة هذا التصادم؟



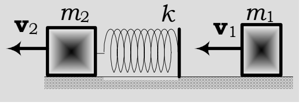
الشكل(7-11)

21-7 تتحرك كتلة m_1 على طريق أملس باتجاه كتلة ثانية m_2 ساكنة فتصطدم بها وترتد للخلف لتصطدم بحائط وتعود لتتحرك مع m_2 بنفس السرعة والاتجاه، كما في الشكل(7-12). مانسبة m_2/m_1 إذا كانت التصادمات كلها تامة المرونة؟



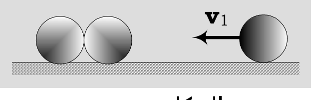
الشكل (7-12)

22-7 تصطدم كتلة m_1=2 kg تتحرك بسرعة 10 m/s بكتلة ثانية m_2=5 kg تتحرك أمامها على نفس الخط بسرعة 3 m/s فترتبط بها بواسطة زنبرك ثابته 1120 N/m مثبت بـ m_2، كما في الشكل (7-13). ما أكبر مسافة سينضغطها الزنبرك؟



الشكل-(13)

23-7 تصطدم كرة بليارد سرعتها 1 m/s اصطداما مرنا بكرتين مماثلتين لها متلاصقتين على نفس خطها، كما في الشكل (7-14). ماسرعة كل كرة بعد التصادم؟



الشكل(7-14)

24-7 بفرض أن كتلة آخر كرة في المسألة السابقة هي M برهن أنه إذا كانت $m > M$ فسيكون هناك تصادمين، بينما إذا كانت $m \leq M$ فسيكون هناك ثلاثة تصادمات وجد السرع النهائية للكتل في كل حالة.

25-7 تصطدم سيارة مسرعة كتلتها 2200 kg بسيارة ساكنة كتلتها 1400 kg وتسحبها مسافة 18 m إلى أن تتوقفا معا. ماسرعة السيارة الأولى قبل التصادم وماسرعة السيارتين بعده إذا كان معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق 0.95؟

26-7 تصطدم سيارتان كتلة الأولى 540 kg والثانية 1400 kg اصطداما رأسيا عديم المرونة تماما فتلتحمان معا (أ) ماسرعتهما بعد التصادم إذا كانت سرعة كل منهما قبله 80 km/h باتجاهين متعاكسين؟ (ب) ما الطاقة الحركية للنظام قبل وبعد التصادم؟ (ج) ماتسارع ركاب كل سيارة إذا انسحقت مقدمة كل واحدة 60 cm، بفرض أنه ثابت؟

27-7 يصطدم إلكترون اصطداما رأسيا مرنا ببروتون ساكن. مانسبة الطاقة الحركية التي اكتسبها البروتون للطاقة الحركية الأصلية للإلكترون؟ (ضع m_p=1860m_e).

28-7 تضغط كتلتان m_1=2m_2 موضوعتان على سطح أفقي أملس على طرفي زنبرك غير مربوط بينهما مخزنا طاقة 60 J. ما الطاقة الحركية التي تكتسبتها كل كتلة بعد إفلاتهما؟

29-7 يهبط مصعد للأسفل بسرعة 2 m/s عندما تسقط على سطحه العلوي تفاحة من ارتفاع 20 m لتصطدم به اصطداما مرنا وترتد للأعلى. (أ) ما أعلى ارتفاع ستصل إليه بالنسبة للنقطة التي سقطت منها؟ (ب) كيف تتغير الإجابة لو تحرك المصعد للأعلى؟

30-7 يصطدم رأس مطرقة كتلته 0.5 kg وسرعته 5 m/s برأس مسمار كتلته 12 g اصطداما مرنا. ما الطاقة التي يكسبها المسمار؟

31-7 تصطدم سفينة كتلتها 3×10^7 kg تسير بسرعة 40 km/h اصطداما غير مرن كليا بجبل جليدي ساكن كتلته 8×10^8 kg. ما الطاقة الضائعة في التصادم؟

32-7 برهن أنه في حالة تصادم غير مرن لجسمين m_1 وm_2 يسيران على خط مستقيم بسرعتين v_1 و v_2 ومعامل الارتداد بينهما e فإن سرعتيهما بعد التصادم تعطى بالعلاقتين:

$$v_1' = \frac{1}{M}[(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2]$$
$$v_2' = \frac{1}{M}[(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2]$$

33-7 برهن أن الطاقة الضائعة في المسألة السابقة تساوي $\frac{1}{2}\mu v^2(1-e^2)$ حيث تعطى الكتلة المختزلة بـ μ=m_1m_2/(m_1+m_2) ، و v سرعة التقارب النسبية $|v_2 - v_1|$، وe معامل الارتداد؟

التصادمات في مستو

34-7 يسير جسمان متساويان بالكتلة بنفس السرعة لكن باتجاهين مختلفين فيصطدمان ببعضهما اصطداما غير مرن كليا ويسيران بنصف سرعتهما الابتدائية. ما الزاوية بينهما قبل التصادم؟

35-7 تصطدم كرة سرعتها v_0 اصطداما مرنا بكرة مماثلة ساكنة فتشتت الأولى بزاوية θ_1 والثانية θ_2 بالنسبة لاتجاه الحركة الأصلي. برهن أن $\theta_1+\theta_2=90°$؟

36-7 ماسرعة كل كرة في المسألة السابقة إذا كانت $\theta_1=30°$؟

37-7 يصطدم بروتون سرعته 500 m/s ببروتون ساكن اصطداما مرنا فيتشتت عن مساره بزاوية 60°. (أ) ماسرعة كل بروتون بعد التصادم؟ (ب) ما اتجاه البروتون الثاني بعد التصادم؟

38-7 تصطدم كرة سرعتها 2.2 m/s بأخرى مماثلة ساكنة اصطداما جانبيا فتتحرك إحداهما بسرعة 1.1 m/s باتجاه يصنع 60° بالنسبة لاتجاه الحركة الأصلي. (أ) ماسرعة الكرة الأخرى؟ (ب) مانوع التصادم؟

39-7 تنشطر نواة ذرة ساكنة لثلاثة أجزاء يتحرك إثنان منهما بسرعتين متعامدتين أولاهما 6×10^6 m/s والثانية 8×10^6 m/s . (أ) مازخم الجزء الثالث إذا كانت كتل الأجزاء الثلاثة هي 17u و 8u و12u، على الترتيب ($u=10^{-27}$ kg وحدة الذرية) (ب) ما الطاقة اللازمة ليكون الانشطار ممكنا؟

40-7 يصطدم جسم يسير بسرعة 30 m/s بآخر مماثل وساكن فيتشتت الأول بزاوية 30° والثاني 45°. مانوع التصادم وما سرعة كل واحد بعد التصادم؟

41-7 يجلس رجل وزنه 800 N وامرأة وزنها 600 N في زورق وزنه 1200 N في بحيرة ساكنة. ماقيمة واتجاه السرعة التي سيتحرك بها الزورق إذا قفز منه الرجل بسرعة 5 m/s باتجاه 60° غرب الشمال، والمرأة بسرعة 9 m/s باتجاه 30° شمال الشرق، بإهمال الاحتكاك وأي حركة شاقولية للزورق؟

42-7 يسير جسم كتلته 0.4 kg وسرعته 12.5 m/s على محور السينات الموجب عندما يصطدم بجسم آخر ساكن كتلته 0.6 kg، فيتشتت الثاني بسرعة 10 m/s باتجاه يصنع زاوية 37° مع ox. ماقيمة واتجاه سرعة الأول؟ (ب) ما الطاقة الضائعة في هذا التصادم؟

43-7 يقذف رجل كتلته 60 kg ويقف على سطح أملس حجرا كتلته 3 kg بزاوية 37° فوق الأفق بسرعة 20 m/s. ماسرعة ارتداد الرجل؟

44-7 تصطدم رصاصة كتلتها 2.5 g وسرعتها 400 m/s بحجر ساكن كتلته 0.1 kg فتشتت عنه عموديا على حركتها الأصلية بسرعة 300 m/s. ماسرعة ارتداد الحجر ومانوع التصادم؟

الفصل الثامن

الحركة الدورانية

(Rotational Motion)

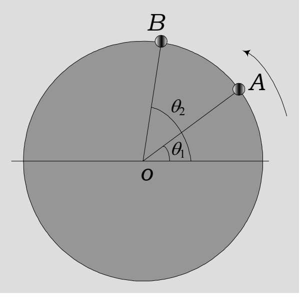
1-8 تمهيد:

درسنا حتى الآن الحركة الانتقالية (أو الانسحابية) *(translational motion)* للأجسام مغفلين دورانها كليا. إلا أن الحركة العامة للأجسام الصلبة تتألف من انتقال ودوران بنفس الوقت. ومن أهم الحركات في الطبيعة هي الحركات الدورانية، كالأرض حول الشمس، والقمر حول الأرض، والإلكترونات حول النواة في الذرة، وغيرها. لذا نخصص هذا الفصل والذي يليه لدراسة الحركة الدورانية التي يدور فيها جسيم أو منظومة جسيمات حول محور أو نقطة. وكما فعلنا في الحركة الانتقالية، فإننا نبدأ في هذا الفصل بتعريف متغيرات الحركة من موضع وسرعة وتسارع، بينما نبحث في الفصل التاسع عن متغيرات التحريك. فنعرف موضع الجسم في الحركة الدورانية **بالزاوية** التي يدورها، **وسرعته الزاوية** بمقدار الزاوية التي يدورها بواحدة الزمن، كما نعرف **تسارعه الزاوي** بمعدل تغير السرعة الزاوية مع الزمن. ونستخلص العلاقات التي تربط متغيرات الحركة ببعضها، وندرس الحركة بتسارع زاوي ثابت. ونربط أخيرا بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية.

2-8 السرعة الزاوية المتوسطة *(Average Angular speed)*

نبدأ دراسة الحركة الدورانية لجسيم صغير m يمكن اعتباره نقطة، كما فعلنا في الفصل الثاني، ونفترض أنه يدور على مسار دائري نصف قطره r، كما في الشكل (8-1). فنلاحظ أن موضعه

الزاوي في أي لحظة يتحدد بالزاوية θ التي يصنعها متجه موضعه الخطي $\mathbf{r}$ مع محور السينات. فإذا كان الجسيم عند الموضع θ_1 في اللحظة t_1 ثم صار عند θ_2 في اللحظة t_2، عندئذ نجد أنه دار زاوية:



الشكل (8-1)

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

خلال زمن

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

ومن ثم نعرف **السرعة الزاوية المتوسطة** بالعلاقة:

$$\boxed{\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}} \qquad (1\text{-}8)$$

فالسرعة الزاوية هي الزاوية التي يدورها الجسم في واحدة الزمن، ووحدتها في النظام الدولي هي راديان/ثانية (rad/s)، حيث يساوي الراديان زاوية مقدارها°57 تقريبا ويعطى بشكل أدق بملاحظة أن الدورة الكاملة تعادل:

$$2\pi \text{ rad} = 360° \Rightarrow 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

وكثيرا ماتعطى السرعة الزاوية لجسم يدور بوحدات مختلفة مثل دورة بالدقيقة (rev/min) مثلا، كما ذكرنا في الفصل الثالث، حيث نعرف أن الدورة الواحدة تعادل 2π راديان، لذا يمكن تحويل دروة/دقيقة إلى راديان/ثانية بكتابة:

$$1 \text{ rev/min} = 1(2\pi \text{ rad})/(60 \text{ s}) = (\pi/30) \text{ rad/s}$$

مثل 8-1

تدور الأرض حول نفسها مرة كل 24 ساعة. مامتوسط سرعتها الزاوية؟

الحل: نلاحظ أن الزاوية الممسوحة خلال 24 ساعة هي °360 أي 2π ونكتب:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi(\text{rad})}{24(\text{h})} = \frac{2\pi(\text{rad})}{86400(\text{s})}$$

أي أن:

$$\omega_{av} \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

3-8 السرعة الزاوية اللحظية *(Instantaneous Angular speed)*

لحساب السرعة الزاوية لجسم يدور على مسار دائري في لحظة معينة، أي **السرعة الزاوية اللحظية**، نجعل النقطتين A وB في الشكل (8-1) تقتربان من بعضهما بشكل كبير لتنطبقا في النهاية على بعضهما، عندئذ تصير الزاوية $\Delta\theta$ والزمن Δt غاية في الصغر بحيث نكتب:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}} \qquad (2\text{-}8)$$

وكما وجدنا في الفصل الثاني، فيمكن معرفة الزاوية التي دارها جسم من سرعته اللحظية (8-2) بإجراء التكامل:

$$\theta = \int \omega dt \qquad (3\text{-}8)$$

وإذا تحرك الجسم بسرعة زاوية ثابتة ω عندئذ تصير الزاوية θ التي يدورها في زمن t معطاة بالعلاقة البسيطة:

$$\boxed{\theta = \omega t} \qquad (4\text{-}8)$$

مثل 8-2

يتحرك جسم على مسار دائري بسرعة زاوية متغيرة بحيث تعطى الزاوية التي يدورها خلال زمن t بالعلاقة $\theta = -2t + t^2$ rad . (أ) ما السرعة الزاوية المتوسطة للجسم بين اللحظتين t_1=0 وt_2=3 s؟ (ب) ما السرعة الزاوية اللحظية للجسم عندما t=0؟

الحل: (أ) لتحديد السرعة الزاوية المتوسطة نحسب الزاوية التي كان عندها الجسم في اللحظتين المذكورتين:

$$\theta(t_1) = \theta(0) = 0\,\text{rad}$$

و

$$\theta(t_2) = \theta(3) = 3\,\text{rad}$$

لذا نجد السرعة الزاوية المتوسطة بكتابة:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{(3-0)\ \text{rad}}{(3-0)\ \text{s}} = 1\ \text{rad/s}$$

(ب) نجد السرعة الزاوية اللحظية في أي لحظة من (8-2) فنكب:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -2 + 2t$$

فيكون في اللحظة $t=0$: $\omega(0) = -2\,\text{rad}$

ومن المهم أن نلاحظ أن كون السرعة الزاوية سالبة يعني أنه يدور بعكس الاتجاه الموجب المفترض (مع أو بعكس عقارب الساعة) ولاعلاقة له بتسارع أو تباطؤ الجسم خلال دورانه.

4-8 التسارع الزاوي المتوسط واللحظي *(Angular Acceleration)*

لحساب التسارع الزاوي لجسم يدور نستخدم الشكل (8-1) ونفترض أن السرعة الزاوية اللحظية عند النقطة A (أي في اللحظة t_1) هي ω_1 وعند B (أي في اللحظة t_2) هي ω_2، عندئذ نعرف **التسارع الزاوي المتوسط** بين هاتين اللحظتين بالعلاقة:

$$\boxed{\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}} \qquad (5\text{-}8)$$

ونلاحظ أن وحدة التسارع الزاوي هي وحدة سرعة زاوية على زمن، أي (rad/s^2).

ويمكن تحديد التسارع الزاوي للجسم عند نقطة معينة أو في لحظة معينة، أي **التسارع الزاوي اللحظي**، كما فعلنا في حالة السرعة الزاوية، بجعل الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$ في (5-8) وعندها نكتب:

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}} \qquad (6\text{-}8)$$

ونلاحظ مما تقدم التشابه الواضح بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية مما يجعل حل التمارين في الحركة الدورانية مماثل تماما للحركة الانتقالية، وستتوضح هذه النقطة في الفقرات القادمة بشكل جلي.

5-8 الحركة الدورانية بتسارع زاوي ثابت

وجدنا في الفصل الثاني أنه إذا تحرك جسم بتسارع خطي a ثابت فإن معادلات الحركة تصير سهلة وتعطى بالعلاقات (2-18) و(2-19) و(2-20). وبنفس المنطق إذا دار جسم بتسارع زاوي α ثابت فإننا نكتب معادلات الحركة لها بالشكل:

$$\boxed{\begin{cases} \omega = \alpha t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}} \qquad (7\text{-}8)$$

وتوضح الأمثلة التالية سهولة استخدام العلاقات السابقة لتحديد متغيرات الحركة لجسم يدور بتسارع زاوي ثابت.

مثل 8-3

يدور حجر طاحون بتسارع زاوي ثابت بدءا من السكون زاوية °120 خلال 5 s. جد السرعة الزاوية المتوسطة للحجر وسرعته الزاوية اللحظية عندما t=5 s وتسارعه الزاوي المتوسط.

الحل: (أ) نطبق العلاقة (8-1) ونكتب:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{120°}{5\,\mathrm{s}} = \frac{120(\pi/180)\mathrm{rad}}{5\,\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{15}\ \mathrm{rad/s}$$

(ب) نحسب السرعة الزاوية اللحظية بالاستفادة من كون التسارع الزاوي ثابت حيث ترتبط السرعة الزاوية المتوسطة في هذه الحالة بالسرعتين اللحظيتين ω_1 وω_2 في اللحظتين t_1 وt_2، بالعلاقة:

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad (8\text{-}8)$$

وبتعويض $\omega_{av} = 2\pi/15\,\mathrm{rad/s}$ و $\omega_1 = 0\,\mathrm{rad/s}$ في هذه العلاقة نجد $\omega_2 = 4\pi/15\,\mathrm{rad/s}$.

(ج) أخيرا نحسب التسارع الزاوي من (8-5) ونكتب:

$$\alpha = \alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\pi}{75}\ \mathrm{rad/s^2}$$

حيث وضعنا التسارع الزاوي اللحظي مساويا للتسارع الزاوي المتوسط لأنه ثابت.

مثل 8-4

تدور حلقة بتسارع زاوي ثابت $3\ \mathrm{rad/s^2}$ زاوية 120 rad خلال أربع ثواني. ما السرعة الزاوية الابتدائية للحلقة وكم تستغرق للوصول لهذه السرعة إذا بدأت من السكون؟

الحل: نستخدم معادلات الحركة بتسارع زاوي ثابت ونكتب:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$

حيث $\theta - \theta_0$ الزاوية التي دارها الجسم خلال الزمن t (أي الإزاحة الزاوية). وبتعويض هذه الكميات نجد:

$$120\,\mathrm{rad} = \tfrac{1}{2}(3\,\mathrm{rad/s^2})(4\,\mathrm{s})^2 + \omega_0(4\,\mathrm{s})$$

أي أن
$$\omega_0 = 24\,\text{rad/s}$$

أخيرا إذا بدأ الجسم دورانه من السكون نكتب:

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = 8\ \text{s}$$

6-8 العلاقة بين متغيرات الحركة الدورانية والحركة الانتقالية

من المفيد جدا أن نربط بين متغيرات الحركتين الانتقالية والدورانية لنلاحظ التناظر التام بينهما، مما يسهل فيما بعد استخلاص معادلات التحريك الدوراني مباشرة. ولذلك نفترض أن لدينا جسما يدور على مسار دائري نصف قطره r، كما في الشكل (8-2). فنلاحظ أنه يقطع مسافة خطية s عندما يدور زاوية θ بحيث أن:

$$\boxed{s = r\theta} \tag{9-8}$$

حيث تقدر θ بالراديان دوما.

وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

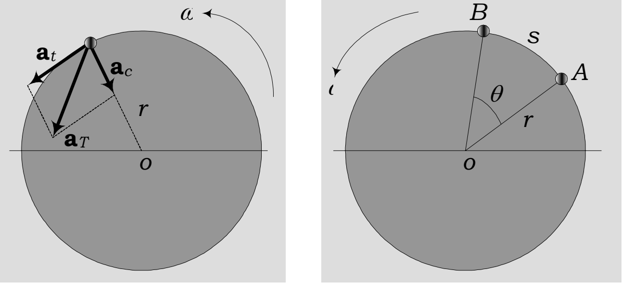
ولكن
$$v = \frac{ds}{dt}$$

هي السرعة الخطية التي يتحرك بها الجسم على المسار الدائري، بينما

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

هي السرعة الزاوية التي يدور بها، ولذلك نكتب:

$$\boxed{v = r\omega} \tag{10-8}$$



الشكل(8-2)

وبنفس الشكل نربط بين التسارع الخطي a والزاوي α باشتقاق (8-10) فنجد:

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

وبملاحظة أن $dv/dt = a_t$ هو التسارع المماسي للجسم على المسار الدائري و $d\omega/dt = \alpha$ هو التسارع الزاوي، نكتب:

$$\boxed{a = r\alpha_t} \qquad (11\text{-}8)$$

ونركز هنا أن التسارع الخطي المعني في هذه العلاقة هو التسارع المماسي فقط الذي يدل على تغير قيمة السرعة الخطية للجسم. لأنه إذا دار بسرعة خطية v ثابتة عندئذ يكون تسارعه المماسي dv/dt معدوما لكن تسارعه المركزي v^2/r لايساوي الصفر، ومع ذلك فإن تسارعه الزاوي يكون مساويا للصفر لأن سرعته الزاوية، مثل سرعته الخطية، ثابتة. فإذا دار الجسم بسرعة خطية ثابتة ينعدم تسارعه المماسي والزاوي ويبقى تسارعه المركزي الذي يدل على تغير اتجاه حركته والمعطى بالعلاقة:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r} \qquad (12\text{-}8)$$

أخيرا نلخص في الجدولين 8-1 و8-2 العلاقة بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية لتوضيح التناظر في قوانين الحركة بين الحالتين.

مثل 8-5

تتسارع أسطوانة موسيقية نصف قطرها 15 cm بدءا من السكون فتصير سرعتها 33 دورة بالدقيقة خلال 60 s. (أ) ما السرعة والتسارع الخطيين لنقطة على محيطها؟ (ب) ما التسارع الزاوي لهذه النقطة؟

الحل: لحساب السرعة الخطية نستخدم $v = r\omega$ حيث نضع:

$$\omega = 33\,\mathrm{rev/min} = 33(2\pi\,\mathrm{rad}/60\,\mathrm{s}) = 3.45\,\mathrm{rad/s}$$

فنجد:

$$v = r\omega = (0.15\,\mathrm{m})(3.45\,\mathrm{rad/s}) = 0.52\,\mathrm{m/s}$$

(ب) لحساب التسارع المركزي لهذه النقطة نكتب:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = 1.8\,\mathrm{m/s^2}$$

(ج) أخيرا نجد التسارع الزاوي للاسطوانة من العلاقة:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0.06\,\mathrm{rad/s^2}$$

الجدول 8-1 العلاقة بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية

المتغيرات	انتقال	دوران	العلاقة
الموضع	s	θ	$s=r\theta$
السرعة	v	ω	$v=r\omega$
التسارع	a	α	$a=r\alpha$

الجدول 8-2 التناظر في قوانين الحركة الانتقالية والدورانية بتسارع ثابت

الحركة الانتقالية	الحركة الدورانية
$v = at + v_0$	$\omega = \alpha t + \omega_0$
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$	$\alpha = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$

ملخص الفصل

السرعة الزاوية المتوسطة $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

السرعة الزاوية اللحظية $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

التسارع الزاوي المتوسط $\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

التسارع الزاوي اللحظي $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

الحركة بتسارع زاوي ثابت

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \alpha t + \omega_0 \\ &\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ &\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

تمارين ومسائل

متغيرات الحركة الدورانية

1-8 ما الزاوية التي يحددها قوس طوله 3 m من دائرة نصف قطرها 2m؟

2-8 ماطول القوس المحدد بالزاوية 0.6 rad في دائرة نصف قطرها 2m؟

3-8 ما السرعة الزاوية لدولاب يدور 4800 دورة بالدقيقة مقدرة بالراديان لكل ثانية؟

4-8 تدور مروحة طائرة قطرها 60 cm بسرعة 2000 rev/min في الوقت الذي تطير فيه الطائرة أفقيا بسرعة 480 km/h. ماسرعة نقطة على طرف المروحة بالنسبة للطيار والأرض؟

5-8 ما السرعة الزاوية لعقرب الساعات والدقائق والثواني في الساعة اليدوية العادية؟

6-8 تدور سفينة فضاء في مسار دائري نصف قطره 3500 km بسرعة 2000 km/h. (أ) ما السرعة الزاوية للسفينة؟ (ب) ما التسارع المركزي والمماسي للسفينة؟

7-8 ماالسرعة الخطية لنقطة على محيط قرص قطره 40 cm يدور بسرعة 2000 rev/min؟

8-8 تدور الأرض حول الشمس في مسار شبه دائري نصف قطره 150 مليون كم تقريبا. ما السرعة الخطية والزاوية للأرض وما تسارعها المركزي؟

الحركة الدورانية

9-8 ما التسارع المركزي لنقطة على طرف قرص قطره 0.6 m يدور بسرعة 33.3 rev/min؟

10-8 يتسارع قرص بدءا من السكون لسرعة 20,000 rev/min خلال 5 دقائق. ما متوسط تسارعه؟

قوانين الحركة الدورانية

11-8 تتناقص السرعة الزاوية لمروحة طائرة من 300 rev/min إلى 225 rev/min خلال دقيقة واحدة. (أ) مامتوسط سرعتها وتسارعها الزاويين؟ (ب) ما الزمن اللازم للمروحة وما عدد الدورات التي ستدورها لتقف بدءا من سرعتها الأولى؟

12-8 تعطى زاوية دوران حلقة بالعلاقة: $\theta = 5t + 3t^2 - 4.5t^4$ rad. ما السرعة والتسارع الزاويين للحلقة عندما t=2 s و t=3 s وما السرعة الزاوية المتوسطة خلال هذه الفترة؟

13-8 يدور إطار 60 دورة في 10 s لتصير سرعته الزاوية 10 rev/s. (أ) ماسرعته الزاوية الابتدائية؟ (ب) ما الزمن اللازم للإطار للوصول لسرعته الابتدائية إذا بدأ حركته الكلية من السكون؟

8-14 تتغير السرعة الزاوية لمحرك من 1200 rev/min إلى 300 rev/min خلال 12 s. ما متوسط تسارعه الزاوي وعدد الدورات التي يدورها إلى أن يقف؟

8-15 تسير سيارة نصف قطره كل إطار فيها 0.5 m بسرعة 80 km/h وبعد 55 دورة تصير سرعتها 55 km/h. (أ) ما التسارع الزاوي للإطارات؟ (ب) ما الزمن اللازم للسيارة لتقف؟

8-16 تتباطأ أسطوانة من سرعة 78 rev/min لتقف بعد 30 s. (أ) ماتسارعها الزاوي؟ (ب) ماعدد الدورات التي دارتها الاسطوانة لتقف؟

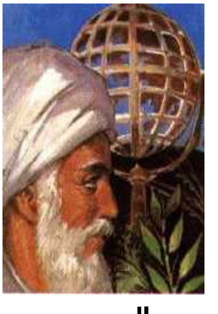
8-17 يدور محرك بخاري بسرعة 150 rev/min عندما ينطفئ ويتوقف بعد 2.2 h. (أ) ما متوسط تسارعه الزاوي؟ (ب) ماعدد الدورات التي دارها ليتوقف؟ (ج) ما التسارع المماسي لنقطة تقع على بعد 50 cm من مركزه عندما كان يدور بسرعة 78 rev/min؟ (د) ما التسارع الكلي للنقطة المذكورة في (ج) في تلك اللحظة؟

8-18 (أ) ما السرعة الزاوية لإطار سيارة تسير بسرعة 80 km/h على خط مستقيم إذا كان نصف قطره 37.5 cm؟ (ب) ما التسارع الزاوي للإطار إذا توقفت السيارة بعد 30 دورة بدون انزلاق؟ (ج) ما المسافة التي ستقطعها السيارة لتقف؟

8-19 تدور حلقة $10°$ خلال 0.25 s بدءا من السكون. ما الزمن اللازم لتصل لسرعة 33 rev/min؟

8-20 ما أكبر سرعة زاوية يمكن أن تدور بها اسطوانة حتى لاتنزلق عنها قطعة نقود كتلتها M موضوعة على بعد R من مركزها، إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينهما μ_s؟

من علماء الإسلام



البيروني

محمد بن أحمد المكنى بأبي الريحان **البيروني** (362هـ - 440 هـ). كتب في الرياضيات والفلك والجغرافيا والفيزياء والفلسفة والطب والشريعة والأدب واللغة، وفترك ما يقارب مائة مؤلف مثل القانون المسعودي في الهيئة والنجوم، واستخراج الأوتار في الدائرة، واستيعاب الوجوه الممكنة في صفة الإسطرلاب، والعمل بالإسطرلاب، والتطبيق إلى حركة الشمس، وغيرها. وأكد قبل كوبرنيكوس (الذي ينسب إليه بأنه أول من قال عن حركة الأرض حول نفسها وحول الشمس) بخمسمائة عام بشكل واضح أن الأرض تدور حول نفسها وتدور مع الكواكب والنجوم حول الشمس مما يسبب تفاوت الليل والنهار. وتوصل إلى استخراج الثقل النوعي لكثير من الأجسام الصلبة والسائلة مستعينا بمبدأ أرخميدس، وابتكر آلة سماها "الميزان الطبيعي" وهي أقدم آلة استعملت لقياس الثقل النوعي وأعطت نتائج مذهلة تتناسب تقريبا مع الأرقام الحديثة.

الفصل التاسع

التحريك الدوراني

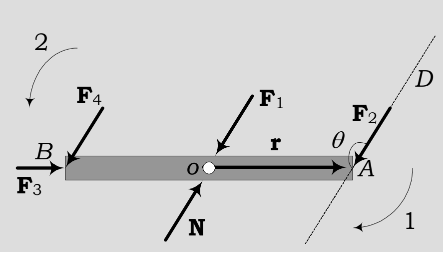
(Rotational Dynamics)

9-1 تمهيد:

درسنا في الفصل السابق كيف تدور الأجسام وحددنا متغيرات حركتها من موضع وسرعة وتسارع زاوي دون تحري السبب الذي يجعل الأجسام تدور أصلا. وكما فعلنا في الحركة الانتقالية، فإننا ندرس في هذا الفصل سبب دوران الأجسام. فنعرف **متغيرات التحريك الدوراني** من **عزم** (سبب التحريك) و**قصور ذاتي** (ممانعة التحريك)، ونربط بينهما وبين **التسارع الزاوي** (دليل التحريك) لنستخرج قوانين التحريك الدوراني. كما نعرف الشغل والطاقة في الحركة الدورانية ومفهوم الزخم الزاوي ونكتب الشكل العام لقانون نيوتن الثاني. ونستخرج مبدأ حفظ الزخم الزاوي وندرس بعض تطبيقاته. ونعمم أخيرا النتائج التي حصلنا عليها لمنظومة جسيمات وأجسام صلبة وندرس شروط الاتزان العام للأجسام.

9-2 العزم *(Torque)*

لمعرفة سبب دوران الأجسام نجري تجربة بسيطة بتثبيت مسطرة من منتصفها بالحائط، كما هو موضح بالشكل (9-1)، بحيث يمكنها الدوران حول نقطة التثبيت o (أو بالأحرى حول محور مار منها عموديا على الحائط). فإذا أثرنا على المسطرة بقوة $\mathbf{F}_1$ تمر من نقطة التثبيت، فإننا نلاحظ أنها تبقى ساكنة تماما دون أن تنتقل أو تدور على الإطلاق، مما يعني أن محصلة القوى عليها تساوي الصفر. أي أن رد فعل مسمار التثبيت $\mathbf{N}$ يساوي ويعاكس القوة الخارجية $\mathbf{F}_1$ فتبقى



الشكل (9-1)

المسطرة ساكنة ولاتتحرك. الآن: لو طبقنا القوة $\mathbf{F}_2$ فقط عند النقطة A لوجدنا أن المسطرة لاتنتقل ككل من مكانها، بمعنى أن رد فعل المسمار $\mathbf{N}$ لايزال مساويا ومعاكسا لـ $\mathbf{F}_2$، فتبقى محصلة القوى مساوية للصفر، إلا أن المسطرة تدور في هذه الحالة حول المحور المار من نقطة التثبيت o. أخيرا نطبق القوة $\mathbf{F}_3$ فقط على المسطرة عند النقطة B فنجد أن تأثير القوة يختفي مرة أخرى وتبقى المسطرة ساكنة أيضا مثل الحالة الأولى. مما لاشك فيه إذا أن هناك تأثير واضح للطريقة التي نطبق بها القوة بتغيير نقطة تطبيقها واتجاهها بالنسبة لمحور الدوران. لتحديد هذا التأثير نعرف المصطلحات التالية:

(أ) محور (أو نقطة) دوران الجسم *(axis of rotation)*: هو المحور (أو النقطة) الذي يدور حوله الجسم. ففي مثالنا هذا فإن محور الدوران يكون عموديا على المسطرة ويمر من النقطة o.

(ب) خط تأثير القوة *(force line of action)*: الخط المستقيم الذي تحمل عليه القوة، كالخط D في الشكل (9-1). ولايتغير تأثير القوة لو زلقناها على هذا الخط طالما لها نفس القيمة والاتجاه.

(ج) نقطة تأثير القوة: هي نقطة تقاطع خط تأثيرها مع الجسم، كالنقطة A في الشكل (9-1).

(د) ذراع القوة *(lever arm)*: هو المتجه الواصل من نقطة دوران الجسم إلى نقطة تأثير القوة، ويعطى بالمتجه $\mathbf{r}$ في الشكل (9-1).

نعود الآن للشكل (9-1) فنلاحظ أن القوة $\mathbf{F}_1$ تمر من نقطة الدوران فليس لها ذراع. أما القوة $\mathbf{F}_3$ فإن الزاوية بين ذراعها وخط تأثيرها تساوي الصفر أو $180°$، وفي كلتا الحالتين فإن المسطرة لاتدور. بينما نلاحظ أن للقوة $\mathbf{F}_2$ ذراعا لايوازي خط تأثيرها ولايمر من نقطة الدوران وتدورالمسطرة في هذه الحالة.

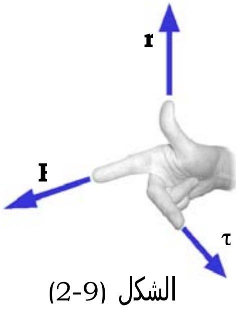
نستنتج مما تقدم انه حتى يدور جسم يجب أن تؤثر عليه قوة $\mathbf{F}$ لها ذراع $\mathbf{r}$ لايوازي خط تأثيرها أي يجب أن تكون الزاوية θ بين خط التأثير وذراع القوة لاتساوي صفر أو$180°$. ولاتتحقق هذه الشروط إلا إذا كانت الكمية $rF\sin\theta$ غير معدومة، لذا نطلق عليها اسم **عزم القوة** *(torque)* ونرمز لها بـ τ، أي أن:

$$\boxed{\tau = rF\sin\theta} \qquad (9\text{-}1)$$

حيث θ الزاوية بين r وF.

والعزم كمية متجهة حيث يمكن التوصل لهذه النتيجة بملاحظ أن القوة $\mathbf{F}_2$ في الشكل (9-1) تحاول تدوير المسطرة باتجاه السهم 1، بينما تحاول $\mathbf{F}_4$ تدويرها باتجاه السهم 2 مع أن القوتين بنفس الاتجاه ولهما نفس الذراع. لذا نستنتج أن للعزم اتجاه محدد نجده من العلاقة (9-1) التي تمثل الضرب المتجه لـ $\mathbf{r}$ و$\mathbf{F}$، كما درسنا في الفصل الأول. لذا نكتب العزم بالشكل:

$$\boxed{\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \qquad (9\text{-}2)$$



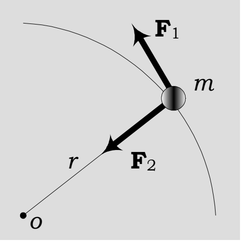
الشكل (9-2)

أي أن اتجاه العزم يتحدد بقاعدة اليد اليمنى حيث يتجه الإبهام باتجاه $\mathbf{r}$ والسبابة باتجاه $\mathbf{F}$ بينما تتجه بقية الأصابع العمودية على الكف باتجاه العزم τ، أي عموديا على المستوي الحاوي على كل من $\mathbf{r}$ و$\mathbf{F}$، كما في الشكل (9-2). ويمكن معرفة اتجاه العزم بسهولة بتصور برغي يدور مع الجسم إذ **يتجه العزم باتجاه حركة البرغي وليس باتجاه دورانه**. فإذا تصورنا برغيا يدور مع المسطرة تحت تأثير $\mathbf{F}_1$ فقط في الشكل (9-1)، أي مع عقارب الساعة (جهة الدوران) فإنه يتحرك داخل الورقة (جهة العزم). بينما لو دار البرغي مع دوران المسطرة تحت تأثير $\mathbf{F}_4$ فقط، أي بعكس عقارب الساعة (جهة الدوران) لتحرك خارج الورقة (جهة العزم). **فاتجاه العزم ليس اتجاه الدوران كما يعتقد البعض**. ونلاحظ أن كون قوتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه لايعني بالضرورة أن محصلة عزميهما بالنسبة لمحور ما تساوي الصفر إلا إذا كانتا محمولتين على نفس الخط. فلو عكسنا اتجاه $\mathbf{F}_2$ في الشكل (9-1) لرأينا أن محصلتها و $\mathbf{F}_4$ تساوي الصفر إلا أن المسطرة ستدور بالتأكيد لأن العزم الكلي لهما لايساوي الصفر في هذه الحالة.

ويجدر التنويه إلى أن قيمة واتجاه العزم يعتمدان على محور (أو نقطة) دوران الجسم، لأن ذراع القوة يعتمد عليه مما ينعكس على قيمة و/أو اتجاه العزم. لذا من المهم في مسائل التحريك الدوراني تحديد محور الدوران في كل حالة، وسنرى لاحقا أهمية هذا على ممانعة الجسم للدوران. وتعطى وحدة العزم في النظام الدولي بـ m.N. ومع أنها تماثل وحدة الشغل N.m إلا أنها لاتقدر بجول لأنها ناتجة عن ضرب متجه للمسافة والقوة في هذه الحالة، بينما ينتج الشغل عن الضرب العددي لهما. ولذا تبقى وحدة العزم m.N فقط.

مثل 9-1

ماعزم كل من $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ المؤثرتين على m بالنسبة لنقطة الدوران في الشكل (9-3)؟



الشكل (3-9)

الحل: سنستخدم هذا المثل لكتابة نتائج عامة يمكن اعتمادها في مسائل لاحقة. فنكتب عزم القوة المماسية F_1 بالشكل:

$$\tau_1 = r_1 F_1 \sin\theta_1 = rF_1 \sin 90° = rF_1$$

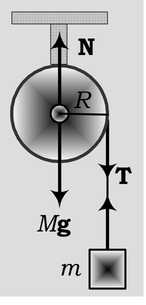
ويتجه هذا العزم حسب قاعدة اليد اليمنى خارج الورقة مثل برغي يدور مع الجسم.

اما عزم القوة القطرية F_2 فهو:

$$\tau_2 = r_2 F_2 \sin\theta_2 = rF_2 \sin 180° = 0$$

وهذه نتيجة مهمة تدل على أن **عزم أي قوة يتقاطع خط تأثيرها مع محور الدوران يساوي الصفر**.

مثل 2-9



الشكل(4-9)

يعلق جسم m بنهاية خيط يمر حول بكرة خشنة كتلتها M ونصف قطرها R مثبتة بحيث يمكنها الدوران حول محور أفقي يمر من مركزها، كما في الشكل (4-9). ماعزم القوى المؤثرة على البكرة؟

الحل: من الواضح أن هناك ثلاث قوى مؤثرة على البكرة هي وزنها $M\mathbf{g}$ ورد فعل نقطة تثبيتها $\mathbf{N}$ وشد الخيط $\mathbf{T}$ الذي يتعلق به الجسم. وبما أن $M\mathbf{g}$ و$\mathbf{N}$ تمران من نقطة دوران البكرة o لذا يكون عزم كل منهما معدوما، ويبقى عز الشد الذي نكتبه من العلاقة (2-9) مباشرة:

$$\tau = RT\sin\theta = RT\sin 90° = RT$$

3-9 قانون نيوتن الأول في التحريك الدوراني

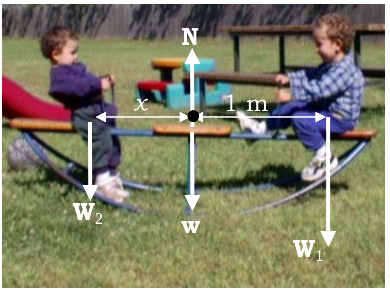
وجدنا في الفقرة السابقة أنه حتى يدور جسم يجب أن يكون هناك عزم قوة مؤثرة عليه. فإن كانت محصلة العزوم مساوية للصفر فإنه لايدور بتاتا. ونعمم هذه النتيجة بالقول: **يبقى الجسم على حالته التحركية الدورانية (أي بسرعة زاوية ثابتة أو مساوية للصفر) بالنسبة لمحور ما إذا كانت محصلة العزوم بالنسبة لذاك المحور مساوية للصفر**. ونطلق على هذه النتيجة اسم **قانون نيوتن الأول في التحريك الدوراني**، ونكتبه بالشكل:

$$\tau_T = 0 \Rightarrow \omega = \text{ثابت} \qquad (3\text{-}9)$$

ونستفيد من القانون الأول في التحريك الدوراني لدراسة الاتزان الدوراني، كما في المثل التالي.

مثل 3-9

يجلس طفل كتلته 35 kg على طرف لوح طوله 2 m يرتكز عند منتصفه. أين يجب أن يجلس أخاه الآخر والذي كتلته 40 kg حتى يبقى اللوح أفقيا، كما في الشكل (9-5)؟



الشكل(9-5)

الحل: من الواضح أنه حتى يبقى اللوح أفقيا يجب أن تكون محصلة العزوم عليه بالنسبة لمحور الدوران المار من نقطة الارتكاز مساوية للصفر. وبالطبع فليس لوزن اللوح أو رد فعل نقطة الارتكاز عزم لأنهما يمران من محور الدوران. ونجد قيمة عزم وزن الطفل الأول بكتابة:

$$\tau_1 = w_1 r_1 \sin\theta_1 = m_1 g(l/2)$$

ويتجه داخل الصفحة (تأكد من ذلك). بينما قيمة عزم وزن الأخ الآخر فيساوي:

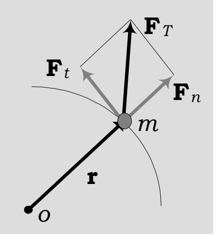
$$\tau_2 = w_2 r_2 \sin\theta_2 = m_2 g x$$

ويتجه خارج الصفحة. فحتى يبقى اللوح أفقيا يجب أن يكون العزمان متساويين بالقيمة. ونكتب:

$$m_1 g(l/2) = m_2 g x \Rightarrow x = m_1 l / 2m_2 = 0.875 \text{ m}$$

4-9 قانون نيوتن الثاني في التحريك الدوراني

نستنتج مماتقدم أنه إذا كانت محصلة العزوم المؤثرة على جسم مساوية للصفر فسيبقى على حالته التحركية الدورانية، أي تبقى سرعته الزاوية ثابتة دوما. ولذا من البديهي أن نقول إنه إذا كانت محصلة العزوم لاتساوي الصفر فستتغير السرعة الزاوية ويكتسب الجسم تسارعا زاويا. وسنربط في هذه الفقرة بين محصلة العزوم (سبب التحريك) والتسارع الزاوي (دليل التحريك).



الشكل (6-9)

لنفترض إذا أن لدينا جسما m يخضع لمحصلة قوى $\mathbf{F}_T$ ويدور حول محور يمر من النقطة o تبعد عنه مسافة r كبيرة بالمقارنة مع أبعاده بحيث يمكن اعتباره جسما نقطيا، كما هو موضح في الشكل(6-9). عندئذ نكتب عزم $\mathbf{F}_T$ بالنسبة لـ o (أو بالأصح بالنسبة لمحور الدوران المار من o عموديا على الورقة)، على النحو:

$$\tau_T = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_T = \mathbf{r}\times(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n)$$

حيث $\mathbf{F}_t$ مركبة محصلة القوى بالاتجاه المماسي لحركة الجسم، و $\mathbf{F}_n$ مركبتها العمودية على هذا المسار. ونلاحظ أن خط قوة $\mathbf{F}_n$ يمر من محور الدوران، أي ليس لها عزم، كما أن الزاوية بين $\mathbf{F}t$ و $\mathbf{r}$ تساوي $90°$. لذا يصير عزم محصلة القوى:

$$\tau_T = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_T = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_t \quad\Rightarrow\quad \tau_T = rF_t$$

وبحسب قانون نيوتن الثاني في التحريك الانتقالي فإن $F_t = ma$، حيث a التسارع المماسي الخطي الذي يرتبط بالتسارع الزاوي α بالعلاقة $a = r\alpha$. فإذا عوضنا عن F_T و a في علاقة العزم نجد:

$$\tau_T = (mr^2)\alpha \tag{4-9}$$

أو

$$\boxed{\tau_T = I\alpha} \tag{5-9}$$

أي أن:

$$\boxed{\alpha = \frac{\tau_T}{I}} \tag{6-9}$$

حيث وضعنا

$$I = mr^2 \tag{7-9}$$

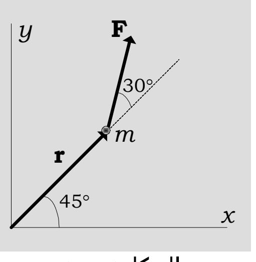
ويطلق عليها اسم **عزم القصور الذاتي** أو (عزم العطالة) *(moment of inertia)* للجسم النقطي بالنسبة لمحور الدوران المار من o. ووحدته، كما نلاحظ من العلاقة السابقة، هي $kg.m^2$.

وتعطي العلاقة (6-9) قانون نيوتن الثاني في التحريك الدوراني والذي نصيغه على النحو: **يتناسب التسارع الزاوي لجسم يتحرك دورانيا حول محور طرديا مع محصلة العزوم المؤثرة عليه بالنسبة لهذا المحور وعكسيا مع عزم قصوره الذاتي بالنسبة لنفس المحور.** ونلاحظ من

هذه النتيجة التناظر الواضح بين التحريك الانتقالي والتحريك الدوراني، وسنرى بعد قليل كيف نستفيد منه لكتابة علاقات الطاقة والزخم الدورانيين مباشرة.

