وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية

الكهرومغناطيسيات

ترجمة

الدكتور علي ابراهيم مهدي العزاوي
(B.Sc., M.Sc, Ph. D, M. Inst. P .)
قسم الفيزياء / كلية التربية / الجامعة المستنصرية

الكتاب الأصل

ELECTROMAGNETICS
by : B.B. Laud
Wiley Eastern Limited

تقديم

مما لاشك فيه ان المكتبة العربية تفتقر كثيراً الى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والعملية ، كما ان الدراسة في جامعاتنا العربية ماتزال في حاجة ماسة الى وجود العديد من المراجع باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم. ان العمل على سد هذا النقص يسهم الى حد كبير في اعداد الاجيال التي نريد لها ان تبني صرح النهضة والحضارة على اسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم.

ومن هذا المنطلق ، كان قرار وزارة التعليم العالي والبحث العلمي في تعريب التعليم الجامعي حافزاً ومشجعاً لترجمة كتاب الكهرومغناطيسيات لمؤلفه بي . بي . لاود ووضعه بين ايادي طلبة المرحلة الجامعية الأولية ومرحلة الماجستير لكليات العلوم والتربية والهندسة. آملاً ان يكون هذا الكتاب محققاً الفائدة المرجوة لهم. وان يسد ثغرة في مكتبتنا العربية وينتفع به ابناء بلدنا العزيز.

ومن الله التوفيق ؟

الدكتور

علي ابراهيم مهدي العزاوي

المقدمــــة

اصبحت الكهرومغناطيسية جزءاً من اساسيات الفيزياء كما انها عنصر جوهري لكل مناهج الفيزياء في مختلف المستويات. كتب هذا الكتاب ليكون كتاباً منهجياً لطلبة البكالوريوس B.Sc والماجستير M.Sc في الفيزياء.

ان طريقة الاقتراب فرضتها الرغبة في ايفاء متطلبات الطالب. لذا فان اول مايعنى به الكتاب هو تمكين الطالب من تملك زمام الموضوع بصورة مقنعة وجعله يدرك مدى صحته وفائدته ، وطورت الافكار الاساسية له بموجب الخطوط المألوفة.

ان جوهر الكهرومغناطيسية رياضي الخواص. وبدون الرياضيات كأداة مساعدة للتفكير يصبح تطور الكهرومغناطيسية امراً مستحيلاً ، مع ذلك لم تجر اي محاولة لانجاز رياضي صارم لانه من الصعوبة ان تكون اكثر صراحة مما هو موجود في الكتاب دون تحويل انظار الطالب عن المحتوى الفيزيائي الاجرائي ولايحتاج الطالب للسير في مادة هذا الكتاب الى خلفية رياضية اعمق من رياضيات المرحلة الجامعية الاولية المألوفة لحساب التفاضل والتكامل وتحليل المتجهات. اما التقنيات الأكثر تقدماً فهي مشروحة ومفسرة عند ظهورها.

توفر المسائل في نهاية كل فصل التفاصيل التي لامحل لها في جسم المنهج وكذلك تهدف الى تطبيقات اضافية ، وهي محاولة لاختبار مدى فهم الطالب للمفاهيم التي يتناولها الفصل. تشير قائمة المصادر في نهاية الكتاب الى دين المؤلف لافكار غيره،لكن القائمة منهكة او متعبة قطعاً.

بي . بي . لاود

محتويات الكتاب

	الصفحة
تقديم	٣
المقدمة	٥
محتويات الكتاب	٧
دليل الرموز	١٥
الفصل الاول : القوة ـ المجال والطاقة في الكهربالية المستقرة	١٩
1ـ1 قانون كولومب .	٢١
1ـ2 مبدأ التراكب .	٢٦
1ـ3 المجال الكهربالي .	٢٧
1ـ4 خطوط وأنابيب القوة .	٣٢
1ـ5 الفيض الكهربالي .	٣٣
1ـ6 قانون كاوس (الصيغة التكاملية)	٣٤
1ـ7 قانون كاوس (الصيغة التفاضلية) .	٣٧
1ـ8 بعض التطبيقات لقانون كاوس .	٣٨
1ـ9 مبرهنة مفيدة في الكهربالية المستقرة .	٤٦
1ـ10 الجهد الكهربالي المستقر .	٤٧
1ـ11 العلاقة بين المجال والجهد .	٥٠
1ـ12 علاقتان مهمتان .	٥٥
1ـ13 السطح المتساوي الجهد .	٥٦
1ـ14 الطاقة الكهربالية المستقرة .	٥٧
1ـ15 ثنائي القطب الكهربائي .	٦٠
1ـ16 ثنائي القطب في مجال منتظم .	٦٥
1ـ17 ثنائي القطب الكهربالي في مجال كهربالي غير منتظم .	٦٦
1ـ18 الطاقة الكامنة المتبادلة بين اثنين من ثنائي القطب .	٦٧
1ـ19 الطبقات المزدوجة الكهربائية .	٦٧

1.20 رباعي القطب الكهربائي . ٦٩
1.21 الجهد الناتج من توزيع شحنات بصورة اعتباطية . ٧٠
تمارين الفصل الاول ٧٤

الفصل الثاني : الكهربائية المستقرة في المواد العازلة ٧٧
2.1 الموصلات والعوازل . ٧٩
1 ـ المواد الموصلة . ٧٩
2 ـ المواد العازلة . ٨٠
2.2 الموصل في مجال كهربائي . ٨٠
2.3 المجال الكهربائي عند سطح موصل مشحون . ٨١
2.4 المتسعات . ٨٢
1ـ المتسعة ذات الالواح المتوازية . ٨٣
2ـ سعة متسعة على شكل كرة معزولة . ٨٣
3ـ متسعة كبل ذو موصلين متحدي المحور . ٨٤
2.5 طاقة المتسعة . ٨٥
2.6 الاستجابة الكهربائية لوسط غير موصل للمجال الكهربائي . ٨٨
2.7 الاستقطاب الكهربائي المستقر . ٨٩
2.8 قوانين المجال الكهربائي المستقر . ٩٦
2.9 طاقة المجال بوجود عازل . ١٠١
2.10 شروط الحدود الفاصلة . ١٠٣
2.11 العوازل الغازية اللاقطبية . ١٠٧
2.12 العوازل الغازية القطبية . ١١٠
2.13 السوائل اللاقطبية . ١١٤
2.14 العوازل الصلبة ـ اجسام عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية . ١١٧
2.15 اجهادات المجال الكهربائي . ١١٨
تمارين الفصل الثاني ١٢٠

الفصل الثالث : مسائل القيمة الحدودية في مجالات الكهربائية المستقرة . ١٢٣

3ـ1 معادلات بواسون ولابلاس . ١٢٥
3ـ2 مبرهنة ايرنشو . ١٢٧
3ـ3 الشروط الحدودية ومبرهنة التوحد . ١٢٨
3ـ4 حل معادلة لابلاس في احداثيات متعامدة . ١٣٠
3ـ5 معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكروية . ١٣٥
3ـ6 معادلة ليكندر . ١٣٨
3ـ7 دوال ليكندر المرافقة . ١٤٦
3ـ8 معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية . ١٥٧
3ـ9 حل معادلة لابلاس باستخدام دالة كرين . ١٦٦
3ـ10 التمدد متعدد الاقطاب . ١٧٤
3ـ11 طريقة الصور الكهربائية المستقرة ١٧٨
3ـ12 الصور في العوازل . ١٨٦
تمارين الفصل الثالث ١٩٣

الفصل الرابع : المغناطيسية المستقرة . ١٩٧
4ـ1 التيار الكهربائي . ١٩٩
4ـ2 قانون أوم ـ الموصلية الكهربائية . ٢٠١
4ـ3 حساب المقاومة . ٢٠٣
4ـ4 التأثيرات المغناطيسية ٢٠٥
4ـ5 المجال المغناطيسي ٢٠٦
4ـ6 القوة على تيار . ٢٠٨
4ـ7 قانون بايوت ـ سافارت ٢٠٨

4.8 قوانين المغناطيسية المستقرة ٢١٤
4.9 الجهد المغناطيسي ٢١٧
A - جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه ٢١٧
B - الجهد المتجه ٢١٩
4.10 اطارات التيار في المجالات الخارجية - ثنائي القطب المغناطيسي .. ٢٢٤
4.11 ثنائي قطب مغناطيسي - في مجال مغناطيسي غير منتظم .. ٢٢٦
4.12 جهد الكمية المغناطيسية المتجه الناتج من اطار تيار صغير ٢٢٧
4.13 طريقة بديلة لايجاد الجهد المتجه A ومنه المجال B الناتج من اطار تيار .. ٢٢٩
4.14 الاوساط المغناطيسية ٢٣٢
4.15 التمغنط ٢٣٤
4.16 متجه المجال المغناطيسي ٢٣٨
4.17 المتأثرية المغناطيسية والنفوذية ٢٣٩
4.18 الشروط الحدودية ٢٤٠
4.19 كرة ممغنطة بانتظام في مجال مغناطيسي .. ٢٤٢
4.20 مقارنة بين المجالات الكهربائية والمغناطيسية المستقرة ٢٤٤
تمارين الفصل الرابع ٢٤٦

الفصل الخامس : الحث الكهرومغناطيسي .. ٢٤٩
5.1 القوة الدافعة الكهربائية . ٢٥١
5.2 قانون فاراداي للحث الكهرومغناطيسي ٢٥٤
5.3 قانون الحث للدوائر المتحركة . ٢٥٥
5.4 الصيغتين التكاملية والتفاضلية لقانون فاراداي ٢٥٧

5.5 الحث الذاتي والحث المتبادل ٢٥٩
5.6 الطاقة في المجالات المغناطيسية . ٢٦٢
A. الطاقة المغناطيسية المخزونة في مادة حالة ٢٦٢
B. الطاقة المغناطيسية المخزونة في سلسلة من الحالات ٢٦٣
5.7 معادلات ماكسويل .. ٢٦٦
5.8 اضمحلال الشحنة الحرة . ٢٦٩
5.9 جهود المجال الكهرومغناطيسي . ٢٧٠
5.10 المزيد حول شرط لورنتس المقياسي . ٢٧٤
5.11 طاقة المجال وزخم المجال . ٢٧٦
تمارين الفصل الخامس ٢٨١