مثل 4-9

يتحرك جسيم نقطي كتلته 2 kg في المستوي xy بحيث يعطى موضعه والقوة المؤثرة عليه في لحظة معينة بالمتجهين الموضحين بالشكل (7-9)، حيث r=2 m وF= 2 N. ماقيمة واتجاه العزم المؤثر على الجسيم بالنسبة لمحور يمر من المبدأ عموديا على الورقة، وماتسارعه الزاوي؟



الشكل(7-9)

الحل: نستخدم العلاقة (1-9) ونكتب العزم على النحو:

$$\tau = rF\sin\theta = (2\,\mathrm{m})(2\,\mathrm{N})\sin 30°$$

أي أن:

$$\tau = 2\,\mathrm{m.N}$$

فقيمة العزم 2 m.N. ويمكن إيجاد اتجاهه من قاعدة اليد اليمنى فنلاحظ أنه خارج الصفحة، أي باتجاه المحور oz. وهذا مماثل لحركة برغي يدور مع الجسم (تحقق من ذلك).

الآن: نجد التسارع الزاوي من قانون التحريك الدوراني فنكتب مباشرة:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\tau}{mr^2} = 0.17\,\mathrm{rad/s^2}$$

5-9 عزم القصور الذاتي

عرفنا عزم القصور الذاتي (أو عزم العطالة) لجسيم نقطي كتلته m بالنسبة لمحور يبعد عنه مسافة r بالعلاقة:

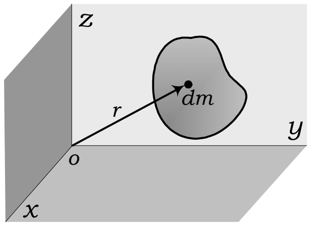
$$I = mr^2$$

وهذه العلاقة صحيحة فقط لجسيم ذو أبعاد صغيرة بالمقارنة مع بعده عن محور الدوران. أما لو كان لدينا منظومة مؤلفة من عدد كبير من الجسيمات أو جسم صلب كبير فإننا نجد عزم القصور الذاتي الكلي بتجزئة الجسم لأجزاء صغيرة وجمع عزوم قصور هذه الأجزاء، أي:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (8-9)$$

حيث r_i بعد الجسيم m_i عن محور الدوران. وإذا صارت المنظومة جسما صلبا فإننا نجزئه لأجزاء عنصرية Δm_i يحتل كل منها حجما صغيرا يمكن تحديد موضعه في الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران بالمتجه $\mathbf{r}_i$، كما في الشكل (8-9). إلا أن عدد هذه الأجزاء العنصرية يصير كبيرا جدا بحيث نكتب:

محور الدوران



$$I = \sum_{i=1}^{n\to\infty} \Delta m_i r_i^2$$

ونجعل العلاقة السابقة تكاملا عندما يصير الجزء العنصري Δm_i صغير لدرجة بحيث نكتبه dm يتحدد موضعه بالمتجه $\mathbf{r}$، ونكتب:

$$I = \int r^2 dm \qquad (9-9)$$

حيث يمتد التكامل على الجسم الصلب كله.

ومما لاشك فيه أن حساب عزم القصور الذاتي يحتاج لمعرفة وافية بطرق التكامل التي يمكن أن تكون معقدة، ولذلك نكتفي في هذا الكتاب بإعطاء عزوم القصور الذاتية للأجسام التي ترد في التمارين والمسائل، كما يمكن البرهان أنه يمكن كتابة عزم القصور الذاتي لأي جسم حول محور ثابت في الفضاء oz بالشكل:

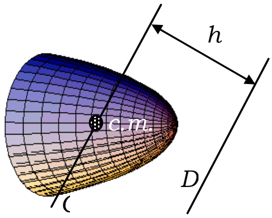
$$\boxed{I_z = M k_z^2} \qquad (10-9)$$

حيث M كتلة الجسم وk_z طول يدعى **نصف قطر الدوران** *(radius of gyration)* ويمثل البعد عن المحور المفروض والذي لو كان كل الجسم متجمعا عنده كنقطة صغيرة لكان عزم قصوره الذاتي هو I_z. ونعطي في الجدول 9-1 قيم k_z لبعض الأجسام الصلبة الشائعة بالنسبة لبعض المحاور التي يمكن أن تدور حولها.

ويمكن في حالات معينة معرفة عزم القصور الذاتي لجسم صلب بالنسبة لمحور ما إذا عرفنا عزم قصوره الذاتي بالنسبة لمحور أو محاور أخرى. ونذكر فيما يلي نظريتين مفيدتين لحسابه:

1- نظرية المحاور المتوازية *(Parallel Axes Theorem)*:

عزم القصور الذاتي لجسم حول محور ما يساوي عزم قصوره الذاتي حول محور مار من مركز كتلته ومواز للمحور الأول مضافا إليه حاصل ضرب كتلة الجسم بمربع البعد بين المحورين.



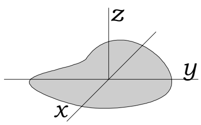
الشكل(9-10)

فإذا كان المحور C يمر من مركز كتلة الجسم ويوازي المحور D على بعد h، كما في الشكل (9-10)، عندئذ نكتب عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة للمحور D على النحو:

$$I_D = I_{c.m.} + Mh^2 \tag{9-11}$$

حيث $I_{c.m}$ عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة للمحور C و M كتلة الجسم.

2- نظرية المحاور المتعامدة *(Normal Axes Theorem)*:



الشكل(9-11)

عزم القصور الذاتي لجسم صلب مستو بالنسبة لمحور عمودي على مستويه يساوي مجموع عزمي قصوره الذاتي بالنسبة لمحورين متعامدين واقعين في نفس المستوي ومتقاطعين عند نقطة مرور المحور المفروض.

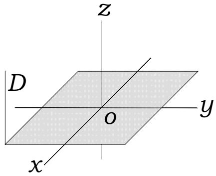
فإذا كان المحور oz عموديا على الجسم الصلب المستوي الموضح بالشكل (9-11) عندئذ يكون عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة له مساويا إلى:

$$I_z = I_x + I_y \tag{9-12}$$

حيث I_x وI_y عزمي القصور الذاتي للجسم بالنسبة للمحورين ox وoy المتعامدين الموجودين في مستويه والمتقاطعين عند النقطة o التي يمر oz منها.

مثل 9-6

ماعزم القصور الذاتي لصفيحة مربعة الشكل كتلتها 2 kg وطول ضلعها 0.5 m حول محور عمودي عليها ويمر من إحدى زواياها، كما في الشكل (9-12)، إذا كان عزم قصورها الذاتي حول قطر فيها يساوي $1.5\ \text{kg.m}^2$؟



الشكل(9-12)

الحل: سنستخدم هذا المثل لتطبيق نظرية المحاور المتعامدة أولا ثم نظرية المحاور المتوازية. فنلاحظ من الشكل (9-12) أن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور oz العمودي عليها والمار من مركزها يساوي، بحسب نظرية المحاور المتعامدة، $I_z = I_x + I_y$. لكن $I_x = I_y$ بسبب تناظر المربع بالنسبة لنصفي قطريه، لذلك نكتب:

$$I_z = 2I_x = 2(1.5\,\text{kg.m}^2) = 3\,\text{kg.m}^2$$

وبحسب نظرية المحاور المتوازية يكون:

$$I_D = I_z + Mh^2 = I_z + M(a/\sqrt{2})^2$$

حيث M كتلة الصفيحة وa طول ضلعها و $h = a/\sqrt{2}$ البعد بين المحور oz والمحور D.

وبتعويض هذه القيم نجد:

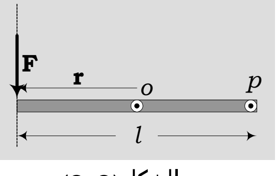
$$I_D = 3.71\ \text{kg.m}^2$$

المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي

نلاحظ من قانون نيوتن الثاني في التحريك الانتقالي $F=ma$، ومن نظيره في التحريك الدوراني $\tau=I\alpha$، أن هناك تشابه واضح بينهما. ففي الحركة الانتقالية نحتاج لقوة (**سبب التحريك**) لتغيير الحالة التحريكية للجسم وإكسابه تسارعا (**دليل التحريك**) فيمانع الجسم هذا التغيير بحسب كتلته (**ممانعة الحركة**). أما في التحريك الدوراني فإن عزم القوة هو سبب التحريك والتسارع الزاوي دليلها بينما يمثل عزم القصور الذاتي ممانعتها. وسبب اهتمامنا بهذا التناظر هو أن نتوصل لفهم المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي. فإذا كانت **الكتلة هي ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحريكية الانتقالية،** فإن **عزم القصور الذاتي هو ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحريكية الدورانية**. إلا أن هناك فرق أساس بين الكميتين، ففي حين تبقى كتلة الجسم ثابتة كيفما تحرك، بمعنى أن ممانعته لاتتأثر بأي تغيير في حالته التحريكية الانتقالية، إلا أن عزم القصور الذاتي يعتمد على طريقة دوران الجسم والمحور الذي يدور حوله. فيمكن لجسم أن يدور حول محور أول تحت تأثير عزم ما بسهولة، إلا أنه قد لايدور بتاتا تحت تأثير نفس العزم حول محور آخر بسبب اختلاف عزم القصور الذاتي له بالنسبة لكل واحد منهما. ولذلك يجب تحديد عزم القصور الذاتي للجسم في كل مسألة بالنسبة للمحور الذي يدور حوله.

مثل 5-9

ما التسارع الزاوي لمسطرة طولها 1m وكتلتها 0.2 kg عندما تؤثر عليها قوة 5 N عمودية عليها عند طرفها إذا درات (أ) حول محور يمر من مركزها o أو (ب) حول محور يمر من طرفها الآخر p، كما هو موضح بالشكل (9-9)؟



الشكل(9-9)

الحل: لحساب التسارع الزاوي نكتب قانون نيوتن الثاني في التحريك الدوراني:

$$\tau_T = I\alpha$$

ففي الحالة (أ) نحسب عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران المار من مركز المسطرة ونكتب:

$$\tau = rF\sin\theta = (0.5\,\mathrm{m})(5\,\mathrm{N})\sin 90° = 2.5\,\mathrm{m.N}$$

كما نجد عزم القصور الذاتي من الجدول 9-1:

$$I = \tfrac{1}{12}ml^2 = \tfrac{1}{12}(0.3\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{kg})^2 = 0.025\,\mathrm{kg.m^2}$$

ومن ثم نحسب التسارع الزاوي:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2.5\,\mathrm{m.N}}{0.025\,\mathrm{kg.m^2}} = 100\,\mathrm{rad/s^2}$$

أما في الحالة (ب) فإن عزم القوة يصير:

$$\tau = rF\sin\theta = (1\,\mathrm{m})(5\,\mathrm{N})\sin 90° = 5\,\mathrm{m.N}$$

بينما يتغير عزم القصور الذاتي حول محور يمر من طرف المسطرة ونجده من الجدول 9-1:

$$I = \tfrac{1}{3}ml^2 = \tfrac{1}{3}(0.3\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{kg})^2 = 0.1\ \mathrm{kg.m^2}$$

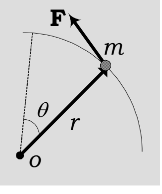
ويصير التسارع في هذه الحالة:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{5\,\mathrm{m.N}}{0.1\,\mathrm{kg.m^2}} = 50\,\mathrm{rad/s^2}$$

ويبين هذا المثل أثر تغيير محور الدوران على عزم القصور الذاتي ومتغيرات التحريك كلها.

9-6 الشغل والطاقة الحركية في التحريك الدوراني

لنفترض أن لدينا جسيما نقطيا m يتحرك بشكل دوراني في مسار دائري نصف قطره r تحت تأثير عزم قوة $\mathbf{F}$ حول محور مار من المركز o، كما في الشكل (9-13). ولنحسب شغل هذه القوة عندما يدور الجسم زاوية θ قاطعا خلال ذلك مسافة خطية s على مساره الدائري، فنكتب:



الشكل (9-13)

$$W = \int F ds$$

ولكن

$$s = r\theta \quad \Rightarrow \quad ds = rd\theta$$

فيصير الشغل:

$$W = \int Frd\theta$$

وحيث أن عزم القوة هو rF نستنتج أن:

$$W = \int \tau d\theta \qquad (13\text{-}9)$$

وإذا كان العزم المؤثر على الجسيم ثابت عندئذ يصير الشغل:

$$\boxed{W = \tau\theta} \qquad (14\text{-}9)$$

وهذا مماثل تماما لشغل قوة ثابتة عندما ينتقل جسم تحت تأثيرها مسافة خطية s ($W=Fs$). فالشغل في كلا الحالتين هو سبب التحريك مضروبا بالإنتقال.
ويمكن حساب الطاقة الحركية الدورانية أيضا بسهولة بكتابة:

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2$$

فنعوض السرعة الخطية بدلالة v السرعة الزاوية ω: $v = r\omega$ فنجد:

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}(m r^2)\omega^2$$

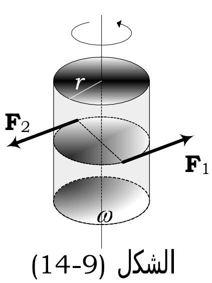
ولكن $I = mr^2$ هو عزم القصور الذاتي للجسيم النقطي بالنسبة لمحور الدوران، لذا تؤول الطاقة الحركية إلى:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I \omega^2} \qquad (15\text{-}9)$$

ومرة أخرى نرى التناظر بين التحريك الانتقالي والدوراني، فالطاقة الحركية هي نصف حاصل ضرب الممانعة بمربع السرعة في كلا الحالتين.

مثل 7-9

ما الطاقة الحركية للأسطوانة الموضحة بالشكل (14-9) بعد ثانيتين من بدء حركتها من السكون تحت تاثير القوتين $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ إذا كانت F_1=5 N وF_2=7 N وr=0.3 m وكان عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محور الدوران 0.2 kg.m^2؟



الشكل (14-9)

الحل: نلاحظ من الشكل (14-9) أن عزم كل قوة يتجه للأعلى (كبرغي يدور مع الاسطوانة)، أي أن العزم الكلي هو:

$$\tau_T = rF_1 \sin 90° + rF_2 \sin 90° = (0.3\,\text{m})(12\,\text{N}) = 3.6\,\text{m.N}$$

ثم نجد التسارع الزاوي من قانون التحريك الدوراني:

$$\alpha = \frac{\tau_T}{I} = \frac{3.6\,\text{m.N}}{0.2\,\text{kg.m}^2} = 18\,\text{rad/s}^2$$

وبما أن التسارع الزاوي ثابت لذا نحسب السرعة الزاوية بعد ثانيتين من علاقات الحركة الدورانية بتسارع ثابت، أي:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (18\,\text{rad/s}^2)(2\,\text{s}) = 36\ \text{rad/s}$$

ومن ثم نحسب الطاقة الحركية الدورانية بكتابة:

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.2\ \text{kg.m}^2)(36\ \text{rad/s})^2 = 129.6\ \text{J}$$

7-9 الزخم الزاوي *(Angular Momentum)*

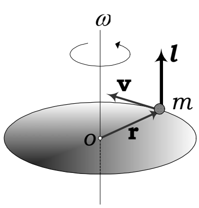
نعرف الزخم الزاوي لجسيم نقطي m يتحرك بسرعة v بالنسبة لمحور يبعد عنه مسافة محددة بالمتجه **r** (مقاسا من محور الدوران إلى الجسيم) بالعلاقة:

$$\boxed{\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \qquad (16\text{-}9)$$

حيث **p**=*m***v** الزخم الخطي للجسيم.

ونلاحظ من هذا التعريف أن الزخم الزاوي كمية متجهة قيمتها:

$$l = mrv\sin\theta \qquad (17\text{-}9)$$



الشكل (9-15)

ويتحدد اتجاهها بقاعدة اليد اليمنى، كما في الشكل (9-15)، بحيث يكون اتجاه الزخم باتجاه حركة برغي يدور مع الجسم. كما نلاحظ أن وحدة الزخم الزاوي في النظام الدولي هي $\text{kg.m}^2/\text{s}$.

مثل 9-8

يتحدد موضع وسرعة كتلة 2 kg في المستوي xy بـ $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{v} = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$ ، حيث تقدر **r** بـ m و**v** بـ m/s. ما زخمها الزاوي بالنسبة للمحور oz؟

الحل: نستخدم العلاقة (9-16) ونكتب:

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = (2\,\text{kg})(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (30\mathbf{i} + 40\mathbf{j})$$

أي أن

$$\boldsymbol{l} = 480\,\mathbf{k}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

فقيمة الزخم الزاوي $480\ \text{kg.m}^2/\text{s}$ ويتجه باتجاه المحور oz.

ويمكن ربط الزخم الزاوي لجسيم بسرعته الزاوية بتعويض السرعة الخطية بدلالة السرعة الزاوية في (9-17) فنجد:

$$l = mrv = mr(r\omega) = (mr^2)\omega$$

أي أن:

$$\boxed{l = I\omega} \tag{18-9}$$

ونلاحظ مرة أخرى تناظر التحريك الدوراني والانتقالي. فالزخم في كلا الحالتين هو حاصل ضرب الممانعة بالسرعة!

8-9 الشكل العام لقانون نيوتن الثاني في التحريك الدوراني

وجدنا في الفقرة (9-5) أن قانون التحريك الدوراني يكتب بالشكل:

$$\tau_T = I\alpha$$

لكن التسارع الزاوي

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

أي أن:

$$\tau_T = I\frac{d\omega}{dt}$$

فإذا افترضنا أن الجسم يدور حول محور ثابت بحيث لايتغير عزم قصوره الذاتي، عندئذ نكتب العلاقة الأخيرة على النحو:

$$\tau_T = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

أو

$$\boxed{\tau_T = \frac{dl}{dt}} \tag{19-9}$$

فمحصلة العزوم المؤثرة على جسم بالنسبة لمحور ما تساوي معدل تغير زخمه الزاوي حول ذلك المحور بالنسبة للزمن. هذا هو الشكل العام لقانون التحريك الدوراني.

9-9 التحريك الدوراني لمنظومة جسيمات والأجسام الصلبة

نعمم في هذه الفقرة النتائج التي حصلنا عليها في التحريك الدوراني على منظومة مؤلفة من عدة جسيمات منفصلة عن بعضها، أو متماسكة كجسم صلب، وتتحرك دورانيا حول محور ثابت. فإذا

كانت الجسيمات m_1 و m_2 و ... و m_n تدور حول محور بحيث أن الزخم الزاوي لكل واحدة بالنسبة له هو l_1 وl_2 و .... وl_n، على الترتيب، عندئذ يكون الزخم الزاوي للمنظومة كلها:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \cdots + \boldsymbol{l}_n \tag{20-9}$$

وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{l}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{l}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\boldsymbol{l}_n}{dt}$$

ولكن $\tau_i = d\mathbf{l}_i / dt$ هو محصلة العزوم المؤثرة على الجسيم i ولذلك تصير (20-9) على النحو:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \tau_T$$

أي أن:

$$\boxed{\tau_T = \frac{d\mathbf{L}}{dt}} \tag{21-9}$$

فمحصلة العزوم المؤثرة على منظومة بالنسبة لمحور ما يساوي معدل تغير الزخم الزاوي الكلي للمنظومة بالنسبة لنفس المحور. هذا هو الشكل العام لقانون تحريك منظومة جسيمات أو جسم صلب. ويمكن كتابة الزخم الزاوي الكلي والطاقة الحركية الكلية للمنظومة بنفس الطريقة إذ نلاحظ أن كل عنصر منها يدور بسرعة زاوية ω_i فنكتب زخمه الزاوي بالشكل:

$$l_i = I_i \omega_i$$

حيث I_i عزم القصور الذاتي للجسيم i بالنسبة لمحور الدوران. فيكون الزخم الزاوي الكلي هو:

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_n = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \cdots + I_n\omega_n = \sum_{i=1}^{n} I_i\omega_i \tag{22-9}$$

وإذا دارت أجزاء المنظومة بنفس السرعة الزاوية ω (كجسم صلب) عندئذ تؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\boxed{L = I_T \omega} \tag{23-9}$$

حيث $I_T = \sum_{i=1}^{n} I_i$ عزم القصور الذاتي الكلي للمنظومة، أو الجسم الصلب.

كما نكتب الطاقة الحركية الكلية للمنظومة:

$$K_T = K_1 + K_2 + \cdots + K_n = \tfrac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2\omega_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2} I_n\omega_n^2$$

أي أن:

$$K_T = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} I_i \omega_i^2 \qquad (24\text{-}9)$$

وأيضا، إذا دارت المنظومة حول محور ما بسرعة زاوية واحدة ω عندئذ نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\boxed{K_T = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2} \qquad (25\text{-}9)$$

ونصل أخيرا لقانون نيوتن الثاني في التحريك الدوراني لمنظومة أو جسم صلب حيث نكتب العلاقة (9-21):

$$\tau_T = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

وبتعويض L من (9-23) نجد:

$$\tau_T = \frac{d(I_T\omega)}{dt}$$

فإذا افترضنا أن عزم القصور الذاتي الكلي للجسم الصلب أو المنظومة لايتغير خلال دورانه، عندئذ نكتب العلاقة الأخيرة على النحو:

$$\tau_T = I_T \frac{d\omega}{dt}$$

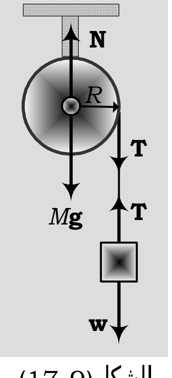
ولكن $\alpha = d\omega / dt$ هو التسارع الزاوي للجسم، ولذلك تصير العلاقة السابقة:

$$\boxed{\tau_T = I_T \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_T}{I_T}} \qquad (26\text{-}9)$$

أي أن التسارع الزاوي يتناسب طردا مع سبب الدوران وعكسا مع ممانعته، كما هو متوقع.

مثل 9-9

تدور بكرة كتلتها M=2 kg ونصف قطرها R=0.2 cm حول محور يمر من مركزها وعمودي على مستويها نتيجة سقوط جسم m=0.5 kg مربوط بخيط طويل ملفوف حول محيط البكرة، كما في الشكل (9-17). (أ) ما تسارع المنظومة وما الشد في الخيط؟ (ب) ماشغل العزم المؤثر على البكرة خلال ثانيتين إذا بدأت من السكون وما التغير في طاقتها الحركية نتيجة ذلك؟



الشكل(9-17)

الحل: سنستخدم هذا المثل لتأكيد بعض النقاط المهمة في التحريك الدوراني للأجسام الصلبة. إذ نرى أن المنظومة مؤلفة من جزأين مرتبطين ببعضهما بواسطة الخيط بحيث يتحرك أحدهما دورانيا (البكرة) والآخر انتقاليا (الجسيم). فعندما نسأل عن تسارع المنظومة نحسب أحدهما، كالتسارع الخطي لـ m أو الزاوي للبكرة، ثم نجد الآخر. وقد وجدنا في المثل 9-2 أن العزم المؤثر على البكرة هو RT حيث R نصف قطرها وT شد الخيط الملفوف حولها، لذا نكتب قانون التحريك الدوراني لها بالشكل:

$$\tau = TR = I\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{I}{R}\alpha \qquad (1)$$

كما نكتب قانون التحريك الانتقالي للجسم m الذي يتحرك شاقوليا للأسفل:

$$mg - T = ma \qquad (2)$$

ونربط بين الحركة الدورانية والانتقالية بملاحظة أن الجسم m مربوط بالخيط الملفوف حول البكرة، وبالتالي إذا تحرك m بأي تسارع a فإن كل نقطة من الخيط ستتحرك بنفس التسارع أيضا بما في ذلك النقطة المماسة لمحيط البكرة. لكن التسارع الخطي لهذه النقطة يرتبط بتسارع البكرة الزاوي α بالعلاقة $a=R\alpha$. أي أن التسارع الخطي لـ m يرتبط بالتسارع المماسي للبكرة بنفس العلاقة بسبب الخيط. لذلك نعوض a في العلاقة (1) أعلاه فنجد:

$$T = \frac{I}{R^2}a \qquad (3)$$

وبجمع (2) و (3) نجد:

$$mg = (\frac{I}{R^2} + m)a$$

أي أن:

$$a = \frac{mg}{(I/R^2 + m)}$$

وهذه نتيجة مهمة لأنها تعطي تسارع منظومة تتحرك دورانا وانتقالا بنفس الوقت، حيث نرى أن دليل التحريك الانتقالي (التسارع الخطي a) يتناسب طردا مع سبب الحركة (mg في هذه الحالة) وعكسا مع الممانعة الكلية وهي الانتقال (الكتلة) والدوران (عزم القصور الذاتي حيث نلاحظ أننا قسمناه على مربع نصف القطر لتتناسب وحدة الممانعة الكلية في هذه الحالة مع الكتلة، أي kg،

لأن وحدة I هي $kg.m^2$). ولذلك يمكن دائما كتابة تسارع أي منظومة لو انتبهنا إلى سبب التحريك وممانعته!

وباستخدام الجدول 9-1 نجد I ثم نعوض قيم m و I و R في علاقة التسارع فنجد:

$$a=3.27\ \mathrm{m/s^2}.$$

كما نحسب الشد في الخيط بتعويض a في (3) فنجد:

$$T=\frac{I}{R^2}\left(\frac{mg}{(I/R^2+m)}\right)=3.92\,\mathrm{N}$$

ثم نحسب التسارع الزاوي من $\alpha=a/R$ فيكون:

$$\alpha=\frac{mg}{R(I/R^2+m)}=16.33\ \mathrm{rad/s^2}$$

(ب) لحساب الشغل نحسب الزاوية التي دارتها البكرة في ثانيتين فنكتب:

$$\theta=\tfrac{1}{2}\alpha t^2+\omega_0 t=\tfrac{1}{2}(16.33\ \mathrm{rad/s^2})(2\ \mathrm{s})^2=32.67\ \mathrm{rad}$$

وبما أن العزم ثابت لذلك نستخدم العلاقة (9-14) لنكتب:

$$W=\tau\theta=TR\theta$$

أي أن

$$W=(3.92\ \mathrm{N})(0.2\ \mathrm{m})(32.67\ \mathrm{rad})=25.6\ \mathrm{J}$$

وبحسب نظرية الشغل والطاقة فإن هذا الشغل يساوي تغير الطاقة الحركية للبكرة.

10-9 الحركة العامة للأجسام الصلبة

لو نظرنا إلى أي جسم يتحرك في الفضاء بشكل عشوائي للاحظنا أنه يمكن أن ينتقل أو يدور أو كلاهما. فالحركة العامة للأجسام تتألف من انتقال كلي من مكان لآخر ودوران حول محور بنفس الوقت. ولو أنعمنا النظر لحركة مقذوف يطير في الهواء لتبين لنا بوضوح كيف ينتقل ويدور معا، كما في الشكل (6-1). وتوصف الحركة الانتقالية بواسطة مركز كتلة الجسم الذي يخضع لمحصلة القوى المؤثرة عليه ولهذا كنا نرسم الأجسام في الفصول الثالث والرابع والخامس نقطا

أو مربعات صغيرة تمثل مركز الكتلة دون أن نغير حجمها أو شكلها أي اهتمام مفترضين أنها تتحرك انتقاليا فقط. ونستخدم قوانين التحريك الانتقالي لمركز الكتلة، أي:

$$\mathbf{F}_T = M\mathbf{a}_{c.m} = \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} \qquad (27\text{-}9)$$

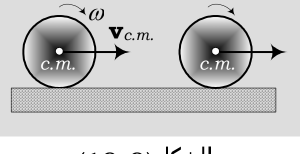
حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم و$\mathbf{a}_{c.m.}$ تسارع مركز الكتلة، بينما $\mathbf{P}_T$ الزخم الخطي الكلي للجسم، أي زخم مركز الكتلة.

أما الحركة الدورانية فتعتمد على المحور الذي يدور حوله الجسم وتوصف بقانون التحريك:

$$\tau_T = I\alpha = \frac{d\mathbf{L}_T}{dt} \qquad (28\text{-}9)$$

حيث τ_T محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على الجسم و$\mathbf{L}_T$ زخمه الزاوي الكلي.

وتعتبر الحركة الدورانية العامة للأجسام الصلبة من أعقد المسائل في الميكانيك ولذا ندرس في هذه الفقرة نوعا واحدا من الحركات وهو التدحرج بدون انزلاق لجسم صلب حول محور. وتكمن أهمية التدحرج بدون انزلاق أن نقطة تماس الجسم مع الأرض لاتنزلق عليها بتاتا ولهذا يجب أن تكون قوة الاحتكاك بين هذه النقطة والأرض قوة احتكاك سكوني في كل لحظة، وبالتالي يكون شغلها مساويا للصفر دوما. أي أن الطاقة الميكانيكية في هذه الحركة تبقى محفوظة. فلو افترضنا أن لدينا قرصا (أو اسطوانة) كتلته m ونصف قطره R يتدحرج بدون انزلاق على مستو، كما في الشكل (9-19)، فإننا نلاحظ أنه ينتقل من مكانه بشكل انسحابي يحدده انتقال مركز كتلته، بينما يدور خلال ذلك حول محور مار من مركزه.



الشكل(9-19)

فإذا كانت سرعة مركز الكتلة هي $\mathbf{v}_{c.m.}$ وسرعة القرص الزاوية ω عندئذ تكون الطاقة الحركية الكلية للقرص هي:

$$K = \tfrac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \tfrac{1}{2} I_{c.m.} \omega^2 \qquad (29\text{-}9)$$

حيث $I_{c.m.}$ عزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران المار من مركز الكتلة.

وحيث أن $v_{c.m.} = R\omega$ لذا تؤول الطاقة الحركية إلى:

$$K = \tfrac{1}{2} (I_{c.m.} / R^2 + m) v_{c.m.}^2 \qquad (30\text{-}9)$$

وهذه الطاقة، كما نتوقع تشمل الانتقال والدوران ونلاحظ أنها حاصل ضرب مربع السرعة بالممانعة الكلية.

الآن لو كتبنا الطاقة الحركية بدلالة السرعة الزاوية لوجدنا:

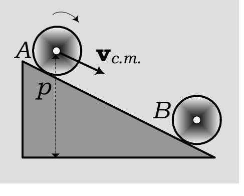
$$K = \tfrac{1}{2}(I_{c.m.} + mR^2)\omega^2 \qquad (31\text{-}9)$$

حيث نلاحظ أن الكمية $(I_{c.m.} + mR^2)$ تمثل عزم القصور الذاتي للجسم حول محور يبعد عن مركز الكتلة مسافة R، ويدعى **محور الدوران الآني** *(instantaneous axis of rotation)* ونرمز له بـ I_p. ولذلك نعيد كتابة الطاقة الحركية بالشكل:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_p \omega^2} \qquad (32\text{-}9)$$

أي أن حركة الجسم تكافئ دورانا فقط ولكن حول محور الدوران الآني الذي يتنقل باستمرار مارا من نقطة تماس الجسم مع السطح الذي يتدحرج عليه في كل لحظة.

مثل 9-10



الشكل(9-20)

تتدحرج اسطوانة كتلتها M ونصف قطرها R على مستو مائل خشن بدون انزلاق، كما في الشكل(9-20). ماسرعة مركز كتلتها عندما تصل لقعر المستوي إذا بدأت من السكون؟

الحل: سنستخدم حفظ الطاقة ونعتبر الحركة دورانا حول المحور الآني للدوران المار من نقطة تماس الاسطوانة مع المستوي، أي p. فإذا كان عزم القصور الذاتي للاسطوانة بالنسبة لمحور الدوران المار من p هو I_p عندئذ نلاحظ أن الطاقة الكلية عند النقطة A هي طاقة وضع فقط:

$$E_A = U = mgh$$

وعند النقطة B هي طاقة حركة فقط:

$$E_B = K = \tfrac{1}{2} I_p \omega^2$$

ونكتب مبدأ حفظ الطاقة:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad mgh = \tfrac{1}{2} I_p \omega^2$$

وبإيجاد $I_{c.m.}$ من الجدول 9-1 والاستفادة من نظرية المحاور المتوازية نلاحظ أن:

$$I_p = I_{c.m.} + mR^2 = \tfrac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \tfrac{3}{2}mR^2$$

لذلك نجد من حفظ الطاقة أن:

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2}mR^2)\omega^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{4gh}{3R^2}}$$

ومنه:

$$\upsilon_{c.m.} = R\omega = \sqrt{4gh/3}$$

11-9 مبدأ حفظ الزخم الزاوي

وجدنا في الفصل السادس أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على منظومة تساوي الصفر فإن الزخم الخطي لها يبقى ثابتا، أي إذا كان $\mathbf{F}_T=0$ فإن ثابت$=\mathbf{P}_T$. بمعنى أنه إذا اختفى سبب الحركة فإن الزخم لايتغير. وسنطبق هذا الشرط في حالة التحريك الدوراني، حيث نلاحظ من قانون التحريك (9-28) أن:

$$\tau_T = \frac{d\mathbf{L}_T}{dt}$$

فإذا كانت محصلة العزوم المؤثرة على منظومة τ_T تساوي الصفر عندئذ نستنتج من العلاقة السابقة أن الزخم الزاوي للنظام لن يتغير، أي:

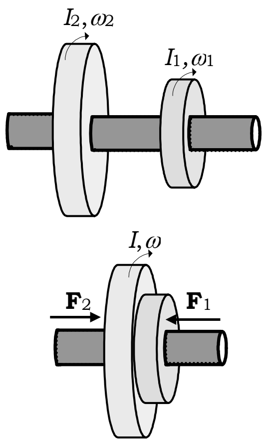
$$\boxed{\tau_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_T = \text{ثابت}} \qquad (33\text{-}9)$$

وهذا هو **مبدأ حفظ الزخم الزاوي** الذي يعتبر من أهم مبادئ الحفظ في الفيزياء وله تطبيقات عدة هامة في كل نواحي الحياة، ومنها ماهو مألوف لكل إنسان. ففي مسابقة الغطس مثلا تعتمد نتيجة المسابقة على عدد الدورات التي يتمها الغطاس عندما يقفز في الهواء قبل أن يصل للماء. ويقوم بذلك عادة بأن يلوي جسمه وهو في الهواء ويطبق ركبتيه على صدره ليجعل عزم قصوره الذاتي أصغر مايمكن، فتزداد سرعته الزاوية. وقبل وصوله للماء بقليل يفرد جسمه ويمد ذراعيه أبعد مايمكن فيزداد عزم قصوره الذاتي وتتناقص سرعته الزاوية. ونلاحظ أن القوة المؤثرة عليه طوال الوقت هي وزنه الذي يمر من مركز كتلته وبالتالي ليس له عزم حول محور الدوران الذي يمر من نفس المركز. وبنفس الطريقة يقوم راقص فني على الجليد بضم يديه لصدره ليتناقص عزم قصوره الذاتي فتزداد سرعته الزاوية وعندما يريد التباطؤ يفرد يديه فيزيد عزم قصوره الذاتي وتتناقص سرعته الزاوية، ويبقى الزخم الزاوي محفوظا في هذه الحالة لأن قوة الوزن ورد

فعل السطح تمران من مركز كتلته وليس لهما عزم حول محور الدوران المار من نفس المركز. وتوضح الصور التالية كيف يقوم الغطاس والراقص الفني على الجليد بحركاتهم.

مثل 9-11

يدور قرصان منفصلان حول محور واحد بسرعتين زاويتين ω_1 و ω_2، على الترتيب، عندما يدفعان بقوتين $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ على امتداد محور الدورن، كما في الشكل (9-21)، إلى أن يلتصقا ببعضهما ويصبحا جسما واحدا. ما السرعة الزاوية النهائية التي سيدور بها النظام الجديد إذا كان عزم القصور الذاتي لهما حول محور الدوران هو I_1 و I_2، على الترتيب؟



الشكل(9-21)

الحل: يستخدم هذا المثل كنظير لحالة التصادم غير المرن كليا في الحركة الخطية. ونرى هنا أن العزم الكلي المؤثر على القرصين قبل وبعد وخلال الالتحام يساوي الصفر لأن القوى الخارجية المطبقة توازي محور الدوران، كما أن عزم وزن كل قرص ورد الفعل يساوي الصفر دوما لأنه يمر من محور الدوران. نستنتج من ذلك أن الزخم الزاوي الكلي للنظام لايتغير، ونكتب:

$$L\ (\text{قبل الالتصاق}) = L\ (\text{بعد الالتصاق})$$

حيث:

$$L\ (\text{قبل الالتصاق}) = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

أما بعد الالتصاق فيصير القرصان جسما واحدا له نفس السرعة الزاوية ω وعزم قصوره الذاتي مجموع عزمي القصور الذاتي للقرصين المنفصلين، أي أن:

$$L\ (\text{بعد الالتصاق}) = (I_1 + I_2)\omega$$

وبحسب مبدأ حفظ الزخم الزاوي يكون:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

12-9 الاتزان العام للأجسام الصلبة

نختتم هذا الفصل بدراسة الشروط اللازم توافرها حتى يتزن أي جسم صلب اتزانا سكونيا عاما، بمعنى أنه لاينتقل من مكانه ولايدور على الإطلاق.

فقد وجدنا في الفصل الرابع أن شرط اتزان جسم ضد الحركة الانتقالية، بحسب قانون نيوتن الأول، هو:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad (34\text{-}9)$$

ويطلق على هذه العلاقة اسم **الشرط الأول للاتزان**، وتكافئ العلاقات الثلاث:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_y = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_z = 0 \qquad (35\text{-}9)$$

حيث F_x و F_y و F_z مركبات محصلة القوى على محاور إحداثية مناسبة.

كما وجدنا في هذا الفصل أن كون محصلة القوى المؤثرة على نظام مساوية للصفر لاتضمن عدم دورانه إلا إذا كانت محصلة العزوم معدومة، أي:

$$\sum \tau_T = 0 \qquad (36\text{-}9)$$

وهذا هو **الشرط الثاني للاتزان العام**، وتكافي العلاقات:

$$\sum \tau_x = 0 \quad \text{و} \quad \sum \tau_y = 0 \quad \text{و} \quad \sum \tau_z = 0 \qquad (37\text{-}9)$$

حيث τ_x وτ_y وτ_z مركبات محصلة العزوم على ثلاثة محاور إحداثية مناسبة، لأن شرط عدم دوران جسم بتاتا يعني أن عزوم القوى المؤثرة عليه يجب أن تكون معدومة بالنسبة **لأي** منظومة محاور نختارها. ولذا نختار محاور تجعل حل معادلات الاتزان سهلا، كما سنرى في الأمثلة اللاحقة.

وبما أن دراسة الاتزان العام لجسم صلب قد يكون معقدا أحيانا لذا نركز في هذه الفقرة على اتزان الأجسام ضد الدوران حول محور ثابت فقط. ولذلك يكون للعزوم مركبة واحدة فقط حول

ذاك المحور، كما تصير القوى المؤثرة على الجسم موجودة في مستو (لأن المحور ثابت). ولذلك يصير شرط الاتزان الأول:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_y = 0 \tag{38-9}$$

وشرط الاتزان الثاني:

$$\sum \tau = 0 \tag{39-9}$$

ونستنتج من هذه العلاقات أن عدد المجاهيل الممكن إيجادها في أي مسألة اتزان عام لايتجاوز ثلاثة، وإلا لوجب توفر شروط إضافية لحل المسألة كاملة.

وفيما يلي بعض الخطوات المفيدة لحل مسائل اتزان أجسام صلبة مرتبطة ببعضها:

1- نختار أحد الأجسام ونوضح القوى المؤثرة عليه.

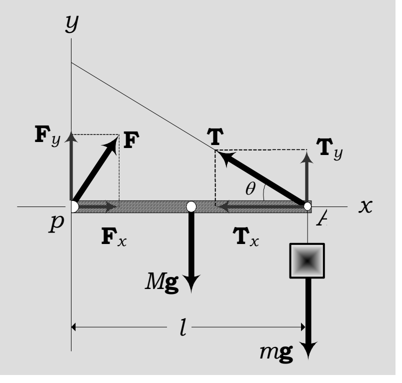
2- نختار منظومة محاور إحداثية مناسبة ونحدد مركبات القوى عليها والعزوم بالنسبة لأحدها.

3- نكتب معادلات الاتزان (9-38) و (9-39) لذاك الجسم ونحلها.

4- ننتقل إلى جسم آخر إن وجد ونكرر الخطوات السابقة.

مثل 9-11

يثبت عمود متجانس طوله l=2 m وكتلته M=25 kg بحائط شاقولي بواسطة مفصلة ويحفظ بوضع أفقي بربطه بحبل مشدود مثبت بالحائط، كما في الشكل (9-21). مامركبات رد فعل نقطة التثبيت عند المفصلة p إذا علق حمل m=200 kg بنهاية العمود؟



الشكل(9-21)

الحل: هذا المثل مناسب لتوضح الخطوات التي نتبعها لحل مسائل الاتزان العام للأجسام الصلبة.

فنلاحظ أولا أن العمود يخضع لقوة وزنه $\mathbf{W}=M\mathbf{g}$، ووزن الحمل المعلق $\mathbf{w}=m\mathbf{g}$، وشد الحبل $\mathbf{T}$، ورد فعل نقطة التثبيت $\mathbf{F}$. فنعتبر محورين ox و oy، كما هو موضح بالشكل (9-21)، ونحلل القوى عليهما فنجد من شرط الاتزان الأول:

$$F_z - T_x = 0$$

و

$$F_y + T_y - mg - Mg = 0$$

كما نحسب عزوم هذه القوى بالنسبة لمحور مار من نقطة تعليق الحمل عموديا على المستوي xy عند A، حيث نلاحظ أن عزم قوة رد فعل نقطة التثبيت يعاكس عزم وزن العمود (لماذا)، فنجد:

$$-F_y(l) + Mg(l/2) = 0$$

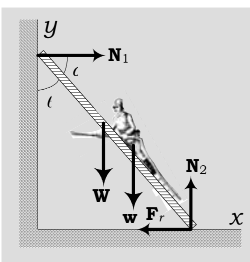
كما أن:

$$\tan\theta = \frac{T_y}{T_x}$$

وبحل هذه المعادلات نجد: $F_x = T_x = 4970 \text{ N}$ و $F_y = 122 \text{ N}$ و $T_y = 2870 \text{ N}$.

مثل 9-12

يقف رجل كتلته m=65 kg على بعد 1 m من بداية سلم طوله l=3 m وكتلته M=10 kg ويستند على حائط أملس صانعا معه زاوية θ=25°، كما في الشكل (9-22). ماذا يجب أن يكون معامل الاحتكاك بين السلم والأرض حتى يبقى النظام ساكنا؟



الشكل(9-22)

الحل: نلاحظ من الشكل (9-22) أن القوى المؤثرة على المنظومة المؤلفة من الرجل والسلم معا هي وزن السلم **W** ووزن الرجل **w**، ورد فعل الحائط $\mathbf{N}_1$، وقوة الاحتكاك السكوني $\mathbf{F}_s$، ورد فعل الأرض $\mathbf{N}_2$. فحتى يتزن النظام يجب أن تكون محصلة القوى مساوية للصفر، ومحصلة العزوم حول أي محور نختاره معدومة أيضا. فنكتب الشرط الأول للاتزان:

$$\mathbf{W} + \mathbf{w} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_s = 0$$

ونأخذ مركبتي العلاقة السابقة على المحورين ox و oy الموضحين بالشكل، نجد:

$$W + w - N_2 = 0$$

و

$$N_1 - F_s = 0$$

كما نختار العزوم حول محور يمر من نقطة تماس السلم مع الأرض ونكتب محصلتها تساوي الصفر، حيث نلاحظ أن عزم رد فعل الحائط يعاكس عزم وزن السلم والرجل (لماذا؟):

$$W(l/2)\sin\theta + w(l/3)\sin\theta - N_1(l)\sin\alpha = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد: μ=0.2.