الفصل السادس : الموجات الكهربائية المستقرة ٢٨٣
6.1 الامواج المستوية في الاوساط غير الموصلة ٢٨٥
6.2 الاستقطاب ٢٩٢
6.3 فيض الطاقة في الموجة المستوية ٢٩٤
6.4 الموجات المستوية في وسط موصل . ٢٩٨
6.5 الظاهرة السطحية . ٣٠٠
تمارين الفصل السادس .. ٣٠٣

الفصل السابع : الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة . ٣٠٥
7.1 انعكاس وانكسار الموجات المستوية عند تداخل مستوي . ٣٠٧
7.2 الانعكاس الداخلي الكلي .. ٣١٤
7.3 الانعكاس من سطح معدني . ٣١٨
تمارين الفصل السابع ٣٢٢

الفصل الثامن : دلائل الموجة . ٣٢٣
8ـ1 انتشار الموجات بين المستويات الموصلة ٣٢٥
8ـ2 الموجات في دلائل مقاطع عرضية اعتباطية . ٣٢٩
8ـ3 دلائل الموجة ذات المقطع العرضي المتعامد . ٣٣٣
8ـ4 التجاويف الرنانة . ٣٣٦
8ـ5 دلائل موجة العازل . ٣٣٨
تمارين الفصل الثامن ٣٤٢

الفصل التاسع : الاشعاع الكهرومغناطيسي . ٣٤٣

9ـ1 الجهود المعوقة ٣٤٥
9ـ2 اشعاع من ثنائي قطب متذبذب . ٣٤٩
9ـ3 الهوائي الخطي . ٣٥٦
9ـ4 جهود ليناردـ ويشرت . ٣٥٩
9ـ5 جهود شحنة في حركة منتظمة ـ صيغة لورنتس . ٣٦٢
9ـ6 مجالات شحنة معجلة . ٣٦٥
9ـ7 الاشعاع الناتج من جسيم معجل في سرعة بطيئة . ٣٦٩
9ـ8 الاشعاع عندما تكون سرعة وتعجيل الجسيمات في خط واحد . ٣٧١
9ـ9 اشعاع صادر من جسيم مشحون يتحرك في مدار دائري . ٣٧٢
9ـ10 اشعاع رباعي القطب الكهربائي . ٣٧٤
تمارين الفصل التاسع . ٣٧٧

الفصل العاشر : الكهروداينمك النسبية ..	٣٧٩
10ـ1 تحويل كاليليان	٣٨٢
10ـ2 فرضيات النظرية النسبية الخاصة	٣٨٦
10ـ3 تحويل لورنتس	٣٨٧
10ـ4 بعض النتائج المترتبة على تحويل لورنتس .	٣٩٠
10ـ5 الشحنات والمجالات كما تراقب في اطارات مختلفة .	٣٩٢
10ـ6 تحويل لورنتس كتحويل تعامدي .	٣٩٥
10ـ7 الصيغ المتغايرة للكهروداينمك	٣٩٨
10ـ8 ممتدات المجال الكهرومغناطيسي .	٤٠١
10ـ9 تحويل المجالات .	٤٠٤
10ـ10 المجال الناتج من شحنة نقطية في حركة منتظمة	٤٠٦
10ـ11 صياغة لاكرانجيان لحركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي	٤٠٨
10ـ12 اشعاع من الجسيمات النسبية .	٤١٥
تمارين الفصل العاشر .	٤١٧
الفصل الحادي عشر : الاستطارة	٤١٩
11ـ1 استطارة الاشعاع	٤٢١
11ـ2 خمود الاشعاع .	٤٢٤
11ـ3 التفريق في الغازات المخففة .	٤٢٧
11ـ4 التفريق في المواد السائلة والصلبة .	٤٢٩
11ـ5 وسط حاوي على الكترونات حرة .	٤٣١
تمارين الفصل الحادي عشر .	٤٣٢

الفصل الثاني عشر : فيزياء البلازما . ٤٣٣

12-1 شبه تعادلية البلازما . ٤٣٥
12-2 سلوك البلازما في المجال المغناطيسي ٤٣٨
12-3 البلازما كمائع موصل - المغناطيسية الهيدروديناميكية . ٤٤٣
12-4 حصر مغناطيسي - تأثير الحشر ٤٤٦
(بمرور تيار كهربائي قوي)
12-5 عدم الاستقرارية . ٤٤٨
12-6 موجات البلازما . ٤٤٩
1- تذبذبات (الالكترون) . ٤٥٠
2- الهيدرومغناطيسية او موجات آلفن . ٤٥١
تمارين الفصل الثاني عشر . ٤٥٣
الملحق (A) المتجهات . ٤٥٧
A-1 مفهوم المتجه . ٤٥٧
A -2 جبر المتجهات . ٤٥٨

A -3 تفاضل وتكامل المتجهات ٤٦٤
A -4 بعض علاقات المتجهات المفيدة . ٤٧٩
الملحق (B) - تحويلات الكميات من النظام الكاوسي الى النظام العالمي . ٤٨٠
الملحق (C) - تحويلات الوحدات الكهربائية والمغناطيسية . ٤٨١
الملحق (D) - الثوابت الفيزياوية . ٤٨٢
اجوبة تمارين الكتاب . ٤٨٣
تعريب المصطلحات العلمية الواردة في الكتاب وفقاً للحروف الهجائية . ٤٧٨
المراجع ٥٠٧

دليـــل الرمـــوز
A Guide to Symbols

	(Symbol) الرمز	(Explanation)الشرح
α	**Polarizability of the atom**	استقطابية الذرة
A_m	**Molecular refractivity**	الانكسار النوعي الجزيئي
A	**Vector potential**	الجهد المتجه
$\mathcal{A}$	Four vector potential	الجهد المتجه الرباعي
B	**Magnetic flux density**	كثافة الدفق(الفيض)المغناطيسي
χ	**Electric susceptibility**	المتأثرية الكهربائية
χ_m	**Magnetic susceptibility**	المتأثرية المغناطيسية
c	**Velocity of light**	سرعة الضوء
C	**Capacitance**	السعة
δ	**Skin depth**	العمق السطحي
δ_{nm}	**Kronecker delta**	دلتا كرونكر
$\delta(\mathbf{r})$	**Dirac delta function**	دالة دلتا لديراك
Δ	$\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$	
D	**E'ectric displacement**	الازاحة الكهربائية
ϵ	**Permittivity**	السماحية
ϵ_r	**Relative permittivity**	السماحية النسبية
	dielectric constant	ثابت العزل
$\mathcal{E}$	**E.M.F**	القوة الدافعة الكهربائية
e	**Electronic charge**	الشحنة الالكترونية
$\hat{\mathbf{e}}_r$	**Unit vector in the direction** r	متجه الوحدة باتجاه r
E	**Electric field strength**	شدة المجال الكهربائي
ϕ	**Electrostatic potential**	جهد الكهربائية المستقرة
Φ	**Magnetic flux**	الدفق (الفيض) المغناطيسي

ϕ_m	Magnetic scalar potential	الجهد المغناطيسي غير المتجه
$\mathbf{F}$	Force	القوة
$F_{\mu\nu}$	Electromagnetic field tensor	كمية ممتدة المجال الكهرومغناطيسي
γ	Damping coefficient	معامل الاضمحلال
$\mathcal{G}(x, x')$	Green's function	دالة كرين
$\mathbf{H}$	Magnetic field strength	شدة المجال المغناطيسي
I	Current	التيار
$\mathbf{J}$	Current density	كثافة التيار
J_ν	Bessel's function	دالة بسيل
$\mathcal{J}$	Four - vector current density	كثافة التيار المتجه الرباعية
$\mathbf{k}$	Propagation vector	متجه الانتشار
λ	Charge per unit length,	الشحنة لكل وحدة طول
	Wavelength	الطول الموجي
λ	Gravitational constant	ثابت الجاذبية الارضية
$\mathcal{L}$	Differential operator	عامل التكامل
*L	Self - inductance	معامل الحث الذاتي
	Lagrangian	لاكرانجيان
*M	permeability	النفوذية
	Magnetic moment	العزم المغناطيسي
m	Magnetic dipole moment	عزم ثنائي القطب المغناطيسي
M	Mutual inductance	الحث المتبادل
n	Refractive index	معامل الانكسار
$\mathbf{N}$	Poynting vector	متجه بوينتنك
Ω	Ohm	اوم

	Solid angle ;	الزاوية المجسمة
p	**Dipole moment**	عزم ثنائي القطب
$\mathbf{P}$	**Macrosopic pularization density**	كثافة الاستقطاب العينية
$\mathfrak{P}$	**Magnetic pressure**	الضغط المغناطيسي
P_l	**Legendre polynomial**	متعددة الحدود ليكندر
P_l^m	**Associated Legendre polynomial**	متعددة الحدود ليكندر المتحدة
q, Q	**Charge**	الشحنة
ρ	**Charge density**	كثافة الشحنة
	resistance	مقاومة معامل الانعكاس
R	**Reflection coefficent**	
	; scattering cross - section	المقطع العرضي للاستطارة
$^*\sigma$	**Conductivity**	الموصلية
S_l	**Surface harmonic**	التـــــــوافـــــــق السطحي
τ	**torque**	عزم الازدواج
	relaxation time;	زمن الاسترخاء
T	**Transmission coefficient**	معامل الانتقال
U	**Energy**	طاقة
$\mathcal{U}$	**Four - vector velocity**	سرعة المتجه الرباعية
V	**Potential**	جهد
V	**Volume**	حجم
ω	**Angular frequency**	التردد الـــــــــــــزاوي
W	**Energy**	طاقة
Z_0	**Impedance**	معاوقة ، ممانعة

الفصل الأول

القوة ، المجال والطاقة في الكهربائية المستقرة

Force, Field and Energy in Electrostatics

الفصل الأول

القوة ، المجال والطاقة في الكهربائية المستقرة

Force, Field and Energy in Electrostatics

ان العالم من حولنا مبني من ذرات تتكون من شحنات موجبة وسالبة،والقوة السائدة بين الجزيئات الذرية هي قوة كهربائية مستقرة. ان فهم بعض القوانين الاساسية للقوى الطبيعية يقودناقدماً للدخول في مجال هذا العلم. وقد وضع كولومب سنة 1785 احد هذه القوانين (قانون القوة الكهربائية المستقرة) والذي يمكن بواسطته تفسير التفاعلات الذرية.