الجدول 9-1: نصف قطر دوران بعض الأجسام الصلبة $(I = Mk_z^2)$

الجسم	محور الدوران	k_z^2
سلك رفيع طوله a	عمودي على السلك عند المركز	$a^2/12$
	عمودي على السلك عند الطرف	$a^2/3$
صفيحة مستطيلة مستوية أبعادها a و b	مواز لطرفها b مارا من المركز	$a^2/12$
	عمودي عليها ويمر من المركز	$(a^2+b^2)/3$
قرص رقيق نصف قطره a	يمر من المركز في مستويه	$a^2/4$
	يمر من المركز عمودي على مستويه	$a^2/2$
حلقة رقيقة نصف قطرها a	يمر من المركز في مستويها	$a^2/2$
	يمر من المركز عمودي على مستويها	a^2
قشرة اسطوانية نصف قطرها a	محورها الطولي	a^2
اسطوانة صلبة قائمة نصف قطرها a وطولها b	محورها الطولي	$a^2/2$
	يمر من المركز عمودي على محورها	$(a^2+b^2)/12$
كرة صلبة ممتلئة نصف قطرها a	أي قطر فيها	$2a^2/5$
قشرة كروية رقيقة نصف قطرها a	يمر من المركز عمودي على الوجه ab ومواز للطرف c	$3a^2/2$
		$3a^2/2$
متوازي مستطيلات صلب قائم أبعاده a وb و c	يمر من المركز عمودي على الوجه ab وموازيا للطرف c	$(a^2+b^2)/12$

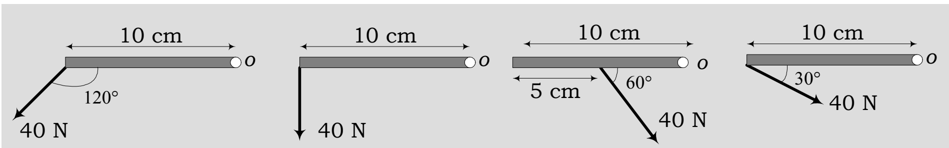
ملخص الفصل

عزم قوة	$\tau = rF\sin\theta$
عزم القصور الذاتي	$I = \sum m_i r_i^2$
قانون التحريك الدوراني	$\tau = I\alpha$
الزخم الزاوي	$l = rp\sin\theta = I\omega$
الشكل العام لقانون التحريك الدوراني	$\tau = \frac{dL}{dt}$
مبدأ حفظ الزخم الزاوي	$\tau = 0 \Rightarrow L =$ ثابت
شغل العزم	$W = \int \tau d\theta$
الطاقة الحركية الدورانية	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
شرطي اتزان الأجسام	$\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ و $\sum \tau = 0$

تمارين ومسائل

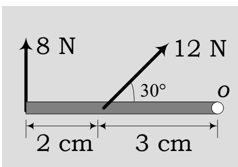
متغيرات الحركة الدورانية

1-9 ماالعزم المؤثر على القضيب الموضح في الأشكال (9-24) بالنسبة للنقطة o؟



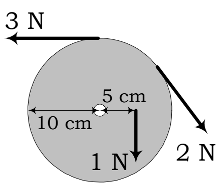
الأشكال (9-24)

2-9 مامحصلة عزمي القوتين الموضحتين في الشكل (9-25) بالنسبة للنقطة o؟



الشكل (9-25)

3-9 مامحصلة العزوم الناتجة عن القوى الثلاث المؤثرة على الاسطوانة الموضحة في الشكل (9-26) بالنسبة للنقطة o؟

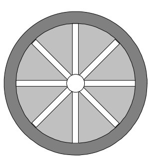


الشكل (9-26)

4-9 ماعزم القوة $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ N المؤثرة عند النقطة p المحددة بالمتجه $\mathbf{r} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ m بالنسبة لنقطة المبدأ o؟

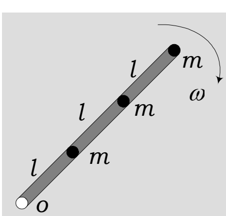
عزم القصور الذاتي

5-9 ماعزم القصور الذاتي للإطار الموضح في الشكل (9-27) حول محور عمودي عليه عند مركزه إذا كان قطره 60 cm وكتلة محيطه 1 kg وكتلة كل قطر فيه 0.4 kg؟



الشكل (9-27)

6-9 تتوزع ثلاث كتل متساوية على قضيب مهمل الكتلة طوله $3l$، كما في الشكل (9-28). ماعزم القصور الذاتي للمنظومة بالنسبة للنقطة o؟



الشكل (9-28)

7-9 ماعزم القصور الذاتي للمنظومة المذكورة في المسألة 9-6 بالنسبة لـ o إذا كانت كتلة القضيب M؟

8-9 ماعزم القصور الذاتي لأربع كتل متماثلة قيمة الواحدة 3 kg موضوعة على رؤوس مربع طول ضلعه 0.5 m بالنسبة لمحور عمودي عليه في مركزه؟

9-9 ماعزم القصور الذاتي لصفيحة مستطيلة كتلتها M=4 kg طولها 40 cm وعرضها 30 cm حول محور يمر من مركزها موازيا لطولها أو لعرضها، إذا كان عزم قصورها الذاتي حول ضلع فيها هو $Ma^2/3$ حيث a طول الضلع الآخر؟

قانون التحريك الدوراني

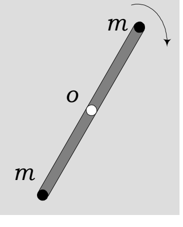
10-9 تشد بكرة نصف قطرها 0.5 m وعزم قصورها الذاتي حول محور دورانها 4 kg.m^2 بحبل ملفوف حولها ومشدود بقوة 50 N. ماتسارعها الزاوي وعدد الدورات التي تدورها خلال 10 s إذا بدأت من السكون؟

11-9 يدور حجر لشحذ الأدوات قطره 25 cm وكتلته 50 kg بسرعة زاوية 900 rev/min عندما يضغط العامل بطرف فأس بقوة 200 N عمودية على محيطه فيقف الحجر بعد 10 s. ما العزم المؤثر على الحجر ومامعامل الاحتكاك بينه وبين حافة الفأس؟

12-9 ماتسارع الاسطوانة المعطاة في المسألة 4-9 إذا كانت كتلتها 2 kg وتدور حول محورها؟

13-9 تتحرك بكرة نصف قطرها 10 cm وعزم قصورها الذاتي 0.001 kg.m^2 تحت تأثير قوة مماسية متغيرة $F = 0.5t + 0.3t^2$ N. ماسرعة البكرة بعد ثلاث ثواني من بدء الحركة؟

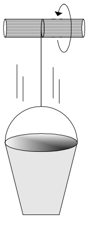
14-9 تعلق كتلة 3 kg ببكرة مثبتة بالسقف قطرها 80 cm وعزم قصورها الذاتي 0.4 kg.m^2 بواسطة خيط ملفوف حول البكرة عدة لفات، كما في الشكل (17-9). (أ) ما الشد في الخيط عندما تهبط الكتلة 2 m؟ (ب) ماسرعة الكتلة عندئذ وما الزمن اللازم لتهبط تلك المسافة؟ (ج) ما الطاقة الحركية للمنظومة عندئذ؟



15-9 يدور نظام مؤلف من كتلتين متساويتين $m_1=m_2=1$ kg معلقتين على طرفي قضيب طوله 1.2 m وكتلته 6.4 kg في مستو شاقولي حول محور يمر من مركز كتلته بسرعة زاوية 39 rev/s ثم يتوقف بعد 32 s بسبب قوى احتكاك مؤثرة عليه. (أ) ما التسارع الزاوي للنظام؟ (ب) ما العزم المؤثر عليه؟ (ج) ماشغل الاحتكاك؟ (د) ماعدد الدورات التي دارها إلى أن توقف؟ (هـ) ما الإجابات التي تتغير لو كانت قوى الاحتكاك غير ثابتة؟

الشغل والطاقة

16-9 تتدحرج حلقة كتلتها 150 kg ونصف قطرها 3 m على أرض أفقية بحيث تكون سرعة مركز كتلتها 0.15 m/s. ما الشغل اللازم لإيقافها؟



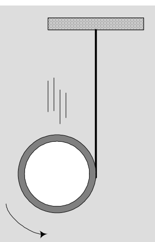
17-9 يعلق سطل ماء كتلته 20 kg بحبل ملفوف حول محور اسطواني نصف قطره 0.2 m وكتلته 20 kg مثبت أفقيا فوق فوهة بئر ماء ثم يترك ليسقط مسافة 20 m. (أ) ما الشد في الحبل خلال سقوط السطل؟ (ب) ما السرعة التي

يصل إليها عند ذلك العمق؟ (ج) مازمن سقوطه؟ (د) ماقوة رد فعل نقطة تثبيت المحور الاسطواني عليه؟

18-9 يتناقص الزخم الزاوي لإطار عزم قصـوره الذاتي $0.12\ kg.m^2$ من $3\ kg.m^2/s$ إلى $2\ kg.m^2/s$ خلال $1.5\ s$. (أ) مامتوسط العزم المؤثر على الإطار؟ (ب) ماعدد الدورات التي دارها خلال ذلك؟ (ج) ما الشغل المبذول عليه وما متوسط القدرة الناتجة؟

19-9 ما العزم اللازم لإيقاف قرص كتلته $50\ kg$ ونصف قطره $0.5\ m$ يدور بسرعة زاوية $300\ rev/min$ خلال $10\ s$؟ (ب) ما الشغل المبذول على القرص وما طاقته الحركية الابتدائية؟

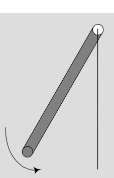
20-9 تدور بكرة كتلتها $300\ kg$ وعزم قصورها الذاتي حول محور دورانها $675\ kg.m^2$ بدءا من السكون تحت تأثير عزم $2000\ m.N$. (أ) ما تسارعها الزاوي؟ (ب) ماسرعتها الزاوية الابتدائية بعد أربع دورات؟ (ج) ما الشغل المبذول عليها خلال هذه الفترة؟



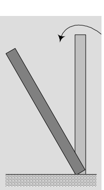
21-9 تسقط حلقة كتلتها $1.2\ kg$ ونصف قطرها $8\ cm$ وملفوف حولها خيط طويل مثبت طرفه بالسقف، نحو الأسفل. ما الشد في الخيط وما الزمن اللازم لتسقط الحلقة $0.5\ m$ وما سرعتها الزاوية عندئذ؟

22-9 ترتبط كتلتان m_1=4 kg و m_2=6 kg ببعضهما بواسطة حبل يمر حول بكرة خشنة نصف قطرها $40\ cm$، كما في آلة آتوود، بحيث تتحرك m_2 في اللحظة t=0 بسرعة $2\ m/s$ نحو الأعلى لترتفع مسافة $2\ m$ وتقف لحظيا وتعود للسقوط نحو الأسفل. (أ) ما الزمن اللازم لـ m_2 لتصل لأعلى ارتفاع لها؟ (ب) ما الشد في الخيط عندئذ؟ (ج) ماعزم القصور الذاتي للبكرة؟

23-9 ماتسارع النظام المذكور في المسألة السابقة إذا كان نصف قطر البكرة $0.2\ m$ وعزم قصورها الذاتي حول محور دورانها $0.32\ kg.m^2$ وما السرعة التي ستصل بها m_1 للأرض إذا كان ارتفاعها الابتدائي $3\ m$ وبدأت من السكون؟

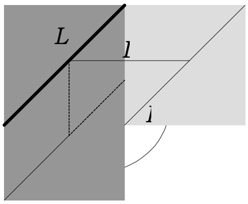


24-9 يعلق قضيب طوله L وكتلته m من طرفه ويترك ليهتز في مستو شاقولي فيصل لأخفض نقطة من مساره بسرعة زاوية ω. ما أعلى مسافة يرتفعها بالنسبة لهذه النقطة؟



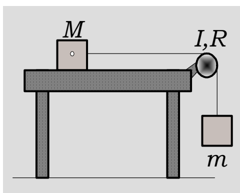
25-9 تتزن مسطرة طولها $1\ m$ وكتلتها m في وضع شاقولي ثم تترك لتهوي بحيث تبقى نقطة تماسها مع الأرض في مكانها. ماسرعة طرفها الآخر لحظة ارتطامها بالأرض؟

26-9 يدور نظام من ثلاثة قضبان متماثلة مربوطة ببعضها على شكل حرف H حول ضلعه الجانبي بدءا من السكون في مستو أفقي، كما في الشكل (9-30). ماسرعته الزاوية عندما يصل لمستو شاقولي؟



الشكل (9-30)

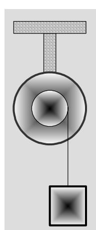
27-9 تربط الكتلتان m و M ببعضهما بواسطة خيط يمر على بكرة خشنة نصف قطرها R وعزم قصورها الذاتي حول محورها I، كما في الشكل (9-31). ما التسارع الزاوي للبكرة وما تسارع كل كتلة إذا لم يكن هناك أي احتكاك بين M والطاولة؟



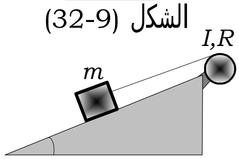
الشكل (9-31)

28-9 (أ) ما التسارع الزاوي للبكرة في المسألة السابقة إذا درات زاوية θ خلال زمن t وطبيعة السطح الذي تتحرك عليه M مجهولة؟ (ب) ما تسارع الكتل وما الشد في الخيط؟

29-9 يعلق جسم كتلته 1 kg ببكرة بواسطة خيط ملفوف عدة لفات حول قرص صغير في منتصفها نصف قطره 5 cm، كما في الشكل (9-32)، ثم يترك ليسقط مسافة 1.75 m بدءا من السكون خلال 5 s. ماعزم القصور الذاتي للبكرة؟


الشكل (9-32)

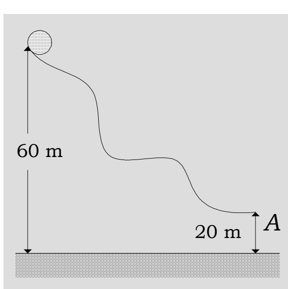
30-9 ينزلق الجسم m=5 kg في الشكل (9-33) على المستوي المائل الخشن (μ=0.25) بينما تدور البكرة نتيجة ارتباطها به بواسطة الخيط الملفوف حولها. ماتسارع الجسم والشد في الخيط إذا كان نصف قطر البكرة 0.2 m وعزم قصورها الذاتي حول محور دورانها 0.2 kg.m^2؟



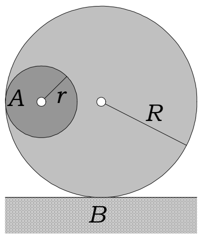
الشكل (9-33)

حفظ الطاقة

31-9 تتدحرج كرة صغيرة (r=2 cm, m=0.5 kg) ممتلئة بدءا من السكون على الطريق الموضحة بالشكل (9-34) إلى أن تقلع عند الوضع الأفقي A كمقذوف. ما المسافة الأفقية بين A وموقع ارتطام الكرة بالأرض؟

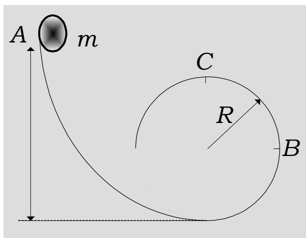


الشكل(9-34)



الشكل(9-35)

9-32 تتدحرج كرة صغيرة ممتلئة كتلتها m ونصف قطرها r بدون انزلاق على السطح الداخلي لكرة كبيرة ثابتة نصف قطرها R بدءا من السكون عند A، كما في الشكل (9-35). (أ) ما الطاقة الحركية للكرة الصغيرة عند B؟ (ب) ما الجزء الانتقالي والدوراني من هذه الطاقة؟ (ج) ما القوة العمودية التي تؤثر بها الكرة الصغيرة على الكبيرة عند B؟

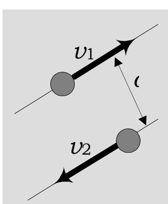


الشكل(9-36)

9-33 تتدحرج كرة صغيرة ممتلئة كتلتها m ونصف قطرها r بدون انزلاق على السطح الداخلي للساك الموضح بالشكل (9-36). (أ) ما أقل ارتفاع يجب أن تسقط منه m حتى لاتفقد التماس مع السلك عند C بفرض $R >> r$؟ (ب) ماقيمة المركبة الأفقية للقوة المؤثرة على m عند B إذا بدأت حركتها من ارتفاع $6R$؟

9-34 يتدحرج جسم صلب كتلته m ونصف قطره R بسرعة v على أرض أفقية ملساء تنتهي بمستو مائل للأعلى فيرتفع الجسم مسافة $3v^2/4g$ ويقف لحظيا ثم يعود أدراجه. ماعزم القصور الذاتي لهذا الجسم وماذا يحتمل أن يكون شكله؟

الزخم الزاوي



9-35 تتحرك كتلتان متساويتان $m_1=m_2$ على خطين متوازيين يبعدان d عن بعضهما بسرعتين متساويتين $v_1=v_2$ باتجاهين متعاكسين. برهن أن الزخم الزاوي للمنظومة هو نفسه حول أي نقطة.

9-36 يتحرك جسيم كتلته 2 kg في المستوي xy عندما يمر بالنقطة $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ m بسرعة $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ m/s . مازخمه الزاوي بالنسبة لمحور عمودي على المستوي xy ويمر من نقطة المبدأ أومن النقطة (2,2)؟

9-37 يتحرك جسيم كتلته 3 kg بسرعة $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ m/s عندما يمر بالموضع $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ m (أ) ما الزخم الزاوي للجسيم بالنسبة لنقطة المبدأ؟ (ب) ما العزم المؤثر عليه إذا خضع لقوة $\mathbf{F} = -7\mathbf{i}$ N؟ (ج) مامعدل تغير زخمه الزاوي بالنسبة للزمن؟

9-38 ما الزخم الزاوي للنظام المذكور في المسألة 9-7 عندما يدور بسرعة زاوية ω حول o وماطاقته الحركية؟

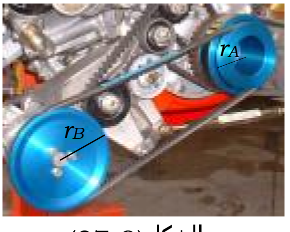
حفظ الزخم الزاوي

9-39 يقف رجل على منصة تدور بسرعة زاوية 1 rev/s حاملا في يديه الممدودتين كتلتين متماثلتين ثم يضم يديه لصدره ليتناقص عزم قصوره الذاتي من $6\ kg.m^2$ إلى $2\ kg.m^2$. ماسرعته الزاوية الجديدة وما التغير في طاقته الحركية؟

9-40 يدور إطار عزم قصوره الذاتي I بسرعة زاوية 800 rev/min عندما يوصل بمحور دورانه إطار آخر ساكن عزم قصوره الذاتي $2I$. (أ) ما السرعة الزاوية الجديدة للنظام؟ (ب) ماتغير الطاقة الحركية له؟

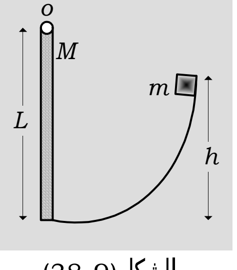
9-41* تركض حشرة كتلتها m بسرعة v بالنسبة للأرض، حول محيط قرص أفقي نصف قطره R وعزم قصوره الذاتي I محمول على محور شاقولي يدور بسرعة زاوية ω_0 بعكس حركة الحشرة. ماسرعة النظام الزاوية عندما تتوقف الحشرة عن الحركة؟ هل الطاقة محفوظة في هذه المسألة؟

9-42* تقف طفلة كتلتها M على طرف مرجوحة دورانية ساكنة كتلتها $10M$ ونصف قطرها R وعزم قصورها الذاتي I. ما السرعة الزاوية التي سيتحرك بها النظام عندما تقذف الطفلة حجرا كتلته m بشكل أفقي مماسيا للمرجوحة بسرعة v بالنسبة للأرض؟ (ب) ماسرعة الطفلة الخطية بعد قذفها للحجر مباشرة؟



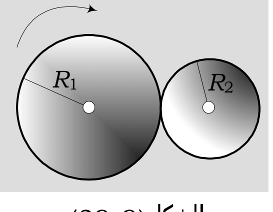
الشكل(9-37)

9-43 يرتبط قرصان A وB ببعضهما بواسطة حزام لاينزلق عليهما، كما في الشكل(9-37). (أ) ما النسبة I_A/I_B إذا دار القرصان بنفس الزخم الزاوي؟ (ب) ماهذه النسبة إذا دارا بنفس الطاقة الحركية؟



الشكل(9-38)

9-44 ينزلق الجسم m في الشكل(9-38) بدون احتكاك على الجزء الدائري ليصطدم بعد ذلك بالمسطرة الشاقولية ويلتصق بها تماما. ما السرعة الزاوية التي سيتحرك بها النظام وما أعلى ارتفاع سيصل إليه؟



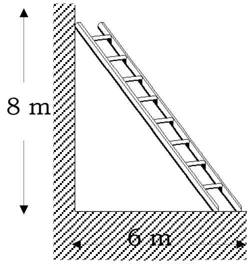
الشكل(9-39)

9-45* تدور أسطوانة كبيرة نصف قطرها R_1 وعزم قصورها الذاتي I_1 حول محورها بسرعة زاوية ω_0 عندما تقرب منها أسطوانة صغيرة ساكنة نصف قطرها R_2 وعزم قصورها الذاتي I_2 بحيث تتلامس الأسطوانتان مماسيا وتدور الصغيرة بسبب قوى الاحتكاك إلى أن تنتهي مرحلة الانزلاق بينهما لتدور كل

واحدة بعكس الأخرى، كما في الشكل(9-39). ما السرعة الزاوية للاسطوانة الصغيرة؟ هل الزخم الزاوي محفوظ في هذه المسألة؟

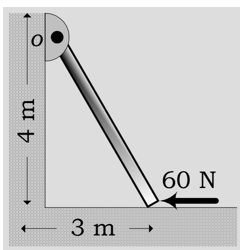
الاتزان العام للأجسام

9-46 يستند سلم طوله 10 m ووزنه 400 N على حائط أملس صانعا زاوية 53° مع الأرض الخشنة، كما في الشكل (9-40). ماقيمة رد فعل الأرض والحائط على السلم؟



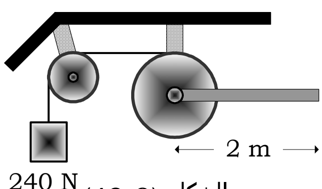
الشكل (9-40)

9-47 يعلق قضيب خفيف طوله 5 m بحائط شاقولي بواسطة مفصلة عديمة الاحتكاك بينما يستند طرفه الآخر على أرض ملساء خاضعا لقوة أفقية 60 N، كما في الشكل (9-41). مامركبتي القوة التي يؤثر بها القضيب على المفصلة؟



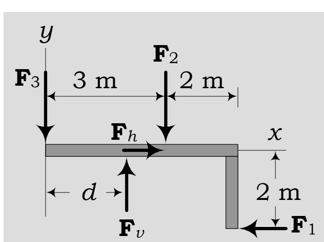
الشكل (9-41)

9-48 يثبت طرف قضيب طوله 2 m عند مركز قرص نصف قطره 25 cm معلق من مركزه ليبقى النظام أفقيا بواسطة حبل ملفوف حول القرص ويمر على بكرة ملساء وينتهي بحمل وزنه 240 N، كما في الشكل (9-42). (أ) ماوزن القضيب؟ (ب) ما الزاوية التي سيصنعها القضيب مع الأفق إذا علقنا حمل 20 N بنهايته؟



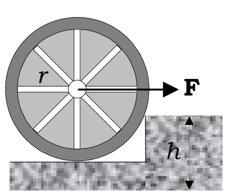
الشكل (9-42)

9-49 ماقيمة F_h و F_v وأين يجب تطبيق كل واحدة حتى يبقى الهيكل الموضح بالشكل (9-43) متزنا إذا كان F_1=20 N وF_2=10 N وF_3=5 N؟



الشكل (9-43)

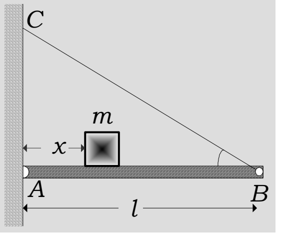
9-50 ما القوة الأفقية اللازم تطبيقها عند مركز الإطار الموضح بالشكل (9-44) حتى يمكن تجاوز العتبة إذا كان وزنه w ونصف قطره r؟



الشكل (9-44)

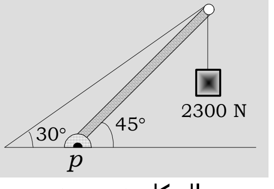
9-51 يوضع جسم m على قضيب كتلته M وطوله L مثبت بحائط شاقولي عند النقطة A ومربوط طرفه الآخر بخيط معلق بالحائط عند النقطة C، كما في الشكل (3-45). ما الشد في الخيط وما القوة الأفقية والعمودية المؤثرة على

القضيب عند A؟



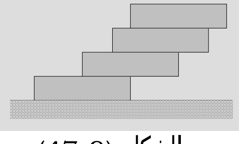
الشكل(3-45)

9-52 يعلق حمل 2300 N بواسطة عمود تثبيت وزنه 450 N، كما هو موضح بالشكل (9-46). ما الشد في الحبل ورد فعل الأرض عند P؟



الشكل (9-46)

9-53 تتزن أربع قطع متماثلة من الآجر طول الواحدة L موضوعة فوق بعضها بحيث تتجاوز كل واحدة طرف التي تحتها بمسافة معينة، كما في الشكل (9-46). برهن أن أكبر امتداد للقطعة العلوية عن التي تحتها هو $L/6$ وأكبر امتداد للقطعة الثالثة عن طرف الثانية $L/4$ وأكبر امتداد للثانية عن الأولى $L/2$.


الشكل (9-47)

9-54 يطلق على أي قوتين متساويتين $F_1=F_2=F$، متعاكستين ومحمولتين على خطين متوازيين يبعدان d عن بعضهما اسم **مزدوجة** *(couple)*. برهن أن عزم المزدوجة حول محور يمر من أي نقطة بين الخطين عموديا على مستويهما يساوي Fd؟

من علماء الإسلام

الشيخ الطبيب علاء الدين علي بن أبي الحزم المعروف **بابن النفيس** ولد في دمشق عام 607 هـ وتوفي عام 687 هـ. يعد من أكبر علماء عصره في اللغة والفلسفة وتدريس الفقه والحديث، وله كتب عديدة في هذه المجالات منها "الرسالة الكاملية في السيرة النبوية" وتتجلى عبقريته بالتفكير والاستنباط وكشف معطيات هامة جدا في الطب، وتحديدا في فزيولوجيا الدوران الدموي، فشرح كيفية الدوران الدموي ما بين الرئتين والقلب (أي ما يعرف بالدورة الدموية الصغرى) وذلك قبل العالم الإنكليزي هارفي (الذي ينسب إليه اكتشافها) بعدة قرون، وله مؤلفات ثمينة تصبغها الجرأة وحرية الرأي، منها **الشامل** وهو عبارة عن موسوعة طبية تتألف من 300 مجلد، **ورسالة في أوجاع الأطفال ومقالة في النبض** و**شرح قانون ابن سينا** و**بغية الفطن من علم البدن**، وغيرها. في نهاية حياته وهب ماله الكثير وداره وأملاكه وكل ما يتعلق به إلى بيمارستان المنصوري في القاهرة خدمة للعلم.


ابن النفيس

الفصل العاشر

الحركة الاهتزازية

(Oscillations)

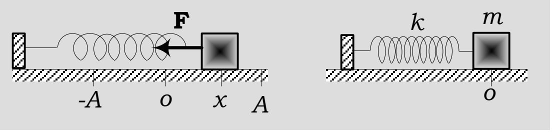
10-1 تمهيد:

تعتبر الحركة الاهتزازية للأجسام والمنظومات الميكانيكية من أهم مجالات الدراسة في الفيزياء، فكل نظام ميكانيكي قادر على القيام بحركة اهتزازية بشكل ما. ومعظم الآلات والأجهزة التي نستعملها في حياتنا اليومية تحوي أنظمة مهتزة من زنبركات وكتل وغيرها، ومن أكثر المناظر الطبيعية التي نراها يوميا أجسام تهتز كبندولات بسيطة. فقلب الإنسان ينبض باستمرار بشكل اهتزازي منتظم، والصوت ينتج عن اهتزاز ذرات الهواء بينما ينتج الضوء عن اهتزاز مجال كهربائي وآخر مغناطيسي، وهكذا.

فالحركة الاهتزازية تظهر في كل مكان وبأشكال مختلفة، إلا أنها تتميز بخاصية أساسية هي **التكرار الرتيب** *(periodicity)*، أي أنها تتكرر بنفس الشكل في فترات زمنية متساوية، كدوران القمر حول الأرض، أو اهتزاز بندول ساعة حائط كبيرة، وغير ذلك. لذا نظرا لأهمية الحركة الاهتزازية في الطبيعة سندرس في هذا الفصل أهم خواصها كالزمن اللازم لأي نظام ليقوم باهتزازة واحدة، أي **دور الحركة**، وعدد الاهتزازات بالثانية، أي **تردده**ا. ونربط بين الحركة الاهتزازية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة، ونحدد طاقة الوضع والحركة والطاقة الكلية لهزاز بسيط غير متخامد. ثم ندرس بعض الأمثلة لأجسام مهتزة شائعة في الطبيعة. ونتعرض أخيرا بإيجاز للاهتزازات المتخامدة والاهتزازات القسرية المدفوعة بقوة خارجية دورية.

2-10 معادلة الحركة لهزاز بسيط

عندما ندرس حركة اهتزازية ما فإننا نرغب في معرفة موضع الجسم المهتز وسرعته وتسارعه في كل لحظة من الزمن. وللقيام بذلك لابد من معرفة القوة المحركة للجسم التي تسبب اهتزازه باستمرار. وأبسط مثل على ذلك اهتزاز جسم m مربوط بنهاية زنبرك k على سطح أفقي أملس، كما في الشكل (10-1). ونتساءل كيف يتغير بعد الجسم x عن موضع الاتزان o مع مرور الزمن عندما نبعده مسافة عظمى A ونتركه ليهتز بشكل حر؟ وما الذي يعيده أو يحاول إعادته لذلك الوضع؟



(أ) الجسم عند وضع الاتزان (ب) الجسم يبعد x عن الاتزان

الشكل (10-1)

من الواضح أن الجسم سيخضع عند A لقوة إرجاع من الزنبرك تحاول إعادته لوضع الاتزان o بحيث يتناقص بعده عنه تدريجيا إلى أن يصل إليه بسرعة معينة فيتجاوزه ضاغطا الزنبرك ليصل لبعد $A-$ على الجهة الأخرى من وضع الاتزان، حيث تصير قوة الإرجاع أكبر مايمكن مرة أخرى لكن بالاتجاه المعاكس، وتسحب الجسم باتجاه o ثانية، وهكذا. أي أن بعد الجسم x عن وضع الاتزان o لايتزايد أو يتناقص باستمرار بل يتغير من A إلى $A-$ ليعود ثانية لـ A، وهكذا دواليك. وإذا لم يكن هناك قوى تخامد، كالاحتكاك أو أي مصدر آخر، فستبقى الاهتزازات دائمة للأبد.

ولتحديد الكيفية التي تتغير بها x مع مرور الزمن نكتب معادلة الحركة للجسم m ملاحظين أن القوة المؤثرة عليه هي قوة إرجاع التي عرفناها في الفصل الخامس بالعلاقة:

$$F = -kx \qquad (1\text{-}10)$$

ولذا نكتب قانون التحريك:

$$F = ma = -kx$$

ومنه

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (2\text{-}10)$$

وهذه نتيجة مهمة حيث نلاحظ أن تسارع m ليس ثابتا بل يتغير مع بعد الجسم عن وضع الاتزان، وبالتالي لانستطيع تطبيق علاقات الحركة بتسارع ثابت لمعرفة موضع وسرعة الجسم في أي لحظة من الزمن. لهذا نكتب (10-2) بالشكل:

$$a = -\frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

أو

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \qquad (10\text{-}3)$$

وتربط (10-3) بين المتغير x ومشتقه الثاني $\ddot{x}$. وهي معادلة معقدة يتم حلها عادة من معرفة متقدمة في المعادلات التفاضلية. ولذلك سنحدد حلها، أي كيفية ارتباط x بالزمن t، من التجربة. فنلاحظ أن بعد الجسم x عن وضع الاتزان يتغير دوريا بين قيميتين A و $-A$ ، لذا نجرب الحل التالي:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \phi)} \qquad (10\text{-}4)$$

حيث A و ϕ ثابتين نحددهما بحيث تصير (10-4) محققة للمعادلة (10-3).

للتأكد من صحة (10-4) نشتقها مرتين ونعوض في (10-3) فنجد:

$$A(-m\omega_0^2 + k)\cos(\omega_0 t + \phi) = (-m\omega_0^2 + k)x \overset{?}{=} 0$$

أي أن الحل (10-4) يحقق (10-3) إذا كان:

$$-m\omega_0^2 + k = 0$$

أو

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad (10\text{-}5)$$

فالحل المفترض (10-4) صحيح طالما كانت (10-5) محققة، التي نلاحظ منها أن ω_0 تعتمد فقط على خواص النظام المهتز من كتلة وزنبرك فقط، كما أن وحداتها هي 1/s أي وحدات تردد لذا نسميها **التردد الزاوي** للحركة الاهتزازية، أو **السرعة الزاوية** *(angular frequency)*. وسنشرح سبب هذه التسمية بعد قليل.

ونعرف دور الحركة بأنه الزمن اللازم للجسم ليقوم باهتزازة واحدة كاملة. فإذا افترضنا أنه كان في الموضع x في اللحظة t فسيعود لنفس الموضع وبنفس السرعة والاتجاه بعد زمن يساوي دورا واحدا. ونحصل على هذا الدور بكتابة موضع الجسم في اللحظة الأولى:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

وفي اللحظة الثانية

$$x(t+T) = A\cos[\omega_0 (t+T) + \phi]$$

فحتى يكون

$$x(t) = x(t+T)$$

يجب أن يكون

$$A\cos[\omega_0 (t+T) + \phi] = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

وهذا يتحقق إذا كان:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \qquad (6\text{-}10)$$

ونستنتج من هذه العلاقة أن دور الحركة يتناسب عكسا مع سرعتها الزاوية.

كما نعرف تردد الحركة بعدد الدورات التي يقوم بها الجسم في ثانية واحدة. فإذا كان الجسم يستغرق T ثانية للقيام باهتزازة واحدة فإنه يقوم بـ $1/T$ اهتزازة في ثانية واحدة، أي أن التردد هو:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}} \qquad (7\text{-}10)$$

ونلاحظ من هذه النتيجة أن وحدة f هي نفس وحدة ω_0 لكن أصغر منها بمقدار 2π، ولهذا تكتب وحدة f هرتز (Hz=1/s) بينما تكتب وحدة ω_0 راديان/ثانية (rad/s) للتمييز بينهما على الرغم من أنهما يمثلان نفس الكمية الفيزيائية، أي السرعة الزاوية.

ونسمي f، أو ω_0 ، **التردد الطبيعي** *(natural frequency)* لأنه لو تركنا النظام يهتز لوحده دون أن نؤثر عليه بأي قوة غير طبيعية لاهتز بهذا التردد الذي يعتمد على خواص النظام فقط من كتلة وزنبرك. وهذه نتيجة هامة وبسيطة بنفس الوقت لأنها توضح أنه مهما فعلنا للتاثير على اهتزازات نظام بسيط في البداية، كأن نسحب الكتلة m في الشكل (10-1) مسافة أكبر عن وضع اتزانها أو إعطائها سرعة ابتدائية بيدنا، فإنه سيهتز بتردده الطبيعي فقط بعد أن ندعه وشأنه، وهذا بالفعل طبيعي جدا!

من جهة أخرى، نلاحظ أن الحل العام الذي حصلنا عليه يحوي ثابتين A وϕ، وتمثل A **سعة الحركة العظمى** *(maximum amplitude)*، أي أكبر ابتعاد للجسم المهتز عن وضع الاتزان، وليس لها أي علاقة بكيفية الحركة وسرعتها وما إلى ذلك بل تعتمد فقط على الإزاحة الابتدائية التي اكتسبها الجسم من العامل الخارجي الذي سبب حركته. بينما نطلق على ϕ اسم **الطور الابتدائي** *(initial phase)*، لأنها تحدد حالة الجسم لحظة بداية مراقبته. ويمكن توضيح هذا باختصار إذا افترضنا أنه عندما بدأنا مراقبة الجسم (t=0) كان في الموضع x=A، أي أبعد مايمكن عن وضع الاتزان. عندئذ نجد من حل معادلة الحركة، أي العلاقة (10-4)، أن:

$$A = A\cos(\omega_0(0)+\phi) \;\;\Rightarrow\;\; \cos\phi = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \phi = 0$$

أما لو كان الجسم عند وضع الاتزان (x=0) لحظة بداية مراقبته (t=0) عندئذ نجد من (10-4):

$$0 = A\cos(\omega_0(0)+\phi) \;\;\Rightarrow\;\; \cos\phi = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \phi = \pi/2$$

وبنفس الطريقة نحدد قيمة ϕ بحسب الحالة الابتدائية للجسم ولذلك نسميه **الطور الابتدائي**، بينما نطلق على الزاوية $(\omega_0 t+\phi)$ اسم **الطور الآني** *(instantaneous phase)* التي تعطينا بعد الجسم الآني في أي لحظة عن وضع الاتزان.

ويمكن معرفة سرعة وتسارع الجسم المهتز في أي لحظة من الزمن باشتقاق (10-4) مرتين فنجد:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t+\phi) \tag{10-8}$$

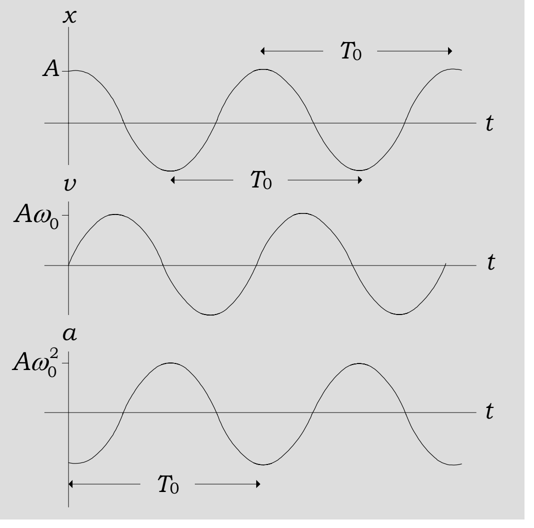
و

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\phi) \tag{10-9}$$

ويوضح الشكل (10-2) تغيرات x وv وa مع الزمن.

ونلاحظ من هذه المنحنيات أنه عندما يكون الجسم أبعد مايمكن عن وضع الاتزان (x=±A) فإن سرعته تكون مساوية للصفر بينما يكون تسارعه أكبر مايمكن لكن بإشارة معاكسة ($a=\mp A\omega_0^2$) (أي أن القوة المؤثرة على الجسم أكبر مايمكن وتحاول إعادته بالاتجاه المعاكس). لذا نسمي كلا من هذين الموضعين **نقطة دوران** *(turning point)*. أما عندما يمر الجسم بوضع الاتزان (x=0) فإن سرعته تصير أكبر مايمكن ($v=\pm A\omega_0$) حيث تدل الإشارة على اتجاه الحركة بالنسبة لمحور

السينات، كما يكون تسارعه هناك (أي القوة المؤثرة عليه) مساويا للصفر. وسنرى أهمية ذلك بالنسبة لطاقة الحركة وطاقة الوضع.



الشكل(10-1)

وهذه النتائج صحيحة سواء اهتز النظام أفقيا ذهابا وإيابا، أو شاقوليا للأعلى والأسفل.

مثل 10-1

يعلق جسم كتلته 0.25 kg بزنبرك ثابته 100 N/m على سطح افقي أملس ويبعد عن وضع الاتزان مسافة 8 cm ويترك ليهتز بشكل حر. اكتب معادلة الحركة وجد دورها وترددها.

الحل: لإيجاد معادلة الحركة نكتب من العلاقة (10-4):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

حيث السرعة الزاوية ω_0 فنجدها من ثوابت النظام المهتز (العلاقة (10-5)):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\ \text{N/m}}{0.25\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

ومن ثم نجد دور الحركة:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.03\ \text{s}$$

والتردد

$$f = \frac{1}{T} = 3.2 \text{ Hz}$$

ونحدد الثابتين A و ϕ من شروط البدء، فنلاحظ أنه في اللحظة t=0 كان الجسم عند x=8 cm بينما كانت سرعته تساوي الصفر. وبتعويض ذلك في معادلتي الموضع x والسرعة v نجد:

$$8 = A\cos(\omega_0(0)+\phi)$$

و

$$0 = -A\omega_0 \sin(\omega_0(0)+\phi)$$

فنستنتج من المعادلة الثانية أن:

$$\phi = 0$$

وبالتعويض في الأولى نجد:

$$A\text{=8 cm}$$

أخيرا نكتب معادلة الحركة بالشكل:

$$x = 8\cos(20t) \text{ cm}$$

3-10 طاقة الهزاز البسيط

وجدنا في الفصل الخامس أن طاقة وضع جسم m مربوط بزنبرك k ويبعد مسافة x عن وضع الاتزان هي:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

وبتعويض x من (4-10) نجد:

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\phi) \tag{10-10}$$

كما نجد طاقة الحركة بكتابة:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

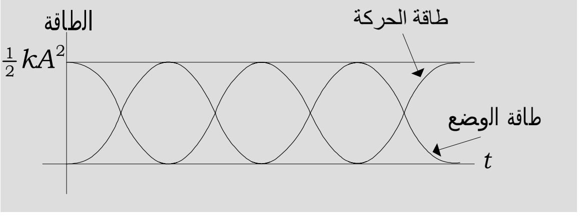
أي أن:

$$K = \tfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\phi) \tag{11-10}$$

ونجد الطاقة الميكانيكية الكلية لهزاز بسيط بجمع طاقة الوضع وطاقة الحركة، وملاحظة أن $m\omega_0^2 = k$ وأن $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$:

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}kA^2} \tag{12-10}$$

فالطاقة الميكانيكية الكلية للهزاز البسيط ثابتة دوما طالما كانت القوى المؤثرة عليه محافظة، أي لايوجد احتكاك، بينما تتغير كل من طاقة الوضع والحركة بشكل جيبي بحيث أنه عندما تكون إحداهما أكبر مايمكن تكون الأخرى أصغر مايمكن، والعكس بالعكس، لكن مجموعهما يبقى ثابت دوما، كما هو موضح بالشكل (3-10).



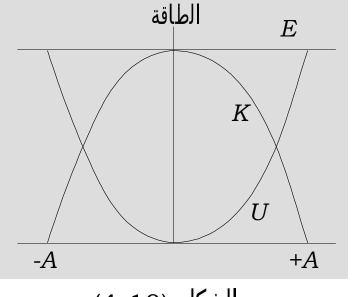
الشكل (3-10)

ويمكن أن نستفيد من ثبات الطاقة الميكانيكية الكلية لهزاز بسيط للربط بين سرعته وموضعه في أي لحظة بكتابة:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

أي أن:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega_0\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (13\text{-}10)$$



الشكل (4-10)

ونلاحظ من هذه العلاقة مباشرة أن السرعة v تصير مساوية للصفر عندما $x=\pm A$ ، عند نقطتي الدوران، حيث تكون طاقة الحركة معدومة وطاقة الوضع أكبر مايمكن. بينما تصير السرعة أكبر مايمكن عندما يمر الجسم من وضع الاتزان $x=0$ وتكون طاقته الحركية أكبر مايمكن وطاقة وضعه معدومة. وفي كل الأحوال تبقى الطاقة الميكانيكية الكلية ثابتة، كما في الشكل (4-10).

مثل 2-10

مابعد الجسم المذكور في المثل 1-10 عن وضع الاتزان عندما تكون طاقة وضعه مساوية لطاقته الحركية؟

الحل: نكتب طاقة الوضع:

$$U = \tfrac{1}{2} k x^2$$

وطاقة الحركة:

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \omega_0^2 (A^2 - x^2)$$

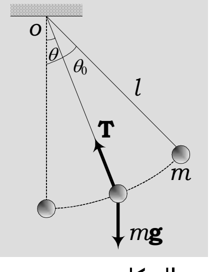
وبمساواة هاتين الكميتين وملاحظة أن $k = m\omega_0^2$ نجد:

$$x = \pm A/\sqrt{2} = \pm 0.7A = \pm 5.6 \text{ cm}$$

4-10 البندول *(Pendulum)*

تعتبر حركة البندول مثالا نموذجيا لحركة اهتزازية ذات تطبيقات واسعة في الصناعات والأدوات والألعاب، كرقاص ساعة حائط، وأرجوحة طفل، وغيرها. وهناك أنواع مختلفة من البندولات التي يمكن دراستها ونبدأ بأبسطها وهو البندول البسيط، ثم ندرس البندول الفيزيائي المركب وأخيرا بندول الفتل.

1- البندول البسيط *(The Simple Pendulum)*



الشكل (5-10)

يتألف البندول البسيط من كتلة صغيرة m مربوطة بخيط خفيف طوله l مثبت بالسقف، كما في الشكـل (5-10). فإذا أبعدنا m عن وضع الاتزان إلى أن تصير زاوية الخيط مع الشاقول θ_0 ثم تركناها تهوي عندئذ نلاحظ أن البندول يتأرجح جيئة وذهابا وتتغير الزاوية θ بشكل دوري بين θ_0 و $-\theta_0$.

ونجد معادلة حركة البندول بملاحظة أنه يتحرك دورانيا حول محور يمر من نقطة التعليق o. لذا نستخدم قانون التحريك الدوراني ونكتب:

$$\tau_0 = I_0 \alpha$$

حيث τ_0 محصلة العزوم حول محور الدوران المار من النقطة o في الشكل (5-10) و I_0 عزم القصور الذاتي للكتلة m بالنسبة لنفس المحور، و α تسارعها الزاوي.

ونلاحظ أن القوى المؤثرة على الكتلة m هي الوزن $m\mathbf{g}$ والشد $\mathbf{T}$. لكن عزم الأخير يساوي الصفر لأنه يمر من محور الدوران لذا يبقى عزم الوزن الذي يساوي:

$$\tau_{mg} = -mgl\sin\theta$$

حيث وضعنا إشارته سالبة لأنه يعاكس حركة الجسم، اي أنه **عزم إرجاع**.
كما نجد عزم القصور الذاتي للكتلة m بالنسبة لمحور الدوران باعتبارها كتلة نقطية، أي أن $I_0 = ml^2$ لذا تصير معادلة الحركة:

$$-mgl\sin\theta = ml^2\alpha$$

أي أن:

$$\alpha = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

فالتسارع الزاوي غير ثابت ولايمكن استخدام معادلات الحركة الدورانية بتسارع ثابت التي حصلنا عليها في الفصل الثامن، ولذلك نكتب العلاقة السابقة على النحو:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

أو

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (14\text{-}10)$$

وبوضع

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (15\text{-}10)$$

تصير العلاقة (14-10) على النحو:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad (16\text{-}10)$$

وهذه هي معادلة الحركة لهزاز بسيط وتربط بين المتغير θ ومشتقه الثاني. ومما لاشك فيه أن حل هذه المعادلة صعب للغاية، إلا أنه إذا بقيت زاوية اهتزاز البندول θ صغيرة عندئذ يمكن استبدالها بالجيب ($\sin\theta$) في العلاقة السابقة لتؤول إلى:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (17\text{-}10)$$

وهذه النتيجة مماثلة لمعادلة جسم مربوط بزنبرك (3-10) تماما باستثناء أن x صارت θ ولذا نكتب حل (17-10) بالشكل:

$$\boxed{\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \phi)} \qquad (18\text{-}10)$$

حيث θ_0 السعة العظمى، أي أكبر زاوية يصنعها البندول مع الشاقول، وϕ الطور الابتدائي الذي يتحدد من الشروط الابتدائية للحركة.