1-1قانون كولومب (Coulomb's Law) :-

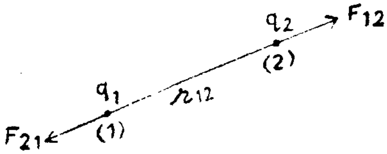
اثبت كولومب تجريبياً ان في الفضاء الحر تتجاذب الاجسام المشحونة بشحنات مختلفة في حين الاجسام المشحونة بشحنات متشابهة تتنافر بقوة تتناسب طردياً مع قية كل شحنة وعكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بينهما وتعمل على الخط الواصل بين الشحنتين.

لنعبر عن مشاهدات كولومب التجريبية هذه بشكل رياضي . سوف نستعمل في هذا الكتاب علامات او رموزاً خاصة بالمتجهات (Vector notation) ولهذا فوائد معينة مثل :

(1) زوال اعتباطيةاختيار نظم الاحداثيات وتصبح المكونات الفيزياوية اكثر وضوحاً.

(2) معادلات الكهربائية المتحركة (equations of electrodynamics) تصبح اكثر اختصاراً ووضوحاً اذا كتبت بعلامات او رموز خاصة بالمتجهات.

نعـود الى مشـاهـدات كـولـومب ونفرض ان لــديـنــا جسيمين مشحونين 1و2 وشحنتيهما q_1، q_2 على التوالي وتفصـل بينهما مسـافـة مقـدارهـا r_{12} في الفراغ (الشكل 1-1).



الشكل (1-1)

فالقوة الكهربـائيـة المستقرة المسلطـة من قبل الجسيم الاول على الجسيم الثاني تحسب طبقاً لقانون كولومب من المعادلة الآتية :

$$F_{12} \propto \frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\,2}}$$

$$F_{12} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\,2}} = -F_{21} \qquad (1.1)$$

حيث ان K هو ثـابت التنـاسب ، وF_{21} هي القوة المسلطـة من الجسيـــم الثاني على الجسيم الأول.

اذا كتبت المعادلة (1-1) بطريقة المتجهات تصبح كالآتي :

$$\mathbf{F}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2}\hat{\mathbf{e}}_r = K\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\mathbf{r}_{12} \qquad (1.2)$$

حيث $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$ هو متجه الوحدة على مسار r_{12}.

ان اشارة الشحنات هي التي تقرر نوع القوة اذا كانت تجاذبيـة او تنـافريـة. فاذا كانت الشحنات متشابهة (كلتاهما موجبة او كلتاهما سالبة)، تكون القوة F_{12}

موجبة وهذا يعني ان القوة تنافرية اما اذا كانت الشحنات مختلفة اي واحدة موجبة والاخرى سالبة فان القوة تكون سالبة وهذا يعني انها تجاذبية.

لدينا بديلان لاختيار الثابت K وتعيين وحدات الشحنة من المعادلة (1-2) او اعطاء قيمة اختيارية لوحدة الشحنة وبذلك يمكن تعيين الثابت K تجريبياً.

في نظام كاوسيان للوحدات (Gaussian system CGS) تقاس المسافة بالسنتيمترات ، والكتلة بالغرامات والزمن بالثواني،والقوة بالداين والوحدات الكهربائية تعرف بفرض ثابت التناسب K هووحدة واحدة (البديل الأول) وعليه:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\,\mathbf{r}_{12}\ (\text{dynes}) \qquad (1.3)$$

وهذا يعني ان القوة بين وحدتين من الشحنات تفصل بينهما مسافة مقدارها واحد سنتيمتر تكون داينا واحداً وتكون وحدة الشحنة هو ذلك المقدار من الشحنة التي تؤثر بقوة داين واحد في شحنة اخرى تبعد عنها مسافة (1سم) وتسمى ستات كولومب (Statcoulomb) او وحدة الكهربائية المستقرة (electrostatic unit, esu) في النظام العالمي للوحدات (SI) تقاس المسافة بالمتر ، والكتلة بالكيلو غرام ، والزمن بالثانية ، القوة بالنيوتن والشحنة بالكولومب (البديل الثاني) وعليه ان الثابت K يساوي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ وقانون كولومب يكتب بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\,\mathbf{r}_{12} \quad (\text{newtons}) \qquad (1.4)$$

وهذا يعني ان القوة بين جسمين يحمل كل منهما شحنة مقدارها واحد كولومب وتفصل بينهما مسافة واحد متر هي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ نيوتن. وتم ادخال العامل 4π لتبسيط شكل بعض العلاقات المهمة في النظرية الكهرومغناطيسية (electromagnetic theory) حيث ان في اشتقاق مختلف الصيغ والمعادلات نتعامل على الاغلب مع الاشكال الكروية لذلك سيكون من المفيد جداً استخدام ثابت يحتوي على الحد 4π. اما الثابت ϵ_0 فيساوي :

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coulomb}^2 \text{ newton}^{-1} \text{ metre}^{-2} \qquad (1.5)$$

وهـذا مـايسمى بسماحيـة الفضــاء الحر (Permittivity of free space) اي النظـامين سنستخـدم ؟ قـد يرى بعضهم استخـدام نظـام كاوسيـان سيكـون افضـل حيث تكـون قيمـة الثـابت K في هـذا النظـام تساوي واحـداً والعلاقـة الرابطـة بين القوة والشحنـات تكـون نسبيـاً ابسـط، ولكن اذا تبنينـا هـذا النظـام فـان التيـار الكهربـائي سيقـاس بـوحـدة غير متقنـة الصنـع ($\frac{1}{3 \times 10^9}$ أمبير). امـا اذا استبعـدنـا الثـابت K من المعادلة (1-1) وذلـك بـاختيـار وحـدات اخرى فـانـه سيظهر في امكنـة اخرى بـاشكال مختلفـة وهكـذا نرى ان النظـامين جيـدان فـايها نختـار ؟ على كل حـال بـالنظر لكون اجهزة القيـاس العـالمية مُعيَّرة بموجب النظـام العـالمي للوحـدات (SI) فـاننـا سنستخـدم هـذا النظـام في كتـابنـا هـذا. مـادام قـانـون كـولـومب مبنيـاً اسـاسـاً على التجربـة ، ويتبـادر الى الـذهن سؤال وهو هل تتنـاسب القوة عكسيـاً مع مربـع المسـافـة بـالضبـط اي اذا كانت القوة تتناسب مع $\frac{1}{r^n}$ فهل ان $n = 2$ تماماً؟.

بين كافنـــــدش (Cavendish) ان n=2+0.02 بليمتن ولـوتن (Plimton and Lawton سنـة 1936) وجـد ان n تختلف عن 2 بمقـدار لايـزيـد على جـزء واحـد من 10^9 ،بعـد ذلـك اثبت كل من لامب (Lamp) ورذر فورد (Rutherford) سنـة 1947 خلال قياسـاتها لمستـويـات الطـاقـة في ذرة الهيـدروجين ان الأس المستخـدم في قـانـون كولومب صحيح لغاية جزء من 10^9 في مسافة تصل 10^{10} متر.

الـدليـل من الفيزيـاء النـوويـة يبين ان القـوة الكهربـائيـة المستقرة تتبـايـن تقريبـاً طبقـاً لقـانـون التربيـع العكسي لكـولـومب حتى في المسـافـات الصغيرة التي تصـل الى 10^{-15} متر. فيا يخصنا نحن فـاننـا نستخـدم قـانون التربيع العكسي بثقـة تـامـة. تجـدر الاشارة هنـا الى ان البنـاء المنطقي للنظريـة الكهرومغنـاطيسيـة الـذي هو منهـاج هـذا الكتـاب يعتمـد على قوانين هي محصلـة تجارب محصنـة كقـانون كولـومب هـذا وتكـون تقريبية ايضاً لكنها في النهاية تقودنا الى نتائج سليمة تماماً.

ويلاحـظ وجود تشـابـه كبير جـدا بين قـانـون كـولـومب وقـانـون نيـوتن للجـاذبيـة (Newtons' law of gravitation) الذي يكتب رياضياً بالشكل الآتي :

$$F = \lambda_g \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث λ_g هو ثابت تناسب الجاذبية.

ولكن قوة الكهربائية المستقرة اكبر بكثير من قوة التجـاذب التثاقلي فعلى سبيل المثال لو قارنا قوة التنـافر الكهربـائي بين الكترونين نتيجـة شحنتهما المتشـابهـة بموجب قانون كولومب وقوة التجاذب التثاقلي بين كتلتيهما حسب قانون نيوتن تبين هذا الفرق بصورة جلية

$$\frac{\text{Electrostatic repulsion}}{\text{Gravitational attraction}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}\cdot\frac{r^2}{\lambda_g m^2}$$

$$=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\lambda_g m^2}=9\times10^9\times\frac{(1.60\times10^{-19})^2}{(6.67\times10^{-11})\times(9.1\times10^{-31})^2}$$

$$=4.17\times10^{42} \qquad \left(\because\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9\times10^9\right)$$

وهكذا نجد ان قوة الكهربائية المستقرة اكبر بهذا المقدار من قوة التجاذب التثاقلي ومع ذلك فنحن عادة لانلاحظ هذه القوة الكهربائية المستقرة.

مثـــال (1-1) : في تجربـــة الاستطـــارة لرذر فـورد (Rutherford scattering experiment) تم قصف نوى الـذهب بجسيمـات الفا (α- particles) ذات طـاقـة كافيـة لايصالها الى مسافة 2×10^{14} متر من النواة. جد قوة التنافر الكهربائي المستقر المتولـد من جسيمات الفا .

الحل :

شحنة نواة الذهــب هي (79e) وشحنة جسيمة الفا هي (2e) حيث (e) هي شحنـة الالكترون لذلك تحسب القوة المتولدة كما يلي :

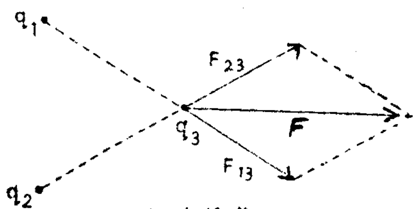
$$\therefore F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\frac{2\times79\times e^2}{(2\times10^{-14})^2}$$

$$=91.2\ \text{newtons.}$$

1-2 مبدأ التراكب (Principle of Superposition)

اذا وجد اكثر من جسمين مشحونين في منطقة معينة فان القوة الكلية المسلطة على جسيم واحد منها تساوي المجموع الاتجاهي (Vector sum) للقوى الناتجة على كل من الجسيمات الاخرى كل على انفراد. وهذا هو مايسمى (بمبدأ التراكب). على سبيل المثال نلاحظ في الشكل (2-1) وجود ثلاث شحنات هي q_1 ، q_2 ، q_3 فان القوة المسلطة على الشحنة q_3 مثلاً تحسب بموجب هذا المبدأ على النحو الآتي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_{13}|^3}\mathbf{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\mathbf{r}_{23}$$

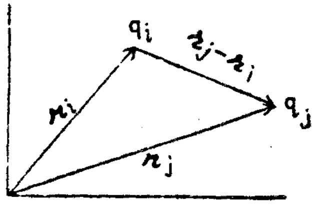


الشكل (1-2)

وبصورة عامة فان القوة المسلطة على شحنة مثل q_j من شحنات اخرى تحسب من المعادلة الآتية :

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i \neq j}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3}\mathbf{r}_{ij} \qquad (1.6)$$

وغالباً ماتكتب المعادلة السابقة بصيغة المتجهات فلو كانت r_i ، r_j (الشكل 3-1) متجهين يمثلان موقع كل من الشحنة q_i ، q_j على التوالي فان المعادلة (6-1) تصبح بالشكل الآتي :



الشكل (1-3)

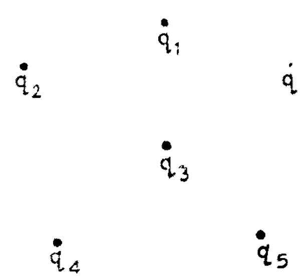
$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i \neq j}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \qquad (1.7)$$

ان مبدأ التراكب قد سهل بدرجة كبيرة المعالجة الرياضية للنظرية. ويفشل المبدأ في التأثيرات التبادلية النووية (Nuclear interactions) وهذا احد اسباب كون النظرية النووية (nuclear theory) اكثر اثارة للمتاعب بعض الشيء من نظرية التأثيرات التبادلية الذرية (the theory of atomic interactions)

1-3 المجال الكهربائي (Electric Field) : -

ان لادخال فكرة المجال فائدة عظيمة في حل المشاكل الفيزياوية. وتتنوع انواع المجال كتنوع الكميات الفيزياوية والرياضية في مسألة معينة وربما نجد في وقت واحد ثلاثة انواع من المجال (المتجه Vector،غير المتجه scalar،وكمية ممتدة tensor) في الفضاء الاعتيادي للفيزياء القديمة ذي الابعاد الثلاثة ومجالات متجهة رباعية الابعاد (Four dimentional vector fields) في الفضاء ذي الابعاد الاربعة الخاص بالنظرية النسبية (space - time domain of relativity theory) وفيما يخص دراستنا للكهرومغناطيسية القديمة سنتناول المجال المتجه وغير المتجه في الفضاء ثلاثي الابعاد.

ان الفضاء الذي تؤثر فيه القوى الكهربائية المستقرة يسمى بالمجال الكهربائي المستقر وهذا يعتبر تفسيراً نوعياً للمجال ، ولتفسير المجال كمياً نفرض ان هناك عدة شحنات موزعة في الفضاء وكما هو مبين في الشكل (4-1) .



الشكل (4-1)

الآن ماهو المجال الناتج عن وجود هذه الشحنات في نقطة مثل P فيها شحنة صغيرة جداً (q_0) تسمى شحنة اختبارية (test charge) لاتؤثر في مواصفات المجال. ويمكن الغاء القوة الناتجة عنها والمؤثرة في باقي الشحنات. اما القوة المؤثرة في هذه الشحنة في النقطة P فهي :

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_0 q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i) \qquad (1.8)$$

حيث ان r_0 هو متجه موقع نقطة P وان r_i متجه يمثل مواقع باقي الشحنات. اما القوة لكل وحدة شحنة والمؤثرة في الشحنة الاختبارية في النقطة P تكون :

$$\frac{\mathbf{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)$$

ونظراً لكون الشحنة q_0 لاتغير في مواصفات المجال لصغرها المتناهي (علماً انه لايمكن ذلك عملياً) فان المجال الكهربائي يكون حسب المعادلة الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i) \qquad (1.9)$$

ان شدة هذا المجال $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ تسمى شدة المجال الكهربائي (electric field intensity).
من تعريف المجال الكهربائي نجد ان القوة المسلطة على شحنة مثل q موضوعة في مجال كهربائي E تكون

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} \qquad (1.10)$$

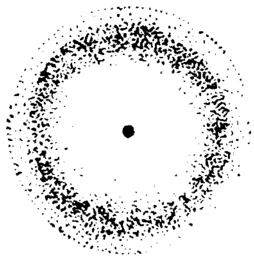
المجال الكهربائي E(r) يعتبر دالة للمكان او الموضع وهو بحد ذاته متجه (vector) ايضاً لذا فان المجال الكهربائي هو مجال متجه او قيمة متجهة. لو تفحصنا المعادلة (9–1) لقيمة المجال E (r) جيداً نرى ان المجال في نقطة معينة والناتج من وجود عدة شحنات هو المجموع الاتجاهي (Vector sum) لمجال كل شحنة على انفراد عدا الشحنة الموجودة في النقطة التي يحسب فيها المجال الكلي. ونشير هنا انه عند حساب المجال الكهربائي في نقطة معينة يجب عدم ادخال اي شحنة موجودة في هذه النقطة في الحساب عدا ماسميناه بالشحنة الاختبارية وبخلاف ذلك فان الزيادة الحاصلة في المجال نتيجة احتساب هذه الشحنة سيكون مالانهاية عند استخدام قانون التربيع العكسي لكون (r=o) في النقطة المذكورة وبذلك تنتفي فائدة قوانين هذه النظرية ، لذلك فان ادخال مصطلح مثل شحنة نقطية (point charge) سيكون مفيداً جداً في دراستنا للمجال وهو مانقصد به حيزاً صغيراً جداً من الجسيمات المشحونة وذلك لأن القياسات والمسافات التي نتعامل بها في الحقيقة ليست بدقة وصغر القياسات داخل الذرة مثلاً ، اما اذا اخذنا المعنى المثالي لكلمة نقطية باعتبارها اصغر حيز ممكن حتى لو كان الكتروناً مثلاً فان هذا له حجم محدد ايضاً تتوزع فيه الشحنة.

اذا لم تكن الشحنة محددة في نقطة معينة وانما موزعة على حجم محدد في الفضاء بشكل يجعلها منتشرة في كافة ارجاء هذا الحجم بانتظام يدخل مصطلح آخر وهو كثافة الشحنة (charge density) ونعني به كمية الشحنة الموجودة في وحدة الحجم (charge per unit volume) وكثافة الشحنة الحجمية (ρ) تعرف كالآتي :

$$\rho = \lim_{V \to 0} \left(\frac{Q}{V} \right) \qquad (1.11)$$

ولنأخذ مثالاً هو توزيع الشحنة في ذرة الهيدروجين من المعروف ان الالكترون جسيم مشحون يدور بسرعة فائقة حول النواة لذلك يصعب تحديد موقعه بالضبط ويكون من الافضل في هذه الحالة اعتبار شحنته سحابة حول النواة كما في الشكل (1-5) فاذا كانت كثافة الشحنة في نقطة يحدد موقعها المتجه r هي ρ(r) والشحنة الموجودة في حجم معين dτ تكون $\rho d\tau$ فان الشحنة الكلية في الذرة تكون:

$$\int \rho(\mathbf{r}) d\tau = -e \qquad (1.12)$$



الشكل (1.5)

ان كثافة الشحنة هي ايضاً دالة للمكان او الموضع ولكنها كمية غير متجه (Scalar quantity، وكذلك المجال الناتج عنها.

في حالة توزيع الشحنة أو إنتشارها في حجم محدد بشكل منتظم يحسب المجال الكهربائي كالآتي :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}\ d\tau \qquad (1.13)$$

ان أ نتشار أو توزيع الشحنة في سطح معين تسمى كثافة الشحنة في هذه الحالة بالكثافة السطحية للشحنة (Surface charge density)وتعني كمية الشحنة لوحدة المساحة (charge per unit area) ويرمز لها بالرمز $\sigma(r)$ وفي هذه الحالة يكون المجال؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r})\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}\ dS \qquad (1.14)$$

حيث ان dS تمثل عنصراً من المساحة (element of area) اذا ماأنتشرت أو توزعت الشحنة على خط معين تسمى بالكثافة الخطية للشحنة (linear charge density) وتعني كية الشحنة لوحدة الطول (charge per unit length) ويرمز لها بالرمز $\lambda(r)$ ويكون المجال الكهربائي لهذه الحالة كالاتي :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(r)\,(r - r_i)}{|r - r_i|^3}\, dl \qquad (1.15)$$

حيث ان dl يمثل عنصراً من الطول (element of length).

في بعض الاحيان يكون من الافضل أن نتصور أن الشحنة النقطية (Point charge) متكونة من عدة شحنات صغيرة جداً موزعة في هذه النقطة وهذا ممكن بمساعدة دالة دلتا لديراك $\delta(r - r_i)$ (Dirac delta function) والتي تمتاز بمايلي :

(i) $\delta(r - r_i) = 0$ for $r \neq r_i$ عندما تكون $r \neq r_i$. (1.16)

(ii) $\int\delta(r - r_i)\, d\tau = 1$ اذا كان الحيز يتضمن $r = r_i$. (1.17)

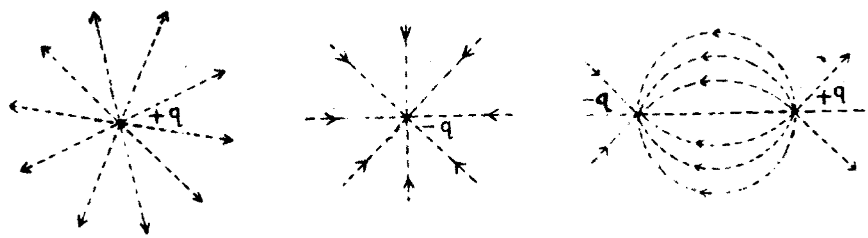
$= 0$ في الحالات الاخرى

(iii) $\int_V f(r_i)\,\delta(r - r_i) d\tau = f(r)$ (1.18)

عند أجراء التكامل نجد ان $\rho(r)$ تمثل توزيع الشحنة وتساوي صفراً في كل ارجاء الفضاء عدا النقطة التي يكون متجه موقعها هو r' والشحنة الكلية فيها تساوي q' ولذلك فهي تمثل شحنة نقطية مقدارها q' وموجودة في النقطة التي يحدد موقعها المتجه r^1.