ونجد دور وتردد الحركة من السرعة الزاوية مباشرة بكتابة:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (19\text{-}10)$$

و

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad (20\text{-}10)$$

فالتردد الطبيعي للبندول يعتمد على طوله وتسارع الجاذبية فقط ومستقل عن كتلته تماما.

مثل 3-10

يهتز بندول بسيط كتلته 1 kg وطوله 1 m اهتزازات صغيرة سعتها العظمى 0.1 rad. مادور الحركة وترددها؟ ما أكبر سرعة للاهتزازات؟

الحل: لنحسب السرعة الزاوية:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8\,\mathrm{m/s^2}}{1\,\mathrm{m}}} = 3.13\,\mathrm{rad/s}$$

ثم نحسب دور الحركة بكتابة:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2.0\ \mathrm{s}$$

والتردد:

$$f = \frac{1}{T} = 0.5\ \mathrm{Hz}$$

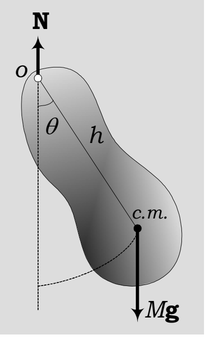
أما سرعة الاهتزازات فنجدها باشتقاق (10-18) فنجد:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t + \phi)$$

ومن الواضح أن هذه السرعة تكون أكبر مايمكن عندما $\sin(\omega_0 t + \phi) = \pm 1$ أي أنها تساوي:

$$\dot{\theta}_{\max} = \pm\omega_0\theta_0 = 0.03\ \mathrm{rad/s}$$

2- البندول الفيزيائي (المركب) *(The Compound Pendulum)*



الشكل (10-6)

يطلق اسم البندول الفيزيائي (أو المركب) على كل جسم صلب يهتز حول محور أفقي، كساعة حائط كبيرة، أو أرجوحة طفل في حديقة. وتتميز حركة البندول الفيزيائي بأنها دورية مثل البندول البسيط تماما، ومن ثم لتحديد دورها وترددها علينا كتابة معادلة الحركة كما فعلنا سابقا.

لنعتبر إذا بندولا فيزيائيا، كما في الشكل (10-6)، ولنكتب قانون التحريك الدوراني له:

$$\tau_0 = I_0 \alpha$$

حيث τ_0 محصلة العزوم حول محور الدوران المار من o و I_0 عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة لنفس المحور و α تسارعه الزاوي.

ونلاحظ من الشكل (10-6) أن القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه $M\mathbf{g}$ الواقع عند مركز كتلته ورد فعل نقطة التعليق. ويكون عزم الأخيرة صفرا لأنها تمر من محور الدوران، أما عزم الوزن فيساوي:

$$\tau_{Mg} = -Mgh\sin\theta$$

حيث h البعد بين مركز الكتلة ومحور الدوران، كما اعتبرنا الإشارة سالبة لأن العزم يعاكس حركة البندول، أي أنه عزم إرجاع كما رأينا في حالة البندول البسيط.

وتصير معادلة الحركة بالشكل:

$$-Mgh\sin\theta = I_o \alpha$$

أي أن:

$$\alpha = -\frac{Mgh}{I_o}\sin\theta$$

فالتسارع الزاوي غير ثابت ولايمكن استخدام معادلات الحركة بتسارع ثابت، تماما مثل حالة البندول البسيط، ولذا نستخدم نفس المناقشة ونفترض اهتزازات صغيرة بحيث نستبدل θ بـ $\sin\theta$ في العلاقة الأخيرة لتصير:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I_0}\theta = 0$$

أو

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \qquad (21\text{-}10)$$

حيث وضعنا السرعة الزاوية:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgh}{I_0}}} \qquad (22\text{-}10)$$

فيصير الدور

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgh}}} \qquad (23\text{-}10)$$

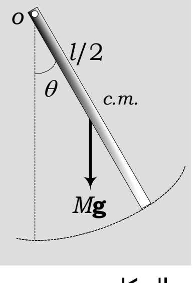
والتردد الطبيعي:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgh}{I_0}}} \qquad (24\text{-}10)$$

فالدور والتردد يعتمدان بالطبع على خواص البندول المهتز من كتلة وعزم قصور ذاتي وشكله الهندسي (موقع مركز الكتلة) فقط طالما بقيت اهتزازاته صغيرة.

مثل 4-10

تتأرجح مسطرة رفيعة متجانسة كتلتها 2 kg وطولها 0.3 m حول محور أفقي يمر من طرفها، كما في الشكل (7-10). ماتردد الاهتزازات الصغيرة؟

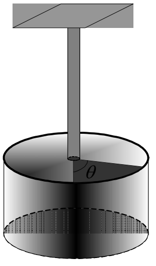


الشكل (7-10)

الحل: لإيجاد تردد الاهتزازات الصغيرة نحدد بعد مركز الكتلة عن محور الدوران المار من o في الشكل (7-10) حيث نلاحظ أنه يساوي نصف طولها، أي أن $h=l/2$، كما نجد أن عزم القصور الذاتي للمسطرة حول محور يمر من طرفها من الجدول 9-1 يساوي $Ml^2/3$. وتؤول (24-10) إلى:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgh}{I_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgl/2}{Ml^2/3}} = 1.1 \text{ Hz}$$

3- بندول الفتل *(The Torsion Pendulum)*



الشكل (8-10)

يتألف بندول الفتل في أبسط أشكاله من قرص رقيق كتلته M ونصف قطره r يهتز في مستو أفقي حول سلك صلب شاقولي مثبت في مركزه بحيث ينفتل إذا دار القرص بأي زاوية صغيرة فيؤثر السلك عليه بعزم إرجاع يتناسب مع زاوية الدوران ويعاكسها، كما في الشكل (8-10)، بحيث نكتب:

$$\tau = -\kappa\theta \qquad (25\text{-}10)$$

حيث κ **ثابت فتل السلك** *(torsion constant)* ويعتمد على نوعه وصلابته. ووحدة κ، كما نرى من العلاقة السابقة، هي m.N/rad.

من ثم نكتب معادلة التحريك الدوراني للبندول:

$$-\kappa\theta = I_0\ddot{\theta} \qquad (26\text{-}10)$$

حيث I_0 عزم القصور الذاتي للقرص حول محور دورانه.

وبإصلاح العلاقة السابقة نجد:

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_0}\theta = 0$$

أو:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (27\text{-}10)$$

حيث وضعنا:

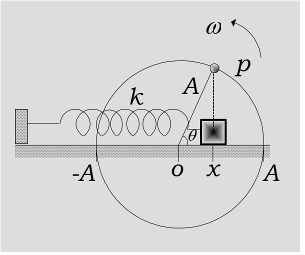
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_0}}} \qquad (28\text{-}10)$$

وهذه المعادلة تمثل حركة اهتزازية بسيطة ترددها الطبيعي:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I_0}} \qquad (29\text{-}10)$$

ويعتمد هذا التردد، بالطبع، على خواص النظام المهتز فقط من عزم قصور ذاتي وثابت فتل السلك.

5-10 التمثيل الدائري للحركة الاهتزازية البسيطة *(Rotor diagram)*



الشكل(9-10)

ليكن لدينا جسما p يدور بسرعة زاوية ثابتة ω_0 على مسار دائري نصف قطره A، كما في الشكل(9-10)، بحيث يكون لحظة بداية مراقبته عند نقطة ما على المحيط صانعا زاوية ϕ مع محور السينات، ثم يدور خلال زمن t زاوية $\omega_0 t$ فتصير الزاوية الكلية التي يصنعها مع محور السينات هي $\theta = \omega_0 t + \phi$، عندئذ لو أخذنا مسقط حركة الجسم (ظله) m على هذا المحور وتتبعنا حركته عندما يدور الجسم p دورة أو أكثر على الدائرة للاحظنا أنه يتحرك جيئة وذهابا على قطر الدائرة وكأنه مربوط بزنبرك على سطح أفقي، حيث يدل مركز الدائرة o على وضع الاتزان، بينما تكون A السعة العظمى للحركة. أما البعد الآني للجسم عن وضع الاتزان فنجده بأخذ مركبة المتجه **op** على ox فنكتب:

$$x = A\cos\theta$$

ولكن $\theta = \omega_0 t + \phi$ ولذلك تصير العلاقة السابقة:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

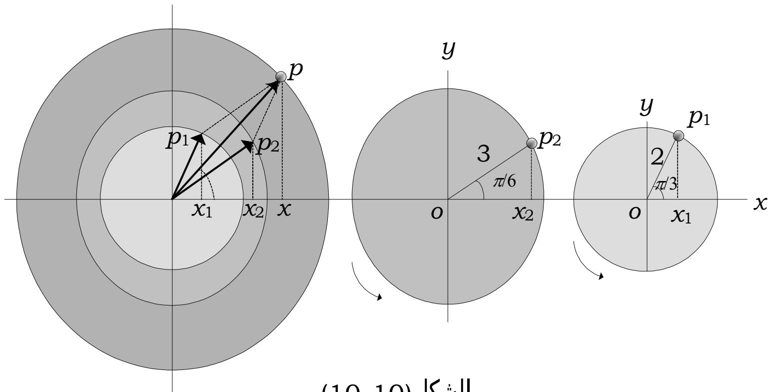
وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها سابقا. **فيمكن اعتبار كل حركة اهتزازية مركبة حركة دائرية منتظمة على قطر الدائرة.** ولذلك تدعى ω_0 في الحركة الاهتزازية السرعة الزاوية ووحدتها rad/s لأنها تمثل السرعة الزاوية للحركة الدائرية.

ويستفاد من التمثيل الدائري للحركات الاهتزازية عندما نريد جمع حركتين اهتزازيتين لهما نفس التردد وتتمان على نفس الخط ولكن بسعتين مختلفتين، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 5-10

يتحرك جسم مربوط بزنبرك على خط مستقيم حركة اهتزازية بحيث يتغير بعده عن وضع الاتزان وفق العلاقة $x_1 = 2\cos(3t + \pi/3)$، حيث تقدر x بالمتر وt بالثانية.(أ) مثل هذه الحركة دائريا. (ب) ما السعة العظمى والطور الابتدائي الكليين لهذا الجسم إذا خضع لحركة اهتزازية ثانية $x_2 = 3\cos(3t + \pi/6)$ ؟

الحل: نلاحظ من العلاقة المعطاة أن السعة العظمى A=2 m والسرعة الزاوية ω_0=3 rad/s، كما أن طورها الابتدائيϕ=π/3. (أ) نرسم دائرة نصف قطرها 2 m ونحدد عليها متحركا$\mathbf{op}_1$ يصنع زاوية π/3 مع محور السينات في اللحظة t=0 ونحدد مركبته على ox، كما هو موضح بالشكل(10-10)، عندئذ تكون حركة الجسم مطابقة لحركة هذه المركبة.



الشكل(10-10)

(ب) لتحديد السعة العظمى والطور الابتدائي للحركة الكلية نمثل الحركة الثانية بدائرة نصف قطرها 3 m ويصنع المتجه $\mathbf{op}_2$ زاوية ابتدائية π/6 مع محور السينات. ثم نرسم الحركتين معا على نفس التمثيل الدائري، فنلاحظ أن الزاوية بين المتجهين$\mathbf{op}_1$ و $\mathbf{op}_2$ لن تتغير خلال دورانهما لأن للحركتين نفس السرعة الزاوية. لذلك إذا كتبنا $\mathbf{op} = \mathbf{op}_1 + \mathbf{op}_2$ نجد أن مركبة المتجه الجديد $\mathbf{op}$ تمثل الحركة الاهتزازية الكلية المنشودة في اللحظة t=0. ولذلك نأخذ المركبة السينية للعلاقة السابقة فنجد:

$$ox_T = ox_1 + ox_2 = 2\cos(\pi/3) + 3\cos(\pi/6) = 3.6$$

فسعة الحركة الكلية الناتجة تساوي 3.6 وطورها الابتدائي هو الزاوية التي يصنعها $\mathbf{op}$ مع محور السينات، حيث نلاحظ من الشكل (10-12) أن:

$$\tan\phi = \frac{(\mathbf{op})_y}{(\mathbf{op})_x} = \frac{(\mathbf{op}_1)_y + (\mathbf{op}_2)_y}{(\mathbf{op}_1)_x + (\mathbf{op}_2)_x} = \frac{1.73 + 1.5}{1 + 1.26} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0.26 \text{ rad}$$

وبذلك نكون قد حددنا السعة العظمى للحركة الناتجة وطورها الابتدائي، لذا نكتب معادلتها بالشكل:

$$x_T = 3.6\cos(3t + 0.26)$$

6-10 الحركة الاهتزازية المتخامدة *(Damped Oscillations)*

افترضنا حتى الآن أن الأجسام المهتزة لاتخضع لقوى احتكاك خلال حركتها وهذه حالة مثالية لأن الاحتكاك أو بعض أشكال التخامد موجودة في كل وسط مهتز. ولذا سندرس في هذه الفقرة بإيجاز كيف تتأثر حركة جسم مهتز بقوى تخامد متناسبة مع سرعته اللحظية التي نفترض أنها تكتب بالشكل:

$$F_r = -rv = -r\dot{x} \qquad (30\text{-}10)$$

حيث تدل r ثابت قوة التخامد ووحدته، كما نستنتج من العلاقة السابقة، هي kg/s (تأكد من ذلك). ونكتب معادلة الحركة بالشكل:

$$F = -kx - r\dot{x} = ma = m\ddot{x}$$

ومنه:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (31\text{-}10)$$

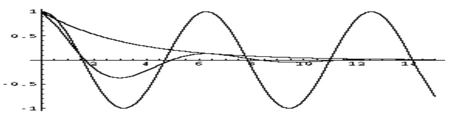
وهذه المعادلة من الدرجة الثانية ويحتاج حلها لمعادلات تفاضلية، لكننا نكتفي هنا بفهم حلها كيفيا لأنه يعتمد على درجة مقاومة الوسط الذي يهتز فيه الجسم. فإذا كان خاضعا لقوة مقاومة عالية جدا وأزحناه عن وضع اتزانه فإنه لن يقوم بحركة اهتزازية بل سيتحرك ببطء عائدا للاتزان وقد لايصل إليه. وإذا كانت المقاومة متوسطة أو ضعيفة فيمكن للجسم أن يقوم بعدة اهتزازات تتناقص سعتها تدريجيا خلالها إلى أن يقف تماما. ويمكن البرهان عندئذ أن الحل في هذه الحالة سيكون من الشكل:

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (32\text{-}10)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{r}{2m})^2} \qquad (33\text{-}10)$$

فالسعة العظمى للحركة تتناقص مع الزمن خلال اهتزاز الجسم، كما يوضح الشكل (10-11).



الشكل (10-11)

7-10 الاهتزازات القسرية *(Forced Oscillations)*

نختتم هذا الفصل بلمحة موجزة عن الاهتزازات القسرية حيث يتم دفع جسم ليقوم بحركة اهتزازية إجباريا بواسطة قوة خارجية، حفاظا على الطاقة ولإبقاء الحركة الاهتزازية مستمرة وفق تردد خارجي معين.

فإذا كان لدينا جسم m مربوط بزنبرك وخاضع لقوة خارجية F_{ext} وقوة تخامد F_r متناسبة مع سرعته، عندئذ تكون معادلة التحريك له هي:

$$F_{ext} - Fr - kx = ma \quad \Rightarrow \quad F_{ext} = m\ddot{x} + r\dot{x} + kx \tag{34-10}$$

ويتم عادة اختيار القوة الخارجية بحيث تتغير جيبيا مع الزمن، أي أن:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t \tag{35-10}$$

عندئذ تكتب (34-10) بالشكل:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 / m)\cos \omega t \tag{36-10}$$

حيث $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ التردد الطبيعي للنظام، و $\gamma = r/2m$.

والعلاقة (36-10) معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بطرف ثاني لكن يمكن البرهان أن حلها من الشكل:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{37-10}$$

حيث تعطى السعة العظمى بالعلاقة:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \tag{38-10}$$

والطور الابتدائي:

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{39-10}$$

ونلاحظ من العلاقة (38-10) أن السعة العظمى تصير أكبر مايمكن عندما يكون تردد القوة الخارجية ω مساويا للتردد الطبيعي للنظام ω_0، وتسمى هذه الحالة **تجاوبا** *(resonance)*.

ملخص الفصل

معادلة الحركة الاهتزازية البسيطة	$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$
الحل العام للحركة الاهتزازية البسيطة	$x=A\cos(\omega_0 t+\phi)$
العلاقة بين الدور والتردد والسرعة الزاوية	$T=2\pi/\omega_0=1/f$
السرعة الزاوية لنظام كتلة وزنبرك	$\omega_0=\sqrt{k/m}$
السرعة الزاوية لبندول بسيط	$\omega_0=\sqrt{g/l}$
السرعة الزاوية للبندول الفيزيائي	$\omega_0=\sqrt{Mgh/I_0}$
السرعة الزاوية لبندول الفتل	$\omega_0=\sqrt{\kappa/I_0}$
معادلة الحركة الاهتزازية المتخامدة	$\ddot{x}+(r/m)\dot{x}+(k/m)x=0$
الحل العام للاهتزازات المتخامدة	$x=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\phi)$
معادلة الاهتزازات القسرية	$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=(F_0/m)\cos\omega t$
الحل العام للاهتزازات القسرية	$x=A\cos(\omega t+\phi)$

تمارين ومسائل

الهزاز البسيط

1-10 يتألف نظام مهتز من كتلة 4 kg معلقة بزنبرك ثابته 100 N/m. مادور وتردد الحركة؟

2-10 مادور نظام يهتز بتردد 1.5 Hz وماسرعته الزاوية؟

3-10 يهتز نظام مؤلف من كتلة 0.5 kg مربوط بزنبرك k بدور 0.2 s. ماثابت الزنبرك؟

4-10 يهتز نظام مؤلف من كتله m وزنبرك ثابته 200 N/m بتردد 3 Hz. ماقيمة m ومادور وتردد وتسارع وسرعة النظام الزاوية؟

5-10 يهتز جسم بتردد 4 Hz وسعة عظمى 15 cm. (أ) ما أكبر سرعة وتسارع يصل إليها؟ (ب) ماسرعته عندما يكون على بعد 9 cm من وضع الاتزان؟ (ج) ما الزمن اللازم له لينتقل من وضع الاتزان إلى بعد 12 cm عنه؟

6-10 يربط جسم كتلته 4 kg بزنبرك 100 N/m ويدفع بسرعة ابتدائية 12 m/s وهو في وضع الاتزان. ماسعة الحركة وطورها الابتدائي وطاقتها الكلية؟ اكتب معادلة تغير الموضع بدلالة الزمن.

7-10 حل المسألة السابقة بفرض أن السرعة الابتدائية للجسم -6 m/s عندما x=0.2 m.

8-10 ما أكبر سرعة يصل إليها شعب رنانة تهتز بتردد 512 Hz وسعة عظمى 0.8 mm؟

9-10 يهتز نظام مؤلف من كتلة وزنبرك بشكل بسيط. ماحصة كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع من الطاقة الكلية عندما تكون سعة الحركة نصف السعة العظمى؟

10-10 تعلق كتلة 2 kg بزنبرك فيستطيل بمقدار 0.2 m. ماثابت مرونة الزنبرك وتردد النظام؟

11-10 يهتز جسم كتلته 0.25 kg مربوط بزنبرك 25 N/m بطاقة وضع ابتدائية 0.6 J. (أ) ماسعة الحركة؟ (ب) ماطاقة الوضع عندما تكون الإزاحة نصف السعة العظمى؟ (ج) عند أي إزاحة تصير طاقة الوضع مساوية لطاقة الحركة؟ (د) ماسرعة الجسم عندما $x=0$؟ (هـ) ماتردد الحركة ودورها وسرعتها الزاوية؟ (و) ما الطور الابتدائي إذا كانت السرعة الابتدائية سالبة؟

12-10 يهتز جسم كتلته 4 kg مربوط بزنبرك ثابته k معلق شاقوليا بسعة 0.5 m وعندما يكون الجسم عند أعلى نقطة من حركته يعود الزنبرك لطوله الطبيعي. (أ) ماثابت القوة للزنبرك؟ (ب) ما الطاقة المخزونة فيه؟ (ج) ما الطاقة الحركية للجسم عندما يمر بوضع الاتزان؟

13-10 يهتز نظام مؤلف من جسم كتلته 5 kg وزنبرك k شاقوليا بدور 0.5 s. كم يقصر طول الزنبرك عند إزالة الجسم عنه؟

14-10 ما الزمن اللازم لجسم يهتز بدور 0.4 s وسعة A لينتقل من وضع الاتزان لبعد $A/4$ عنه؟ (مساعدة: استخدم التمثيل الدائري).

15-10 مابعد جسم مهتز عن وضع اتزانه في اللحظة t=0.1 s إذا كان دور حركته 0.4 s وسعتها العظمى 0.2 m وكان عند $x=0$ في اللحظة $t=0$؟ (مساعدة: استخدم التمثيل الدائري).

معادلة الحركة الاهتزازية

16-10 برهن أنه يمكن كتابة الحل $x = A\cos(\omega t + \phi)$ بالشكل $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ وجد العلاقة بين A و ϕ من جهة و a و b من جهة أخرى.

17-10 يهتز جسم 1 kg على سطح أفقي بحيث يتغير بعده عن المبدأ وفق العلاقة $x = 10\cos(10t + \pi/2)$ حيث تقدر x بالسم و t بالثانية. (أ) ماتردد الاهتزازات؟ (ب) ما أكبر سرعة يصل إليها الجسم وعند أي موضع؟ (ج) ما القوة المؤثرة على الجسم خلال حركته؟

18-10 يهتز جسمان على نفس الخط بنفس السعة والتردد لكن باتجاهين متعاكسين فيمر كل واحد بجانب الآخر عندما تكون سعته نصف السعة العظمى. مافرق الطور بينهما؟

19-10 توضع كتلة 1 kg فوق أخرى 10 kg مربوطة بزنبرك 100 N/m بحيث تهتز أفقيا. ماأكبر سعة يمكن أن تهتز الكتلتان بها دون أن تنزلق الصغيرة فوق الكبيرة إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.4؟ (تنبيه: مانوع الاحتكاك بين الكتلتين؟)،

10-20 توضع كتلة صغيرة على سطح أفقي يهتز بتردد 2 Hz دون أن تنزلق عنه. ما أكبر سعة يمكن أن يهتز بها السطح إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.5؟

10-21 يهتز جسم كتلته 10 g بسعة 2 mm فيصل تسارعه لقيمة عظمى $8\ km/s^2$. (أ) مامعادلة القوة المؤثرة على الجسم بدلالة الزمن؟ (ب) مادور الحركة الاهتزازية؟ (ج) ما أكبر سرعة يصل إليها؟

10-22 يهتز جسم كتلته 5 kg مربوط بزنبرك 1000 N/m على سطح أفقي أملس. (أ) ماتردد الحركة الاهتزازية إذا كانت سرعة الجسم 10 m/s عندما كان على بعد 50 cm عن وضع الاتزان؟ (ب) ما الطاقة الميكانيكية للجسم؟ (ج) ما السعة العظمى للحركة؟

10-23 برهن أنه إذا هوى جسم معلق بزنبرك بوضع شاقولي من وضع كان فيه الزنبرك بطوله الطبيعي فإن أكبر مسافة سيسقطها تعادل نصف المسافة التي يمكن أن يصل إليها لو هبط ببطء.

10-24 يهتز جسم كتلته 3 kg بشكل بسيط وفق العلاقة $x = 5\cos(\pi t/3 - \pi/4)$ حيث تقدر x بالمتر و t بالثانية. (أ) عند أي موضع ستكون طاقة وضعه مساوية لطاقته الحركية؟ (ب) ما الزمن اللازم له للانتقال من وضع الاتزان للموضع الذي وجدته في (أ)؟

10-25 توضع كتلة m فوق زنبرك مثبت بوضع شاقولي ويهتز للأعلى والأسفل بدور 1 s. (أ) ما أكبر سعة يمكن أن يهتز بها الزنبرك دون أن تطير عنه الكتلة؟ (ب) ما أكبر تردد يمكن أن يهتز به إذا كانت سعته العظمى 5 cm؟

البندول

10-26 يهتز رقاص ساعة دورانيا بسعة عظمى $0.1\ \pi$ rad ودور 0.5 s. (أ) ماسرعته اهتزازه عندما تكون إزاحته نصف سعته العظمى؟ (ج) ماتسارعه عندما تكون زاوية دروانه 5°؟

10-27 ماسرعة وتسارع بندول بسيط طوله 4 m وسعته العظمى 0.2 rad عند أخفض نقطة من مساره؟

10-28 ماطول بندول بسيط دوره 1 s؟

10-29 مادور بندول بسيط على سطح القمر (g=1.7 m/s^2) إذا كان دوره على الأرض 2 s؟

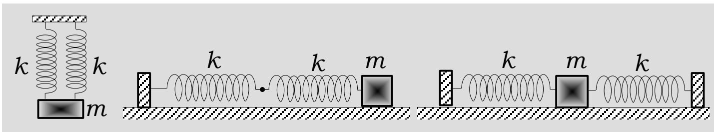
10-30 مادور اهتزازات بندول فيزيائي مؤلف من قضيب متجانس طوله L وكتلته M يهتز حول محور أفقي يمر من نقطة تبعد $L/4$ عن طرفه؟

10-31 يهتز بندول فيزيائي بدور 0.9 s حول محور أفقي يمر من نقطة تبعد 20 cm عن مركز كتلته. (أ) مانسبة عزم قصوره الذاتي إلى كتلته؟ (ب) ماسرعته عند مروره من نقطة الاتزان إذا كانت سعته العظمى 0.1 rad؟

32-10 من أي نقطة يجب تعليق مسطرة طولها متر واحد لتهتز كبندول فيزيائي بدور 2.5 s؟

مسائل عامة

33-10 ماتردد كل نظام من الأنظمة الموضحة بالأشكال (10-12)؟



(ج) (ب) (أ)

الأشكال (10-12)

34-10 يهتز جسم بسعة عظمى 5 cm وسرعة زاوية 3600 rev/min. (أ) ما أكبر تسارع للجسم وما أكبر قوة مؤثرة عليه إذا كانت كتلته 0.5 kg؟ (ب) ماسرعته عند مروره بالاتزان؟

35-10 مادور اهتزازات جسم يتحرك أفقيا بسعة عظمى 10 cm إذا كانت سرعته 24 cm/s عندما كان على بعد 6 cm من وضع الاتزان؟ (ب) ماموضع الجسم عندما تكون سرعته مساوية 12 cm/s؟ (ج) مامعامل الاحتكاك بين الجسم وكتلة صغيرة وضعت عليه فصارت على وشك الانزلاق عند أبعد نقطة له عن وضع الاتزان؟

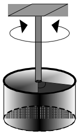
36-10 ما الكتلة اللازم تعليقها بزنبرك ليهتز النظام بدور $\pi/4$ s إذا كان الزنبرك يستطيل بمقدار 15 cm عندما تؤثر عليه قوة 30 N؟ (ب) ماموضع الكتلة وسرعتها واتجاه حركتها بعد $\pi/12$ s من مرورها من نقطة الاتزان نحو الأسفل إذا كانت سعة الحركة 5 cm؟ (ج) ما القوة المؤثرة على الكتلة عند مرورها بالموضع $x=-3$ متحركة للأعلى؟

37-10 يهتز جسم كتلته 10 g بسعة عظمى 24 cm ودور 4 s. (أ) ماقيمة واتجاه القوة المؤثرة عليه في اللحظة $t=0.5$ s إذا كان موضعه في اللحظة $t=0$ هو $x=+24$ cm؟ (ب) ماموضع الجسم عندما $t=0.5$s؟ (ج) ما أقل لازم للجسم لينتقل من موضع الاتزان إلى $x=-12$ cm وماسرعته عندئذ؟

38-10 يوضع جسم كتلته 0.5 kg على جسم آخر كتلته 5 kg مربوط بزنبرك 15 N/m ويهتز على طاولة أفقية ملساء. ما أكبر سعة يمكن أن يهتز بها الجسم الكبير دون أن ينزلق الجسم الصغير عنه إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.2؟

39-10 يهتز قرص متجانس كتلته M ونصف قطره R في مستو شاقولي حول محور أفقي يمر من نقطة تبعد r عن مركزه. (أ) مادور الحركة من أجل قيم r التالية $R, 3R/4, R/2, R/4, 0$؟ (ب) ارسم النسبة τ/τ_0 حيث τ دور الحركة في أي لحظة وτ_0 دورها عندما $r=R$ وحدد من

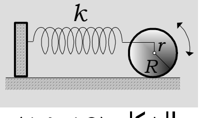
الرسم قيمة r التي تجعل هذه النسبة أصغر مايمكن. (ج) احسب النسبة المذكورة وقارنها بالقيمة التي وجدتها من الرسم.



الشكل(10-13)

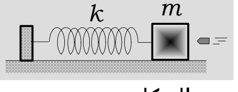
10-40 تهتز اسطوانة صلبة ممتلئة كتلتها M ونصف قطرها R وطولها L معلقة شاقوليا حول سلك معدني مثبت بمحورها، كما في الشكل (10-13)، كبندول فتل. مادور الحركة إذا كان ثابت الفتل κ؟

10-41 ماثابت بندول فتل مؤلف من قرص كتلته 0.5 kg ونصف قطره 5 cm وتردده 5 Hz؟



الشكل (10-14)

10-42 يهتز قرص كتلته m ونصف قطره R حول محور عمودي عليه ويمر من مركزه بواسطة زنبرك مربوط بنقطة تبعد مسافة r عن مركزه ومثبت طرفه الآخر بحائط شاقولي، كما في الشكل(10-14). مادور الاهتزازات الصغيرة؟



الشكل (10-15)

10-43 تخترق رصاصة كتلتها m وسرعتها v_0 قطعة خشبية كتلتها M موضوعة على سطح أفقي أملس ومربوطة بزنبرك ثابته k، كما هو موضح في الشكل (10-15)، وتستقر فيها. ماسعة الاهتزازات الناتجة؟

<u>من علماء الإسلام</u>

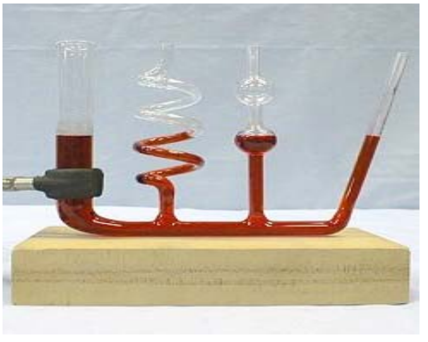
جابربن حيان بن عبدالله الكوفي(737م-813م). يتفق علماء العصر الحديث على أنه أبو الكيمياء، فقد خاض الدراسات القديمة من الغموض والسرية والرمزية التي كانت سائدة ليؤسس منهجا استقرائيا واستدلاليا، وأكد على استعمال الميزان والمكاييل كشرط ضروري للدقة، بالإضافة إلى استعماله لآلات أخرى مع ذكر وصفها ومكان استخدامها. وزاوج بين الفكر والتجربة وأدرك أن للسوائل درجات غليان مختلفة وهذا هو أساس التقطير، وكذلك طور عمليات التصعيد والتبلر والتكلس إضافة إلى تطويره لعمليات التخمير والترشيح والتشميع والتذويب. حضر مركبات كيميائية وأحماضا لم تكن معروفة من قبله، فهو أول من اكتشف الصودا الكاوية، حمض النتريك أو ماء الفضة أو الماء المحلل وغيرها. وعمل في دباغة الجلود وصباغتها وفي صناعة الأقمشة وفي تركيب العطور والأدوية والمواد العازلة.

جابر بن حيان

الفصل الحادي عشر

السوائل

(Liquids)



1-11 تمهيد:

تصنف الأجسام في الطبيعة إلى ثلاثة أنواع: **صلبة وسائلة وغازية** بحسب القوى التي تربط بين ذراتها وجزيئاتها. فهي **صلبة** *(solid)* إذا كانت هذه القوى كبيرة بحيث تبقي مكونات الجسم ثابتة في مكانها، أي أن المسافة بين أي ذرتين أو جزيئين لاتتغير ولذلك يبقى شكل وحجم الجسم كما هو طالما أننا لانؤثر عليه بعوامل خارجية تغير القوى الداخلية بينها بشكل جوهري كأن نسحقه أو نسخنه. وأما **السوائل** *(liquids)* فتتصف بأن القوى بين ذراتها وجزيئاتها ضعيفة نسبيا بحيث تستطيع هذه الجسيمات أن تتحرك ببعض الحرية داخل الجسم فيتغير شكله بحسب الإناء الذي يوضع فيه مع المحافظة على حجمه، إذ أن لترا من الماء سيبقى لترا سواء وضعناه في إناء اسطواني أو علبة مكعبة، إلا أنه يأخذ شكل الوعاء الموضوع فيه. وأما **الغازات** *(gases)* فتتميز بأن القوى بين ذراتها وجزيئاتها ضعيفة جدا بحيث أنها تتحرك بحرية تامة تقريبا غير متأثرة ببقية الذرات والجسيمات حولها تقريبا. ولذلك لايأخذ الغاز شكلا محددا بل يحتل الحيز الموجود فيه كليا، أي أنه إذا وضعنا كمية من الأوكسجين في زجاجة صغيرة أو اسطوانة كبيرة فإنها ستحتل كل الحجم المتاح لها. فمايميز الأجسام عن بعضها إذا هي قابليتها للتغير في الشكل والحجم تحت تأثير القوى بين الذرية أو بين الجزيئية الموجودة فيها. ولذلك سندرس خواص المرونة *(elasticity)* للمادة ثم ندرس حركة وتحريك السوائل وما يؤثر عليها من لزوجة وقوى توتر سطحي وغيرها.

2-11 المرونة *(Elasticity)*

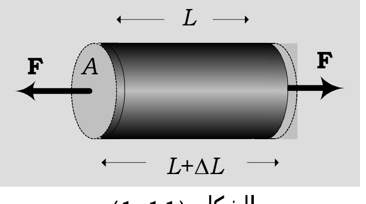
تتأثر كل مادة بأي مؤثر خارجي يطبق عليها بحسب طبيعتها وتركيبها الذري والجزيئي، فقد تتشوه عند ضغطها أو تميع وتتبخر عند تسخينها، وغير ذلك من التغيرات. إلا أننا سنعتبر في هذا الفصل مرونة الأجسام، أي مايحدث لها عند تعرضها لضغط أو مؤثر خارجي. فإذا سحبنا أو ضغطنا جسما فإنه يتشوه (كأن يزداد طوله أو يتقلص حجمه) ولكن إذا عاد إلى شكله الأصلي بعد زوال الضغط فإننا نقول إنه مرن وإن لم يحدث ذلك فالتشوه دائم والجسم غير مرن. ونسمي العامل المرتبط بالقوة التي تحاول تشويه الجسم **الإجهاد** *(stress)*، كما نسمي مايحصل للجسم نتيجة ذلك **الانفعال** *(strain)*. وبالطبع فإن الانفعال يتناسب طردا مع الإجهاد ويعتمد هذا التناسب على طبيعة الجسم الخاضع للإجهاد (لأنه إذا أجهد شخص فإنه ينفعل بحسب طبيعته).

ونعرف **معامل المرونة** *(elastic modulus)* لأي جسم بالعلاقة:

$$\boxed{\text{معامل المرونة} = \frac{\text{الإجهاد}}{\text{الانفعال}}} \qquad (1\text{-}11)$$

وتصنف مرونة الأجسام لثلاثة أنواع:

1- مرونة الطول: وتمثل مقدار الاستطالة النسبية لجسم عند شده. ويسمى معامل المرونة في هذه الحالة **معامل يانغ** *(Young Modulus)*.



الشكل (1-11)

فإذا طبقنا قوة **F** على طرفي جسم ما طوله L ومساحة مقطعه A فإن قوى الترابط بين ذراته تحاول مجابهة هذه القوة فيستطيل الجسم (وكأنه زنبرك) بمقدار ΔL، كما في الشكل (1-11)، إلى أن تتساوى القوة الخارجية وقوى الترابط الذري. ونعرف **إجهاد الطول** *(tensile stress)* عندئذ بالعلاقة:

$$\text{إجهاد الطول} = \frac{F}{A} \qquad (2\text{-}11)$$

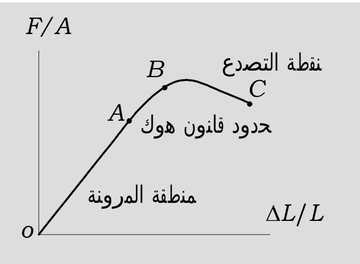
كما نعرف **انفعال الطول** *(tensile strain)* بالزيادة النسبية في طول الجسم، أي:

$$\text{انفعال الطول} = \frac{\Delta L}{L} \qquad (3\text{-}11)$$

ومن ثم نعرف **معامل يانغ** للمرونة Y الذي يدل على مدى صلابة الجسم تجاه الاستطالة الطولية بالعلاقة:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} \tag{4-11}$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن وحدة Y هي N/m^2 وهي نفس وحدة الضغط، كما سنرى بعد قليل، ويطلق عليها في نظام الوحدات الدولي اسم **باسكال** *(Pascal)* ويرمز لها بـ Pa، أي أن $1\ Pa = 1\ N/m^2$. ونعطي في الجدول 1-11 قيم معامل يانغ لبعض المواد شائعة الاستعمال.



الشكل (2-11)

ويوضح الشكل (2-11) تغير الإجهاد مع الانفعال لجسم ونلاحظ منه أن هناك ثلاث مناطق متميزة هي: **منطقة المرونة** بين النقطتين O وA وتتميز أن استطالة الجسم تتناسب خطيا مع القوة بحيث يعود لحالته عندما يزول تأثيرها عنه، ونقول إن الجسم يتبع قانون هوك في المرونة فيها. وتقع المنطقة الثانية بين A وB حيث نلاحظ أن استطالة الجسم تتناسب طردا مع القوة المؤثرة عليه إلا أنه لايعود لطوله الأصلي إذا زال تأثيرها عنه بل يستطيل بشكل دائم ونقول إنه تشوه. وإذا صار الإجهاد كبيرا جدا بحيث يتجاوز **نقطة التصدع** C فإن الجسم ينشطر لقسمين أو أكثر.

مثل 1-11

يعلق جسم كتلته 0.25 kg بنهاية سلك فولاذي طوله 3 m ومساحة مقطعه $0.15\ m^2$. ما استطالته؟

الحل: نحسب أولا الوزن المحمول بالسلك فنجد:

$$F = w = (500\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 4900\ \text{N}$$

ثم نحسب إجهاد الطول:

$$\frac{F}{A} = \frac{4900\ \text{N}}{0.15\times10^{-4}\ \text{m}^2} = 3.3\times10^{8}\ \text{N/m}^2$$

ونستخدم معامل يانغ من الجدول 1-11 لحساب الانفعال فنكتب:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{Y} = \frac{3.3\times10^{8}\ \text{N/m}^2}{2.0\times10^{11}\ \text{N/m}^2} = 1.6\times10^{-3}$$

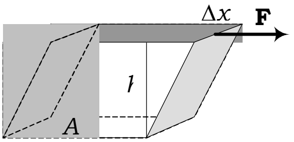
أي أن مقدار استطالة السلك هي:

$$\Delta L = (3\ \text{m})(1.6\times10^{-3}) = 4.8\ \text{mm}$$

2- مرونة السطح: وتمثل مقدار مقاومة الجسم لأي شد على سطحه وممانعة مستوياته للانزلاق على بعضها. ويسمى معامل المرونة في هذه الحالة **معامل القص السطحي** *(shear Modulus)*.

فإذا خضع جسم لقوة شد موازية لسطحه A، كما في الشكل (3-11)، فإنه يتشوه دون أن يتغير حجمه. عندئذ نعرف **إجهاد القص السطحي** *(shear stress)* بالعلاقة:

$$\text{إجهاد القص السطحي} = \frac{F}{A}$$



الشكل(3-11)

حيث A مساحة السطح الذي "تسحبه" القوة **F**.

كما نعرف **انفعال القص السطحي** *(shear strain)* بالعلاقة:

$$\text{إنفعال القص السطحي} = \frac{\Delta x}{h} \qquad (6\text{-}11)$$

حيث Δx مقدار انسحاب الوجه المشوه وh ارتفاع الجسم، كما هو موضح بالشكل (3-11).

ومن ثم نعرف مقدار **معامل القص السطحي** *(shear modulus)* S بالعلاقة:

$$\boxed{S = \frac{F / A}{\Delta x / h}} \qquad (7\text{-}11)$$

وكما هي الحال في الإجهاد الطولي فإن السوائل والغازات لاتتأثر بإجهاد القص السطحي. ونعطي في الجدول 1-11 قيم S لبعض المواد شائعة الاستعمال.

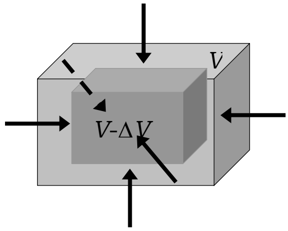
مثل 2-11

ينزلق طفل على أرض خشنة لابسا حذاءا رياضيا سمك نعله 6 mm ومساحة مقطعه $14\ cm^2$ متعرضا لقوة احتكاك 28 N. كم ينسحب الوجه الأسفل من النعل إذا كان معامل القص السطحي للمطاط 3×10^6 Pa؟

الحل: نحسب الانسحاب الذي يعانيه النعل من (7-11) مباشرة فنكتب:

$$S = \frac{F / A}{\Delta x / h} \;\; \Rightarrow \;\; \Delta x = \frac{Fh}{AS} = 0.04 \text{ mm}$$

3- مرونة الحجم: وتمثل مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حجمه. ويسمى معامل المرونة في هذه الحالة **معامل الحجم** *(Bulk Modulus)*. فإذا كانت القوة التي تضغط على كل سطح من جسم مكعب مثلا هي F ومساحة الوجه A، كما بالشكل (11-4)، عندئذ نعرف إجهاد الحجم بالعلاقة:



الشكل (11-4)

$$\text{إجهاد الحجم} = \frac{F}{A} \tag{8-11}$$

كما نعرف انفعال الحجم بمعدل تغير حجم الجسم، أي:

$$\text{انفعال الحجم} = \frac{\Delta V}{V} \tag{9-11}$$

ومن ثم يصير معامل الحجم معطى بالعلاقة:

$$\boxed{B = -\frac{F/A}{\Delta V/V}} \tag{10-11}$$

حيث استخدمنا الإشارة السالبة لجعل B موجبة لأن تغير الحجم ΔV سالب طبعا.

ومن الطبيعي أن أكثر المواد القابلة للانضغاط هي الغازات، أما المواد الصلبة والسائلة فضغطها في أغلب الحالات صعب جدا إن لم يكن مستحيلا.

ونعطي في الجدول 11-1 قيم B لبعض المواد شائعة الاستعمال.

مثل 11-3

مامقدار تغير حجم كرة رصاصية حجمها $0.5\ m^3$ إذا أثر عليها إجهاد 2×10^7 Pa مع العلم أن معامل الحجم للرصاص هو 7.7×10^9 Pa؟

الحل: نحسب تغير حجم الكرة من (11-10) فنكتب:

$$B = -\frac{F/A}{\Delta V/V} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\frac{(F/A)V}{B}$$

وبتعويض القيم المعطاة نجد:

$$\Delta V = -1.3\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

حيث تدل الإشارة السالبة أن الحجم قد تقلص بتأثير الضغط.

الجدول 1-11: معامل يانغ والقص السطحي والحجم لبعض المواد ($10^{10} N/m^2$)

المادة	Y	S	B
الألمنيوم	7.1	2.5	7
النحاس الأصفر	9.1	3.5	6.1
النحاس	11	4.2	14
الفولاذ	20	8.4	16
التنغستين	35	14	20
الزجاج	6.5-7.8	2.6-3.2	5-5.5
الكوارتز	5.6	2.6	2.7
الماء	_	_	0.21
الزئبق	_	_	2.8

3-11 الكثافة *(Density)*

تتميز السوائل والغازات أنها عديمة الصلابة بحيث لايمكن تحديد شكل خاص لها لأنها تأخذ شكل أو حجم الوعاء الذي توضع فيه وتنساب فيه أيضا إن كانت الشروط مواتية لذلك. كما أن عدد ذرات مواد سائلة أو غازية كبير جدا بحيث أنه من المستحيل عمليا تحديد موضع وسرعة وتسارع كل واحدة. ونعلم أن دراسة حركة وتحريك أي جسم تتطلب معرفة كتلته، ولذلك فإن دراسة ميكانيك السوائل والغازات ليست سهلة لأن تحديد كتلة الجسم عند دراسة حركة الرياح في الجو والأمواج في المحيطات والماء في الأنهار صعب فعلا. ولذا نختار حجما معينا من السائل المدروس ونحدد كتلته ونطبق قوانين التحريك عليه ونعمم النتائج على السائل المدروس كله.

فإذا اخترنا واحدة الحجوم من سائل أو غاز عندئذ تكون كتلته مساوية لكثافته *(density)* التي نعرفها لأي جسم كتلته M ويحتل حجما V، كما ذكرنا في الفصل السادس، بالعلاقة:

$$\boxed{\rho = \frac{M}{V}} \qquad (11\text{-}11)$$

أي أن الكتلة تحسب من الكثافة بالعلاقة:

$$M = \rho V \qquad (12\text{-}11)$$

وإذا كانت المادة خليطا من عدة عناصر عندئذ تختلف كثافتها من موضع لآخر في الجسم نفسه. ولذلك نعرف كثافة كتلة صغيرة dm تحتل حجما صغيرا dV من الجسم بالعلاقة:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{13-11}$$

وتعطى وحدة الكثافة في نظام الوحدات الدولي بـ kg/m^3، وتعتمد على عدة عوامل كدرجة الحرارة والضغط وطبيعة المادة المعنية سواء كانت صلبة أم سائلة أم غازية. ولاتتغير كثافة الأجسام الصلبة والسائلة كثيرا بالمقارنة مع الغازات التي تتغير كثافتها بشكل ملحوظ مع درجة الحرارة والضغط.