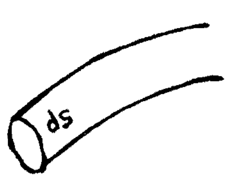
1-4 خطوط وأنابيب القوى (Lines and Tubes of Forces) :-

الخطوط المستمرة المرسومة بشكل تكون فيه موازيه دائماً لاتجاه المجال تسمى خطوط القوة أو خطوط المجال (lines of force or field lines) لذلك فان خط القوة هو ذلك المنحني في المجال الكهربائي الذي يمثل مماسه في اي نقطة إتجاه المجال الكهربائي فيها وبما ان إتجاه المجال واحد دائماً في أي نقطة لذلك يوجد عادة خط قوة واحد فقط يمر في نقطة محددة وهذا يعني أيضاً ان خطوط القوة لاتتقاطع. يرينا الشكل (6-1) خطوط القوة حول شحنة نقطية ، وخطوط القوة بالقرب من شحنتين متجاورتين متساويتين بالمقدار إحداهما موجبه والاخرى سالبة .



الشكل (6 ـ 1)

لمعرفة ماهية أنابيب القوة (Tube of force) نفرض ان عنصر مساحة (element of area) موجود في مجال كهربائي وهو في الصفر بحيث أن الشدة الكهربائية (electric intensity) متساوية المقدار والاتجاه في أي نقطة من مساحته لذا تكون خطوط القوة في اي نقطة من مسافاته متوازية تقريباً ومكونة سطحاً انبوبياً يسمى انبوب القوة (Tube of force) والمقطع العرضي العمودي لانبوب القوة هو جزء من سطح متساوي الجهد كما في الشكل (7 ـ 1) .



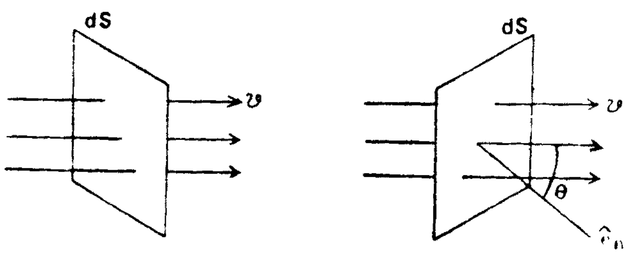
الشكل (7 ـ 1)

5 ـ 1 الدفق (الفيض) الكهربائي (Electric Flux) : ــ

لو فرضنا ان مائعاً يجري عمودياً على سطح مستوي صغير مساحتـه dS وبسرعـة مقدارها v كما في الشكل (1–8B). فالمعـدل الزمني لعبور كميـة من المـائع خلال السطح يسمى دفق (فيض) المائع (flux of the fluid) ويساوي v dS . امـا اذا كان عبور المـائع ليس بشكل عمودي وانما بخط مائل ويشكل مع الخط العمودي زاويـه لتكن θ مثلاً (كما في الشكل (B 8 ـ 1) فإن الدفق (الفيض) في هذه الحالة يساوي :

$$F = vdS \cos \theta \qquad (1.20)$$

حيث أن F هو رمز الدفق ds



(a) (b)

الشكل (1-8)

لو اردنا التعبير عن الفيض رياضيا بصيغة المتجهات نفرض ان متجه السطح المستوي هو $\hat{e}_n ds$ قيمته ds واتجاهه بمحاذاة المستقيم العمودي على السطح و $\hat{e}_n$ هو وحدة المتجـه (Unit Vector) في هذا الاتجاه، فان الفيض يكون :

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (1.21)$$

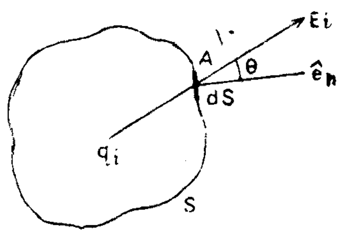
في الواقع لايوجد شيء متحرك في المجال اكهربائي المستقر (electrostatic field) الا انه رياضياً يمكن تشبيهه كياً بفيض المائع، ويسمى الفيض الكهربائي (electric flux) ويعرف كالآتي :

$$\text{Electric flux} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (1.22)$$

1-6 قانون كاوس (الصيغة التكاملية) (Gauss Law (integral form)) :-

ان العلاقة السابقة (22-1) تقودنا الى قانون مهم في الكهربائية المستقرة يربط بين الدفق (الفيض) الموجود في سطح مغلق والمقدار الصافي للشحنة في هذا السطح.

نفرض ان سطحاً مغلقاً هو S يحيط بشحنة هي q_1 (الشكل 9 ـ 1) ولتكن dS عنصر مساحة في نقطة A على السطح و $\hat{e}_n$ وحدة المتجه خارجة عمودية عليها. والزاوية المحصورة بين المجال الكهربائي في نقطة A والمتجه $\hat{e}_n$ هي θ .



الشكل (1-9)

فان الدفق (الفيض) خلال عنصر المساحة dS يكون :

$$dF = \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = E_i \cos\theta \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} \cos\theta \, dS$$

حيث ان (r) هي المسافة بين عنصر المساحة dS والشحنة q_i والزاوية المجسمة المتكونة من dS في نقطة A هي $d\ \Omega$ وتساوي $\frac{dS\cos\theta}{r^2}$.

$$dF = \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i d\Omega \qquad (1.23)$$

وعليه فان الدفق (الفيض) في كل اجزاء السطح S يحسب بالتكامل الآتي :

$$F = \int_S \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \int d\Omega = \frac{q_i}{\epsilon_0} \qquad (1.24)$$

اما اذا كان توزيع الشحنات داخل السطح اعتباطياً فان الدفق (الفيض) يحسب اعتماداً على مبدأ التراكب (principle of superposition) كالآتي :

$$\mathbf{E} = \Sigma\ \mathbf{E}_i$$

ومن ثم تكون:

$$\int_S \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \Sigma q_i/\epsilon_0 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad (1.25)$$

حيث Q هي مقدار الشحنة الكلية الموجودة داخل السطح المغلق.

اما اذا كان توزيع الشحنة بصورة مستمرة (continuous distribution of charge) فان العلاقة السابقة (1-25) تصبح بالشكل الآتي :

$$\int_S \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau \qquad (1.26)$$

الآن سنحسب الدفق (الفيض) في حالة وجود الشحنة q_i خارج السطح المغلق S وكما هو موضح في الشكل (10-1).

نرسم مخروطاً رأسه في نقطة q_i ويقطع السطح المغلق S في نقطتين عند دخوله وخروجه مكوناً عنصري مساحة هما dS_1 و dS_2 كما في الشكل (10-1) فاذا كان $\hat{e}_{n_1}$ و e_{n_2} هما متجهين خارجيين عموديان على عنصري المساحة. فان متجه المجال الكهربائي المار خلال هذين العنصرين في نقطة q_i سيكون زاويتين مع المتجهين المذكورين هما θ_1 و θ_2 على التوالي.

الدفق (الفيض) الصافي الخارج خلال عنصري المساحة يكون:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_1^2}\cos(180+\theta_1)\,dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_2^2}\cos\theta_2\,dS_2$$

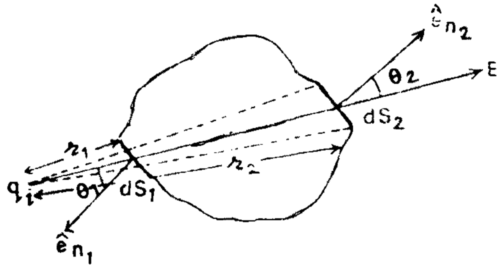
حيث ان r_1 و r_2 هما المسافات بين عنصري المساحة dS_1 و dS_2 والشحنة q_i.

$$\therefore \quad dF = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\cos\theta_1 dS_1}{r_1^2} + \frac{\cos\theta_2 dS_2}{r_2^2}\right)$$

بما ان الزاوية الجسمة المتكونة من عنصري المساحة في q_i هي نفسها (لكون نفس المخروط قطع عنصري المساحة) اي ان :

$$\frac{\cos\theta_1 dS_1}{r_1^2} = \frac{\cos\theta_2 dS_2}{r_2^2} = d\Omega$$

$$dF = 0$$



الشكل (1.10)

وبما ان هذا ينطبق على كافة الخاريط المرسومة من نقطة q_i التي تغطي كل السطح المغلق فان الدفق (الفيض) الكلي يكون صفراً ايضاً. وهذه النتيجة في الحقيقة تمثل مايعرف بقانون كاوس الذي ينص على ان :

الدفق (الفيض) الكلي الخارج من سطح مغلق مثل S موجود في مجال كهربائي يساوي احد مقدارين هما اما :

$$\int \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{عندما تكون الشحنة داخل السطح المغلق.} \qquad (1.27)$$
$$= 0 \quad \text{او عندما تكون الشحنة خارج السطح المغلق.}$$

وهذا مايعرف ايضاً بالصيغة التكاملية لقانون كاوس.

1-7 قانون كاوس (الصيغة التفاضلية) Gauss' law (:Differential form) :-

يمكن صياغة قانون كاوس بطريقة تفاضلية وكما سيوضح الآن :

نعرف في حساب المتجهات ان تباعد متجه مثل A (divergence of a vector A) تحسب كما في المعادلة الآتية :

$$\text{div}\ \mathbf{A} = \lim_{d\tau\to 0}\frac{\int_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS}{d\tau} \qquad (1.28)$$

حيث S تمثل السطح المتضمن لعنصر الحجم وبتكامل المعادلة اعلاه لحجم محدد نحصل على :

$$\int_V \text{div}\ \mathbf{A}\,d\tau = \int_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS \qquad (1.29)$$

وهـذا يعرف ببرهنـة التبـاعـد (divergence theorem) المستخـدمـة عـادة في تحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي او بـالعكس. وبـاستخـدامهـا هنـا نستطيع صيـاغـة قانون كاوس كالآتي :

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho d\tau$$

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0)\, d\tau = 0$$

وهذا يصح لأي حجم كان :

$$\therefore \quad \operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0 = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad (1.30)$$

وهذه تعتبر الصيغة التفاضلية لقانون كاوس.

ان قانون كولومب اعتبر من القوانين الاساسية في الكهربـائيـة وقـانون تحصيل لقـانون كولومب القـاضي بـأن القـوة تتنـاسب عكسيـاً مـع مربع المسـافـة المحصـورة بين جسمين مشحـونين. أن اختيـار اي قـانـون عكس اخر غير التربيـع مثـل $\frac{1}{r^n}$. حيث ان $n \neq 2$ لايؤدي الى تحصيل قـانون كاوس (لمـاذا ؟) لـذلـك اعتبر هـذا القـانون ايضـاً من القوانين الاساسية في الكهربائية المستقرة.

1-8 بعض التطبيقات لقانون كاوس (Some Applications of Gauss Law) :-

رأينا ان الشحنة داخل سطح كاوسيان (Gaussian surface) هي التي تحـدد الـدفق (الفيض) الكهربـائي خلال هـذا السطـح. اذا كان تـوزيـع الشحنـة في السطـح تـوزيعـاً متناظراً بسيطاً (simple symmetry) فيمكن حسـاب المجـال الكهربـائي بتطبيق قـانون كاوس بصورة بسيطة وسيتم شرح بعض الامثلة المفيدة بهذا الخصوص.

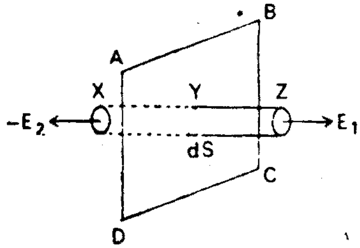
١) المجال الناتج من طبقة لانهائية من الشحنات الموجبة ذات كثافة سطحية منتظمة:

(The field due to an infinite Layer of positive charge with uniform surface density)

نفرض ان ABCD هو مستو متناظر كما هو موضح في الشكل (11-1) لكون المستوي متناظراً فان خطوط المجال جميعها متعامدة على المستوي. لو فرضنا ان اسطوانة مثل XYZ مساحة مقطعها العرضي يساوي dS تخترق المستوي كما هو مبين في الشكل(11-1) وبتطبيق قانون كاوس نحصل على :

$$(E_1 - E_2)dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (1,31)$$

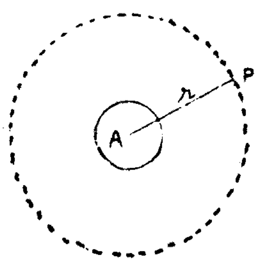


الشكل (1.11)

هذا هو تغير المجال E عبر الطبقة المشحونة والتغير يساوي $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

2) المجال خارج كرة مشحونة ومعزولة (The field outside an isolated charged sphere) :

لو فرضنا ان A هي كرة مملوءة بشحنات موزعة بانتظام (الشكل 12-1) فما هو المجال الناتج من الكرة في نقطة خارجها مثل P؟



الشكل (1.12)

نفرض ان هناك سطحاً كروياً له نفس مركز الكرة المشحونة ويمر بالنقطة P ونصف قطرها r فتكون مساحتها $4\pi r^2$. ونتيجة التناظر تكون شدة المجال الكهربائي E هي نفسها في جميع نقاط السطح والدفق (الفيض) الخارج خلال السطح يكون :

$$\int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \text{(قانون كاوس)}$$

حيث ان Q هو مقدار الشحنة الكلية في الكرة.

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad (1.32)$$

والمجال الناتج من شحنة نقطية موجودة في مركز الكرة هو نفس المجال المحسوب في المعادلة (1-32) اذا كانت الشحنة موزعة بصورة مستمرة (continuous charge distribution) داخل الكرة :

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

حيث a هو نصف قطر الكرة و ρ هي كثافة الشحنة لذلك :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi a^3 \rho}{3r^2} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \qquad (1.33)$$

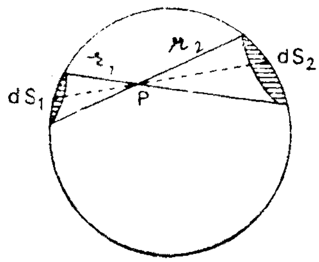
(iii) المجال الناتج من وجود شحنات على غلاف كروي

(Field due to a spherical shell of charge)

في الحالة السابقة(ii) ظهر أن المجال الناتج من وجود شحنات على السطح الخارجي لكرة هو نفسه كما لو ان الشحنة كلها كانت متمركزة في مركز الكرة ، السؤال الآن ماهو المجال في نقطة مثل P داخل الغلاف الكروي المشحون .

لو رسم مخروطان رأساهما في نقطة P ويقطعان عنصري مساحة من السطح الكروي هما dS_1 ، dS_2 كما في الشكل (1-13) ، ولتكن r_1 ، r_2 هما المسافات بين dS_1 ، dS_2 ونقطة P على التوالي.

فاذا كانت كثافة الشحنة السطحية هي σ فان المجال الكهربائي الناتج من عنصري المساحة يكون $\sigma dS_1/r_1^2$ و $\sigma dS_2/r_2^2$ ويؤثران باتجاهين متعاكسين وبما ان : $\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega$ (الزاوية المجسمة المتكونة في P من عنصري المساحة).

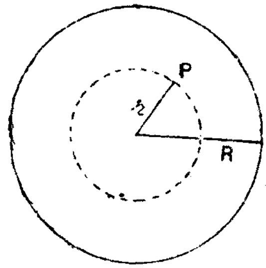


الشكل (1-13)

هكذا يظهر ان المجال الناتج من عنصر مساحة dS يلغي المجال الناتج من عنصر المساحة المقابل له لانه يساويه في المقدار ويعاكسه في الاتجاه ، وبنفس الطريقة يمكن ان نستنتج ان كل عنصر مساحة في اي نقطة من السطح يلغي مجال عنصر المساحة المقابل له وتكون النتيجة عدم وجود اي مجال كهربائي في نقطة P ، اي ان المجال يساوي صفراً.

2) المجال في نقطة مثل P تقع داخل كرة نصف قطرها R مشحونة بانتظام.

(The field at a point inside a uniformly charged sphere of radius R) لتكن r هي المسافة بين نقطة P ومركز الكرة (الشكل 1-14) كما في المثال السابق نفرض ان هناك كرة اخرى داخل الكرة المشحونة تمر بالنقطة P. ان المجال الناتج من الحلقة



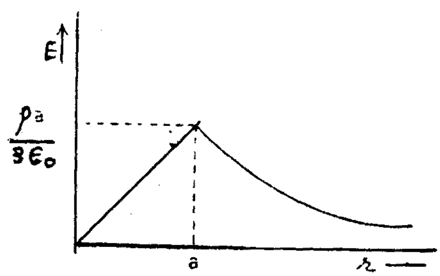
الشكل (1-14)

المتكونة بين الكرتين والتي سمكها (R-r) لايضيف اي شيء للمجال في نقطة P لانها واقعة على سطح الكرة الداخلية (الحالة 3) ، اذا كان المجال في نقطة P هو E. فان الدفق (الفيض) خلال السطح الكروي المار بنقطة P يكون :

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0}\,\frac{4\pi r^3 \rho}{3} \qquad \text{قانون كاوس}$$

$$\therefore \quad E = \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \qquad (1.34)$$

نلاحظ ان المعادلتين 33-1 و 34-1 متشابهتان عندما تتساوى r و a ويرينا الشكل (15-1) منحني تغير المجال داخل وخارج كرة نصف قطرها يساوي a.



الشكل (1-15)

V) اسطوانة مشحونة بانتظام لانهائية الطول (Uniformly charged infinite cylinder)

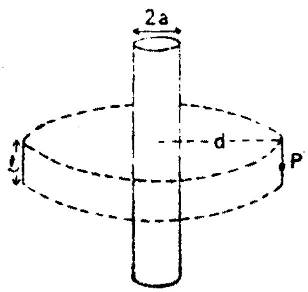
نفرض ان اسطوانة مشحونة طولها لانهائي ونصف قطرها a كما في الشكل (16-1).

لحساب المجال في نقطة مثل P تبعد مسافة d عن محور الاسطوانة ، نتصور ان هناك سطحاً اسطوانياً مغلقاً له نفس محور الاسطوانة الاولى ويمر بالنقطة P. يمكن بسهولة من نتيجة التناظر معرفة ان خطوط المجال تتجه عمودياً على المحور نحو الخارج وتكون قيمة المجال نفسها في كل النقاط التي لها نفس بعد النقطة P عن المحور. اذا كان سمك الاسطوانة المارة بنقطة P هو L فان الدفق (الفيض) خلاله يكون $2\pi dlE$. علماً انه لايتكون اي مجال في القاعدتين لأن المجال E يكون مماساً لهما وبتطبيق قانون كاوس نحصل على :

$$2\pi dlE = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

حيث λ هو مقدار الشحنة لوحدة الطول.

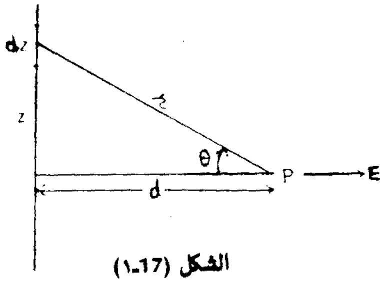
$$\therefore \quad E = \frac{\lambda}{2\pi d\epsilon_0} \qquad (1.35)$$



الشكل (1.16)

يلاحظ هنا ان مقدار المجال لايعتمد على نصف قطر الاسطوانة المشحونة لذلك فان هذا القانون يصبح حتى لو كانت الشحنة موزعة على خط مستقيم. يمكن الوصول الى نفس النتائج بطريقة التكامل المباشر وكما يلي :

نفرض ان خيطاً رفيعاً (filament) طوله لانهائي وكثافة شحنته الخطية هي λ كولومب / متر (الشكل 17-1) فالمجال الناتج من عنصر صغير من الخيط dz في نقطة مثل P هو :



$$dE_d = \frac{\lambda dz \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

الشكل (1-17)

فرضنا في هذه الحالة ان محور الخيط ينطبق على المحور(Z - axis) فاذا كانت نقطة P تبعد عمودياً عن محور الخيط مسافة مثل d وعن عنصر الخيط dZ مسافة r ، فان المجال الكلي يحسب من المعادلة الآتية :

$$E_d = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\theta}{r^2}\, dz$$

Since $z = d\tan\theta$ and $r = d\sec\theta$

$$E_d = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{d}\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Vi) المجال بين كرتين متحدتي المركز لهما شحنات متساوية بالمقدار ومتعاكسة بالاشارة.