ونظرا لأن الماء يتميز بكثافته التي تساوي $1\ g/cm^3$ أو $1000\ kg/m^3$ عند درجة حرارة $4°C$، لذا نقارن بقية السوائل به فنعرف **الكثافة النسبية** *(relative density)* بنسبة كثافة المادة إلى كثافة الماء، أي أن:

$$\boxed{\rho_{rel} = \frac{\rho_{obj}}{\rho_{H_2O}} = \frac{\rho_{obj}}{1000}} \tag{14-11}$$

حيث نلاحظ أن الكثافة النسبية عديمة الوحدة.

من جهة أخرى، فإن كثافة الأجسام الصلبة والسوائل لاتتغير كثيرا مع الارتفاع عن سطح الأرض بالمقارنة مع تتغير الغازات التي تتغير بشكل كبير مع الارتفاع عن سطح الأرض أو العمق تحته بسبب تغير وزن المادة التي فوقها. فكثافة ماء البحر أو المحيط عند السطح تختلف عن تلك على ارتفاعات أو أعماق مختلفة. ونعطي في الجدول 11-2 كثافة بعض المواد شائعة الاستعمال.

مثل 11-4 تحديد كثافة مادة غير معروفة

من المعروف أن أي سائلين لهما نفس الكثافة يمتزجان ببعضهما دون أن يطفو أحدهما فوق الآخر. وتستخدم هذه النتيجة لتحديد كثافة سوائل مجهولة. ففي تجربة لقياس كثافة سائل مجهول يخلط بنزين *(ρ=874 kg/m^3)* وكلوروفورم *(ρ=1527kg/m^3)* بنسبة 78% و 22% من الحجم الكلي، على الترتيب، فيلاحظ أن قطرات من السائل المجهول تصير معلقة في الخليط. ماكثافته؟

الحل: تصير قطرات السائل المجهول معلقة عندما تكون كثافتها مساوية لكثافة الخليط. لذا نحسب كثافة الأخير فنفترض أن حجم البنزين V_1 والكلوروفورم V_2 فيكون الحجم الكلي: $V_T = V_1 + V_2$ كما أن كتلة البنزين هي $\rho_1 V_1$ وكتلة الكلوروفورم $\rho_2 V_2$ لذا تكون كتلة الخليط مساوية إلى:

$$M_T = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$$

وتصير كثافة الخليط

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \rho_1 (\frac{V_1}{V_T}) + \rho_2 (\frac{V_2}{V_T})$$

وبتعويض $V_1 = 0.78 V_T$ و $V_2 = 0.22 V_T$ و $\rho_1 = 874\ \mathrm{kg/m^3}$ و $\rho_2 = 1527\ \mathrm{kg/m^3}$ نجد:

$$\rho = 1017.7\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

الجدول 2-11: كثافة بعض المواد الشائعة

المادة	الكثافة (kg/m³)	المادة	الكثافة (kg/m3)
الألمنيوم	7.1	الماء (4 °C)	7
الزئبق	9.1	الهواء (0 °C)	6.1
النحاس	11	الهواء (25 °C)	14
الحديد	20	دم الإنسان (25 °C)	16
الفضة	35	ماء البحر	20
الرصاص	6.5-7.8	زيت الزيتون (15 °C)	5-5.5
الذهب	5.6	البنزين (15 °C)	2.7
الفولاذ	_	الجليد	0.21

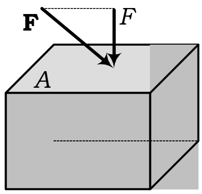
4-11 الضغط *(Pressure)*

نعرف متوسط الضغط الناتج عن قوة F مؤثرة على سطح A بالعلاقة:

$$\boxed{p = \frac{F}{A}} \qquad (15\text{-}11)$$

حيث نفترض F عمودية على السطح A وإذا لم تكن كذلك فنأخذ مركبتها العمودية عليه فقط، كما في الشكل (5-11).

كما يمكن أن تتغير قيمة القوة من نقطة لأخرى على السطح عندئذ نحسب الضغط على جزء عنصري صغير dA فقط بكتابة:



الشكل (5-11)

$$p = \frac{dF}{dA} \qquad (16\text{-}11)$$

ونستفيد من هذه العلاقة لحساب القوة الكلية التي يخضع لها سطح كبير عندما يكون الضغط المؤثر عليه متغيرا من موضع لآخر (كقوة ضغط الماء على سد كبير، كما سنرى لاحقا)، ونكتب:

$$F = \int_A p dA \qquad (17\text{-}11)$$

حيث يتم التكامل على السطح المعني كله.

وتعطى وحدة الضغط في النظام الدولي بـ N/m^2، وتسمى، كما ذكرنا سابقا **الباسكال** Pa، أي أن:

$$1\ Pa = 1\ N/m^2$$

وكثيرا مايقدر الضغط بوحدات أخرى لاستخدامه في علم البيئة والجو والبحار. في علم الطقس يطلق اسم **البار** (bar) على 10^5 Pa ونكتب:

$$1\ bar = 10^5\ Pa$$

ومن الوحدات الأخرى شائعة الاستعمال **الضغط الجوي** (atm) ويعادل وزن اسطوانة هواء مساحة قاعدتها $1\ cm^2$ وارتفاعها يمتد من سطح البحر إلى نهاية الغلاف الجوي فوقها. وقد وجد أنه يساوي:

$$1\ atm = 1.01\times10^5\ Pa \approx 1\ bar$$

ويكافئ هذا الضغط وزن اسطوانة من الزئبق مساحة قاعدتها $1\ cm^2$ وارتفاعها 760 mm، ولذلك استخدم **الميلمتر الزئبقي** (mmHg) (أو **التور** (torr) في التطبيقات العملية) كوحدة للضغط، حيث:

$$1\ torr = 1\ mmHg = 1.31\times10^{-3}\ atm$$

مثل 5-11

ما الضغط الناتج عن فرشة ماء أبعادها $2\times2\times0.3$ m على الأرض تحتها؟

الحل: نحسب كتلة الفرشة أولا ونضع:

$$M = \rho V = (1000\ \text{kg/m}^3)(2\times 2\times 0.3\ \text{m}^3) = 1200\ \text{kg}$$

ونجد وزنها الذي يساوي القوة التي تؤثر بها على الأرض:

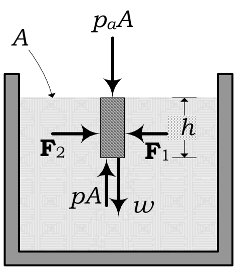
$$F = w = Mg = (1200\ \text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 11.76\ \text{kN}$$

ثم نحسب ضغط الفرشة على الأرض بكتابة:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{117.6\ \text{kN}}{2\times 2\ \text{m}^2} = 2940\,\text{kPa}$$

5-11 الضغط في السوائل الساكنة وقاعدة باسكال

إذا كان لدينا سائل ساكن في إناء فإن كل جزء منه يجب أن يكون خاضع لمحصلة قوى تساوي الصفر وإلا فإنه سيتحرك حتما. فلو نظرنا إلى جزء من السائل، كما في الشكل (11-6)، عندئذ يجب أن تكون القوى عليه من الطرف الأيمن مساوية لتلك من الطرف الأيسر. وقد يتبادر للذهن أنه لاتوجد قوى من الطرفين أصلا وهذا غير صحيح، إذ لو فتحنا ثقبا في الجدار الجانبي لوعاء لاندفع منه السائل مما يعني أنه كان خاضعا لقوة من الجهة المعاكسة. ولو فتحنا ثقبا في الجهة الثانية لاندفع منها السائل أيضا. فلاشك إذا ان كل أجزاء السائل تخضع لقوى من كل الاتجاهات وطالما بقي السائل ساكنا فإن محصلة هذه القوى تساوي الصفر. ولو نظرنا إلى القوى المؤثرة على جزء من السائل في الاتجاه الشاقولي فإننا نلاحظ أنه سيخضع لقوتين نحو الأسفل هما وزنه w



الشكل (11-6)

وقوة ضغط الهواء الذي فوقه $F=p_aA$، حيث p_a الضغط الجوي وA مساحة مقطع الجزء المعتبر. فحتى يبقى هذا الجزء ساكن يجب أن يؤثر عليه السائل من الأسفل بقوة $F_{up}=pA$ مساوية ومعاكسة لمحصلة هاتين القوتين، حيث p ضغط السائل عند الطرف الأسفل من الجزء المعني. وبالفعل فإن السائل الواقع تحته يدفعه للأعلى وإلا لسقط للأسفل كما يحدث لو فتحنا ثقبا في قعر الإناء الموضوع فيه. وبمساواة هذه القوى نجد:

$$w + p_a A = pA$$

وبملاحظة أن وزن هذا الجزء يساوي:

$$w = mg = \rho V g = \rho A h g$$

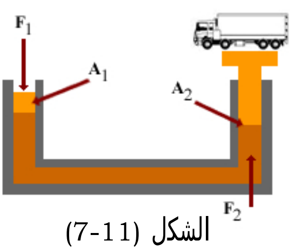
تؤول العلاقة أعلاه إلى:

$$p = p_a + \rho g h \qquad (18\text{-}11)$$

فالضغط عند أي نقطة من سائل يزيد عن الضغط الجوي بمقدار يتناسب مع عمق تلك النقطة، ولو أثرنا بضغط إضافي على الضغط الجوي عند السطح العلوي للسائل لزاد الضغط عند هذه النقطة حسب هذه العلاقة (18-11). وقد كان **بليز باسكال** *(Blaise Pascal* 1623-1662*)* أول من توصل لهذه النتيجة ولذا تدعى **مبدأ باسكال** الذي نصيغه بالشكل: **إذا طبق ضغط على سائل في محيط مغلق فإنه ينتقل لكل نقطة من السائل وإلى جدران الوعاء الحاوي عليه**.

وتسمى العلاقة (18-11) **علاقة المانومتر** *(manometer formula)* ويستفاد منها لحساب الضغط عند أي نقطة من سائل ساكن طالما بقيت كثافته وتسارع الجاذبية ثابيتن.

ونستنتج من (18-11) أن الضغط واحد لكل النقاط الواقعة عند نفس العمق في سائل ويتغير من ارتفاع لآخر. أما في الغازات فإن الضغط واحد طالما لأن كثافة الغازات صغيرة جدا بالمقارنة مع السوائل فلايتغير الضغط من نقطة لأخرى إلا إذا تغير فرق الارتفاع بينهما بشكل كبير، كما هو الحال في طبقات الجو حيث يتغير الضغط بشكل كبير بين طبقة وأخرى.



الشكل (11-7)

ولمبدأ باسكال تطبيقات أساسية في الرافعات الهيدروليكية، كما في الشكل (11-7)، حيث تؤثر قوة F_1 على الذراع الأيسر فينتقل ضغطها بواسطة السائل إلى الذراع الأيمن. فإذا كانت مساحة الأول A_1 والثاني A_2 فإن تساوي الضغط في السائل يعني أن:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad (19\text{-}11)$$

وبهذه الطريقة يتم رفع السيارات الكبيرة عند الذراع العريضة بتطبيق قوة مناسبة أصغر من وزنها بكثير عند الذراع الضيقة بحيث يكون الضغط واحد، كما نوضح في المثل التالي.

مثل 6-11

ترفع شاحنة كتلتها 22500 kg في مغسلة على ذراع رافعة هيدروليكية قطرها 30 cm. ما القوة اللازم تطبيقها على الذراع الأخرى إذا كان قطرها 10 cm وما ضغط الزيت هناك؟

الحل: نستخدم (11-19) ونكتب:

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2=(\frac{A_2}{A_1})F_1=\frac{\pi(0.05\,\mathrm{m})^2}{\pi(0.15\,\mathrm{m})^2}(22500\ \mathrm{N})=2500\ \mathrm{N}$$

وهذه القوة تعادل وزن كتلة 225 kg فقط. ونجد ضغط الزيت بكتابة:

$$p_2=\frac{F_2}{A_2}=\frac{2500\ \mathrm{N}}{\pi(0.05\ \mathrm{m})^2}=3.18\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

وتربط العلاقة (11-18) بين الضغط عند نقطتين في وعاء ما بغض النظر عن شكله. ويمكن استنتاج ذلك ببساطة، كما في الشكل (11-8)، بملاحظة أن فرق الضغط بين A وB يساوي:

$$p_A-p_B=(p_A-p_C)+(p_C-p_D)+(p_D-p_B)$$

ولكن

$$p_C=p_A+\rho g h_1 \quad \Rightarrow \quad p_A-p_C=-\rho g h_1$$

لأن C أخفض من A، و

$$p_C=p_D$$

لأنهما على نفس الارتفاع، و

$$p_D-p_B=\rho g h_2$$

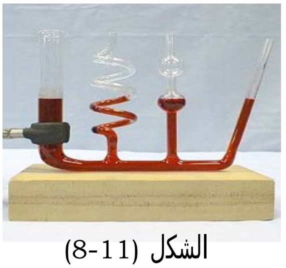
ومن ثم نجد أن:

$$p_A-p_B=-\rho g h_2+\rho g h_1=\rho g(h_1-h_2)=\rho g h$$

حيث h فرق الارتفاع بين النقطتين A وB. ونستنتج من العلاقة الأخيرة أن:

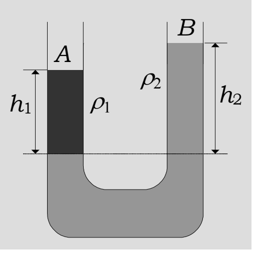
$$p_B=p_A+\rho g h$$

فالضغط عند B يزيد عن ذلك عند A بحسب فرق الارتفاع بينهما، أي أن العلاقة (11-18) صحيحة بغض النظر عن موقع النقطتين في السائل.


الشكل (11-8)

وللنتيجة الأخيرة أهمية كبيرة على ارتفاع سوية سائل في وعاء ذي فتحات متعددة له أشكال وحجوم مختلفة، إذ أن تساوي الضغط عند الفوهات المختلفة الموضحة بالشكل (11-8) والمساوي للضغط الجوي يعني أن ارتفاع السائل واحد في كل منها لأن له نفس الكثافة. وتعرف هذه النتيجة **بعلاقة الأواني المستطرقة**.

من جهة أخرى، إذا كان هناك سائلان مختلفان بالكثافة، كما في الشكل (11-9)، فإن ارتفاع السائل في الفرعين لن يكون متساويا بسبب اختلاف الكثافة. فإذا اخترنا النقاط A و B و C في هذا الشكل للاحظنا أن:



الشكل(11-9)

$$p_B - p_C = \rho_1 g h_1$$

كما أن

$$p_A - p_C = \rho_2 g h_2$$

ولكن

$$p_A = p_B = p_a$$

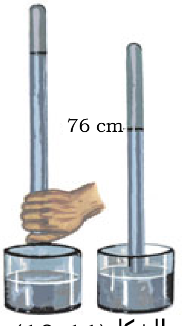
ولذلك يكون:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

أي أن:

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}} \qquad (20\text{-}11)$$

فالسائل يرتفع أكثر في الذراع ذي الكثافة الأقل.



الشكل(11-10)

وتستخدم العلاقة (11-18) لقياس مايسمى **الضغط المعياري** *(gauge pressure)* أو **فرق الضغط** الذي يساوي $p\text{-}p_a$ ويستفاد منه باستخدام مقياس ضغط توريشيلي *(Evangelista Torricelli* 1608-1647*)* كما في الشكل (11-10) حيث يقلب أنبوب مملوء بالزئبق على وعاء فيه زئبق أيضا وعندئذ يكون الضغط داخل الأنبوب فوق السائل مهمل (لأنه يساوي وزن بخار الزئبق المتجمع هناك) ومن ثم يمكن استخدام العلاقة (11-18) لمعرفة الضغط الجوي عند B من:

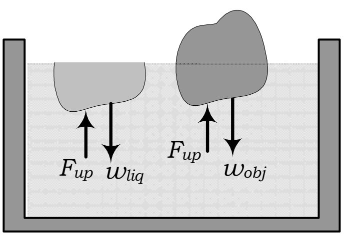
$$\boxed{\Delta p = p - p_a = \rho_m g h} \qquad (21\text{-}11)$$

حيث ρ_m كثافة الزئبق وh ارتفاع عمود الزئبق في الأنبوب. وقد وجد أنه عندما تكون مساحة قاعدة الأنبوب $1\ cm^2$ فإن الزئبق يرتفع مسافة 76 cm ولهذا يقال إن الضغط الجوي يساوي 76 cm زئبقي.

6-11 قاعدة أرخميدس *(Archimedes Principle)*


أرخميدس

كان أرخميدس *(Archimedes 287 BC - 212 BC)* ضليعا في العلوم الطبيعية من رياضيات وفيزياء وكيمياء وغيرها. وتروي القصص التاريخية أن الملك طلب منه التحقق فيما إذا كان تاجه من ذهب خالص أم لا دون أن يحلله كيميائيا أو يسبب أي تشويه له، مهددا إياه بعواقب وخيمة إن لم يفلح. فظل يفكر بهذه المسألة حتى وهو يستحم في مسبح بيته عندما شعر أن وزنه في الماء أقل منه في الهواء، فصرخ قائلا "**وجدتها**" *(Eureka)* ووضع قاعدته المشهورة **بقاعدة أرخميدس**. وتنص على مايلي: **يؤثر أي سائل على جسم مغمور فيه كليا أو جزئيا بقوة دافعة للأعلى تساوي وزن السائل الذي أزاحه الجزء المغمور من الجسم.**



الشكل (11-11)

ويمكن برهان هذه القاعدة من الشكل (11-11) الذي يمثل الجزء الأيمن منه جسما حجمه V_b وكثافته ρ_b مغمورا في سائل كثافته ρ_l، بينما يمثل الجزء الأيسر منه الحجم المغمور من الجسم من نفس السائل V_l. ونظرا لأن هذا الأخير ساكن تماما فلا شك إذا أن هناك قوة دافعة نحو الأعلى F_{up} تساوي وتعاكس وزنه w وهي موجودة دائما. ولذلك عند إعادة الجسم إلى ذلك الموضع فإن محصلة القوى عليه ستكون:

$$F_T = w - F_{up}$$

حيث

$$\begin{cases} w = m_b g = (\rho_b V_b) g \\ F_{up} = m_l g = (\rho_l V_l) g \end{cases} \tag{22-11}$$

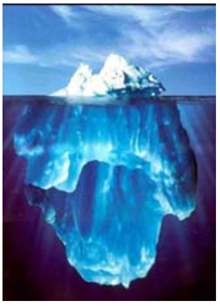
حيث m_l وV_l كتلة وحجم السائل المزاح، على الترتيب. ومن ثم تصير قيمة المحصلة:

$$\boxed{F_T = g(\rho_b V_b - \rho_l V_l) = w'} \tag{23-11}$$

وتمثل w' **الوزن الظاهري** للجسم *(apparent weight)* وهو في السائل.

مثل 11-7 غرق سفينة التايتانك

كانت سفينة التايتانك أكبر سفينة ركاب بخارية في العالم عندما قامت بأول رحلة لها عام 1912 من ساوثهامبتون بانجلترا متجهة لنيويورك، إلا أنها اصطدمت بجبل جليدي قرب الشواطئ الكندية وغرقت خلال ثلاث ساعات وغرق معها مايزيد عن 1500 من ركابها وبحارتها. فكيف "اختفي" هذا الجبل عنها وأدى لهذه الكارثة؟ سنستخدم هذا المثل لحساب نسبة الجزء المغمور من جبل جليدي علما بأن كثافة الجليد هي $920\ \mathrm{kg/m^3}$ وكثافة ماء المحيط المالحة $1030\ \mathrm{kg/m^3}$.


جبل جليدي

الحل: بما أن جزء من الجبل الجليدي يطفو فوق سطح ماء المحيط لذا تكون دافعة أرخميدس المؤثرة عليه للأعلى تساوي وزنه للأسفل، أي أن وزنه الظاهري يساوي الصفر (ولو وضعنا تحته ميزانا لما أعطى أي قراءة!) ونكتب:

$$w = F_{up} \;\Rightarrow\; \rho_i V_i g = \rho_w V_w g$$

حيث V_i وρ_i حجم وكثافة الجليد، على الترتيب، بينما V_w وρ_w الحجم المغمور منه، على الترتيب، أيضا. ومن ثم نجد أن:

$$\frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = 0.89 = 98\%$$

أي أن 11% من الجبل يطفو فوق الماء فقط!

مثل 11-8

أراد فيزيائي شراء قلادة ذهبية من تاجر عرضها عليه بثمن بخس إلا انه ارتاب بالأمر فوزنها في الهواء ووجد $5.98\ \mathrm{N}$ ثم وزنها في ماء عذب فوجد $5\ \mathrm{N}$ فاستنتج أنها مزيفة. بين ذلك.

الحل: لمعرفة فيما إذا كانت القلادة من الذهب الخالص أم لا يجب معرفة كثافة معدنها ونقارنها بالذهب. فنحسب أولا قوة دفع أرخميدس على القلادة ونكتب:

$$F_{up} = w - w' = 5.98 - 5 = 0.98\ \mathrm{N}$$

لكن قوة دفع أرخميدس تساوي وزن الماء الذي أزاحته القلادة ويساوي حجمها (لأنها مغمورة كليا في الماء) مضروبا بكثافة الماء مضروبا بتسارع الجاذبية، أي أن:

$$F_{up} = \rho_w V g = 0.98\ \mathrm{N}$$

ومن ثم نجد الحجم:

$$V = \frac{0.98\ \text{N}}{(1000\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)} = 10\times10^{-4}\ \text{m}^3$$

ثم نحسب كثافة القلادة بكتابة:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{w}{Vg} = \frac{5.98\ \text{N}}{(10\times10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)} = 6\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

وحيث أن كثافة الذهب $1.93\times10^3\ \text{kg/m}^3$ لذا نستنتج أن القلادة مزيفة فعلا.

7-11 تحريك السوائل

تعتبر حركة السوائل من أصعب الحركات للدراسة الدقيقة كما يتضح لأي مراقب لفيضان نهر كبير أو تدفق جدول صغير. إلا أن هناك حالات خاصة مثالية يمكن الاستفادة منها للحصول على معلومات مهمة عن حركة سوائل معينة، مثل تدفق الدم في الشرايين أو حركة الماء في الأنابيب.

ويمكن تبسيط الدراسة في حالات خاصة لبعض السوائل التي تدعى **سوائل مثالية** *(ideal fluids)* وتحقق الخواص التالية:

1- عديم اللزوجة *(non-viscous)*: أي لايوجد احتكاك بين طبقات ذراته المتجاورة والذي يؤدي عادة لتوليد إجهاد سطحي بينها مما يعيق حركتها وينتج الدوامات. وتتفاوت اللزوجة من سائل لآخر، فلزوجة الغليسرين أكبر من لزوجة الماء بـ 1500 مرة، والدم بـ 500 مرة. ولذا يمكن اعتبار الماء والدم عديمي اللزوجة بالمقارنة مع سوائل كثيرة.

2- غير قابل للانضغاط *(incompressible)*: أي أن كثافته ثابتة. وتعتبر معظم السوائل غير قابلة للانضغاط بالمقارنة مع الغازات التي تضغط بسهولة نسبيا.

3- خطوط الجريان ثابتة *(steady)* **وسطحية** *(laminar)*: أي أن الطريق الذي تسلكه جزيئة ما من السائل لايتداخل مع طريق جزيئة أخرى، كما أن كثافة وسرعة وضغط السائل عند أي نقطة منه لايتغير مع مرور الزمن، ولو أنه قد يتغير من نقطة لأخرى. ويطلق اسم **خط الجدول** *(streamline)* على المماس لسرعة الجزيئة عند كل نقطة من السائل. ويتطابق خط الجدول مع خط الجريان عندما تكون سرعة الجريان ثابتة.

8-11 معادلة الاستمرار

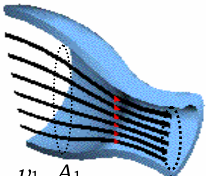
سندرس حركة سائل مثالي غير قابل للانضغاط في أنبوب غير منتظم، كما في الشكل (11-12). فنلاحظ أن كمية السائل الداخلة إليه في ثانية تساوي تلك الخارجة منه خلال نفس الزمن. فإذا كانت سرعة الجريان ومساحة المقطع عند نقطة ما Q هما v_1 و A_1، على الترتيب، وعند نقطة أخرى S هما v_2 وA_2 عندئذ تكون كمية السائل الداخلة أو الخارجة في ثانية واحدة هي:

الكتلة=الكثافة×الحجم=الكثافة×(مساحة القاعدة×المسافة المقطوعة في ثانية)

=الكثافة×مساحة القاعدة×(السرعة×ثانية واحدة)

أي أن:

$$m = \rho \times A \times v$$



الشكل (11-12)

ومن ثم فإن حفظ الكتلة الداخلة والخارجة يعني أن:

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$$

ومنه:

$$\boxed{Q = v_1 A_1 = v_2 A_2} \qquad (11\text{-}25)$$

يطلق على العلاقة (11-25) اسم **معادلة الاستمرار** *(continuity of equation)* وتدعى Q **معدل التدفق** *(rate of flow)* حيث نلاحظ أنها تبقى ثابتة خلال حركة السائل من موضع لآخر.

مثل 11-9

مامعدل تدفق الدم في شريان مساحة مقطعه $2\ cm^2$ إذا كانت سرعة جريانه $40\ cm$؟ وكم تصير إذا وصل لشعيرة دموية مساحة مقطعها $0.1\ cm^2$؟

الحل: نحسب معدل التدفق في الشريان من (11-25) ونكتب:

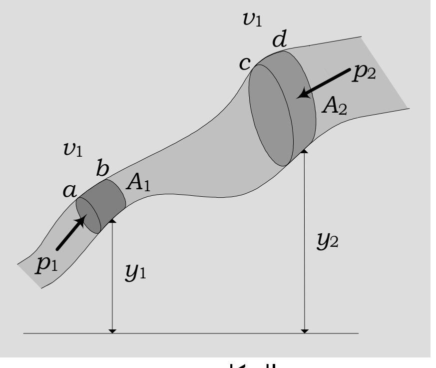
$$Q = Av = (2\times10^{-4}\ \text{m}^2)(40\times10^{-2}\ \text{m/s}) = 8\times10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}$$

كما نجد سرعة جريان الدم في الشعيرة الدموية من معادلة الاستمرار فنكتب:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = (\frac{A_1 v_1}{A_2}) v_1 = 800\ \text{cm/s}$$

9-11 معادلة برنولي

يمكن الربط بين الضغط وسرعة الجريان والارتفاع عند أي نقطة من سائل مثالي بواسطة نظرية الشغل والطاقة. فنلاحظ من الشكل (11-13) أنه عندما تمر كمية صغيرة من السائل في المنطقة بين النقطتين a و b، حيث الضغط p_1 ومساحة المقطع A_1 وسرعة الجريان v_1، فإنه يقطع مسافة $\Delta s_1 = v_1 \Delta t$ خلال الزمن Δt ويغطي حجما $\Delta V_1 = A_1 s_1$. وعندما يصل للمنطقة بين c وd حيث الضغط p_2 ومساحة المقطع A_2 والسرعة v_2، فإنه يقطع مسافة $\Delta s_2 = v_2 \Delta t$ ويغطي حجما $\Delta V_2 = A_2 s_2$ خلال نفس الزمن.



الشكل(11-13)

الآن: بما أن السائل غير قابل للانضغاط فإن كمية السائل الداخلة تساوي كمية السائل الخارجة في أي موضع، أي أن:

$$m_1 = m_2 \ \Rightarrow\ \rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2 \ \Rightarrow\ A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2$$

ثم نحسب الشغل المبذول لتحريك هذه الكتلة من الموضع الأول إلى الموضع الثاني والمساوي لشغل الجاذبية وشغل قوة ضغط السائل. فنكتب شغل الجاذبية على النحو:

$$W_g = mg(y_1 - y_2)$$

وشغل قوة الضغط:

$$W_p = F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2$$

ويصير الشغل الكلي:

$$W_T = mg(y_1 - y_2) + p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2$$

وبحسب نظرية الشغل والطاقة فإن:

$$W_T = K_2 - K_1 = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2$$

وبتعويض $m = \rho \Delta V$ حيث ΔV الجزء المعتبر من السائل، تؤول نظرية الشغل والطاقة إلى:

$$\rho g(y_1 - y_2) + p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

أو

$$\boxed{p_1 + \tfrac{1}{2}v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}v_2^2 + \rho g y_2} \qquad (26\text{-}11)$$

تسمى العلاقة (26-11) **معادلة برنولي** *(Bernoulli Equation)* وتربط بين سرعة الجريان والضغط والارتفاع عند أي نقطة من السائل.

يتدفق الماء بسرعة كبيرة عند الاختناق الصغير

ومن الجدير بالانتباه أن الحد ρgy يمثل طاقة وضع واحدة الحجوم من السائل، بينما $\rho v^2/2$ يمثل طاقة حركة ذلك الجزء. ومن ثم فيجب أن يكون الضغط p يمثل طاقة واحدة الحجوم أيضا حتى تكون تتناسق وحدات الكميات الواردة في المعادلة (26-11). وبالفعل يمكن أن نتحقق من ذلك لو كتبنا وحدات الضغط حيث نجد:

$$1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\ \frac{\text{m.N}}{\text{m}^3} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

أي أن الضغط هو كثافة طاقة فعلا ومعادلة برنولي هي أحد أشكال حفظ الطاقة.

10-11 تطبيقات على معادلة برنولي

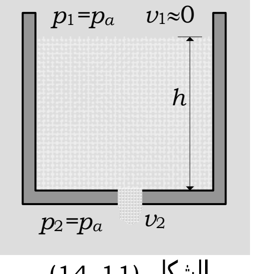
1- سكون السوائل ومعادلة المانوميتر

نحصل على معادلة المانوميتر التي وجدناها في فقرة سابقة من معادلة برنولي بفرض أن السائل ساكن في الأنبوب، أي أن $v_1 = v_2 = 0$ وعندئذ تؤول (26-1) إلى:

$$p_1 - p_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$$

وهذه هي معادلة المانوميتر.

2- نظرية توريشيلي



الشكل (14-11)

إذا كان لدينا وعاء كبير مساحة مقطعه A_1 مملوء بسائل لارتفاع h، كما في الشكل (14-11)، وفتحنا في قعره فتحة صغيرة مساحتها A_2 عندئذ نجد سرعة تسرب السائل من هذه الفتحة من معادلة برنولي بوضع $y_2 - y_1 = h$ و $v_1 \approx 0$ لأن سطح السائل يهبط ببطء شديد، فنجد:

$$v_2^2 = \frac{2\rho(p_1 - p_2)}{\rho} + 2gh$$

ولكن $p_1 = p_2 = p_a$ لأن السطح مفتوح والفتحتان معرضتان للجو، ولذلك يكون:

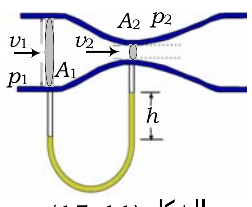
$$v_2 = \sqrt{2gh} \tag{27-11}$$

فسرعة خروج السائل تكافئ السرعة التي يسقط بها جسم حر من ارتفاع h.

تدعى العلاقة (27-11) **نظرية توريشيلي** وتنطبق على أي فتحة في الوعاء، سواء كانت في قعره أو جداره الجانبي.

3- أنبوب فنتوري *(Venturi Tube)*:

يتألف انبوب فنتوري من انبوب مساحة مقطعه A_1 يسري فيه سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها p_1 فيصل لاختناق مساحته $A2$، كما في الشكل (15-11). ويستفاد من أنبوب فنتوري لمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيس والاختناق، فنكتب معادلة برنولي للنقطتين 1 و2 اللتين تقعان على نفس الارتفاع:



الشكل (15-11)

$$p_1 + \tfrac{1}{2} v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2} v_2^2$$

ولكن $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ولذلك يكون:

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho[(A_1 / A_2)^2 - 1]v_1^2 \tag{28-11}$$

ويتم قياس فرق الضغط بين نقطتين بواسطة مانوميتر فيه سائل كثافته ρ' متصل بأنبوب فنتوري ويختلف ارتفاع السائل بين ذراعي المانوميتر بحسب الفرق في الضغط. وبما أن $A_1>A_2$ لذلك يكون $p_1>p_2$، أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيس للأنبوب! وهذه نتيجة هامة في سريان الدرم في الشرايين التي قد تتناقص مساحة مقطعها في منطقة ما نتيجة تراكم الدهون والشحوم، فيتناقص ضغط الدم هناك عن قيمته الطبيعية اللازمة لمعاكسة الضغوط الخارجية، مما قد يؤدي لانغلاق الشريان وإصابة الشخص بنوبات قد تودي بحياته.

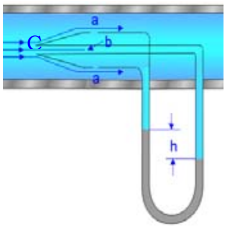
4- أنبوب بيتوت *(Pitot Tube)*:

يستخدم انبوب بيتوت لقياس سرعة جريان سائل في منطقة معينة حيث يقيس المانوميتر، كما في الشكل (16-11) فرق الضغط بين نقطتين c و b (حيث $v_b=0$ عمليا) فنجد من معادلة برنولي:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

كما أن

$$p_2 - p_1 = \rho' g h$$

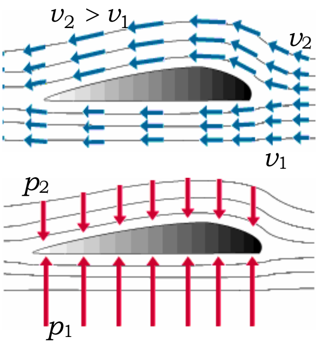


الشكل (16-11)

حيث ρ' كثافة السائل في المانوميتر. ونجد من المعادلتين السابقتين:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho}}$$

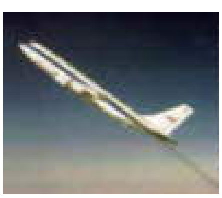
وبما أن ρ و ρ' معروفتان مسبقا لذا يمكن معايرة الجهاز بحيث تقرأ السرعة من معرفة الارتفاع h مباشرة.



الشكل (17-11)

5- جناح الطائرة وقوة الرفع *(lift force)*:

عندما تطير طائرة فإن الهواء يندفع من حول جناحيها ومن الأعلى ومن الأسفل كسريان سائل في انبوب. وتتكثف خطوط الجريان بحسب ميل الجناح وتصميمه بحيث تكون من الأعلى أكبر مما هي عليه من الأسفل فتصير سرعة جريانها فوق الجناح أكبر من سرعتها تحته، مما يجعل الضغط الأسفل أكبر من الضغط الأعلى، كما هو موضح بالشكل(17-11). ويؤدي فرق الضغط هذا لرفع الطائرة للأعلى. تسمى قوة فرق الضغط هذه **قوة الرفع** *(lift force)* وتتناسب مع سرعة الطائرة. ففي الرحلات قصيرة المدى تحلق الطائرة على ارتفاع 8 km تقريبا بسرعة 400 km/h، أما في الرحلات بعيدة المدى فترتفع الطائرة فوق الغلاف الجوي لحدود 10 km لتحلق بسرعة 800 km/h. وقد وصلت سرعة طائرة الكونكورد فوق الصوتية إلى حوالي 1200 km/h على ارتفاع 14 km.



مثال 11-10

تهب رياح شديدة بسرعة 150 km/h فوق منزل ريفي. مافرق الضغط بين داخل البيت وفوقه تماما وما القوة التي سيخضع لها سقف المنزل إذا كانت مساحته $50\ m^2$؟

الحل: نفترض أن سرعة الهواء داخل المنزل تساوي الصفر (بالطبع!) ونهمل سمك السقف بالمقارنة مع ارتفاع المنزل بحيث نعتبر ذرات الهواء القريبة من السقف داخل وخارج المنزل عند نفس الارتفاع. ومن ثم نكتب من معادلة برنولي:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v^2$$

أي أن:

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}(1.29\ \mathrm{kg/m^3})(150\ \mathrm{km/h})^2 \approx 0.01\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

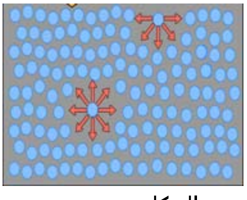
فالضغط خارج المنزل أكبر من ذاك داخله بحوالي 1% من الضغط الجوي. ولذا سيخضع السقف لقوة نحو الأعلى تساوي:

$$F = (\Delta p)A = (0.01\times10^5\ \mathrm{N/m^2})(50\ \mathrm{m^2}) = 0.5\times10^5\ \mathrm{N}$$

وهذه القوة تعادل كتلة مقدارها 5000 kg تقريبا! فإذا كان البيت ريفيا قديما فمن المحتمل أن يطير سقفه عند هبوب رياح كهذه. وقد أدت رياح إعصار كاترينا الذي ضرب مدينة نيو أورلينز بالولايات المتحدة عام 2005 والتي وصلت سرعتها لحوالي 220 km/h لتحطيم معظم منازل المدينة وحتى تلك المبنية بالآجر والإسمنت!.

11-11 التوتر السطحي *(surface tension)*

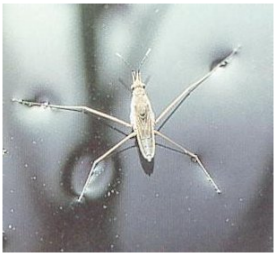
إذا نظرت لقطرة ندى معلقة بورقة شجر في الصباح الباكر لرأيت أنها كروية الشكل تقريبا وسبب ذلك يعود إلى أن للسوائل خاصية معينة تسمى **التوتر السطحي** والذي يسعى السائل بموجبه لتشكيل أصغر سطح ممكن من أجل حجم معين منه. ويمكن فهم ظاهرة التوتر السطحي لو نظرنا لقطرة سائل، كما في الشكل(11-17)، فإن كانت تحت السطح فإنها تخضع لقوى جذب من كل الاتجاهات وتكون محصلة القوى عليها معدومة. أما بالنسبة لذرة على السطح فإنها تخضع لجذب من الذرات السفلية فقط لأنه لايوجد فوقها ذرات تشدها. ولذلك تخضع ذرات سطح السائل كله لقوى تشدها نحو الأسفل فتتقاص مساحته بأكبر قدر ممكن. ويصير شكل القطرة كرويا لأن للكرة أصغر سطح ممكن من أجل حجم معين.



الشكل (11-17)

ومن تطبيقات التوتر السطحي التي نشاهدها في حياتنا اليومية وقوف حشرة أو طفو إبرة أو شفرة حلاقة على سطح ماء راكد حيث تستقر في منخفض نصف كروي يؤثر عليها بقوة للأعلى تساوي وتعاكس وزنها كغشاء مطاطي تماما. ونعرف التوتر السطحي γ للسائل بالقوة المؤثرة على واحدة الطول منه، أي:

$$\gamma = \frac{F}{L} \qquad (30\text{-}11)$$



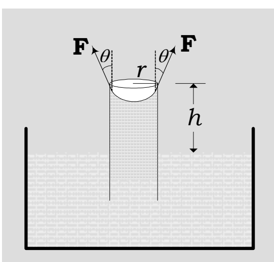
حيث تقدر وحدة التوتر السطحي بـ N/m. ويعطي الجدول 11-3 قيم γ لبعض السوائل.

ولو وضعنا حلقة دائرية على سطح سائل وبقيت طافية عليه لأثر عليها بقوة من الداخل وأخرى من الخارج فيصير التوتر السطحي فيها مساويا إلى:

$$\gamma = \frac{F}{2L} \qquad (31\text{-}11)$$

11-12 الخاصة الشعرية *(Capillarity)*

من المعروف أنه إذا غمسنا طرف أنبوب رفيع، يسمى أنبوب شعري *(capillary tube)*، في وعاء ممتلئ بالماء فإن الماء يرتفع فيه مباشرة لنقطة معينة لايتجاوزها. ويمكن تفسير ذلك بالاستفادة من شكل سطح السائل في الأنبوب، كما في الشكل (11-18)، والذ يأخذ شكل قطع مكافئ خاضع لقوة التوتر السطحي المساوية إلى:



الشكل(11-18)

$$F_\gamma = \gamma L = \gamma(2\pi r)$$

حيث نلاحظ أن طول الجزء من السائل الملامس للأنبوب يشكل دائرة نصف قطرها مساو لنصف قطر الأنبوب، أي أن طول السائل الخاضع للتوتر السطحي هو محيط دائرة نصف قطرها r.

وتكون القوة الشاقولية المؤثرة على السائل هي:

$$(F_\gamma)_y = \gamma(2\pi r)\cos\theta$$

وتسمى الزاوية θ **زاوية التماس** *(angle of contact)*. وبالطبع فإن هذه القوة تساوي وتعاكس وزن السائل المرتفع في الأنبوب، أي أن:

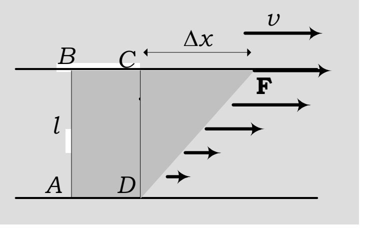
$$(F_\gamma)_y = \gamma(2\pi r)\cos\theta = mg = \rho g(\pi r^2 h)$$

ومن ثم نجد مقدار ارتفاع السائل في الأنبوب:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}\cos\theta \qquad (32\text{-}11)$$

13-11 اللزوجة *(Viscosity)*

تختلف السوائل عن بعضها بلزوجتها. فبعضها قليل اللزوجة، كالماء الذي ينساب في الأنابيب بكل يسر وسهولة، وبعضها الآخر ازج جدا، كالصمغ الذي يلتصق بجدران الوعاء الذي يوضع فيه ولاينساب بتاتا تقريبا. ويعود سبب اللزوجة إلى قوى الاحتكاك الداخلي في السائل. ويمكن فهم ذلك بتصور شريحة من سائل بين صفيحتين من جسم صلب، كما في الشكل(11-20)، حيث نلاحظ أن الطبقة العلوية تتحرك بسرعة v تحت تأثير قوة خارجية F بينما تبقى الطبقة السفلية ساكنة في مكانها. ومن ثم فإن الجزء السفلي المحدد في لحظة ما بالمستطيل $ABCD$ سيتشوه في لحظة تالية. فيخضع السائل لإجهاد سطحي يساوي F/A حيث A مساحة الطبقة العلوية منه. ويكون الانفعال مساويا إلى $\Delta x/l$. ونلاحظ من الشكل (11-20) أن الطبقة العلوية تنتقل خلال زمن Δt مسافة $\Delta x = v\Delta t$. ومن ثم يكون معدل الانفعال السطحي بالنسبة للزمن $\Delta x/l$ مساويا إلى:



الشكل (11-20)

$$\frac{\Delta x/l}{\Delta t} = (\frac{\Delta x}{\Delta t})/l = \frac{v}{l}$$

ونعرف معامل اللزوجة *(coefficient of viscosity)* بنسبة الإجهاد السطحي إلى معدل الانفعال السطحي بالنسبة للزمن، أي أن:

$$\eta = \frac{Fl}{Av} \qquad (33\text{-}11)$$

وتعطى وحدة η في نظام الوحدات الدولي بـ $N.s/m^2$. وفي الجدول 11-3 قيم η لبعض السوائل.