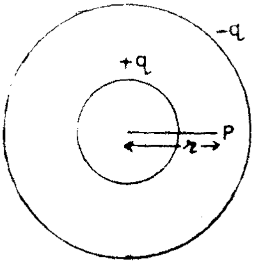
(Field between two concentric spheres which have equal and opposite charges)

لمعرفة المجال في هذه الحالة نفرض ان هناك سطح كاوسياني رسم خلال نقطة p الشكل (1-18) فالمجال الناتج من الكرة الخارجية في نقطة P يكون صفراً (الفقرة (iii))

اما المجال المتكون في الكرة الداخلية فيكون :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

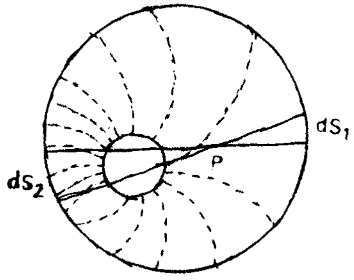
(كما هو مبين في الحالة ii)



الشكل (1-18)

مما ذكر نستنتج ان الشحنة داخل سطح كاوسياني هي التي تحدد دفق (فيض) المجال الكهربائي ويمكن حساب المجال الكهربائي بواسطة قانون كاوس عندما يكون الشكل المراد حسابه متناظراً ، اي ان مركبة المجال العمودية هي ثابتة دائماً في اي سطح من الحجم الكاوسياني. ونجد في الحالات السابقة ان المجال على السطح الكاوسياني يحدد بالشحنة الموجودة في هذا السطح.

في حالة عدم تناظر توزيع الشحنة فان المجال يحدد بالشحنات الموجودة داخل وخارج السطح الكاوسي ، لتوضيح ذلك نفرض ان هناك كرتين مشحونتين غير متحدتي المركز كما في الشكل (19-1) فاذا رسم مخروط رأسه في نقطة P فانه سيقطع عنصري مساحة من سطح الكرة الخارجية هما dS_1 ، dS_2 وبما ان كثافة الشحنة غير متساوية على عنصري السطح $dE_1 > dE_2$ فان اختلاف المساحة هذا يولد مجالاً مقداره dE بالاتجاه السالب لمحور السينات في نقطة P ، واذا تم حساب المجال لكافة السطح بنفس الطريقة سنجد ان هناك مجالاً مقداره E_- بالاتجاه السالب لمحور السينات في نقطة P ، في حين تولد الكرة الداخلية مجالاً مقداره E_+ وعليه يكون المجال الكلي في نقطة P هو $E = E_+ + E_-$.



الشكل (1-19)

9-1 مبرهنـــة مفيـــدة في الكهربـــائيـــة المستقرة (A useful Theorem in Electrostatic)

تم اعتبار المبرهنة الآتية من المبرهنات المهمة جداً في الكهربائيـة المستقرة التي تنص على ان :

معدل قيمة المجال الكهربائي لحجم معين من كرة مقداره V والناتج من شحنة نقطية q في موضع معين داخل هذه الكرة يحسب من المعادلة الآتية :

$$\langle E\rangle_{av} = -\frac{q r_0}{3\epsilon_0 V} \qquad (1.36)$$

البرهان : ان المجال في نقطة r يحسب في المعادلة الآتية :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right]$$

حيث r_0 تمثل موقع الشحنة ، لذلك.

$$\langle E(r)\rangle_{av} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V}\int_V \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\,d\tau$$

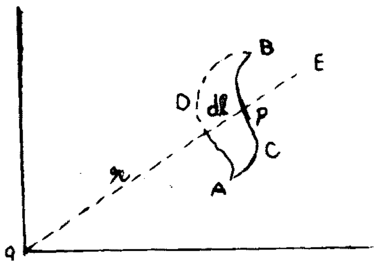
$$= -\left\{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 V}\int_V \frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|^3}\,d\tau\right\} = -\frac{q r_0}{3\epsilon_0 V}$$

الكمية بين الاقواس تعبر عن المجال في r_0 الناتج من كثافة شحنة منتظمـة هي $\frac{q}{V}$ في كرة.

10-1 الجهد الكهربائي المستقر (Electrostatic Potential) :-

ان اي شحنة اختبارية لاتتحرك داخل مجال كهربائي مستقر بعكس اتجاه القوة الموجودة فيه مالم يسلط عليها جهد خارجي والشحنة التي تتحرك بهذا الاسلوب تكتسب طاقة كهربائية او طاقة جهد (Potential energy)

لبيان ذلك نفرض ان وحدة شحنة اختبارية تم نقلها من نقطة مثل A الى نقطة B على المسار الموضح في الشكل(1-20) ضمن مجال شحنة نقطية (q). فاذا كانت الشحنة المراد نقلها والشحنة النقطية موجبتين،فان الشغل المطلوب لنقل الشحنة الاختبارية من نقطة A الى نقطة B ناتج من قوة التنافر بين الشحنتين ولحساب مقدار الشغل سنحسب كية الشغل المطلوب لتحريك الشحنة الاختبارية مسافة صغيرة جداً من الخط الواصل بين A و B مثل dl ثم عن طريق التكامل نحسب الشغل الكلي :



الشكل (1-20)

$$dW = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\hat{e}_l\, dl = \frac{q dl \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حيث r هو متجه موقع النقطة P ، والشغل الكلي المطلوب لنقل الشحنة الاختبارية من نقطة A التي تبعد مسافة r_1 عن الشحنة q الى نقطة B التي تبعد مسافة r_2 عن الشحنة q يكون :

$$W = \int_A^B \mathbf{E}\cdot\hat{e}_l\, dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \qquad (1.37)$$

نلاحظ ان عملية التكامل لاتعتمد على شكل المسار الذي تم نقل الشحنة بموجبه وانما على نهايتي المسار اي على بعدي النقطتين A و B ،وهذا يعني ان الشغل المطلوب لنقل الشحنة عبر مسار مثل ACB هو نفسه عبر المسار ADB. واي مسار آخر.

ان الشغل المنجز بواسطة القوة الكهربائية المستقرة لنقل الشحنة من نقطة Aالى نقطة B في الحقيقة يساوي مقدار الفقدان في الطاقة الكامنة لشحنة الاختبار ، اي ان

$$\text{الطاقة الكامنة في A - الطاقة الكامنة في B} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_l dl$$

والآن ماذا سيحدث لو ان هذه الشحنة عادت مرة اخرى الى نقطة A عبر اي مسار كان؟ بما ان الشغل المنجز لنقل الشحنة من نقطة A الى B يساوي مقدار الطاقة الكامنة المفقودة. فان هذا الفقدان يتم استرجاعه عند العودة الى A مرة اخرى وهذا يعني ان مقدار الشغل الصافي سيكون صفراً اي :

$$W = \int_C \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_l\, dl = 0 \qquad (1.38)$$

وهكذا نجد ان كمية الشغل الصافي المنجز على مسار مغلق (اي الذهاب الى نقطة معينة ثم العودة الى نفس نقطة الانطلاق) يساوي صفراً. والقوة التي لها ميزة عدم اداء اي شغل وبذلك فهي لاتصرف اي طاقة على مسار مغلق تسمى القوة المحافظة (Conservative force) القوة الكهربائية المستقرة قوة محافظة في حساب المتجهات يسمى تكامل المسار او التكامل الخطي (Line integral) لمتجه حول مسار او منحني مغلق بدوران او لف المجال المتجه (Circulation or the curl of the vector field) والمعادلة (1-38) توضح ان لف المجال الكهربائي هو صفر وجذور هذه المعادلة موجودة في المعادلة (1-30). فمن الامثلة الاخرى لهذا المجال هناك مجال الجاذبية الارضية (gravitational field) والمجال المغناطيسي

(magnetic field) عندما يكون في حيز حر من التيار الكهربائي. ومجال السرعة (velocity field) لجريان مائع غير مضغوط وحر من اللزوجة. ومثل هذه المجالات تسمى المجالات اللادورانية (irrotational fields).
الشغل المطلوب لنقل شحنة من نقطة في المالانهاية الى نقطة مثل r_2 يكون :

$$W = -\int_{\infty}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

وهذا يعني ان كمية الشغل المطلوب لنقل شحنة في المالانهاية الى نقطة B هو $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3}$ وعلى فرض ان الطاقة الكامنة لنقطة في المالانهاية هي صفر. فان الطاقة الكامنة في اي نقطة اخرى هي دالة لموقع هذه النقطة فقط وتسمى بالجهد الكهربائي المستقر لشحنة مثل q في نقطة تبعد عنها مسافة r ويرمز لها بالرمز Q(r).

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (1-39)$$

وبذلك فاننا نستطيع ان نحدد لأي نقطة في المجال الكهربائي جهداً كهربائياً مستقراً ذو قيمة تحسب من المعادلة اعلاه. وكل نقطة في المجال لها قيمة جهد واحدة فقط وهي دالة ذات قيمة واحدة فقط (Single - valued function) لاحداثيات اي شحنة في الفراغ ـ فاذا كان لدينا مجموعة من الشحنات النقطية ، شحنة كل منها q_j فان الجهد الناتج عنها في نقطة مثل r_i يساوي المجموع الجبري (algebraic sum) لجهد كل شحنة على انفراد اي ان :

$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (1-40)$$

وفي حالة كون الشحنة موزعة بصورة مستمرة

$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{p d\tau_j}{r_{ij}} \qquad (1.41)$$

1-11 العلاقة بين المجال والجهد (Relation between the field and potential)

لمعرفة العلاقة بين المجال الكهربائي المستقر والجهد الكهربائي المستقر نفرض ان شحنة قيمتها q موجودة في نقطة الاصل لمحور احداثيات قياسي فالمجال في نقطة تبعد عنها مسافة r يكون :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{|\mathbf{r}|^2}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

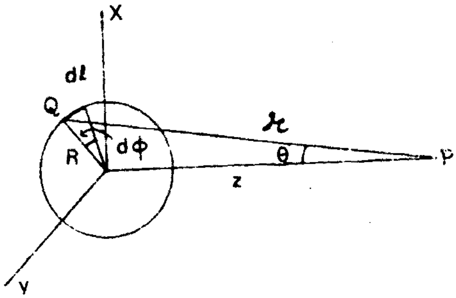
حيث $\hat{\mathbf{e}}_r$ هو متجه المجال. ونعرف ايضاً ان :

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\hat{e}_r$$

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

وهذا يعني انه بمعرفة توزيع الجهد يمكن ايجاد المجال في اي نقطة بواسطة حساب تدرج ميل مشتقة الجهد (gradient of potential). ان التعامل مع مصطلحات الجهد غالباً مايكون اسهل من المجال لكون الجهد كمية عددية (scalar quantity).