الجدول 11-3: التوتر السطحي ومعامل اللزوجة لبعض السوائل

المادة	درجة الحرارة (C)	التوتر السطحي (N/m)	معامل اللزوجة (10^{-3} N.s/m²)
الماء	20	0.073	1
الماء	100	0.059	0.3

ماء الصابون	20	0.025	_
الزئبق	20	0.465	_
أثير الكحول	20	0.022	_
الدم	37	_	2.7
الغليسيرين	20	_	1500
زيت المحركات	30	_	250

ملخص الفصل

معامل يانغ
$$Y = \frac{F/A}{\Delta L / L}$$

معامل القص السطحي
$$S = \frac{F/A}{\Delta x / h}$$

معامل الحجم
$$B = -\frac{F/A}{\Delta V / V}$$

الكثافة
$$\rho = M/V$$

الضغط
$$p = F/A$$

معادلة المانوميتر
$$p = p_a + \rho g h$$

مبدأ باسكال
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

قاعدة أرخميدس
$$F_T = g(\rho_b V_b - \rho_l V_l) = w'$$

معادلة الاستمرار
$$Q = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$$

معادلة برنولي
$$p_1 + \tfrac{1}{2}\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

نظرية توريشيلي
$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$$

انبوب فنتوري
$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]\upsilon_1^2$$

انبوب بيتوت
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho}}$$

التوتر السطحي
$$\gamma = F/L$$

الخاصة الشعرية
$$h = (2\gamma / \rho g r)\cos\theta$$

معامل اللزوجة
$$\eta = \frac{Fl}{A\upsilon}$$

تمارين ومسائل

الكثافة

1-11 ماكتلة كرة من النحاس نصف قطرها 2 cm؟

2-11 ماعدد قضبان الفولاذ التي يمكن تحميلها على عربة تستطيع تحمل كتلة 550 kg إذا كان طول كل قضيب 1.4 m ونصف قطره 1.2 cm؟

3-11 يستعمل أنبوب رفيع يدعى **بكنوميتر** لقياس كثافة السوائل فتقاس كتلته فارغا 22.71 g وعند ملئه بالماء تصير 153.38 g و 157.67 g عند ملئه بالحليب. ماكثافة الحليب؟

4-11 ماوزن باب من خشب البلوط كثافته $500\ kg/m^3$ وأبعاده $2\times0.75\times0.04$ m؟

المرونة

5-11 تعلق كتلة 8.5 kg بنهاية سلك طوله 1.5 m ومساحة مقطعه $2.4\ mm^2$ مثبت شاقوليا فيستطيل 0.29 mm. ما الإجهاد والإنفعال ومعامل يانغ؟

6-11 يتصدع سلك نحاسي عندما يبلغ الإجهاد عليه $3\times108\ N/m^2$. (أ) ما أكبر حمل يمكن تعليقه بالسلك إذا كان نصف قطره 0.41 mm؟ (ب) مانسبة استطالة السلك إلى طوله الأصلي عندما يعلق به نصف الحمل الأعظمي؟

7-11 يوصل سلك من النحاس طوله L ونصف قطره 0.6 mm بسلك فولاذ طوله $2L$ وقطره 0.8 mm ويعلق شاقوليا فيستطيل بمقدار 0.65 mm عندما يعلق به حمل 10 kg. ماهي L؟

8-11 ما استطالة سلك فولاذ طوله 4 m مستطيل المقطع أبعاده 1.5×2 cm إذا علق به كتلة 100 kg؟

9-11 في تجربة لقياس معامل يانغ للعظام توضع كتلة 10 kg فوق مقطع عظمة أسطوانية الشكل مساحة مقطعها $1.5\ cm^2$ ومثبتة شاقوليا فتنضغط بمعدل 0.0065%. ماقيمة Y لهذه القطعة؟

10-11 ما تغير حجم قطعة نحاس حجمها $10^{-3}\ m^3$ عندما يطبق عليها من كل الجهات ضغط متساوي قيمته 5×10^4 Pa ؟

11-11 ما الضغط الإضافي اللازم لتغيير حجم عينة من الماء بمقدار 1%؟

12-11 يتصدع الفولاذ إذا تجاوز إجهاد القص السطحي عليه 4×10^8 Pa. ما القوة اللازمة لفتح ثقب قطره 1 cm في فولاذ سمكه 0.5 cm؟

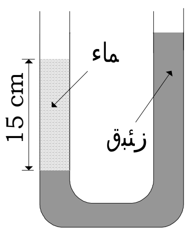
الضغط

11-13 تصمم غواصة لتصل لعمق 600 m تحت سطح البحر وضغط جوي داخلها. مافرق الضغط خارج الغواصة والقوة الكلية المؤثرة على نافذة فيها قطرها 15 cm؟

11-14 مافرق الضغط الذي يجب على مضخة توفيره لضخ الماء من بئر عمقه 730 m لسطح الأرض؟

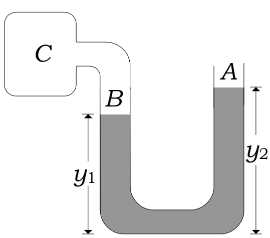
11-15 تغطي طبقة زيت سمكها 15 cm ماءا ارتفاعه 25 cm في برميل مفتوح. (أ) مافرق الضغط بين الماء والزيت إذا كانت كثافة الزيت $600\ kg/m^3$؟ (ب) مافرق الضغط بين سطح البرميل وقعره؟

11-16 ماضغط الماء الكلي في بركة سباحة ممتلئة أبعادها 25×8×3 m على قعرها وعلى حائط جانبي فيها؟ مساعدة: بالنسبة للطلب الثاني احسب الضغط على شريحة رقيقة وكامل النتيجة على ارتفاع الحائط.



الشكل (11-21)

11-17 يسكب ماء في الذراع اليسرى لأنبوب على شكل U فيه كمية من الزئبق فيرتفع الماء 15 cm، كما في الشكل (11-21). (أ) ما الضغط المعياري $p-p_a$، عند السطح الفاصل بين المائعين؟ (ب) ما الفرق بين ارتفاع عمود الزئبق وعمود الماء؟



الشكل (11-22)

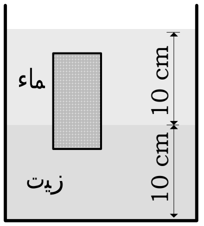
11-18 يملأ المانوميتر في الشكل (11-22) بزئبق فيرتفع إلى y_1=3 cm وy_2=8 cm. (أ) ما الضغط عند النقطة A إذا كان الضغط الجوي 970 mbar؟ (ب) ما الضغط عند النقطة B؟ (ج) ما الضغط في الخزان C؟

الطوف

11-19 ماحجم تمثال نحاسي وزنه في الهواء 125 N؟ ماوزنه في الماء؟

11-20 ماحجم وكثافة جسم يزن 10 N وهو مغمور كليا في الماء بينما يزن 12 N في الهواء؟

11-21 تربط كرة بلاستيكية بسلسلة مثبتة بقعر بحيرة ماء فيصل الشد في السلسلة إلى 600 N. ماقوة الطفو التي يؤثر بها الماء على الكرة إذا كان حجمها $0.2\ m^3$؟ (ب) ماكتلة الكرة؟ (ج) مانسبة الحجم الذي سيبقى مغمورا منها إذا انقطعت السلسلة وطفت الكرة على السطح؟



الشكل (11-23)

11-22 تطفو قطعة خشب مكعبة الشكل على السطح الفاصل بين ماء وزيت، كما في الشكل (11-23)، بحيث يغمر 2 cm منها تحت الماء و 8 cm في الزيت. (أ) مافرق الضغط عند كل من السطح العلوي والسفلي للقطعة إذا كانت كثافة الزيت $600\ kg/m^3$؟ (ب) ماكتلة الخشب؟

11-23 ما الضغط الكلي عند أعمق نقطة من المحيط الهادي تسمى المريانا ترنش وعمقها 10.92 km؟ (استعمل كثافة ماء البحر) (ب) إن الضغط الحقيقي عند تلك النقطة هو 1.17×10^8 Pa وهذه أكبر من نتيجة الحساب بسبب تغير الكثافة مع العمق. جد العلاقة الخطية بين العمق والكثافة.

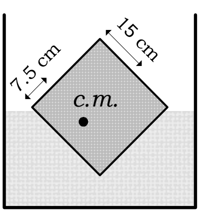
11-24 توضع قطعة خشب في كفة ميزان فتتعادل مع 0.1 kg من النحاس موضوعة في الكفة الأخرى. ما الوزن الحقيقي للخشبة إذا علمت أن كثافتها النسبية 0.15 وكثافة الهواء 1.29 kg/m^3 مع إهمال قوة دفع الهواء على النحاس؟

11-25 يجلس رجل كتلته 80 kg في قارب نجاة حجمه $0.03\ m^3$ بحيث يغمر 0.8 من الرجل في ماء البحر. ماكثافة مادة القارب إذا كانت الكثافة النسبية للرجل 1.2 والماء 1.03؟

11-26 (أ) يدعي صانعو سيارة صغيرة كتلتها 1000 kg وحجمها الداخلي $4\ m^3$ أنها تطفو في الماء. مانسبة الحجم المغمور منها عندما تطفو؟ (أهمل قوة الدفع على معدن السيارة). (ب) جد كمية الماء المتسربة داخل السيارة واللازم لإغراقها.

11-27 تزن خليطة من الذهب والألمنيوم 45 N في الهواء و36 N في الماء. ماوزن الذهب فيها إذا كانت كثافته النسبية 19.3 وللألمنيوم 2.5؟

11-28 تطفو قطعة خشب مكعبة طول ضلعها 0.1 m وكثافتها $500\ kg/m^3$ في الماء ثم يصب زيت كثافته $800\ kg/m^3$ في الماء إلى أن يصير سطحه على عمق 4 cm بالنسبة لسطح القطعة. (أ) ماسمك الزيت في الماء؟ (ب) ما الضغط المعياري بين سطحي القطعة؟



الشكل(11-24)

11-29 يوضع مكعب خشبي طول ضلعه 0.3 m في الماء ونصف حجمه مغمور فيه بحيث يقع مركز كتلته عند النقطة c، كما في الشكل (11-24). ماعزم الإرجاع الذي سيخضع له عندما يميل بزاوية 45°؟

11-30 ما أكبر عدد من الأشخاص يمكن لطوافة خشبية أبعادها $2\times2\times0.3$ m أن تحمل دون أن تغرق في ماء عذب إذا كانت كتلة الواحد 65 kg بفرض أن كثافة الخشب $500\ kg/m^3$؟

حركة السوائل ومعادلة برنولي

31-11 يتدفق ماء في أنبوب مساحة مقطعه $10\ cm^2$ بسرعة $2\ m/s$ ليصل لاختناق $5\ cm^2$. ماحجم الماء الخارج من هذه المنطقة بالثانية إذا كان فرق الضغط بينهما $300\ Pa$؟

32-11 يتدفق ماء في أنبوب غير منتظم فيمر من نقطة مساحة مقطعها $0.8\ m^2$ بسرعة $4\ m/s$ (أ) ماسرعة السائل عند نقطة مقطعها $0.06\ m^2$ أو$0.112\ m^2$. (ب) ماحجم الماء الخارج في الثانية؟

33-11 يتدفق ماء في أنبوب فيمر من نقطة مساحة مقطعها $0.2\ m^2$ بمعدل تدفق $0.8\ m^2$. (أ) ماسرعة السائل؟ (ب) مانصف قطر الأنبوب عند نقطة سرعة السائل عندها $3.8\ m/s$؟

34-11 يحوي وعاء مغلق ومملوء بماء البحر طبقة من الهواء فوق سطح الماء سمكها $2\ cm$. (أ) ماسرعة خروج الماء من فتحة بقعر الوعاء مساحتها $10\ cm^2$ إذا كان ارتفاع الماء الابتدائي $2\ m$ وفرق الضغط فيه $40\ atm$؟ (ب) ماكمية الماء الخارجة في ثانية واحدة ومازخمها الخطي؟ (ج) مامعدل تغير الزخم الخطي للكتلة؟ (د) اكتب القوة التي تتعرض لها هذه الكمية خلال خروجها من الفتحة وجد القوة التي يؤثر بها السائل المنطلق على الوعاء (استعمل قانون نيوتن الثالث). تسمى هذه القوة **النفث** *(thrust)* وتعمل الصواريخ على هذا المبدأ.

35-11 (أ) ماسرعة خروج الماء من فتحة نصف قطرها $2\ cm$ في جدار وعاء عمقه $10\ cm$؟ (ب) ماحجم الماء الخارج في الثانية؟

36-11 يخرج ماء من أنبوب أفقي بمعدل $0.004\ m^3/s$ عند نقطة مقطعها $0.001\ m^2$ وضغطها $1.2\times10^5\ Pa$. ماذا يجب أن تكون مساحة اختناق في الأنبوب حتى يصير الضغط عنده $1\times10^5\ Pa$؟

37-11 يسري ماء في أنبوب فيمر من نقطة أولى مساحتها A وفرق الضغط عندها $3\times10^5\ Pa$ بسرعة $4\ m/s$. مافرق الضغط عند نقطة ثانية على عمق $20\ m$ بالنسبة للأولى ومساحتها $A/2$؟

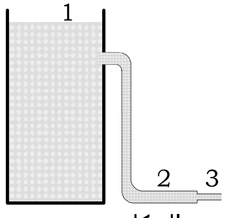
38-11 ماذا يجب أن يكون فرق الضغط عند الخزانات الرئيسية في مدينة حتى يصل ارتفاع الماء الخارج من فوهة خرطوم إطفائي إلى $20\ m$؟

39-11 يتدفق ماء من فتحة في قعر إناء اسطواني مساحتها $1\ cm^2$ بنفس الوقت الذي يتم ملؤه من الأعلى بمعدل $1.4\times10^{-4}\ m^3/s$. مامقدار ارتفاع الماء في الإناء إذا كان قطره $0.1\ m$ وارتفاعه $0.2\ m$؟

40-11 تحتاج طائرة لقوة رفع مقدارها $1000\ N/m^2$. ماسرعة سريان الهواء فوق الجناح إذا كانت سرعته تحته $100\ m/s$؟ (كثافة الهواء $1.29\ kg/m^3$).

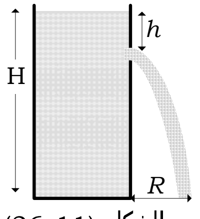
41-11 يسري ماء في أنبوب فيمر من نقطة فرق الضغط عندها $1\times10^4\ Pa$ فوق الضغط الجوي بسرعة $2\ m/s$. مافرق الضغط عند نقطة أخرى مساحتها تعادل نصف مساحة الأولى؟

42-11 يتدفق ماء من خزان كبير جدا، كما في الشكل (11-25)، بحيث أن ارتفاع النقطة 1 هو $10\ m$ وارتفاع النقطتين 2 و 3 هو $1\ m$ ومساحة المقطع عند الأولى $0.04\ m^2$ والثانية $0.02\ m^2$. (أ) مافرق الضغط عند النقطة 2؟ (ب) مامعدل تدفق الماء من الخزان بالثانية؟



الشكل (11-25)

43-11 يبلغ ارتفاع الماء في برميل H عندما يفتح ثقب صغير في جانبه على عمق h من سطح الماء، كما في الشكل (11-26). (أ) ما المسافة الأفقية التي سيقطعها الماء المتدفق من الثقب عند وصوله للأرض؟ (ب) بفرض أن H=12 m و h=3 m، عند أي ارتفاع تحت سطح الماء يمكن فتح ثقب آخر بحيث يقطع الماء المتدفق منه نفس المسافة الأفقية التي يصل إليها الماء من الأول؟



الشكل (11-26)

44-11 يسري ماء في أنبوب غير منتظم بمعدل $3\times10^{-3}\ m^3/s$ فيمر من نقطة أولى مساحتها $40\ cm^2$ وأخرى مساحتها $10\ cm^2$. (أ) ماسرعة الماء عند كل نقطة؟ (ب) مافرق الضغط بين النقطتين؟ (ج) كم يرتفع عمود من الزئبق نتيجة هذا الفرق في الضغط؟

45-11 يطفو جسم منتظم الشكل كتلته m وارتفاعه h ومساحة مقطعه A بشكل قائم في سائل كثافته ρ. (أ) ما الارتفاع الشاقولي الظاهر من الجسم فوق الماء؟ (ب) ما المسافة الي سيهبطها قعر الجسم عند تطبيق قوة F على سطحه العلوي نحو الأسفل؟

46-11 يتألف مقياس هيدروميتر مملوء بالكحول من عنق اسطواني مساحة مقطعه $0.4\ cm^2$ وقعر كروي بحيث أن الحجم الكلي للمقياس $13.2\ cm^3$. جد كثافة الكحول إذا علمت أن $8\ cm$ من العنق طفت فوق السطح عندما وضع المقياس في الماء بينما طفا $1\ cm$ منه عند وضعه في الكحول؟ (يوضح هذا المثال دقة الجهاز المذكور لأن القراءة تتغير لأي تغير في الكثافة).

47-11 يتدفق ماء تحت ضغط $3\times10^5\ Pa$ بسرعة $1\ m/s$ في أنبوب أفقي عندما يصل لاختناق قطره ربع قطر الأنبوب الأصلي. ماسرعة الماء هناك وما الضغط في الاختناق؟

11-48 برهن أن القدرة اللازمة لدفع سائل في أنبوب تساوي معدل التدفق مضروبا بفرق الضغط بين طرفيه (استخدم معادلة الأبعاد).

11-49 يخرج الماء من نافورة قطرها 10 cm فيصل لارتفاع 10 m. ما القدرة اللازمة لتشغيل النافورة؟ (أهمل طول النافورة مهمل وسرعة الماء في الأنابيب المغذية لها).

11-50 ماحجم بالون كتلته 600 kg ويحمل رزمة كتلتها 4000 kg ليرتفع في الهواء مع العلم أنه ممتلئ بغاز هيليوم كثافته $0.178\ kg/m^3$؟

التوتر السطحي

11-51 يرفع سلك دائري قطره 3.5 cm من على سطح كمية من الدم بواسطة قوة 1.61×10^{-2} N. ما التوتر السطحي للدم؟

11-52 تقف حشرة على سطح الماء بأطرافها الستة بحيث يصنع كل طرف منخفضا عمقه 0.2 cm وزاوية تماسه $45°$. ماكتلة الحشرة؟

11-53 ترفق قوة مقدارها 7.13×10^{-3} N حلقة دائرية نصف قطرها 5 cm من على سطح إثينول. مانصف قطر الحلقة التي سترفعها نفس القوة من على سطح سائل الخلايا البشرية إذا علمت أن التوتر السطحي للإثينول 0.0227 N/m وللخلايا 0.050 N/m؟

الخاصة الشعرية

11-54 يرتفع سائل كثافته $1080\ kg/m^3$ إلى مسافة 2.1 cm في أنبوب شعري قطره 1 mm صانعا زاوية تماس مساوية للصفر. ما التوتر السطحي للسائل؟

11-55 إلى أي ارتفاع يصل الدم في شعيرة دموية نصف قطرها $2\mu m$ إذا كانت كثافته 1050 kg/m^3 والتوتر السطحي فيه 0.058 N/m؟

11-56 مانصف قطر أنبوب شعري يرتفع فيه سائل كثافته النسبية 1.035 وتوتره السطحي 0.088 N/m مسافة 5 cm بفرض أن زاوية تماسه صفر؟

اللزوجة

11-57 ما القوة اللازمة لسحب طبقة رقيقة من الغليسرين سمكها 1.5 mm موضوعة بين صفيحتين زجاجيتين عرض الواحدة 1 cm وطولها 4cm بسرعة 0.3 m/s؟

11-58 تسحب قطعة معدنية طولها 0.4 mm وعرضها 0.12 m على سطح أفقي مطلي بمادة ملينة سمكها 1 mm بسرعة 0.5 m/s بواسطة قوة 1.9 N. مامعامل اللزوجة للمادة الملينة؟

الفصل الثاني عشر

الأمواج

(Waves)

1-12 تمهيد:الحركة الموجية *(Wave Motion)*

درسنا في الفصل العاشر الحركة الاهتزازية لأجسام المرنة، كجسم مربوط بزنبرك أو بندول بسيط، وحددنا خواصها الأساس من دور وتردد وطاقة. وندرس في هذا الفصل كيف تنتقل اهتزازات جسم من نقطة لأخرى في وسط مشكلة موجة منتشرة فيه. وتعتبر أمواج الماء التي تتشكل عند سقوط حجر في بركة ماء ساكنة مثلا بسيطا وواضحا للأمواج التي تظهر في مجالات شتى في الطبيعة.

فهناك الأمواج الصوتية التي تبدأ في الأوتار الصوتية لطفل صغير عندما يبكي فتنتشر بواسطة ذرات الهواء المجاورة لتصل لأذن أمه المسكينة النائمة فيوقظها، وهناك الأمواج الكهرمغناطيسية (الضوء) كالتي تصدر عن هوائي محطة إرسال ناقلة برامج الإذاعة والتلفاز، وغيرها. وفي كل الحالات فهناك مصدر للموجة، كيد شخص يهز حبلا أو يضرب على وتر عود، أو نفخ راعي في قصبة هوائية (ناي)، أو اهتزاز إلكترون في هوائي. أما ضرورة وجود وسط ناقل (ذرات الهواء أو مادة وتر العود) فتعتمد على نوع الموجة، فبعضها لاينتقل من نقطة لأخرى إلا إذا وجد من يحملها وتدعى **أمواجا ميكانيكية** *(mechanical waves)*، وهناك أمواج لاتحتاج لوسط ناقل هي **الأمواج الكهرمغناطيسية** *(electromagnetic waves)* وتنتج عن اهتزاز مجال كهربائي وآخر مغناطيسي. ونظرا لأننا لا ندرس الكهرباء والمغناطيسية في هذا

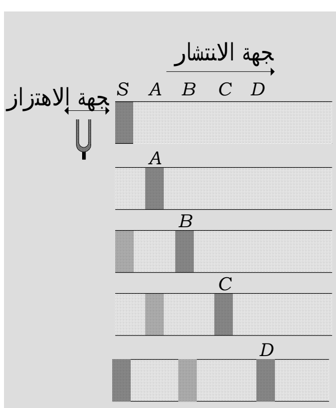
الكتاب لذا نكتفي بدراسة الأمواج الميكانيكية فقط. فنكتب المعادلة العامة لها ونحدد خواصها من طول موجة وتردد وطاقة محمولة. ثم ننتقل لتفاعل الأمواج مع بعضها ومع الوسط الموجودة فيه، فندرس ظاهرة التداخل والانعكاس والخفقان، ثم نطبق ذلك على أهم إحدى الأمواج في الطبيعة هي الأمواج الصوتية.

2-12 انتشار الأمواج الميكانيكية في الأوساط المادية

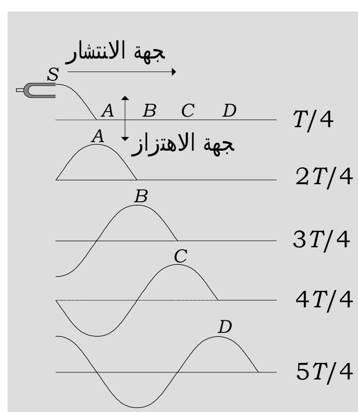
ذكرنا أعلاه أن كل موجة تحتاج لمصدر معين تبدأ منه. فإذا افترضنا أن لدينا حبلا طويلا مشدودا من أحد طرفيه، كما في الشكل (12-1أ)، وأمسكنا الطرف الآخر منه وبدأنا بهزه للأعلى والأسفل، أو نفخنا في قصبة هوائية وتابعنا حركة ذرت الهواء، كما في الشكل (12-1ب)، فإننا نلاحظ في كلا الحالتين أن الاهتزازات قد انتشرت من بداية الوسط إلى الأجزاء الأخرى منه خلال فترة زمنية قصيرة. وإذا تابعنا حركة نقاط متتالية منه بدءا من منبع الاهتزازات S مرورا بالنقاط A و B و C، الخ، فإننا نلاحظ مايلي:

1- الحركة الاهتزازية التي بدأت عند S (المنبع) قد انتقلت لبقية نقاط الوسط بالتدريج بحيث تقلد كل واحدة النقطة التي قبلها تماما ولكن متأخرة عنها بزمن يعادل المدة اللازمة للموجة لتصل إليها من هناك. فالنقطة A ستتحرك مثل S في الشكل (12-1أ) أو (12-2 ب) لكن بتأخير زمني يساوي المدة اللازمة لتصل إليها الحركة.

2- كل نقطة من الوسط الذي تنتشر فيه الموجة مثل A و B و C ... الخ، تتحرك حركة اهتزازية بسيطة، مثل المنبع S، ولكل النقاط نفس الدور والتردد والسعة إذا كان الوسط متجانسا (كثافة كتلية ثابتة).



(ب) أمواج طولية



(أ) أمواج مستعرضة

الشكل (12-1)

3- اتجاه اهتزازات كل نقطة من الحبل (للأعلى والأسفل) عمودي على اتجاه انتشار الموجة (أفقيا من A إلى B ثم C ... الخ). ويسمى هذا النوع من الأمواج **أمواجا مستعرضة** *(transverse wave)* بينما يكون اتجاه اهتزازات ذرات الهواء في الشكل (2-12 ب)، لليمين واليسار على نفس الخط الذي تنتشر فيه الموجة. ويسمى هذا النوع من الأمواج **أمواجا طولية** *(longitudinal waves)*.

ففي الحركة الموجية تهتز نقاط الوسط دون أن تنتقل من مكانها، وكما قال آينشتين فإن الموجة كالإشاعة تبدأ من شخص في مكان ما وتصل بسرعة كبيرة لمكان آخر دون أن يسافر أحد! فما الذي يتنتشر إذا؟ إنها الطاقة التي تنتقل من نقطة لأخرى. وسنقوم فيما يلي بإيجاد المعادلة العامة للموجة وسرعة انتشارها وطولها وغير ذلك من المتغيرات تميز كل موجة.

3-12 معادلة الحركة الموجية *(Wave Equation)*

للحصول على المعادلة التي تصف اهتزازات أي نقطة من وسط تنتشر فيه موجة ما نكتب أولا معادلة الاهتزازات للمنبع S الذي نفترض أنه يهتز بشكل بسيط وفق العلاقة:

$$y_S = A\sin\omega t \tag{1-12}$$

حيث ترتبط السرعة الزاوية ω بدور الحركة T وترددها f بالعلاقتين المعروفتين:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2-12}$$

ومن ثم نكتب معادلة اهتزازات أي نقطة من الوسط مثل p في الشكل (2-12)، التي تبعد مسافة x عن المنبع، بملاحظة أنها ستتحرك مثل S تماما، أي حركة اهتزازية بسيطة، لكن متأخرة عنها بزمن يساوي المدة اللازمن للحركة لتصل إليها من هناك، أي أن:

$$y_p = A\sin\omega(t - t') \tag{3-12}$$

فإذا افترضنا أن سرعة انتشار الموجة في الوسط هي v عندئذ يكون الزمن اللازم لها لتنتقل من S إلى p هو:

$$t' = \frac{x}{v} \tag{4-12}$$

وتصير (3-12):

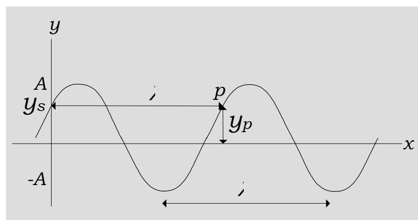
$$y_p = A\sin\omega(t - \frac{x}{v}) \quad (5\text{-}12)$$

أو

$$y_p = A\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{vT}) \quad (6\text{-}12)$$

ولكن vT هي المسافة التي تقطعها الموجة خلال دور كامل لاهتزازة أي نقطة من الوسط. ونسمي هذه المسافة **طول الموجة** *(wavelength)* ونرمز لها بـ λ، أي أن:

$$\boxed{\lambda = vT} \quad (7\text{-}12)$$



الشكل (2-12)

ونلاحظ من الشكل (2-12) أن طول الموجة يساوي المسافة الفاصلة بين أي نقطتين متتاليتين تتحركان بنفس الشكل والاتجاه في كل لحظة.

كما نسمي المقدار $2\pi/\lambda$ العدد الموجي *(wave number)* ونرمز له بـ k، أي أن:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (8\text{-}12)$$

وتصير (6-12):

$$\boxed{y_p = A\sin(\omega t - kx)} \quad (9\text{-}12)$$

وتسمى العلاقة الأخيرة **المعادلة الموجية** المنتشرة في الوسط، أي أنها تصف حركة أي ذرة منه في أي لحظة من الزمن.

ونلاحظ من (9-12) أن سعة الاهتزازات لنقطة ما تعتمد على بعد النقطة عن المنبع، أي على x من جهة، وعلى الزمن t من جهة أخرى. بمعنى أنه إذا نظرنا لوسط مهتز في لحظة معينة t_0 (التقطنا له صورة) فإننا نلاحظ أن سعة الحركة تتغير من نقطة لأخرى. بينما لو ركزنا نظرنا

على نقطة معينة وأهملنا بقية الوسط وتابعنا حركتها مع مرور الزمن فإننا نلاحظ أن سعة الحركة تتغير من لحظة لأخرى.

وكما وجدنا في الفصل العاشر فإن الشكل العام لحركة اهتزازية بسيطة هو:

$$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

حيث تدل الزاوية $(\omega t + \phi)$ على الطور الآني أو الطور الذي يحدد حالة الجسم المهتز في أي لحظة، ولذلك إذا قارنا بين معادلة الحركة الموجية لنقطة من وسط تنتشر فيه موجة ميكانيكية تبعد مسافة x عن المنبع، أي $y_p = A\sin(\omega t - kx)$ ومعادلة المنبع نفسه $y_S = A\sin\omega t$ للاحظنا أن المقدار kx يمثل **فرق الطور** *(phase difference)* بين النقطتين. ويمكن الاستفادة من هذه النتيجة لمعرفة حركة نقطة من وسط مهتز بمقارنتها مع منبع الاهتزازات (أو أي نقطة أخرى من الوسط). فإذا كان فرق الطور يساوي عددا زوجيا من π عندئذ تصير معادلة المنبع والنقطة متكافئتين تماما، أي أنه إذا كانت سعة واحدة أكبر مايمكن فستكون الثانية كذلك، وإذا كانت سعة الأولى معدومة تكون الثانية مثلها، وهكذا دواليك ونقول في هذه الحالة إن الحركتين **متوافقتين بالطور** *(in phase)*. فالتوافق في الطور هو أن تكون الحركتان متماثلتين في كل لحظة من الزمن (حتى وإن كانت إحداهما تختلف عن الأخرى). أما إذا كان kx مساويا لعدد فردي من π عندئذ تكون سعتاهما متعاكستين دوما ونقول إنهما **متعاكستين في الطور***(out of phase)*. فإذا كانت إحداهما في لحظة ما A_1 تكون سعة الثانية $-A_2$ وتتحرك كل واحدة بعكس الأخرى دوما.

ولربط مفهوم فرق الطور بمعادلة الحركة الموجية لنقطة نفترض أن أمواجا تنتشر في وسط متجانس وتصل لنقطتين تقعان في الموضعين x_1 و x_2. عندئذ نكتب المعادلة الموجية للأولى بالشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx_1) \tag{10-12}$$

والثانية:

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx_2) \tag{11-12}$$

ومن ثم يكون فرق الطور بينهما:

$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \tag{13-12}$$

فحتى تكونا متوافقتين في الطور يجب أن يكون:

$$\Delta\phi = 2n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{14-12}$$

أي يجب أن يكون:

$$\boxed{\Delta x = n\lambda} \qquad (15\text{-}12)$$

أي عندما تكون المسافة بين النقطتين تساوي عددا صحيحا من طول الموجة.
أما عندما تكون النقطتان متعاكستين في الطور، أي أن:

$$\Delta\phi = (2n+1)\pi$$

عندئذ يكون:

$$\boxed{\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}} \qquad (16\text{-}12)$$

أي أنه عندما تكون المسافة الفاصلة بينهما تساوي عددا فرديا من نصف طول الموجة فإنهما تتحركان باتجاهين متعاكسين دوما.

مثل 1-12

تنتشر موجة مستعرضة في وسط مادي بحيث يهتز المنبع وفق العلاقة $y_S = 2\sin 5\pi t \text{ cm}$. (أ) ما السعة العظمى لاهتزازات المنبع وماترددها ودورها؟ (ب) ماطول الموجة والعدد الموجي إذا كانت سرعة انتشار الموجة 30 m/s؟ (ج) مامعادلة الحركة لنقطة تبعد 5 m عن المنبع؟ (د) مافرق الطور بين المنبع وهذه النقطة؟

الحل: (أ) نلاحظ من معادلة اهتزازات المنبع أن السعة العظمى هي $A = 2 \text{ cm}$، والسرعة الزاوية $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$ لذا يكون التردد:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.5 \text{ Hz}$$

والدور

$$T = \frac{1}{f} = 0.4 \text{ s}$$

(ب) لحساب طول الموجة نكتب:

$$\lambda = vT \ \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}$$

أي أن:

$$k = \frac{\omega}{v}$$

وتربط هذه النتيجة بين العدد الموجي وسرعة الانتشار والسرعة الزاوية فنجد k=0.52 m^{-1}.
(ج) نكتب معادلة اهتزازات النقطة المعتبرة بالشكل:

$$y_p = A\sin(\omega t - kx) = 2\sin(5\pi t - 2.6)$$

(د) نلاحظ من معادلة المنبع والنقطة المعتبرة أن فرق الطور بينهما هو $\Delta\phi = 2.6 \text{ rad}$

4-12 سرعة انتشار الأمواج الميكانيكية

تنتشر الأمواج الميكانيكية في الأوساط الصلبة، كالأوتار والمعادن، وغير الصلبة، كالسوائل والغازات. وتعتمد سرعة انتشارها على خواص الوسط ومرونته. وسنحدد في هذه الفقرة سرعة انتشار الأمواج في الأوساط الصلبة كالحبال والسائلة أو الغازية.

1- سرعة انتشار الأمواج في حبل مشدود:

تنتشر في حبل مشدود بشكل أفضل بكثير من آخر غير مشدود وفي حبل خفيف بالمقارنة مع آخر ثقيل. ولتحديد سرعة الانتشار نختار عنصرا Δl من حبل مشدود من طرفيه بقوة T بينما تنتشر فيه الموجة بسرعة υ، كما في الشكل (12-3)، فنلاحظ أن محصلة الشد عليه تتجه نحو مركز التقوس وقيمتها:

$$2T\sin\theta \approx 2T\theta \approx 2T(\Delta l/2) = T\Delta l/2$$

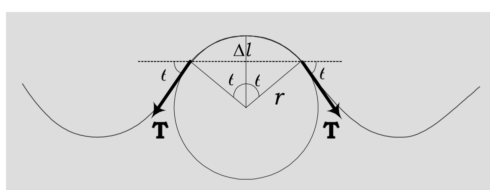
ونظرا لأنها مركزية فهي تساوي $m\upsilon^2/r$، أي أن:

$$T\Delta l/2 = m\upsilon^2/r = \rho\Delta l\upsilon^2/r$$

حيث وضعنا طول العنصر المعتبر $m=\rho\Delta l$ باعتبار ρ الكثافة الطولية للكتلة. ولذلك يكون:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (17\text{-}12)$$

فسرعة الانتشار تتناسب طردا مع الشد في الحبل وعكسا مع كثافته الكتلية. وواضح من وحدات العلاقة السابقة أنها تمثل سرعة ويترك للقارئ التأكد من ذلك.



الشكل (12-3)

مثل 12-2

يهتز حبل طوله 0.5 m ومشدود بقوة 10 N بسعة عظمى 1 cm وبمعدل 200 مرة بالثانية. ماسرعة انتشار الموجة فيه إذا كانت كتلته 50 g وماطول الموجة وكيف يتغير لو ضاعفنا الشد؟

الحل: لنحسب أولا الكثافة الكتلية للحبل:

$$\rho = m/l = 50 \times 10^{-3}\ \text{kg}/0.5\,\text{m} = 0.1\ \ \text{kg/m}$$

فنجد سرعة الانتشار:

$$\upsilon = \sqrt{\rho/T} = \sqrt{(10\,\text{N})/(0.1\ \text{kg/m}^3)} = 10\ \text{m/s}$$

لحساب طول الموجة نلاحظ أن T=1/f لذلك يكون:

$$\lambda = \upsilon T = (10\ \text{m/s})(0.005\ \text{s}) = 0.05\ \text{m}$$

وإذا تضاعف الشد تتغير سرعة الانتشار إلى:

$$\upsilon = \sqrt{\rho/T} = \sqrt{(20\,\text{N})/(0.1\ \text{kg/m}^3)} = 14.1\ \text{m/s}$$

فزيادة الشد تغير سرعة الانتشار إلا أنها لاتؤثر على الدور أو التردد لأنها عوامل خارجية ناتجة عن مصدر الاهتزازات. وهذه نتيجة مهمة لفهم طبيعة الموجة ومانسمعه ونسميه صوتا أو نراه ونسميه لونا.

2- سرعة انتشار الأمواج الصوتية في المواد الصلبة والسائلة والغازية:

وجدنا في الفقرة السابقة أن سرعة انتشار الأمواج في حبل مشدود يعتمد على الخواص الذاتية له من كتلة وطول وشد. وبنفس المنطق، فإن سرعة انتشار الأمواج الصوتية في المواد الصلبة والموائع والغازات تعتمد على الخواص المميزة للوسط من ضغط وحرارة وحجم وغيرها. ويمكن البرهان أن سرعة الأمواج في الموائع تعطى بالعلاقة:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (18\text{-}12)$$

حيث B معامل المرونة الحجمي *(bulk modulus)* الذي عرفناه في الفصل الحادي عشر، بينما ρ كثافة المائع الحجمية. وإذا كان الوسط هواءا أو غازا فإن العلاقة السابقة تؤول إلى:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \tag{19-12}$$

حيث γ ثابت يمثل نسبة الحرارة النوعية و p الضغط الجوي أو ضغط الغاز.
وإذا كان الوسط صلبا تصير السرعة:

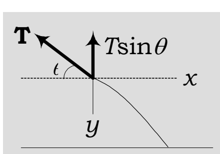
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{20-12}$$

حيث Y معامل يانغ للمرونة و ρ الكثافة الحجمية.
ونلاحظ من العلاقات السابقة أن سرعة انتشار الصوت في أي وسط تعتمد على خواصه فقط.
ونعطي في الجدول 12-1 سرعة انتشار الصوت في أوساط مختلفة.

المادة	السرعة (m/s)	المادة	السرعة (m/s)
الهواء (0 °)	331	الرصاص	1190
الهواء (20 °)	343	النحاس	3810
الهيدروجين	1330	الألمنيوم	5000
الماء المقطر	1486	الفولاذ	5170
ماء البحر	1519	زجاج بايركس	5200

12-5 القدرة المنتشرة في الأمواج الصوتية

من البديهي أن وصول حركة اهتزازية لنقطة ساكنة من وسط تنتشر فيه موجة يعني أنها اكتسبت طاقة حركية من هذه الموجة. ويمكن حساب القدرة الواصلة إليها بمعرفة القوة المؤثرة عليها وسرعتها إذ وجدنا في الفصل الخامس أن القدرة اللحظية تعطى عندئذ بـ Fv. فنفترض أن لدينا حبلا مشدودا بقوة T، كما في الشكل (12-4)، فنلاحظ أن كل عنصر منه Δl يتحرك للأعلى والأسفل بمعنى أن محصلة القوى عليه شاقولية فقط وتساوي:



الشكل (12-4)

$$T_y = -T\sin\theta \approx T\tan\theta = -T\frac{\partial y}{\partial x}$$

بافتراض الاتجاه الموجب للأسفل بينما تدل $\partial y / \partial x$ على الاشتقاق الجزئي لـ y بالنسبة لـ x.

كما أن سرعة ذلك الجزء من الحبل هي $\partial y / \partial t$ ولذلك تصير القدرة معطاة بـ :

$$p = Fv = -T(\partial y / \partial x)(\partial y / \partial t)$$

وباشتقاق المعادلة الموجية $y = A\sin(\omega t - kx)$ بالنسبة للزمن t والموضع x والتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$p = A^2 k \cos^2(\omega t - kx)$$

فالقدرة متغيرة مع الزمن ونجد متوسطها خلال دور كامل للحركة الاهتزازية بأنه يساوي:

$$p_{av} = \tfrac{1}{2} A^2 k \omega T$$

وبما أن $\omega = 2\pi f$ و $k = 2\pi / \lambda$ و $T = \rho v^2 = \rho \lambda^2 f^2$ نجد أن القدرة تصير:

$$p_{av} = 2\pi^2 A^2 f^2 \rho v \qquad (21\text{-}12)$$

فمتوسط القدرة المحولة مع الموجة خلال دور واحد يتناسب مع مربع السعة العظمى ومربع التردد. وهذه نتيجة مهمة في الأمواج الصوتية لارتباط القدرة بشدة الصوت، كما سنرى لاحقا.

6-12 تركيب الأمواج: مبدأ التراكب *(Superposition)*

ماذا يحدث لو أمسك شخصان بحبل مشدود بينهما وقام كل واحد بهز الطرف الذي يمسك به للأعلى والأسفل وكيف تتحرك أي نقطة من الحبل عندما تصلها الموجتان المتولدتان في هذه الحالة؟ إن الإجابة على هذا السؤال هومايسمى **مبدأ التراكب**. وينص على أن **السعة الكلية لنقطة من وسط تنتشر فيه عدة أمواج عرضية فقط (أو طولية فقط) في أي لحظة من الزمن هي حاصل الجمع لسعات الاهتزازات الواصلة إليها من كل موجة**. ويكتب هذا المبدأ رياضيا بفرض أن سعة موجة أولى هي y_1 وسعة موجة ثانية y_2 عندئذ تكون السعة الكلية y_1+y_2. وهذا المبدأ مهم جدا في الأمواج وبخاصة الصوتية والضوئية.

ومن أهم تطبيقات مبدأ التراكب دراسة تداخل الأمواج حيث تجتمع موجتان أو أكثر وتهتز كلها بنفس الطريقة (طوليا أو عرضيا) عند نقطة واحدة عندئذ تتحرك هذه الأخيرة بسعة تساوي حاصل الجمع الجبري للسعات الواصلة إليها. وسنعتبر في هذه الفقرة الحالة الخاصة عندما تكون

هناك موجتان عرضيتان تنتشران على نفس الخط بنفس التردد والسعة ولكن باختلاف بالطور بمقدار ϕ، أي أنهما تكتبان بالشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

و

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx - \phi)$$

عندئذ تكون الموجة الكلية المؤثرة على النقطة المعتبرة هي:

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t - kx - \phi)$$

وبالاستفادة من العلاقة المثلثية المعروفة:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

تؤول مجموع الحركتين إلى:

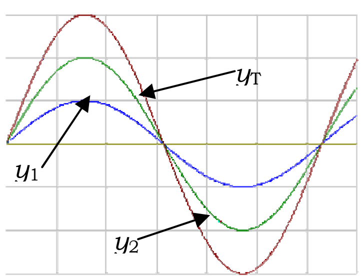
$$y_T = [2A\cos(\phi/2)]\sin(\omega t - kx - \phi/2) \qquad (21\text{-}12)$$

أو

$$\boxed{y_T = A_{\max}\sin(\omega t - kx - \phi/2)} \qquad (22\text{-}12)$$

حيث كتبنا السعة العظمى:

$$\boxed{A_{\max} = 2A\cos(\phi/2)} \qquad (23\text{-}12)$$



الشكل (5-12)

ونلاحظ أن الحركة الناتجة هي اهتزازية بسيطة لكن سعتها تعتمد على الزاوية ϕ بشكل واضح. فيمكن أن تكون أكبر مايمكن إذا كانت $\phi=2n\pi$ حيث n أي عدد صحيح ونقول إن الموجتين المتداخلتين **متوافقتان بالطور**، أي أن اهتزازتيهما الواصلتين لنقطة ما تتحركان بنفس الشكل وفي نفس الاتجاه دوما. أو يمكن أن تكون A_{max} مساوية للصفر إذا كانت $\phi=(2n+1)\pi$ ونقول إن الموجتين **متعاكستان بالطور**. ويمثل الشكل (5-12) موجتين متوافقتين بالطور بسعتين مختلفتين.

مثل 3-12

تنتشر موجتان $y_1 = 3\sin 5\pi t$ و $y_2 = 3\sin(5\pi t - \pi/3)$، حيث تقدر y بالسنتمتر و t بالثانية، في وسط متجانس بنفس السرعة 10 m/s. ما الموجة الكلية الواصلة لنقطة تقع عند الإحداثي x؟ ومافرق الطور بين حركة نقطتين من نفس الوسط تقعان عند x_1=2 m و x_2=4.5 m؟

الحل: نكتب معادلة الموجة الأولى الواصلة للنقطة x بالشكل:

$$y_1 = 3\sin(5\pi t - kx)$$

والثانية:

$$y_2 = 3\sin(5\pi t - kx - \pi/3)$$

فتكون الموجة الكلية:

$$y_T = 6\cos(\pi/6)\sin(5\pi - kx - \pi/6) = 5.1\sin(5\pi - kx - \pi/6)$$

ولحساب فرق الطور بين النقطتين المذكورتين نحسب أولا طول الموجة λ فنلاحظ أن:

$$\omega = 5\pi = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = 2.5 \text{ Hz}$$

كما أن:

$$v = \lambda f \quad \Rightarrow \quad \lambda = v/f = 4 \text{ m}$$

عندئذ يكون فرق الطور:

$$\Delta\phi = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 1.25\pi \text{ rad}$$

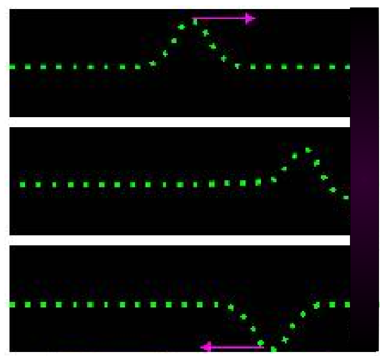
7-12 الانعكاس والأمواج المستقرة *(Standing Waves)*

لو أمسكنا بطرف حبل مربوط بالحائط ومشدود بقوة ما ثم قمنا بهزه من طرفه الآخر بشكل متواصل إما باليد أو بواسطة رنانة كهربائية مثلا، عندئذ تنتشر موجة على امتداده إلى أن تصل لطرفه المثبت بالحائط فتنعكس عنه وترتد بالاتجاه المعاكس لتتداخل مع الموجة الأصلية. وتشاهد نفس الظاهرة عند انتشار أمواج دائرية في بحيرة ماء عندما تصل لمانع أو حاجز فتنعكس عنه وتتداخل الأمواج القادمة مع المرتدة بشكل جميل وأخاذ. وفي كلا الحالتين يأخذ الوسط شكلا ثابتا متميزا إذ تهتز أجزاء منه بسعة كبيرة بينما تبقى نقاط أخرى ساكنة تماما. ويطلق على هذا المنظر اسم **أمواج مستقرة** *(standing waves)*.

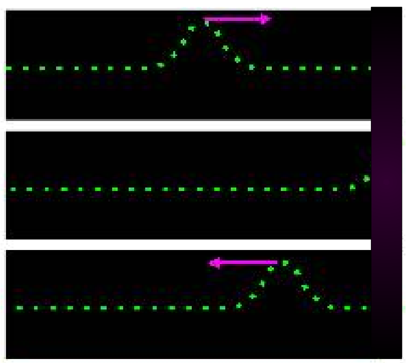
ويمكن فهم ظاهرة انعكاس الأمواج بمتابعة نبضة *(pulse)* تنتشر على امتداد الحبل لليمين، كما في الشكل (6-12)، فعندما تصل النبضة للحائط تؤثر على الحبل بقوة للأعلى فيرد عليها بقوة

للأسفل مما يولد نبضة معاكسة تتحرك لليسار. ونلاحظ من الشكل (12-6) أن شكل النبضة لايتغير لكنها تصير مقلوبة. فهناك فرق في الطور بمقدار π بين الاهتزازتين.

وبنفس الشكل نتابع حركة نبضة تنتشر على امتداد حبل نهايته حرة، كما في الشكل (12-7)، فنلاحظ أن وصولها لآخر الحبل يدفعه للأعلى مسافة معينة وعندما يعود لوضعه الأصلي يولد نبضة مضادة غير مقلوبة لكنها تتحرك بالاتجاه المعاكس. أي أنه لايوجد فرق في الطور بين هاتين النبضتين.



الشكل (12-6)



الشكل (12-7)

لنفترض الآن أن موجة تنتشر في الحبل نحو اليمين لتصل لنهايته المربوطة بالحائط فتتولد عندها موجة منعكسة تتحرك لليسار وتتداخل مع الأولى مشكلة أمواجا مستقرة. ويمكن الحصول على المعادلة التي تصف هذه الأمواج بفرض أن الأولى تكتب بالشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

بينما تنتشر الموجة المنعكسة باتجاه محور السينات السالب وتكتب بالشكل:

$$y_2 = -A\sin(\omega t + kx)$$

حيث أضفنا الإشارة السالبة لأنها تختلف عن الموجة الأولى بالطور بمقدار π. فإذا وصلت هاتان الموجتان لنفس النقطة من الوسط المهتز تصير معادلة الحركة لها:

$$y_T = y_1 + y_2 = A[\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)] \qquad (24\text{-}12)$$

وبالاستفادة من العلاقة:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

نجد:

$$y_T = -[2A\sin(kx)]\cos\omega t \qquad (25\text{-}12)$$

أو

$$y_T = A(x)\cos\omega t \qquad (26\text{-}12)$$

حيث وضعنا

$$A(x) = -2A\sin(kx) \qquad (27\text{-}12)$$

فالنقطة ستتحرك حركة اهتزازية بسرعة زاوية ω كالموجتين الأصليتين تماما، إلا أن سعتها تعتمد على بعدها عن بداية الحبل. فهناك نقاط سعتها العظمى أكبر مايمكن وتساوي $A(x) = 2A$ إذا كان بعدها عن منبع الاهتزازات (بداية الحبل) يحقق العلاقة:

$$\sin(kx) = \pm 1 \;\Rightarrow\; kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

أي إذا كان:

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}} \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (28\text{-}12)$$

أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بمقدار $\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\frac{5\lambda}{4},\cdots$ ستهتز للأعلى والأسفل بسعة $2A$ وتسمى كل واحدة **ذروة** أو بطن *(crest)*.

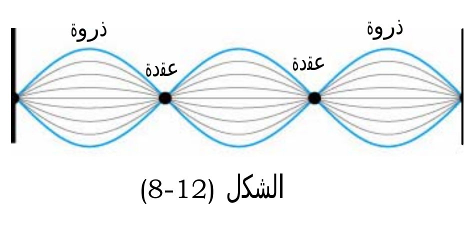
وبنفس المنطق ستكون هناك نقاط سعتها معدومة دائما لأنها تحقق العلاقة:

$$\sin(kx) = 0 \;\Rightarrow kx = n\pi \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

أي عندما تكون:

$$\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}} \qquad n=0,1,2,3,\ldots \qquad (29\text{-}12)$$

أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بمقدار $0,\frac{\lambda}{2},\lambda,\frac{3\lambda}{2},2\lambda,\cdots$ ستبقى ساكنة تماما، وتسمى كل واحدة **عقدة** *(node)*. ويوضح الشكل (8-12) مواضع الذروات والعقد في حبل مشدود.



الشكل (8-12)

8-12 التجاوب *(Resonance)*

سندرس في هذه الفقرة شرط تشكل أمواج مستقرة في حبل طوله L وكثافته الطولية μ ومشدود بقوة T في الحالتين التاليتين:

1- الانعكاس عن نهاية ثابتة:

إذا انتشرت موجة في حبل مشدود من طرفيه فإنها تنعكس عن نهايته الثابتة وتتداخل مع الموجة القادمة من المنبع. فحتى تتشكل أمواج مستقرة في الحبل يجب أن يكون طوله مساويا لعدد صحيح من نصف طول الموجة، أي:

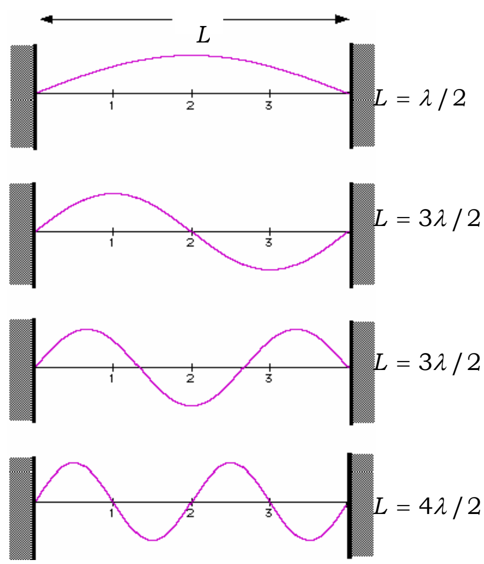
$$L = (n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n=0,1,2,3,... \qquad (30\text{-}12)$$

ويوضح الشكل (12-9) شكل الحبل من أجل عدة قيم لـ n. وإذا افترضنا أن تردد الحركة الاهتزازية التي تبدأ عند بداية الحبل هي υ، عندئذ نكتب طول الموجة:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} \qquad (31\text{-}12)$$

وبتعويض ذلك في (12-30) نجد:

$$L = (n+1)\frac{\upsilon}{2f}$$



الشكل (12-9)

أي أن:

$$\boxed{f_n = (n+1)\frac{v}{2L}} \quad , \quad n=0,1,2,.... \tag{32-12}$$

أي أنه إذا انتشرت موجة في حبل طوله L فإن الأمواج المستقرة لاتتشكل إلا إذا كان تردد الحركة الاهتزازية من المنبع يحقق (32-12)، أو إذا غيرنا طول الحبل أو سرعة الانتشار (بتغيير الشد مثلا أو كثافة مادة الحبل) ليتوافق مع التردد المفروض. ونلاحظ من العلاقة (32-12) أن أقل تردد ممكن في حبل مشدود هو:

$$f_0 = \frac{v}{2L} \tag{33-12}$$

ويسمى **التردد الأساس** *(fundamental frequency)*، ونكتب (32-12) بالشكل:

$$\boxed{f_n = (n+1)f_0} \tag{34-12}$$

وتدعى f_n **المتوافقات** *(harmonics)* فنسمي f_1 المتوافقة الأولى *(first harmonics)* وf_2 المتوافقة الثانية *(second harmonics)*، وهكذا.

مثل 12-4

(أ) ما التردد الأساس لموجة تنتشر في وتر عود طوله 1 m وكتلته 20 g مثبت من طرفيه ومشدود بقوة 20 N ومامتوافقاته الثلاث الأولى؟ (ب) ما أقل طول حبل يجب تقصير الوتر لسماع ترددات 150 Hz؟

الحل: لنحسب أولا سرعة انتشار الموجة في الحبل فنكتب:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{(m/l)}} = \sqrt{\frac{20\ \text{N}}{(20\times10^{-3})/(1\ \text{m})}} = 31.6\ \text{m/s}$$

ومن ثم نجد الترددات الممكنة:

$$f_n = (n+1)\frac{v}{2L} = (n+1)(15.8\ \text{Hz})$$

فالتردد الأساس f_0=15.8 Hz والمتوافقات الثلاث الأولى f_1=31.6 Hz وf_2=47.4 Hz وf_3=63.2 Hz.

(ب) إذا كان التردد الأساس يساوي 150 Hz عندئذ نجد شرط تشكل أمواج مستقرة هو:

$$L=(n+1)\frac{v}{2f}=(n+1)(\frac{31.6\ \text{m/s}}{150\ \text{s}^{-1}})=(n+1)(10.5\ \text{cm})$$

ونحصل على أصغر مسافة يمكن تقصير الوتر بها بوضع n=8 (لماذا؟) ليصير طوله الجديد 94.8 cm. ويتم عادة تغيير الطول بالضغط على طرف الوتر بالأصابع، كما هو معروف لمن يعزف على العود.

2- الانعكاس عن نهاية حرة:

نفترض الآن أن موجة تنتشر في حبل ذو نهاية حرة لتصل لآخره وتنعكس عنها فتتداخل مع الأمواج القادمة وتتشكل أمواج مستقرة. ونلاحظ أن شرط تشكل هذه الأمواج هو أن يكون طول الحبل محققا للعلاقة:

$$\boxed{L=(2n+1)\frac{\lambda}{4}}\quad,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{35-12}$$

وبتعويض λ بدلالة التردد وسرعة الانتشار نجد:

$$L=(2n+1)\frac{v}{4f} \tag{36-12}$$

أو

$$\boxed{f_n=(2n+1)\frac{v}{4L}}\quad,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{37-12}$$

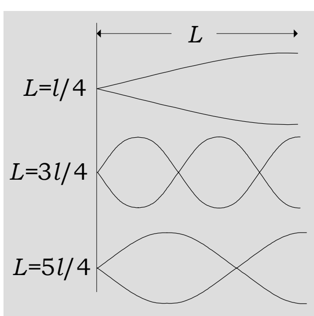
فالتردد الأساس هو

$$f_0=\frac{v}{4L} \tag{38-12}$$

والمتوافقات:

$$f_n=(2n+1)f_0\quad,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{39-12}$$

ويوضح الشكل (12-10) تشكل أمواج مستقرة في حبل مشدود.



الشكل (12-10)

9-12 الصوت *(Sound)*

يعتبر الصوت من أهم أشكال الأمواج الطولية التي نتعامل معها في حياتنا اليومية. وتنتشر الأمواج الصوتية نتيجة تغير الضغط في الهواء مما يسبب تضاغط وتخلخل ذراته بشكل مستمر فتهتز لليمين واليسارفتنتقل اهتزازات الذرات بشكل طولي من واحدة لأخرى بنفس الاتجاه الذي تنتشر فيه الموجة الصوتية. وتعتمد سرعة الصوت في الهواء بحسب العلاقة (12-17) على الضغط والكثافة. ونظرا لأن الضغط يعتمد على درجة الحرارة فيمكن البرهان أن سرعة الصوت في الغازات تكتب بالشكل:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (40\text{-}12)$$

حيث γ نسبة الحرارت النوعية للغاز، وR ثابت الغازات العام ويساوي R=8.314 J/mol.K، وT درجة حرارة الغاز بالكلفن، أما M فهي الكتلة الجزيئية للغاز وترتبط بكثافته ρ وحجمه V وعدد المولات n بالعلاقة:

$$\rho = \frac{nM}{V} \qquad (41\text{-}12)$$

وتساوي سرعة الصوت في الهواء في الشروط الطبيعية من ضغط جوي واحد (1 atm) ودرجة حرارة (20 °C) حوالي 340 m/s.

10-12 شدة الصوت ومستوى الشدة *(Sound Intensity & Intensity level)*

وجدنا سابقا أن كل موجة تنتشر تحمل قدرة تتناسب طردا مع مربع سعتها وترددها. ونعرف شدة الموجة I بالقدرة المنتشرة عبر واحدة المساحة، أي أن:

$$I = \frac{p}{A} \qquad (42\text{-}12)$$

ووحدتها في النظام الدولي W/m^2.

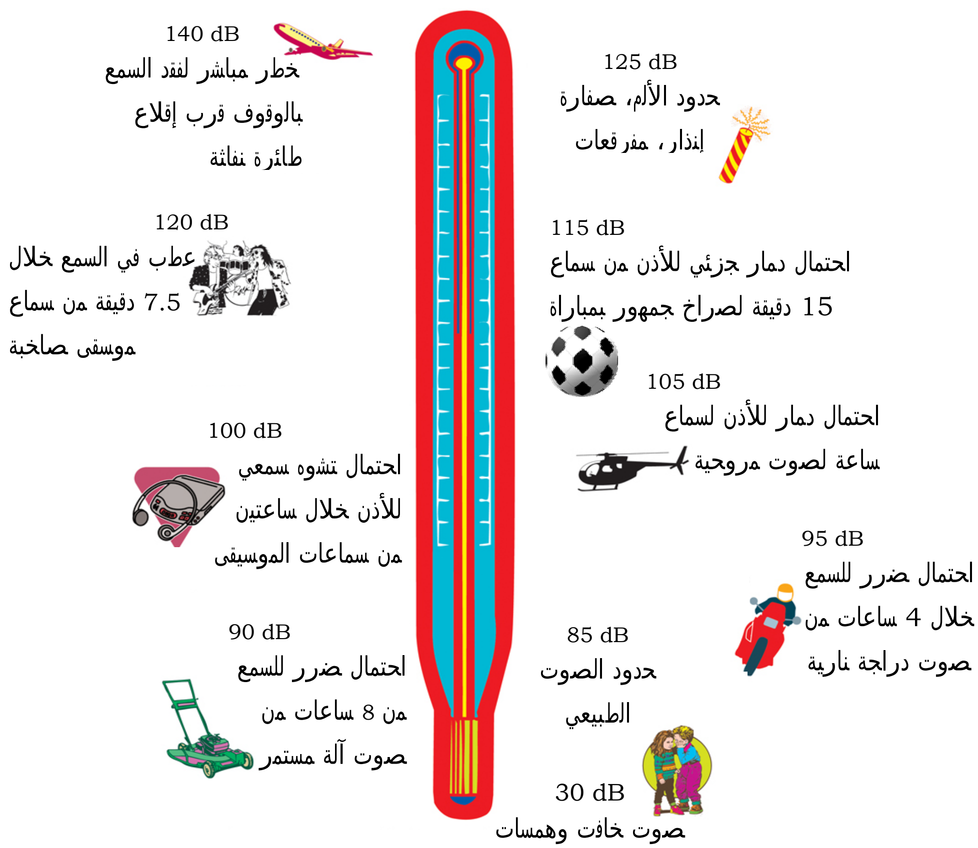
ويمكن للأذن أن تسمع أصواتا تتراوح تردداتها بين 20 Hz و 20,000 Hz شرط أن تقع شدتها بين 10^{-12} W/m^2 و1 W/m^2، ويستخدم الحد الأدنى من الشدة ويرمز له بـ I_0 كأساس لمقارنة الأصوات ببعضها حيث نعرف **مستوى الشدة** *(intensity level)* بالعلاقة:

$$\boxed{\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)} \qquad (43\text{-}12)$$

وتعطى وحدتها بـ **البل** *(Bel)* نسبة **لألكساندر جراهام بل**. وهذه الوحدة كبيرة، بالمقارنة مع معظم الأصوات الطبيعية، ولذلك تعطى شدة الأصوات عادة بالديسبل (dB). وتتوزع شدة الصوت الصادرة عن منبع في أي وسط متجانس بشكل كروي بتناسب عكسي مع مربع البعد عنه، أي أن شدة الصوت عند نقطة تبعد مسافة r عن منبع شدته I تعطى بالعلاقة:

$$I_r = \frac{I}{4\pi r^2} \qquad (44\text{-}12)$$

ويوضح الشكل (11-12) أنواع الأصوات التي نتعرض لها وضررها المحتمل مع الوقت.



الشكل (11-12)

مثل 12-5

يصرخ طالب نجح في مادة الفيزياء من الفرح مصدرا صوتا بقدرة 1 mW يتوزع بانتظام على سطح نصف كرة أمامه. ماشدة الصوت الواصل لوالده الذي يقف على بعد 5 m ومامستوى الشدة هناك؟

الحل: نحسب شدة الصوت على بعد 5 m من (12-44) بملاحظة أن المساحة التي يغطيها هي نصف كرة فقط، أي أن:

$$A = 2\pi r^2 = 2\pi(5\ \text{m})^2 = 157\ \text{m}^2$$

وتكون الشدة:

$$I = p/A = (1\ m\text{W})/(157\ \text{m}^2) = 6.37\ \mu\text{W/m}^2$$

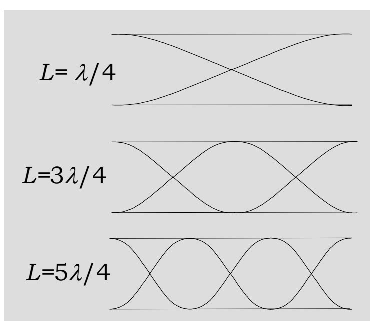
ونحسب مستوى الشدة من (12-43) بكتابة:

$$\beta = 10\log_{10}(\frac{I}{I_0}) = 10\log_{10}(\frac{6.37\times10^{-6}}{10^{-12}}) = 68\ \text{dB}$$

ونلاحظ أنها تقع ضمن حدود الصراخ المقبول!

11-12 الأمواج الصوتية المستقرة

تتشكل الأمواج الصوتية المستقرة في أي أنبوب هوائي بنفس الطريقة التي تتشكل بحبل مشدود. وهذا مانسمعه عند العزف على ناي أو في الأبواق الهوائية المعروفة. فإذا افترضنا أن لدينا أنبوبا هوائيا (ناي مثلا) طوله L ونفخنا فيه فإن أمواجا صوتية مستقرة يمكن أن تتشكل فيه. ونميز هنا حالتين:



الشكل(12-12)

1- الأنبوب مفتوح الطرفين، كما في الشكل (12-12): عندئذ تكون الذرات عند الطرفين حرة الحركة ولذلك تكون سعتها أكبر مايمكن. ويكون شرط تكون أمواج مستقرة في الأنبوب هو:

$$L = (n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (12\text{-}45)$$

ونحصل على الترددات الممكنة في الأنبوب من العلاقة:

$$\boxed{f_n = (n+1)\frac{v}{2L}} \quad , \quad n=0,1,2,... \tag{46-12}$$

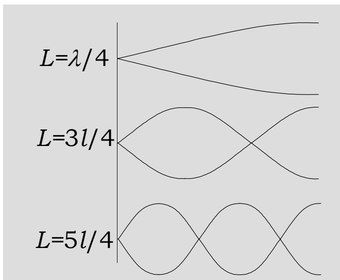
فالتردد الأساس:

$$f_0 = \frac{v}{2L} \tag{47-12}$$

والمتوافقات:

$$f_n = (n+1)f_0 \quad , \quad n=0,1,2,... \tag{48-12}$$

2- الأنبوب مغلق من طرف واحد، كما في الشكل (12-13) عندئذ تكون الذرات عند الطرف المغلق محدودة الحركة ولذلك تكون سعتها صفر، أي عندها عقدة. ويكون شرط تكون أمواج مستقرة في الأنبوب هو:



الشكل(12-13)

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

ونحصل على الترددات الممكنة في الأنبوب من العلاقة:

$$\boxed{f_n = (2n+1)\frac{v}{4L}} \quad , \quad n=0,1,2,... \tag{50-12}$$

فالتردد الأساس:

$$f_0 = \frac{v}{4L} \tag{51-12}$$

والمتوافقات:

$$f_0 = (2n+1)f_0 \quad , \quad n=0,1,2,... \tag{52-12}$$

مثل 12-6

ما التردد الأساس المسموح به في أنبوب هوائي طوله 1 m (في الشروط الطبيعية) ومامتوافقاته الثلاث الأولى؟

الحل: نحسب التردد الأساس مباشرة بكتابة:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{340 \text{ m/s}}{2(1 \text{ m})} = 170 \text{ Hz}$$

وتكون المتوافقات الثلاث الأولى هي $f_1 = 340$ Hz و $f_2 = 510$ Hz و $f_3 = 680$ Hz .

12-12 الخفقان *(Beats)*

من المعروف لكل من يستمع للراديو أن هناك بعض المحطات التي يصعب سماعها بوضوح بسبب تغير شدة الصوت صعودا وهبوطا باستمرار وبشكل دوري واضح. ويمكن تعليل هذه الظاهرة بأنه تداخل بين موجتين صوتيتين متقاربتين بالتردد. فإذا افترضنا أن موجتين تصلان لنفس النقطة من الشكل:

$$y_1 = A\sin\omega_1 t$$

و

$$y_2 = A\sin\omega_2 t$$

وتكون الموجة الكلية عند تلك النقطة:

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t$$

ومنه:

$$y_T = 2A\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t) \qquad (53\text{-}12)$$

وبفرض أن $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ بحيث أن $\omega_1+\omega_2 = 2\omega$ و $\omega_1-\omega_2 = \Delta\omega$ تؤول (12-53) إلى:

$$y_T = [2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)]\sin\omega t$$

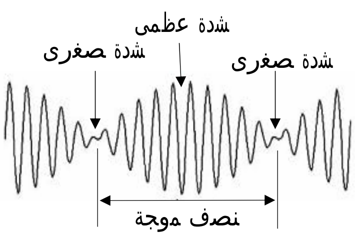
أو

$$y_T = A(t)\sin\omega t \qquad (54\text{-}12)$$

حيث وضعنا

$$A(t) = 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t) \qquad (55\text{-}12)$$

فالحركة الكلية اهتزازية إلا أن سعتها تتغير مع الزمن ممايغير شدتها، كما في اشكل (12-14).



الشكل(12-14)

ونلاحظ من الشكل (12-14) أن شدة الصوت تصير أكبر مايمكن (أو أصغر مايمكن) مرتين خلال كل نصف موجة، أي أن تردد الخفقان هو ضعف تردد الغلاف والمساوي إلى $\Delta\omega/2$. ولذا نعرف **تردد الخفقان** *(beat frequency)* بالعلاقة:

$$\omega_{beat} = \omega_1 - \omega_2 \qquad (56\text{-}12)$$

مثل 12-7

يتجاوب وتران متماثلان عند تردد 300 Hz. ماتردد الخفقان إذا زاد شد أحدهما بمعدل 2%؟

الحل: بما أن الوترين متماثلان وبما أن التردد يتناسب مع سرعة الانتشار التي تتناسب مع جذر الشد في الوتر، أي أن $f \propto \upsilon \propto \sqrt{T}$ ، لذلك نكتب:

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{1.02\,T}{1.0T}} = 1.01$$

ويصير تردد الوتر الثاني:

$$f_1 = 1.01 \times 300 = 303 \text{ Hz}$$

ويكون تردد الخفقان:

$$f_{beat} = f_1 - f_2 = 3 \text{ Hz}$$

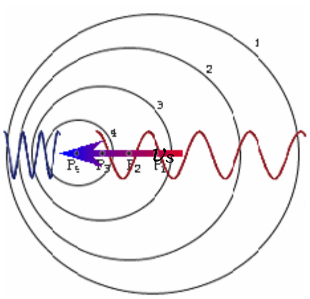
12-13 تأثير دوبلر *(Doppler's Effect)*

تعتمد سرعة الصوت على خصائص الوسط الذي ينتشر فيه بغض النظر عن طبيعة المصدر ونوعه. إلا أن حركة منبع الصوت أو المستمع تؤثر على مانسمعه بشكل واضح. وكل من استمع إلى صفير قطار ينتبه لتغير شدة صوته عندما يقترب منه وعندما يبتعد عنه. ويمكن تفسير هذه الظاهرة التي تسمى تأثير دوبلر بفرض أن لدينا منبعا صوتيا يقترب من مستمع ساكن بسرعة υ_s مصدرا صوتا تردده f، كما في الشكل (12-15). فخلال دور كامل يكون المنبع قد تحرك مسافة $x=\upsilon_s T$، ويكون طول الموجة الواصل للمستمع عندئذ هو:

$$\lambda' = \lambda - \upsilon_s T = \upsilon T - \upsilon_s T = (\upsilon - \upsilon_s)T$$

ومن ثم يكون التردد المسموع:

$$f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = (\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s})f$$



الشكل (12-15)

وبنفس الطريقة نستنتج أنه لو كان المصدر يبتعد عن المستمع لكانت المسافة التي يقطعها خلال دور واحد هي x لكن طول الموجة الواصل للمستمع يصير:

$$\lambda' = \lambda + \upsilon_s T = \upsilon T + \upsilon_s T = (\upsilon + \upsilon_s)T$$

ويصير التردد المسموع:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = (\frac{v}{v + v_s})f \qquad (58\text{-}12)$$

ومن جهة أخرى، إذا تحرك المستمع بسرعة v_L نحو منبع صوتي ساكن يصدر صوتا تردده f فإن سرعة الصوت بالنسبة للمستمع تكون

$$v' = v + v_L$$

ولذلك يسمع صوتا طول موجته λ إلا أن تردده يعطى بالعلاقة:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_L}{\lambda}$$

أي أن:

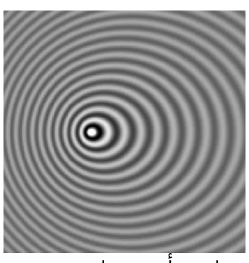
$$f' = (\frac{v + v_L}{v})f \qquad (59\text{-}12)$$

وإذا تحرك المستمع بعيدا عن المنبع تؤول العلاقة السابقة إلى:

$$f' = (\frac{v - v_L}{v})f \qquad (60\text{-}12)$$

ويمكن اختصار النتائج السابقة بكتابة التردد المسموع في الحالة العامة لحركة كل من المنبع والمستمع بالشكل:

$$\boxed{f' = (\frac{v \pm v_L}{v \mp v_s})f} \qquad (61\text{-}12)$$


يظهر تأثير دوبلر بوضوح في حركة منبع بماء ساكن

حيث نعتبر الإشارة الموجبة عندما يقترب المستمع أو يبتعد المنبع، والإشارة السالبة عندما يبتعد المستمع أو يقترب المنبع. ويجب الانتباه إلى أن حركة المنبع تؤدي لتغيير طول موجة الصوت المسموع، بينما تؤدي حركة المستمع لتغيير تردده.

مثل 12-8

يصدر منبع ساكن صوتا تردده 1000 Hz باتجاه حاجز يقترب منه بسرعة 20 m/s فينعكس عنه عائدا لمستمع يقف بجوار المنبع. ما التردد الذي يسمعه إذا كانت سرعة الصوت في الهواء 340 m/s؟

الحل: يعتبر الحاجز بالنسبة للمنبع مستمعا يقترب منه بسرعة 20 m/s بينما يعتبر بالنسبة للمستمع نفسه منبعا يقترب منه بنفس السرعة. ولذلك نطبق العلاقة (12-61) ونكتب:

$$f' = (\frac{\upsilon + \upsilon_L}{\upsilon - \upsilon_s})f = (\frac{340+20}{340-20})1000$$

أي أن $f' = 1125\ \text{Hz}$.

ملخص الفصل

معادلة الحركة الموجية	$y_p = A\sin(\omega t - kx)$
العدد الموجي	$k = 2\pi / \lambda$
طول الموجة	$\lambda = \upsilon T$
التوافق في الطور	$\Delta\phi = 2n\pi$
التعاكس في الطور	$\Delta\phi = (2n+1)(\pi/2)$
سرعة انتشار الأمواج في حبل مشدود	$\upsilon = \sqrt{T/\rho}$
سرعة انتشار الصوت في الغازات	$\upsilon = \sqrt{\gamma RT/M}$
مجموع موجتين	$y_T = [2A\cos(\phi/2)]\sin(\omega t - kx - \phi/2)$
مواضع الذروات	$\Delta x = (2n+1)(\lambda/4)$
مواضع العقد	$\Delta x = n\lambda/2$
الترددات الممكنة في حبل نهايته ثابتة	$f_n = (n+1)(\upsilon/2L)$
الترددات الممكنة في حبل نهايته حرة	$f_n = (n+1)(\upsilon/2L)$
مستوى شدة الصوت	$\beta = 10\log_{10}(I/I_0)$
توزع شدة الصوت	$I_r = I/4\pi r^2$
الترددات الممكنة في انبوب مفتوح الطرفين	$f_n = (n+1)(\upsilon/2L)$
الترددات الممكنة في انبوب مفتوح من طرف	$f_n = (2n+1)(\upsilon/4L)$
تردد الخفقان	$\omega_{beat} = \omega_1 - \omega_2$
تأثير دوبلر	$f' = (\frac{\upsilon \pm \upsilon_L}{\upsilon \mp \upsilon_s})f$

تمارين ومسائل

الأمواج

1-12 ما تردد وسرعة وسرعة انتشار والعدد الموجي لموجة طولها 120 m ودورها 8.8 s؟

2-12 تبلغ سرعة انتشار أمواج المد *(tidal waves)* في المحيط حوالي 740 km/h وطولها 300 km. ما الزمن اللازم لهذه الموجة لتقطع 8000 km وماترددها؟

3-12 تنتشر موجة على طول حبل وفق العلاقة $y = 6\cos(4t + 20x + \pi/3)$ حيث تقدر y بالمتر و t بالثانية. ما السعة العظمى وطول الموجة والعدد الموجي والتردد والسرعة الزاوية واتجاه الانتشار وسرعة الانتشار لهذه الموجة وفي أي لحظة ستكون سعة المنبع أكبر مايمكن؟

4-12 تنتشر موجة طولها 1.2 m وسرعتها 6 m/s في حبل بسعة منبع عظمى 2 cm في اللحظة t=0. (أ) ما الدور والتردد والسرعة الزاوية والعدد الموجي؟ (ب) مامعادلة الموجة؟

5-12 ماطول موجة الأصوات التي يمكن للأذن البشرية سماعها في الهواء إذا كانت تستجيب للترددات التي تقع ضمن المجال من 20 إلى 20,000 هرتز؟ كيف يتغير الطول في الماء؟ (سرعة الصوت في الهواء 340 m/s وفي الماء 1490 m/s).

6-12 ماطول موجة النغمة C إذا كان ترددها 60 Hz وماطول النغمة C العالية التي لها ضعف التردد؟

7-12 ينتشر الضوء بسرعة 3×10^{8} m/s تقريبا وتتحسس العين الأمواج التي يقع طولها الموجي ضمن المجال من 400 nm إلى 700 nm. ماتردد الضوء المرئي؟

8-12 تنتشر موجة ترددها 60 Hz وسعتها العظمى 2 cm في حبل بسرعة 10 m/s. اكتب معادلة الموجة بفرض أن المنبع كان في وضع الاتزان في اللحظة t=0.

9-12 تنتشر موجة في وسط حسب العلاقة $y = \sin(6.28x + 314t)$ حيث تقدر y بالملميتر و t بالثانية. (أ) ما اتجاه الانتشار؟ (ب) ماسرعة الانتشار؟ (ج) ما تردد ودور وطول هذه الموجة؟

سرعة الانتشار

10-12 (أ) ماسرعة انتشار أمواج عرضية في سلك فولاذ طوله 70 cm وكتلته 5 g مشدود بقوة 500 N؟ (ب) ماكتلة سلك من النحاس لف حول هذا السلك فانخفضت سرعة الانتشار لنصفها.

11-12 ماسرعة الانتشار في سلك فولاذ طوله 7 m وكتلته 100 g ومشدود بقوة 900 N؟

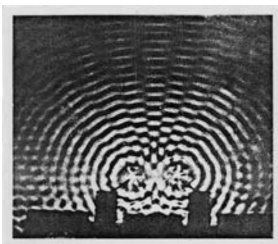
12-12 ماسرعة انتشار نبضة في سلك مطاطي طوله 10 m وكتلته 700 g مشدود بقوة 110 N وما الزمن اللازم لها لتنتقل من أوله لآخره؟

مبدأ التراكب

12-13 ماحاصل جمع موجتين تنتشران في نفس الاتجاه ولهما نفس السعة العظمى والتردد إلا أن بينهما فرق في الطور بمقدار $\pi/3$؟

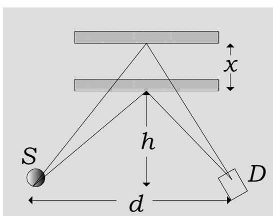
12-14 كيف تتغير إجابة المسألة السابقة إذا كان للموجة الأولى سعة عظمى 3 cm وسعة الموجة الثانية العظمى 4 cm وكان فرق الطور بينهما $\pi/2$؟ (استخدم التمثيل الدائري).

12-15 تنتشر الموجتان $y_1 = 6\cos(\pi x - 4\pi t)$ و $y_2 = 6\cos(\pi x + 4\pi t)$ حيث تقدر y بالمتر و t بالثانية على امتداد حبل طويل جدا. (أ) ماطول وتردد وسرعة انتشار كل موجة؟ (ب) حدد نقاط العقد والذروات.



الشكل (12-16)

12-16 يصدر منبعان S_1 و S_2 المسافة بينهما d أمواجا عرضية متزامنة (نفس السعة والتردد بدون فرق طور بينهما) في مستو، كما في الشكل (12-16) جد المحل الهندسي للعقد والذروات.



الشكل (12-17)

12-17 تتداخل الأمواج الصادرة مباشرة من منبع s مع تلك المنعكسة عن حاجز على بعد h منهما، كما في الشكل (12-17)، فيلاحظ أنهما متوافقتان في الطور. وعندما يصير بعد الحاجز $h+x$ تصير الموجتان متعاكستين في الطور. ما المسافة بين المنبع والكاشف بدلالة d وh وx وطول الموجة λ؟

الأمواج المستقرة

12-18 (أ) ماسرعة انتشار أمواج في سلك فولاذ طوله 1 m وكتلته 5 g ومشدود من طرفيه بقوة 968 N؟ وماطول الموجة؟ (ب) ما التردد الأساس وتردد المتوافقات الثلاث الأولى في السلك؟

12-19 يتجاوب سلك طوله 3 m بالمتوافقة الثالثة له إذا كان ترددها 60 Hz؟ ماسرعة الإنتشار؟

12-20 يهتز سلك طوله 3 m ومشدود من طرفيه بالمتوافقة الثالثة فتبلغ سعته العظمى 4 mm. اكتب معادلة الموجة وجد طولها وترددها إذا كانت سرعة الانتشار 50 m/s؟

12-21 تنتشر أمواج المستقرة في سلك مشدود من طرفيه بالعلاقة $y = 5\sin(25x)\cos(5t)$ حيث تقدرy بالمتر وt بالثانية. (أ) ما السعة العظمى وسرعة انتشار الموجتين اللتين تعطيان هذه الأمواج؟ (ب) ما المسافة بين عقدتين متتاليتين على الحبل؟ (ج) ما أقصر طول ممكن للحبل؟

22-12 يربط طرف حبل طوله 4 m وكتلته 160 g بنقطة ثابتة ويوصل طرفه الآخر بسلك خفيف. ما أطوال أمواج وترددات المتوافقات الثلاث الأولى فيه إذا كان مشدودا بمقدار 400 N؟

الأمواج المستقرة

افترض في المسائل 23-38 أن سرعة الصوت في الهواء 340 m/s.

23-12 ما التردد الأساس في أنبوب هوائي طوله 10 m مفتوح من طرفيه وكيف تتغير الإجابة لو كان مغلقا من طرف واحد؟

24-12 ما أطول أنبوب هوائي يمكن أن يكون له تردد أساس ضمن مجال الأصوات المسموعة إذا كان مفتوحا من طرفيه أو مغلقا من طرف واحد؟

25-12 ما التردد الأساس في أنبوب هوائي طوله 7.5 m ومفتوح من طرفيه وما أعلى متوافقة فيه ويقع ضمن الأصوات المسموعة؟

شدة الصوت ومستوى الشدة

26-12 مامستوى صوت شدته $10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$ و $10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}$؟

27-12 ماشدة صوت مستوى شدته 10 dB أو 30 dB؟

28-12 برهن أنه إذا تضاعفت شدة الصوت فإن مستوى شدته تزيد بمقدار 3 dB.

29-12 بكم يجب أن تتناقص شدة صوت لينخفض مستوى شدته من 90 dB إلى 70 dB؟

الخفقان

30-12 تقترب سيارة من حائط بسرعة 17 m/s مصدرا صوتا تردده 200 Hz. (أ) ماطول الموجة أمام السيارة؟ (ب) ما التردد المسموع عند الحائط؟ (ج) ماتردد الصوت المنعكس عن الحائط الذي يسمعه السائق؟ (د) ماتردد الخفقان بالنسبة للسائق؟

31-12 حل المسألة السابقة بفرض أن السيارة ساكنة والحائط يقترب منها بسرعة 17 m/s؟

تأثير دوبلر

32-12 يتحرك مصدر صوتي بسرعة 80 m/s بالنسبة للهواء الساكن باتجاه مستمع ساكن مصدرا صوتا تردده 200 Hz. (أ) ماطول موجة الصوت بين المصدر والمستمع وما التردد الذي يسمعه الأخير؟

33-12 ماسرعة الصوت في المسألة السابقة لو كان المنبع ساكنا واقترب منه المستمع بسرعة 80 m/s مع وجود رياح سرعتها 80 m/s تتحرك نحو المنبع؟

34-12 يتحرك منبع بسرعة 80 m/s مبتعدا عن مستمع مصدرا صوتا تردده 200 Hz. ماطول الموجة بين المنبع والمستمع وما التردد المسموع؟

35-12 يقترب مستمع بسرعة 80 m/s من منبع ساكن يصدر صوتا تردده 200 Hz. ماطول الموجة بينهما وما التردد المسموع؟

36-12 تدور صفارة على محيط دائرة نصف قطرها 1 m بسرعة زاوية 3 rev/min مصدرة صوتا تردده 200 Hz. ما أكبر وأصغر تردد يسمعه مراقب ساكن؟

مسائل عامة

37-12 يمكن معرفة بعد سحابة تبرق وترعد عن الأرض بشكل تقريبي بواسطة العد لحظة رؤية البرق والتوقف لحظة سماع البرق وقسمة الثواني المعدودة على 3 لإيجاد المسافة بالكيلومترات. ماتعليل ذلك؟ وماسرعة الصوت في الهواء مقدرة بـ km/s ومادرجة دقة الطريقة المذكورة؟ هل يجب أخذ الزمن اللازم للضوء ليصل من السحابة للمراقب بعين الاعتبار؟

38-12 يهتز وتر كمان طوله 30 cm بتردد 196 Hz بدون الضغط بالأصابع على طرفه. أين يجب الضغط عليه حتى تسمع المتوافقات الثلاث 220 Hz و 247 Hz و262 Hz؟

39-12 يبلغ تردد متوافقة في سلك كثافته 4×10^{-3} kg/m³ ومشدود من طرفيه بقوة 360 N، 375 Hz بينما تردد المتوافقة التي تليها 450 Hz. (أ) ماتردد التجاوب الأساس وماترتيب المتوافقتين المذكورتين؟

40-12 تعطى ترددات ثلاث متوافقات متتالية في أنبوب هوائي 1310 Hz و1834 Hz و 2358 Hz. (أ) هل الأنبوب مفتوح من طرفيه أم طرف واحد؟ (ب) ما التردد الأساس له؟ (ج) ماطوله؟

41-12 يهتز سلك طوله 0.5 m وكتلته 1 g ومشدود من طرفيه بقوة 440 N بتردده الأساس بالقرب من فوهة أنبوب مملوء بالماء ومثبت شاقوليا، ثم يخفض مستوى الماء بمقدار 18 cm فيسمع الصوت عندئذ بوضوح (تجاوب). ماسرعة الصوت في الهواء؟

42-12 تصدر سفينة أمواجا صوتية ترددها 40 MHz فتنعكس عن غواصة تحتها مباشرة بعد 90 ms بتردد 39.958 MHz. عند أي عمق تقع الغواصة إذا كانت سرعة الصوت في الماء 1.54 km/s وما سرعتها الشاقولية وفي أي اتجاه؟

43-12 يصدر رادار أمواجا ترددها 2.0 GHz فتنعكس عن سيارة متحركة لينتج تردد خفقان 293 Hz. ماسرعة السيارة؟

الفصل الثالث عشر

الحرارة

(Heat)

1-13 تمهيد:

تنقسم طاقة الأجسام إلى عدة أنواع منها الميكانيكية والحرارية والنووية وغيرها. وتنتج الطاقة الحرارية لمنظومة ما عن الحركة العشوائية للذرات والجزيئات فيها، وكلما زادت هذه السرعة كلما كانت طاقتها الحرارية أكبر ويسخن الجسم أكثر. فالسخونة هي معيار لهذه الطاقة التي نسميها حرارة.

وسندرس في هذا الفصل كيف تتأثر خواص جسم أو منظومة نتيجة تغير الطاقة الحرارية، أي عندما نسخنه أو نبرده. فنميز المنظومة *(system)* و**الوسط الخارجي** *(environment)* المحيط بها. فإذا كنا ندرس حالة كوب ممتلئ بالشاي الساخن مثلا فإنه يصير المنظومة بينما تصير الغرفة التي نجلس فيها المحيط الخارجي بالنسبة له. كما نحدد الكميات الفيزيائية الممكن تحسسها دون الحاجة إلى الدخول إلى جزيئات المنظومة وذراتها واحدة واحدة. وتسمى هذه الكميات عندئذ **كميات عينية** *(macroscopic)* لأننا نتحسسها من خارج الجسم، كالضغط والحجم ودرجة الحرارة وغيرها. أما إذا أردنا دراسة التفاصيل الدقيقة لجزيئات المادة على المستوى المجهري *(microscopic)* فإننا نتابع حركة كل ذرة من الجسم ونحسب سرعتها وزخمها ونحدد القوى المؤثرة عليها لتحديد أثرها على الخواص العينية للجسم. فالحركة الفردية لكل ذرة، أي الخواص المجهرية، هي التي تحدد الخواص العينية للمنظومة. ومن هنا يبدأ الربط بين كافة أشكال الطاقة

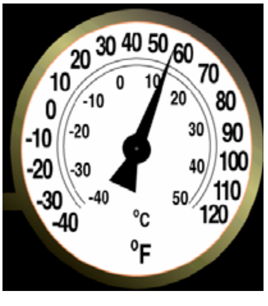
ونصل إلى الشكل العام لمبدأ حفظ الطاقة الذي يربط بين تحول الطاقة من حالة لأخرى، أي إذا تغيرت الطاقة الميكانيكية لجسم فإنها تتحول لكافة حرارية مثلا، وهكذا.

2-13 الاتزان الحراري والقانون الصفر في التحريك الحراري

من المعروف أن الإحساس بسخونة أو برودة الأجسام تحدث بشكل تلقائي وعفوي للإنسان عندما يلمس جسما ساخنا أو باردا. لكن لو تمعنا في هذه الظاهرة بعض الشئ لانتبهنا إلى أننا عندما نقرر سخونة أو برودة جسم فإننا نقارنه غريزيا بحرارة يدنا. ومن أبسط الأمثلة على ذلك أن نمسك بقطعة جليد لفترة من الزمن ثم نمسك مباشرة ملعقة درجة حرارتها عادية (20 °C) إلا نحس أنها ساخنة لأنها كذلك بالنسبة ليدنا وتنتقل الحرارة منها إلينا. أما لو كانت يدنا أسخن من الملعقة لانتقلت الحرارة إلى الأخيرة ونقرر عندها أنها باردة. فقياس مقدار حرارة جسم تتم عادة بمقارنته مع غيره من الأجسام، وإذا وضعنا جسما أول A على تماس مع جسم آخر B ولم يتبادلا أي كمية من الحرارة بينهما فإننا نقول إنهما متزنان حراريا بالنسبة لبعضهما. ويتم معرفة ذلك تطبيقيا بمقارنة كل واحد بجسم ثالث خاص، كميزان الحرارة، فإذا كان جسم A متزن حراريا مع جسم آخر C وكان جسم ثان B متزن أيضا مع C عندئذ يكون A و B متزنين بالنسبة لبعضهما. يسمى ماتقدم **المبدأ الصفر** في التحريك الحراري *(zeroth law of Thermodynamics)*.

3-13 درجة الحرارة *(Temperature)*

جرت العادة على قياس مقدار السخونة في جسم بتحديد **درجة حرارته** بواسطة موازين وأدوات معدة خصيصا لهذا الغرض تستند لظواهر فيزيائية معروفة كاستطالة أو تقلص المعادن أو تغير مقاومتها الكهربائية، أو تغير حجم مائع أو تغير لون مادة، وغير ذلك. ومن أشهر موازين الحرارة أنبوب شعري يحوي كمية معينة من الزئبق تتمدد أو تتقلص مع تغير درجة حرارتها، وإذا بقيت مساحة مقطع الأنبوب ثابتة خلال ذلك بصنعه من مادة لاتتأثر بسهولة بالحرارة، عندئذ يصير ارتفاع الزئبق في الأنبوب متناسبا مع درجة حرارته. وتتم معايرة هذا الميزان بوضعه في مزيج من الماء والجليد تحت ضغط جوي واحد ويحدد مكان الزئبق، ثم يغمس الميزان في ماء يغلي ويحدد ارتفاع الزئبق هناك، ثم تدرج المسافة بين النقطتين بشكل متساو لتدريجات معينة.



ونظرا لتعدد هذه التدريجات فإن هناك عدة أنظمة لتقدير درجة الحرارة. ففي **النظام المئوي** *(Celsius)* المستخدم في معظم دول العالم، تعتبر نقطة تجمد الماء عند الدرجة 0 °C ودرجة غليانه عند 100 °C وقسمت المسافة بينهما بالتساوي. أما في **نظام الفهرنهايت** *(Fahrenheit)* فتعتبر درجة تجمد الماء مساوية إلى 32 °F ودجة غليانه 212 °F. ويرتبط التدريجان ببعضهما بالعلاقة:

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 \tag{1-13}$$

أما في نظام الوحدات الدولي فقد استخدمت وحدة مختلفة لدرجة الحرارة بالاستفادة من خاصة معينة للماء العذب هي تواجده بشكل بخار ومائع وصلب (جليد) بنفس الوقت عند معينة أعطيت قيمة 273.16 ووحدتها **كلفن** *(Kelvin)* ويرمز لها بـ T_3، أي أن:

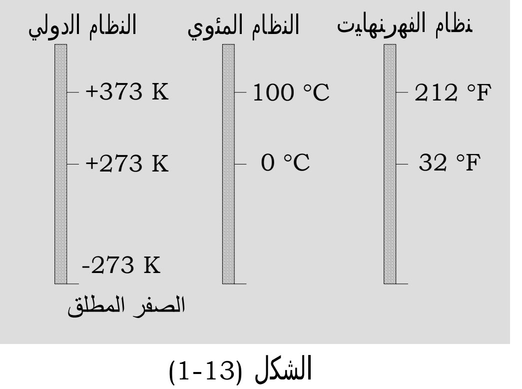
$$T_3=273.16\ \mathrm{K}$$

حيث يشير الرمز الأسفل في العلاقة السابقة للحالة الثلاثية للماء عندها. ويجدر التنبيه إلى إننا لانقول درجة كلفن بل كلفن فقط ولايحوي إشارة °، كما في النظامين المئوي والفهرنهايت.

ويتحدد غليان الماء في النظام الدولي عند 373.16 K أي بزيادة مائة درجة عن نقطة تجمده ولذا يكون ارتفاع درجة الحرارة درجة واحدة نفسه في النظام المئوي والدولي. وترتبط درجة حرارة جسم ما في كلا النظامين بالعلاقة:

$$T_C = T_K - 273.16 \tag{2-13}$$

ويمكن الربط بين التدريجات المختلفة في كل من النظام المئوي والفهرنهايتي والدولي بسهولة بتذكر درجة غليان الماء وتجمده في كل منها. ويوضح الشكل (1-13) ذلك.



الشكل (1-13)

مثل 1-13

تتغير درجة حرارة ماء من 25 °C لـ 95 °C. ماتغيرها في النظام الدولي والفهرنهايت؟

الحل: من الواضح أن تغير درجة الحرارة في النظام الدولي هو نفسه في النظام المئوي، أي أن:

$$\Delta T_K = \Delta T_C = 95 - 25 = 70\,°\mathrm{C} = 70\ \mathrm{K}$$

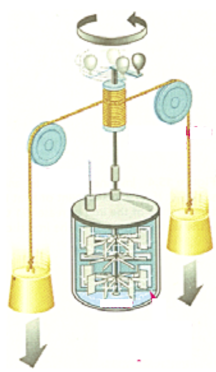
أما في نظام الفهرنهايت فيكون الفرق أكبر من ذلك ونجده من العلاقة (1-13):

$$\Delta T_F = \tfrac{9}{5}\Delta T_C = \tfrac{9}{5}(95 - 25) = 126\,°\mathrm{F}$$

4-13 الحرارة النوعية وقانون المسعر الحراري

من المعروف أنه إذا تلامس جسمان لهما درجتي حرارة مختلفتين فإن الساخن منهما يبرد قليلا والبارد يسخن قليلا ليصلا في النهاية لنفس درجة الحرارة، ونقول إن **كمية من الحرارة** قد انتقلت من الجسم الساخن للبارد. ونسأل هنا ماهي طبيعة هذه الحرارة التي انتقلت؟ كان الاعتقاد السائد أن الحرارة خاصة أساسية من خواص المادة أطلقوا عليها اسم **الحرير** *(caloric)*، لاتفنى ولاتخلق، كالكتلة والشحنة. وعلى الرغم من استطاعة قدماء الباحثين تفسير عدة ظواهر من هذا المفهوم إلا أن التجارب المختلفة أثبتت أن الحرير تضيع وتتولد وغير ثابتة بشكل عام بل نوع من الطاقة وليست خاصة أساس من خواص المادة.

وتم تعريف **الحريرة** *(calorie)* في النظام المئوي قديما لتساوي كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة غرام واحد من الماء بمقدار درجة مئوية واحدة. ويتم تحديد الطاقة التي تعادل حريرة واحدة في النظام الدولي بإجراء تجربة بسيطة تسمى **تجربة جول لتحديد المكافئ الميكانيكي للحريرة**. ويوضح الشكل (2-13) نموذجا مبسطا لهذه التجربة حيث يقوم مؤثر خارجي برفع الكتل المعلقة لارتفاع معين ثم تترك لتبط بسرعة ثابتة فتخسر طاقتها الحركية التي تتحول لطاقة حرارية يكسبها النظام من دوران المراوح داخل الوعاء. ويقاس ازدياد درجة الحرارة ومن ثم حساب الحرارة التي اكتسبها السائل. وقد وجد أن:



الشكل (2-13)

$$1\ \mathrm{cal} = 4.186\ \mathrm{J}$$

ونعرف **الحرارة النوعية** *(specific heat)* لمادة ما بأنها كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة غرام واحد بمقدار درجة مئوية واحدة ونرمز لها بـ c. وتختلف الحرارة النوعية من

مادة لأخرى بحسب طبيعتها وتركيبها الذري والجزيئي. وبحسب تعريف c فإن الحرارة النوعية للماء هي:

$$c_{H_2O} = 1\ \text{cal/g.°C} = 4.186\ \text{J/g.°C}$$

ونعطي في الجدول 13-1 قيم الحرارة النوعية لبعض المواد شائعة الاستعمال.

الجدول 13-1 الحرارة النوعية لبعض المواد

المادة	c (kJ/kg K)	المادة	c (kJ/kg K)
ألمنيوم	0.9	قصدير	0.387
بزموت	0.123	زئبق	0.14
نحاس	0.386	ماء	4.186
نحاس ذهبي	0.38	جليد (–10 °C)	2.05
ذهب	0.126	جرانيت	0.79
رصاص	0.128	زجاج	0.84
فضة	0.233	كحول	2.4
تنغستين	0.134	ماء البحر	3.89

ونلاحظ من الجدول السابق أن للماء أكبر حرارة نوعية، مما يعني أنه عندما يبرد يخسر كمية كبيرة من الحرارة. ولهذه النتيجة أهمية كبيرة على المناخ في المناطق الساحلية التي تاتيها الرياح من جهة البحر أو المحيط، كالشواطئ الغربية لدول البحر الأبيض المتوسط مثلا. ذلك أنه في فصل الشتاء يبرد الماء فيفقد كمية كبيرة من الحرارة التي تنتقل للأراضي الواقعة إلى الشرق فتصير دافئة نسبيا. وهذا هو سبب اعتدال المناخ هناك في الشتاء بالمقارنة مع الأراضي الداخلية.

ونعرف **السعة الحرارية** *(heat capacity)* لمادة بكمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة m غرام منه بمقدار درجة مئوية واحدة. ولهذا تكون الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة m غرام من جسم بمقدار ΔT درجة هي:

$$\boxed{Q = mc\Delta T} \qquad (3\text{-}13)$$

وتسمى العلاقة الأخيرة **قانون المسعر الحراري** وتفيد عندما يتم خلط عدة مواد ذات درجات حرارة مختلفة ببعضها في وعاء معزول يسمى المسعر، لمعرفة درجة الحرارة النهائية للخليط، إذ أن مايخسره بعضها من حرارة ستكسبه الأجزاء الأخرى، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 2-13

توضع قطعة رصاص كتلتها 0.5 kg ودرجة حرارتها 300 °C في مسعر نحاسي كتلته 0.2 kg ويحوي ماء كتلته 0.5 kg عند درجة حرارة الغرفة 25 °C. مادرجة حرارة النظام النهائية؟

الحل: نفترض أن الخليط سيصل لدرجة حرارة نهائية T_f ونحسب أولا كمية الحرارة التي يخسرها الرصاص، فنكتب:

$$\Delta Q_{Pb} = m_{Pb} c_{Pb} \Delta T_{Pb} = (0.5\ \text{kg})(0.13\ \text{kJ/kg.°C})(300 - T_f)$$

ثم نحسب كمية الحرارة التي يكسبها المسعر والماء:

$$\Delta Q_{Cu} = (m_{Cu} c_{Cu} + m_{H_2O} c_{H_2O}) \Delta T$$

ومنه:

$$\Delta Q = [(0.2\ \text{kg} \times 0.39\ \text{kJ/kg.°C}) + (0.5\ \text{kg} \times 4.186\ \text{kJ/kg.°C})](T_f - 25\ \text{°C})$$

وبمساواة الكميتين نجد: $T_f = 32.8\ \text{°C}$

5-13 التمدد الحراري

عندما تسخن مادة تحت تأثير ضغط ثابت فإنها تتمدد نتيجة ازدياد المسافات بين ذراتها، ومن ثم تزداد أبعادها الطولية بشكل متناسب مع ارتفاع درجة حرارتها. ويتناسب تمدد الأجسام غالبا بشكل خطي مع زيادة درجة الحرارة، ونعتبر هنا الحالات التالية:

1- التمدد الطولي *(linear expansion)*:

إذا كان لدينا سلكا طوله L_0 عند درجة حرارة T_0 عندئذ نكتب تغير طوله ΔL نتيجة ارتفاع درجة حرارته بمقدار ΔT بالشكل:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \tag{4-13}$$

حيث α ثابت يسمى معامل التمدد الطولي *(coefficient of linear expansion)* ويعتمد على خواص السلك وتركيبه. وتكتب العلاقة (4-13) عادة بالشكل:

$$L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0) \tag{5-13}$$

2- التمدد السطحي *(surface expansion)*:

من الواضح أن سطح أي جسم سيتمدد إذا ارتفعت درجة حرارته لأن كلا من طوله وعرضه سيتمدد، ولذلك نكتب:

$$\Delta A = \beta A \Delta T \qquad (6\text{-}13)$$

حيث β ثابت يسمى معامل التمدد السطحي *(coefficient of surface expansion)* ويمكن البرهان أن $\beta=2\alpha$ (برهن ذلك).

3- التمدد الحجمي *(volume expansion)*:

مثلما يتمدد طول وسطح أي جسم فإن حجمه يتمدد أيضا وفق العلاقة:

$$\Delta V = \gamma V \Delta T \qquad (7\text{-}13)$$

حيث γ ثابت يسمى معامل التمدد الحجمي *(coefficient of volume expansion)* ويمكن البرهان بسهولة أنه يرتبط بمعامل التمدد الطولي $\gamma=3\alpha$. ونعطي في الجدول 13-2 قيم α و γ لبعض المواد.

ويتميز الماء أنه لايتبع القاعدة (13-7) تماما لأن حجمه يتناقص عندما تزيد درجة حرارته من صفر لأربع درجات مئوية ثم يعود للتزايد بعد ذلك. وهذا يعني أن كثافة الماء عند 2 °C أكبر منها عند 0 °C. ولهذه النتيجة أهمية كبيرة على حالة البحيرات في المناطق الباردة في فصل الشتاء حيث تتشكل على سطحها طبقة جليدية درجة حرارتها 0 °C دوما بينما يكون الماء تحتها عند درجة 4 °C محافظا على الحياة المائية فيها.

كان تمدد السكك الحديدية يؤدي لتشوهها، كما في الصورة لليمين. حاليا تصمم السكك بفواصل مناسبة لأخذ ذلك بعين الاعتبار، كما في الصورة لليسار

مثل 13-3

ماحجم الزئبق المنسكب من إناء زجاجي حجمه 200 cm^3 ممتلئ بالزئبق إذا ارتفعت درجة حرارة الجهاز بمقدار 30 °C؟

الحل: نحسب مقدار تغير حجم الزجاج والزئبق نتيجة ارتفاع درجة الحرارة، فنجد:

$$\Delta V_{glass} = \gamma V \Delta T = 3(11 \times 10^{-6}/°\mathrm{C})(200\,\mathrm{cm}^3)(30\,°\mathrm{C}) = 0.2\ \mathrm{cm}^3$$

و

$$\Delta V_{Hg} = \gamma V \Delta T = 3(1.82 \times 10^{-4}/°\mathrm{C})(200\ \mathrm{cm}^3)(30\ °\mathrm{C}) = 1.1\ \mathrm{cm}^3$$

فيكون حجم الزئبق المنسكب هو الفرق بين تغير الحجمين، أي $0.9\ \mathrm{cm}^3$.

الجدول 13-2: معامل التمدد الطولي والحجمي لبعض المواد

الحالة الصلبة	$\alpha\,(10^{-6}/°\mathrm{C})$	**الحالة المائعة**	$\gamma\,(10^{-4}/°\mathrm{C})$
ألمنيوم	24	زئبق	0.0018
نحاس	17	كحول	1.01
حديد	12	بنزين	0.95
فولاذ	11	أثير	1.51
رصاص	29	هواء	36.7
زجاج تجاري	11	غليسرين	0.49
زجاج بايركس	3.3	زيت زيتون	0.68
اسمنت مسلح	12	كربون	1.18

6-13 تغير الحالة والحرارة الكامنة

وجدنا في الفقرة السابقة أن شكل جسم يتغير عندما تتغير درجة حرارته، إلا أن هناك حالات يحصل فيها هذا التغير في الشكل عند درجة حرارة معينة. تسمى هذه العملية تغير الحالة *(change of phase)* حيث يمكن أن ينصهر جسم من صلب لمائع، أو يتبخر من مائع لغاز.

ويطلق على كمية الحرارة اللازمة لتغيير حالة غرام واحد من الجسم عند درجة حرارة معينة اسم **الحرارة الكامنة** *(latent heat)* ويرمز لها بـ l. وتكون كمية الحرارة اللازمة لتغيير حالة m غرام من جسم معطاة بالعلاقة:

$$Q = ml \tag{8-13}$$

وتعتمد درجة حرارة الانصهار والتبخر على نوع مادة الجسم. فإذا انصهر جسم عندئذ يطلق على l **الحرارة الكامنة للانصهار** *(latent heat of fusion)* ويرمز لها l_f، أما إذا تبخر الجسم فيطلق عليها **الحرارة الكامنة للتبخر** *(latent heat of vaporization)* ويرمز لها l_v.

ونعطي في الجدول 13-3 قيم l_f و l_v لبعض المواد.

الجدول 13-3: الحرارة الكامنة للانصهار والتبخر لبعض المواد

المادة	**درجة الانصهار** (°C)	l_f (kJ/kg)	**درجة التبخر** (°C)	l_v (kJ/kg)
الهيليوم	-269.65	5.23	-268.93	20.9
النيتروجين	-209.974	25.5	-195.81	201
الأوكسجين	-218.79	13.8	-182.97	213
الأثير	-114	104	78	854
الماء	0.00	333	100.00	2260
الكبريت	119	38.1	444.6	326
الرصاص	327.3	24.5	1750	870
الألمنيوم	660	90	2450	11400
الفضة	960.8	88.2	2193	23300
الذهب	1063	64.4	2660	15800
النحاس	1083	134	1187	50600

مثل 13-4

ماعدد مكعبات الجليد اللازم إضافتها إلى ليتر ماء يغلي لتصير درجة حرارة المزيج 40 °C؟

الحل: نحسب مقدار الحرارة التي يفقدها الماء عند تغير درجة حرارته من 100 °C إلى 40 °C فنكتب:

$$\Delta Q = mc\Delta T = (1\ \text{kg})(4.186\ \text{kJ/kg.°C})(60\ \text{°C}) = 251\ \text{J}$$

ونحسب كمية الحرارة التي يكسبها n مكعب من الجليد كتلة كل منها m_1 لينصهر أولا عند درجة حرارة 0 °C ثم ليسخن لدرجة حرارة 40 °C فنكتب:

$$\Delta Q = ml_f + mc\Delta T = nm_1(l_f + c\Delta T)$$

ومنه

$$\Delta Q = n(0.02\ \text{kg})(333\ \text{kJ/kg} + (4.186\ \text{kJ/kg.C})(60\,\text{°C})$$

وبمساواة الكميتين نجد أن $n \approx 21$.

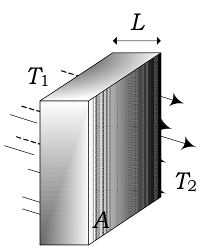
7-13 طرق انتقال الحرارة

تنتقل الحرارة من جسم لآخر أو في نفس الجسم بثلاثة طرق مختلفة: **التوصيل** *(conduction)* **والحمل** *(convection)* **والإشعاع** *(radiation)*. وفي كل الأحوال لاتنتقل الحرارة من منظومة للوسط المحيط بها إذا كانت لهما نفس درجة الحرارة.

أ- **التوصيل**:

إذا وضعنا ملعقة معدنية في كوب شاي ساخن فإن يدها تسخن بعد فترة قصيرة مما يعني أن الحرارة انتشرت من أسفلها إلى أعلاها بدون أن تتحرك جزيئاتها من مكانها. نسمي هذا النوع من انتقال الحرارة التوصيل. وتحدث هذه الظاهرة عندما يكون هناك فرق في درجة الحرارة بين طرفي الملعقة. ولمعرفة سبب ذلك ننظر للتركيب الذري للمادة فنلاحظ أن الذرات تهتز بسعة صغيرة حول وضع اتزانها في الجسم. فإذا تعرض جزء منه لمصدر حراري فإن سعة اهتزازات الذرات هناك تزداد فتصطدم بالذرات المجاورة لتزيد سعة هذه الأخيرة، وهكذا دواليك إلى أن تصل الاهتزازات لذرات الطرف البعيد من الجسم فتصير سعة حركتها كبيرة مما يعني أن طاقتها الحركية قد زادت، أي أن درجة حرارتها ارتفعت.

وعلى الرغم من أن انتقال الحرارة في الأجسام يتم بواسطة الذرات إلا أن هذه العملية تعتمد على خواص الجسم المسخن ونوعه، إذ تنتقل الحرارة بسهولة في قطعة حديد إلا أنه يمكن إمساك طرف قطعة خشب بالقرب من نار لفترة طويلة دون أن يسخن طرفها البعيد. فالمعادن نواقل جيدة للحرارة بينما يعتبر الخشب والزجاج والفلين والغازات نواقل رديئة أو عازلة.



الشكل (3-13)

ويمكن وصف ظاهرة النقل بالتوصيل خلال صفيحة مساحتها A وسمكها L وفرق درجة الحرارة بين وجهيها ΔT، كما هو موضح في الشكل (3-13)، بملاحظة أن كمية الحرارة المنتقلة بواحدة الزمن H والتي نسميها **التيار الحراري** *(heat current)* تتناسب طردا مع مساحة الوجه وفرق درجة الحرارة بين طرفيه ΔT وعكسا مع سمكه L بحيث نكتب:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA\frac{\Delta T}{L} \qquad (9\text{-}13)$$

حيث يدعى الثابت K **معامل التوصيل الحراري** *(thermal conductivity constant)* ووحدته W/K.m ويعتمد على طبيعة المادة المعتبرة. ويعطي الجدول 4-13 قيم K لبعض المواد الشائعة.

مثل 13-5

ما التيار الحراري المفقود من خلال نافذة مساحة وجهها $2\ m^2$ وسمكها $2\ mm$ في غرفة درجة حرارتها $40\ ^\circ C$ إذا كانت درجة حرارة الخارج $0\ ^\circ C$؟

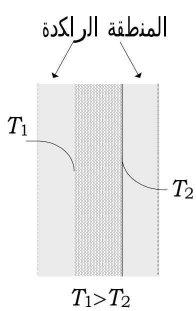
الحل: نستعمل (13-9) ونكتب:

$$H = KA\frac{\Delta T}{L} = (1\ \mathrm{W/K.m})(\frac{2\ \mathrm{m}^2}{2\times10^{-3}\ \mathrm{m}})(25-0)\mathrm{K} = 25\ \mathrm{kW}$$

وهذه طاقة هائلة ضائعة ممايعني أن هناك عوامل أخرى تتدخل في عملية انتشار الحرارة عبر الأجسام، وهذا ماسنأتي عليه في الفقرة القادمة.

ب- **الحمل**:

إذا سخنا سائلا في وعاء فإن درجة حرارته طبقاته السفلى ترتفع بسرعة فتزداد الطاقة الحركية للجزيئات هناك وتتباعد عن بعضها وتقل كثافة السائل مما يؤدي لارتفاع هذه الطبقات للأعلى وتحل محلها طبقات السائل الباردة التي كانت فوقها لتتكرر العملية بهذا الشكل ويسخن السائل كله. تسمى طريقة انتشار الحرارة بهذا الشكل **الحمل المحايد** *(neutral convection)* . أما إذا قمنا بتحريك السائل وإجبار الطبقات السفلى على الانتقال نحو الأعلى (كاستخدام ملعقة لتحريك السائل في الوعاء أو مروحة كهربائية لتحريك الهواء في غرفة) فإننا نسمي هذه الطريقة **الحمل القسري** *(forced convection)*. ومما لاشك فيه أن انتقال الحرارة بالحمل أمر معقد للوصف الرياضي لكن يمكن القول إنه ستتشكل طبقة حرارية راكدة قرب سطح أي جسم ساخن يكون التدرج الحراري خلالها غير خطي، كما في الشكل(13-4)، ويتناسب التيار الحراري خلالها مع $(T\text{-}T_0)^{1.25}$ حيث T درجة حرارة الجسم وT_0 درجة حرارة الطرف البعيد عنه من الطبقة الحرارية الراكدة المتشكلة.



الشكل (13-4)

ففي المثل السابق يكون الفرق في درجة الحرارة بين سطحي النافذة الخارجي والداخلي أقل بكثير من $25\ ^\circ C$ بسبب تشكل الطبقة الراكدة بالقرب من السطح الخارجي بحيث تتزايد درجة الحرارة من $0\ ^\circ C$ إلى قيمة قريبة من $25\ ^\circ C$ عند السطح الداخلي. وبالتالي لاتكون قيمة التيار الحراري المفقود عبر النافذة كبيرا بالدرجة التي وجدناها في المثال المذكور ولاتتعدى أكثر من $80\ W$.

ويمكن منع تشكل الطبقة الراكدة بالقرب من سطح جسم أو سائل بواسطة مؤثر خارجي، وعندها يتناسب التيار الحراري طردا مع مساحة الجسم A والفرق بين درجة حرارته ودرجة حرارة الوسط المحيط به ΔT بحيث نكتب:

$$H = hA\Delta T \tag{10-13}$$

حيث h ثابت التناسب. تسمى هذه العلاقة **قانون نيوتن في التبريد** *(Newton Cooling Law)*.

مثال 6-13

يبرد وعاءان من النحاس كتلة كل منهما 0.1 kg ويحوي أحدهما 50 g ماء والثاني نفس الكمية من الكحول بواسطة مروحة من 55 °C إلى 45 °C، فيستغرق الأول 5 min والثاني 3.5 min. ما الحرارة النوعية للكحول؟

الحل: بما أن الحمل إجباري في هذه المسألة لذا نستخدم قانون نيوتن في التبريد فنلاحظ أن الحرارة التي سيفقدها الوعاء النحاسي عند تغير درجة حرارته من 55 °C إلى 45 °C هي:

$$\Delta Q_1 = m_1 c_1 \Delta T = (0.1\ \text{kg})(0.386\ \text{kJ/kg.K})(10\ \text{K}) = 0.39\ \text{kJ}$$

كما يخسر الماء

$$\Delta Q_2 = m_2 c_2 \Delta T = (0.05\ \text{kg})(4.186\ \text{kJ/kg.K})(10\ \text{K}) = 2.1\ \text{kJ}$$

بينما يخسر الكحول

$$\Delta Q_3 = m_3 c_3 \Delta T = (0.1\ \text{kg})c_3(10\ \text{K}) = 0.5c_3\ \ \text{kJ}$$

وبما أن درجة حرارة الوعائين تتغير بنفس المقدار لذا يكون التيار الحراري واحدا، أي أن:

$$\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_3}{\Delta t}$$

وبتعويض قيم الكميات الواردة في العلاقة السابقة نجد:

$$c_3 = 2.7\ \text{kJ/kg.K}$$

ج- **الإشعاع**:

تنتشر الحرارة من أي جسم ساخن على شكل إشعاع حراري بأمواج يتراوح طولها بين 1 μm و100 μm وهي تقع في منطقة تحت الحمراء *(infrared)* من الطيف الكهرمغناطيسي. وإذا كان

الجسم مشع جيد للحرارة فإنه يكون ماص جيد أيضا. ويطلق على الجسم الذي يمتص كل مايسقط عليه من إشعاعات اسم **جسم أسود** *(Black body)* لأنه لايعكس أي إشعاع يسقط عليه فيبدو أسود. ويعتبر جلد الإنسان قريبا جدا من الجسم الأسود ولو أنع يعكس بعض الأمواج (في مجال الضوء المرئي) بشكل كبير.

وتتناسب كمية الطاقة الحرارية التي يشعها الجسم الأسود من واحدة المساحة خلال ثانية مع درجة حرارته على النحو:

(11-13) $$E_0 = \sigma T^4$$

حيث T درجة حرارة الجسم المطلقة مقدرة بالكلفن و σ ثابت ستيفان ويساوي:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2.K}$$

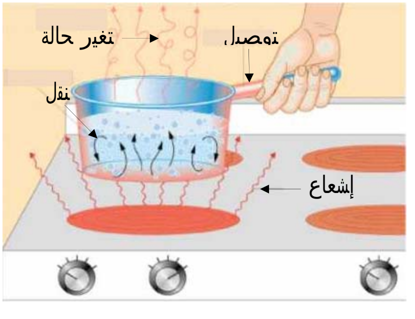
وتمسى العلاقة (11-13) **قانون ستيفان وبولتزمان** في الإشعاع. وتؤول في حالة الأجسام غير السوداء إلى الصيغة:

(12-13) $$E = \varepsilon \sigma T^4$$

حيث يدعى ε ثابت الإصدار *(emissivity constant)* للجسم ويعبر عن كفاءته في الامتصاص والإصدار.

وإذا كانت درجة حرارة الجسم مساوية لدرجة حرارة الوسط الموجود فيه فإنه يشع نفس المقدار الذي يمتصه، إما إذا كان هناك فرق في درجة الحرارة فإن الطاقة الحرارية التي يشعها أو يمتصها من واحدة المساحة خلال ثانية تصير

(13-13) $$E_{rel} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4)$$



تسخين ماء في وعاء يوضح حالات انتقال الحرارة وتغير الحال.

ملخص الفصل

العلاقة بين التدريج المئوي والنظام الدولي	$T_C = T_K - 273.16$
العلاقة بين التدريج المئوي والفهرنهايت	$T_f = \frac{9}{5} T_C + 32$
قانون المسعر الحراري	$\Delta Q = mc\Delta T$
قانون التمدد الطولي	$\Delta L = \alpha L \Delta T$
قانون التمدد السطحي	$\Delta A = \beta A \Delta T$
قانون التمدد الحجمي	$\Delta V = \gamma V \Delta T$
حرارة الانصهار	$Q = ml$
التيار الحراري	$H = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = KA\dfrac{\Delta T}{L}$
قانون نيوتن في التبريد	$H = hA\Delta T$
إشعاع الجسم الأسود	$E = \sigma T^4$
إشعاع الجسم العادي	$E = \varepsilon \sigma T^4$

تمارين ومسائل

درجة الحرارة

1-13 يرتفع عمود الزئبق في ميزان حرارة 4 cm عند وضعه في الجليد و24 cm عند وضعه في ماء يغلي. (أ) ماطول العمود في درجة حرارة 20 °C؟ (ب) مادرجة حرارة سائل يرتفع فيه الزئبق25.4 cm؟

2-13 يمكن استخدام محاول بين درجتي حرارة 12 °C– و 75 °C–. ماهو هذا المجال في نظام الفهرنهايت؟

3-13 تبلغ درجة غليان الأوكسجين 182.86 °C–. ماهي هذه الدرجة بالفهرنهايت والكلفن؟

4-13 تتغير درجة الحرارة في سورية بين 45 C في الصيف و5 °C– في الشتاء. اكتب هاتين الدرجتين في النظام الدولي والفهرنهايت.

5-13 تصل درجة الحرارة في الربع الخالي أحد أيام الصيف إلى 75 °C. ماهذه الدرجة في الفهرنهايت؟

المسعر الحراري

6-13 تسخن شظايا من الألمنيوم كتلتها 100 g إلى 100 °C وتوضع في 500 g من الماء درجة حرارته 18.3 °C فتصل درجة حرارة النظام إلى 21.7 °C. ما الحرارة النوعية للألمنيوم؟

7-13 توضع قطعة رصاص كتلتها 200 g ودرجة حرارتها 90 °C في 500 g من الماء درجة حرارته 20 °C. مادرجة الحرارة النهائية للنظام؟

8-13 توضع قطعة معدنية كتلتها 100 g ودرجة حرارتها 100 °C في مسعر مصنوع من نفس المادة كتلته 200 g وفيه 500 g ماء درجة حرارته 17.3 °C فتصل درجة حرارة النظام إلى 27 °C. ما الحرارة النوعية للمعدن؟

9-13 توضع قطعة ألمنيوم كتلتها 300 g ودرجة حرارتها 100 °C في مسعر ألمنيوم كتلته 200 g فيه 500 g ماء درجة حرارته 20 °C. مادرجة حرارة النظام النهائية وماذا يجب أن تكون درجة حرارة الماء الابتدائية لجعل التسرب الحراري من جدران المسعر أقل مايمكن إذا كانت درجة حرارة الغرفة 20 °C؟

التمدد الحراري

10-13 كم يتغير طول مسطرة فولاذ بين 20 °C و100 °C إذا كان طولها عند 20 °C هو 30 cm؟

11-13 ما التغير النسبي في طول جسر من الفولاذ عندما تتغير درجة حرارته بين –30 °C و 40 °C؟

12-13 برهن أن حجم مكعب نحاسي سيتغير بمقدار 0.5% عندما تتغير درجة حرارته بمقدار 100 °C.

13-13 يصنع ميزان حرارة زئبقي من أنبوب زجاجي قطره الداخلي 0.6 mm فوجد أن المسافة بين نقطتي تجمد وغليان الماء هي 20 cm. ماحجم الزئبق في الميزان؟

14-13 يملأ بالون كروي قطره 36 cm بغاز الهيليوم في غرفة درجة حرارتها 20 °C ثم يأخذ للخارج حيث درجة الحرارة –10 °C. مانصف قطر البالون هناك علما بأن الضغط لايتغير 1 atm؟

تغير الحالة

15-13 توضع قطعة من الجليد كتلتها 200 g في 500 g ماء درجة حرارته 20 °C. (أ) مادرجة حرارة النظام النهائية؟ (ب) مامقدار الجليد الذائب؟

16-13 مادرجة الحرارة النهائية للنظام المذكور في المسألة السابقة إذا كانت كتلة الجليد 50 g؟

17-13 ماكمية الحرارة التي يفقدها 100 g من بخار الماء عندما يتجمد إذا كانت الحرارة النوعية له 2.01 kG/kg؟

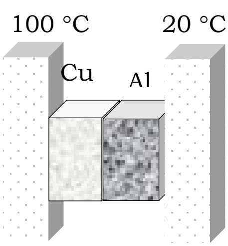
18-13 تبرد قطعة ألمنيوم كتلتها 50 g من 20 °C إلى 196 °C– بوضعها في وعاء يحوي نيتروجين سائل. ماكمية النيتروجين المنصهرة؟

19-13 ماسرعة رصاصة درجة حرارتها 30 °C إذا انصهرت عند ارتطامها بهدف بفرض أن كل طاقتها الحركية تحولت لحرارة؟

20-13 ماكتلة الجليد الذائبة وضع عليها 500 g من رصاص منصهر درجة حرارته 327 °C؟

انتقال الحرارة

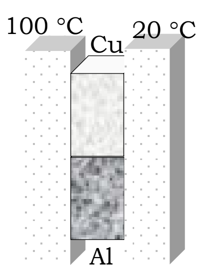
21-13 تبلغ درجة حرارة إحدى نهايتي قضيب نحاسي طوله 2 m ونصف قطره 1 cm، 100 °C والأخرى 0 °C. (أ) ما التيار الحراري في القضيب وما التدرج الحراري فيه؟ (ب) مادرجة حرارة نقطة منه تبعد 25 cm عن نهايته الحارة؟



الشكل (13-5)

22-13 يوضع معكب نحاس وآخر ألمنيوم بين درجتي حرارة مختلفتين، كما في الشكل (13-5). (أ) ما التيار الحراري المار عبر كل واحد إذا كان طول ضلعه 3 cm؟ (ب) مادرجة حرارة السطح الفاصل بينهما وكيف تتغير لو وضع كل واحد مكان الآخر؟

23-13 ما التيار الحراري الكلي عندما يوضع المكعبان في المسألة السابقة كما في الشكل (13-6) ومانسبة التيار الحراري في الألمنيوم إلى ذلك في النحاس؟



الشكل (13-6)

24-13 يمر بخار ماء في أنبوب نصف قطره 5 cm ودرجة حرارته 100 °C. مامقدار الحرارة المتسربة كل ساعة من واحدة الأطوال من الأنبوب عبر عازل سمكه 2 cm ومعامل توصيله 0.07 W/m.K ملفوف حوله إذا كانت درجة حرارة الوسط الخارجي 20 °C؟

25-13 يشع سخان قدرته 1 kW بدرجة حرارة 900 °C. مامساحة السلك المصنوع منه بفرض أنه جسم أسود؟

26-13 مامعدل ازدياد إشعاع الجسم الأسود إذا تضاعفت درجة حرارته المطلقة؟

27-13 كم تزيد درجة حرارة سلك متوهج عندما تتضاعف القدرة الواصلة إليه إذا كانت درجة حرارته الابتدائية 1300 C؟

الإجابات

الفصل الأول

2) $19.4\ m/s^2$
4) $(124°,3.6),(-67°,13),(-53°,5)$
6) $15.5°,\ 132\ m$
10) $2.3°,\ 11.2$
12) $-74°,\ 9.9$
14) $50\ m,\ 29°$
16) $(-74°,\ 3.6),\ (100°,5.3),\ (-30°,3.4)$
18) $32°,\ 5.7$
20) $\mathbf{C}=\alpha(\mathbf{i}-2\mathbf{j}),\ \mathbf{C}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j},\ 57°$
22) $117°,\ (13,5,-7)$
24) 7.1
26) $142°$
28) $66°$
32) $120°$
34) $45°,\ 18$
36) $0.7\mathbf{i}-0.7\mathbf{j},\ 4\mathbf{i}+0.8\mathbf{j}$
$-0.1\mathbf{i}+0.2\mathbf{j}-0.1\mathbf{k}$

الفصل الثاني

2) $8.3\times10^{-3} m/s^2,\ 2.5\ m/s$
6) 7×10^{13} years
8) $2.2\ m/s,\ 0,\ -1.25\ m/s,\ 10\ m/s$
10) $14\ km/h$
12) $200\ m,\ 10\ s$
14) $16.1\ m/s^2,\ 9.9\ m/s$
16) $31\ m,\ 12.6\ m/s^2$
18) $11\ m,\ 9.6\ m/s^2$
20) $33\ m$
22) $20\ m/s^2,\ 110\ m/s,\ 80\ m/s$
24) $1.13\times10^{14}\ m/s^2$
26) $1\ s,\ 12.5\ m,\ 11.1\ m/s^2$
28) $36\ m/s,\ 60.6\ s$
30) $16.25\ m/s,\ -8.75\ m/s^2$
32) $208\ m$
34) $37.5,\ 8.7\ s$
36) الحصان الخلفي
38) $20\ m/s,\ 100\ m$
42) $85\ m/s,\ 8.7\ s$
44) $44\ m$
46) $78.4\ m,\ 0.125\ m/s^2$
48) $29.4\ m/s,\ 44.1\ m$
50) $370\ m,\ 86\ m/s,\ 610\ m,\ 110\ m/s$
56) 112.5 نفسها

الفصل الثالث

2) $8\ m,\ 7.8\ m/s$
4) $6.3\ m/s^2,\ 2\ m/s,\ \mathbf{r}=-\mathbf{i}$
6) $-2.1\mathbf{i}+2.8\mathbf{j}\ m/s$
8) $2.8\ m/s^2,\ 1.3\ m/s,\ 4.7\ m,\ 0.5\ s$
10) $4.5\mathbf{i}-2.25\mathbf{j}\ m,\ -1.5\mathbf{j}\ m/s$
12) $12.6\ m$
14) $3\mathbf{i}-4.4\mathbf{j}\ m/s,\ 1.4\ m$
16) $27.4\ m/s$
18) $5.8\ m/s$
20) $76°$
22) $63.4°,\ 14\ m/s,\ 2.9\ s$
26) $121.7\ m$
28) $3.8\ m$
30) $42\ m/s$
32) $1.1\ s,\ 1.5\ m,\ 6\ m$
34) $69.6\ m$
36) $2.4\ m/s$
38) $95\ m/s^2$
40) $8\ m/s^2$ ، لا
42) $1.2\ m/s$
44) $2.4\times10^5\ s,\ 4.6\times10^{12}\ m$
46) $-4.7\ m/s^2,\ -1.1\mathbf{i}+1.5\mathbf{j}\ m/s$
48) $15.5\ m$
50) $-17.3\mathbf{j}\ m/s,\ 20\ m/s$
$-10\mathbf{i}-17.3\mathbf{j}\ m/s$
52) $36\ s$
54) $2.4°,\ 2.01\ m/s$ شمال الغرب
56) $1\ m/s$ للغرب

الفصل الرابع

2) $-36°,\ 7.2\ N$
4) (أ) $3\ N$ (ب) $4\ N$ (ج) $5\ N$
6) $30\ N,\ 10\ N$
8) 0.049 ، لا
10) $5.9\ m/s^2$
12) $20\ m/s,\ 100\ m,\ 2\ m/s^2$
14) $98\ N$
16) $2.55\ s,\ 19.6\ N$
18) $2.7\ m/s^2$
20) $3.2\ m/s^2,\ 4.9\ m/s^2$
22) $49\ kg,\ -3.6\ m/s^2$، تباطؤ للأعلى
أو $3.6\ m/s^2$ تسارع للأسفل، 0
24) $13.6\ s,\ 2.4\ s$

26) 83.2 N, 23.6 N, 11 kg
28) 0, 8 m, 2 m/s, 2 m/s^2
30) 1.4 m/s^2
32) 104 N
34) 111 N
36) 458 N, 1.3 m/s^2
36) 39.5 N
40) 22.4 m/s
42) 1.25 N, 0.4 N, 4 m/s^2, 4.9 m/s^2
44) 0.35
46) 2.5×10^5 km عن الأرض
48) 6×10^{24} kg
50) 7.8 km/s
52) 1.87 year
54) 4.9 m/s^2, 8.4 N
56) 1.1 m/s^2, 11 N
58) 3.7 m/s^2
60) 0.04, 0.01 N, 0.2 m/s^2, 0.1 m/s
62) $4\pi\rho R^3 Gm(1/d^2 - 1/(d-R/2)^2)/3$

الفصل الخامس

2) 5200 J
4) 0.8 J, 4 J
6) 22.3 m/s
8) −61.3 J, 433 J
10) 10 J
12) −1 J
14) (أ) 226.5 J (ب) 0 (ج) −135.6 J
271.8 J, 0 (د) 136.2 J
16) $mgl/50$
18) 22.5 N
20) 14.7 cm
22) 25.9 cm
24) 960 kJ, 240 kJ
26) (أ) 49 J (ب) 588 J (ج) 0
28) 0, −77 J, 397 J, −320 J, 267 J
30) 312.5 J
32) 7.5×10^{-13} J
34) 5 m/s, 11.2 m/s
36) 4592 m, 2296 m
38) 64 m/s
40) 8.85 m/s
42) 3.6 J, 0.4
44) $2.5R$
50) 63 m
52) 5.1 km/s, 1752 km

56) 192 kJ
58) (أ) 3×10^4 J (ب) 3 s
60) −410 J, −340 J, 0.98 m/s

الفصل السادس

2) (2.25,2)
4) $R/7$ يسار الكبيرة
6) على بعد 13 m من منتصف الصغيرة
10) $(L/6, L/6, L/6)$ من مركز المربع
12) $L/3$ من منتصف القاعدة
14) 135°, 1.4 m/s^2
16) 0.75 m, 0
18) 52**i**−104**j** kg.m/s
20) (أ) 2×10^5(5**i**−4**j**)km/h (ب) 7×10^5 J
22) (أ) 25 kg.m/s، 625 J (ب) 250 N
24) 36
26) 0, 4 m/s
28) في المنتصف، يبعد 30 cm عن الأثقل
يتحرك للأسفل بتسارع 0.2 m/s^2
30) 0.98 m/s
32) 23.6 km/h
34) $wv_{rel}/(w+W)$
36) 13.6, 15 m
38) 108 kg, 58 kg
40) $R/2$ لليسار
42) 523 m/s, 1584×10^3 N

الفصل السابع

2) 16 kg.m/s
4) $(2)^{1/2}mv$
6) 443 N
8) 3.25 g, 0.72 N
10) 3 m/s
12) $0.2K_1$, 0.45 kg
14) 2/3 kg
16) 1100 m/s
18) −0.12 m/s, −1.86 m/s
20) 198 J
22) 25 cm
26) 4.8×10^5 J, 35.5 km/h
−330.5 m/s^2, 9.4×10^4 J
28) 20 J, 40 J
30) 0.6 J
34) 120°

36) $0.5v_0, 0.87v_0$

38) 1.8 m/s غير مرن

40) 15.5 m/s, 22 m/s غير مرن

42) 15×10^{-4} J, $87°$, 9 cm/s

44) $-37°$, 12.5 m/s غير مرن

الفصل الثامن

2) 1.2 m

4) 248 m/s, 209 m/s

6) 0, $0.09\ m/s^2$, 1.6×10^{-4} rad/s

8) 3×10^4 m/s, 2×10^{-7} rad/s, $6\times10^{-3}\ m/s^2$

10) 7 rad/s

12) -463 rad/s, -127 rad/s, $-480\ rad/s^2$ ، $-210\ rad/s^2$, -272.5 rad/s

14) 160 دورة, $-4500\ rev/min^2$

16) 19.5 دورة, $-0.3\ rad/s^2$

18) 71 m, $-9.3\ rad/s^2$, 60 rad/s

20) $(\mu g/R)^{1/2}$

الفصل التاسع

2) 0.58 N للداخل

4) $-\mathbf{k}$ m.N

6) $14ml^2$

8) $1.5\ kg.m^2$

10) 50 دورة, $6.25\ rad/s^2$

12) $5\ rad/s^2$

14) 58 J, 0.9 s, 4.6 m/s, 13.4 m.N

16) 3.4 J

18) 5 دورات، -0.7 m.N, -21.8 J, 14.6 W

20) 5×10^4 J, 12.2 rad/s, $3\ rad/s^2$

22) $2.9\ kg.m^2$, 54 N, 36 N, 2 s

24) يرتفع مركز الكتلة مسافة $l^2\omega^2/6g$

26) $(9g/4l)^{1/2}$

28) $2MR\theta/t^2$, $2R\theta/t^2$, $2\theta/t^2$, $m(g-2R\theta/t^2)$

30) $0.17\ m^2$

32) $I\omega^2/2, mv^2/2, I\omega^2/2+mv^2/2$, $17mg/7$

34) $mR^2/2$ اسطوانة أو قرص

36) $126\ kg.m^2/s$, $76\ kg.m^2/s$

38) $(3Ml^2+14Ml^2)\omega$، $(3Ml^2+14Ml^2)\ \omega^2/2$

40) $2/3$, 266.7 rev/min من الطاقة الأصلية

42) $mR^2v/(I+MR^2)$, $mRv/(I+MR^2)$

44) $(3m+M)/6(m+M)g$, $3m(2gh)^{1/2}/(3m+M)l$

46) $69°$, 427 N, 150 N

48) $53°$, 60 N

50) $u(h(h-2r)^{1/2}/(r-h)$

52) 6100 N, 5900 N, 6800 N

الفصل العاشر

2) 9.4 rad/s, 067

4) 18.8 rad, 0, 0.3 s, 0.6 kg

6) $2.4\sin 5t$, 288 J, $\pi/2$, 2.4 m

8) 1.3 m/s, 2.6 m/s

10) 1.1 Hz, 98 N

12) 9.8 J, 9.8 J, 78.4 N/m

14) 0.016 s

20) 3.1 cm

22) 0.87 m, 378 J, 2.3 Hz

24) 1.5 s, 3.5 m

26) 34.2 rad/s, 39.5 rad/s, $124\ rad/s^2$

28) 50 cm

30) $(12g/7l)^{1/2}$

32) 5.2 cm من المركز

34) 19 m/s, 3.5×10^3 N, $7.1\times10^2\ m/s^2$

36) -2.5cm/s, 4.3cm, 3.1kg للأعلى، 6 N

38) 0.72 m

40) $(2\kappa/MR^2)^{1/2}$

42) $2\pi(mR^2/2kr^2)^{1/2}$

الفصل الحادي عشر

2) 111

4) 20 kg

6) 0.13%, 416 N

8) 0.06 mm

10) $-3.57\times10^{10}\ m^3$

12) 314 N

14) 7.1×10^6 Pa

16) 2.9×10^4 Pa

18) 10^5 Pa, 10^5 Pa, 970 mBar

20) $6.1\times10^3\ kg/m^3$

22) $\rho=\rho_0(1+\alpha y)$, 784 Pa, 118 Pa, $\alpha=10^{-4}$

24) 0.1009 kg

26) 1500 kg, 1/4
28) 882 Pa, 5 cm
30) 9
32) 28.6 m/s, 53.3 m/s
34) 8.14×10^3 N, 88.9 m/s
36) 5.35×10^{-4} m^2
38) 1.96×10^5 Pa
40) 107 m/s
42) 0.27 m^3/s, 6.6×10^{-4} Pa
44) 3.2 cm,4200Pa, 3 m/s, 0.75 m/s
46) 781.25 kg/m^3
50) 363 kg/m^3
52) 0.5 g
54) 0.056 N/m
56) 0.7 mm
58) 0.095 N.s/m^2

الفصل الثاني عشر

2) 6.8×10^{-4} Hz, 10.8 h
4) 1.7π m^{-1}, 10π rad/s, 5 Hz, 0.2 s
$y = 2\cos(10\pi t - 1.7\pi x)$
6) 0.65 m, 1.3 m
8) $y = 0.02\sin(120\pi t - \pi x)$
10) 15 g, 265 m/s
12) 0.3 s, 40 m/s
14) 1.3 rad, 5 cm
16) قطوع ناقصة بؤرها S_1 وS_2
18) 880 Hz, 660 Hz, 220 Hz, 440 Hz
20) 25 Hz, 2 m, $4\cos(50\pi t)\sin(\pi x)$
22) 6.25 Hz, 3.2 m, 5.33 m, 16 m
31.25 Hz, 18.75 Hz
24) 4.5 m, 8.5 m
26) 100 dB, 20 dB
30) 10 Hz, 211 Hz, 1.62 m
32) 262 Hz, 1.3 m
34) 162 Hz, 210 cm
36) 474 Hz, 529 Hz
38) 7.6 cm, 6.2 cm, 3.3 cm من البداية
40) من طرف واحد، 262 Hz
42) 1.62 m للأسفل، 61.6 m

الفصل الثالث عشر

2) 19.4, −10.4 °F
4) −62.2 °C, 56.7 °C
6) 0.908 kJ/kg.K
8) 1.7 kJ/kg.K
10) 30.026 cm
14) 34.6 cm
16) 10.9 °C
18) 46.1 g
20) 63.6 g
22) 52 °C, 2.5×10^5 W
24) 3.2×10^5 W
26) 16
28) 21 kJ
30) 134 °C