مثال (2-1) : ـ جد قيمة الجهد والمجال الناتج من حلقة من الشحنات في نقطة تقع على محور الحلقة.



الشكل (1-21)

نفرض ان كثافة الشحنة الخطية هي dL. نصف قطر الحلقة = R. لسهولة الحل سنجعل الحلقة تقع في المستوى الذي تكون فيه قيمة Z تساوي صفراً كما في الشكل (1-21).

ان قيمة الشحنة في عنصر طول صغير جداً من محيط الحلقة هو (dl) في نقطة مثل Q هو $dq = \lambda dl = \lambda R dQ$ ، والمسافة بين عنصر الطول (dl) ونقطة P المراد حساب الجهد فيها تكون :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

والجهد في نقطة P هو :

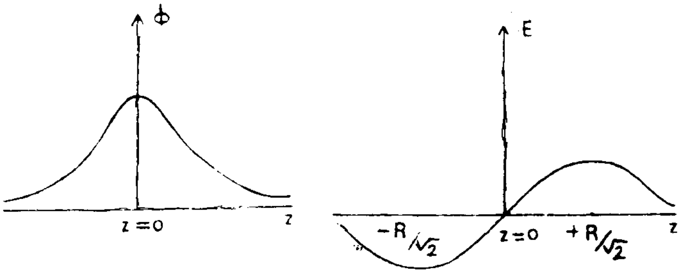
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint \frac{\lambda R d\phi}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (1.43)$$

حيث Q هو مقدار الشحنة الكلية في الحلقة وتساوي $Q = 2\pi R\lambda$, اما المجال فيحسب كالآتي :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \hat{\mathbf{e}}_z\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (1.44)$$

ومنحنى قيمة الجهد والمجال موضح في الشكل (22-1) ، a و b.



(a) (b)

الشكل (1-22)

اذا كانت $z \gg R$, Φ فان مقدار الجهد Φ والمجال E يقل بموجب المعادلات الآتية :

$$\Phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\,|z|} \qquad (1.45)$$

$$\mathbf{E} \approx \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_z\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{for} \quad z \gg R \\ -\hat{\mathbf{e}}_z\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{for} \ -z \ll -R \end{cases} \qquad (1.46)$$

يمكن الوصول الى نفس النتيجة باستخدام المعادلة (15-1) بطريقة مباشرة وهذه المعادلة يقل ناتجها اذا وضعت الحلقة في نقطة الاصل كالآتي :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda R d\phi}{(R^2+z^2)}\,\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\int_0^{2\pi}\hat{\mathbf{e}}_r\,d\phi$$

حيث ان $\hat{e}_r$ هو متجه وحدة بالاتجاه QP ويساوي :

$$\hat{e}_r = -\hat{e}_x \sin\theta\cos\phi - \hat{e}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{e}_z \cos\theta$$

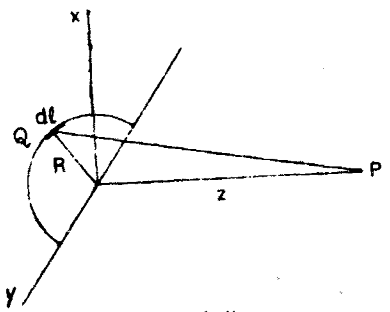
وبما ان المنظومة متناظرة حول محور X فان المجال سيتجه بمحاذاة هذا المحور فقط :

$$\therefore \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cos\theta \, d\phi$$

$$= \hat{e}_z \frac{\lambda R 2\pi \cos\theta}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} = \hat{e}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

وهذه الطريقة عملية جداً ومفضلة حيث اننا بعد ايجاد قيمة الجهد Ø نوجد المجال E الذي يساوي $-\nabla\Phi$. ولكن يجب الانتباه عند استخدامها خوفاً من عدم احتساب بعض مركبات المجال E حول محور التناظر ضمن القيمة $\nabla\Phi$ كما هو موضح في المثال الآتي :

مثال (3-1) : - جد المجال الناتج من توزيع شحنات على خط شبه دائري (semi circular) بصورة منتظمة كثافتها الخطية هي λ (الشكل 23-1).



الشكل (1.23)

سنتبع اولاً طريقة الحل المتبع في المثال السابق.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r_{QP}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi$$

$$= \frac{\lambda R\pi}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} \qquad (1.47)$$

حيث ان $\frac{Q}{2} = \pi R\lambda$. هي مقدار الشحنة الصافية في الخط شبه الدائري.

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\hat{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \hat{e}_z\frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (1.48)$$

ويظهر في الجواب ان قيمة المجال الكلي هنا يساوي نصف قيمة المجال المحسوب في المثال السابق للحلقة الكاملة واتجاهه باتجاه محور Z ايضاً.

الآن سنتبع الطريقة الثانية وذلك باستخدام المعادلة (15-1) لايجاد قيمة المجال E مباشرة.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\hat{e}_r\,\frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{e}_r d\phi$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\Big\{-\hat{e}_x\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\cos\phi\, d\phi - \hat{e}_y\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\sin\phi\, d\phi$$

$$+\hat{e}_z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\Big\{-\hat{e}_x 2\sin\theta + \hat{e}_z\pi\cos\theta\Big\}$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}\Big\{-\hat{e}_x\frac{2R}{(R^2+z^2)^{1/2}} + \hat{e}_z\pi\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\Big\}$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\Big\{-\hat{e}_x\frac{2R}{\pi} + \hat{e}_z z\Big\} \qquad (1.49)$$

نلاحظ الاختلاف الواضح بين قيمة المجال المحسوب بهذه الطريقة والطريقة السابقة (معادلة 48-1) ومعنى هذا ان خطأ قد حدث في استخدام احدى هاتين الطريقتين. هذا الخطأ هو الذي اشرنا اليه في نهاية حل المثال السابق فلو اخذنا بنظر الاعتبار صفة تناظر هذه المنظومة سنجد انه بالرغم من كون المركبة باتجاه محور Y للمجال E تساوي صفر الا انه يجب ان تكون هناك مركبة اخرى باتجاه محور X (E_X) لكون الشحنات جميعها موجبة القيمة وتقع على المستوى الذي تكون فيه قيمة X تساوي صفراً وهذه المركبة (E_X) هي سبب الخطأ لانها تدخل ضمن المعادلة (48-1) لذا فهذه المعادلة ناقصة. اما سبب عدم دخول هذه المركبة في الحساب فهو اننا عند ايجادنا لقيمة الجهد Ø نأخذ بنظر الاعتبار الشحنات الواقعة على محور Z فقط ولكننا لاعلم لدينا بالجهد الناتج من الشحنات الموجودة على محور X ومحور Y وذلك لعدم توفر بيانات كافية لدينا لاحتساب $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ و $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ لذا يكون لزاماً علينا امام احتساب قيمة الجهد في نقطة Q خارج محور Z او احتساب المجال مباشرة باستخدام المعادلة (15-1) مع الاخذ بنظر الاعتبار النتائج الفيزياوية المترتبة على وجود المجال عندما لايتم مراعاة الحالات الثلاث الخاصة المذكورة في احتساب قيمة الجهد .

12-1 علاقتان مهمتان (Two Important Relations)

لو اخذنا لف المتجهات (Curl of a vectors) في المعادلة (42-1) نجد ان :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \Phi = 0 \qquad (1.50)$$

ويمكن الوصول الى نفس النتيجة من المعادلة (48-1) بتحويل التكامل الخطي في هذه المعادلة الى تكامل سطحي وذلك باستخدام مبرهنة ستوك (Stoke's theorem) (انظر الملحق A) وكالآتي :

$$\oint_C E\, dl = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS$$

$$\therefore \quad \int_{S_f} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = 0$$

وبما ان اختيار S هو عشوائي فان $\nabla\times E = 0$ وهكذا نحصل على قانونين مهمين في الكهربائية المستقرة وهما :

$$(i) \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad (1.51)$$

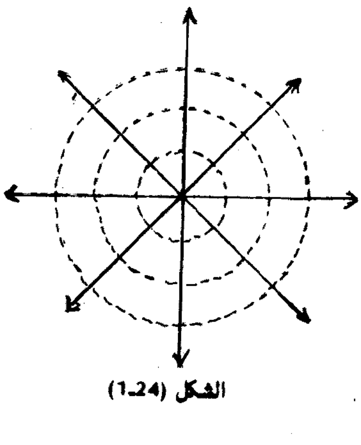
$$(ii) \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad (1.52)$$

ان المعادلة الأولى تأتي من قانون التربيع العكسي لكولومب اما المعادلة الثانية فلا تعتمد على هذا القانون ، قد تكون هناك اعتبارات اخرى تعطي هذه النتيجة على كل حال فهي تعتمد على الطبيعة المركزية للقوة (Central nature of force) وبما ان قوانين الكهرومغناطيسية تشتق من هذه القوانين لذا يمكن اعتبارها من القوانين الاساسية في الكهرومغناطيسية.

1-13 السطح المتساوي الجهد (Equipotential Surface) :-

اي سطح يتساوى الجهد في جميع نقاطه يسمى سطحاً متساوي الجهد ومعادلته تكون لذلك $\varnothing(r) = C$

حيث ان C مقدار ثابت ، وقيم الثابت C المختلفة تعطينا مجموعة او عائلة من هذه الاسطح. فعلى سبيل المثال لو كانت الشحنة نقطية فان سطحها المتساوي الجهد عبارة عن كرات مركزها هذه الشحنة كما في الشكل (1-24).



الشكل (1-24)

لـو فرضنـا ان ازاحـة مقـدارهـا dr حـدثت لاحـد الاسطـح المتسـاوية الجهـد هـذه والذي معادلته $\Phi(r) = C$ مثلاً،فماذا سيحدث؟ لكون السطح متساوي الجهد فان:

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = 0$$

اي ان :

$$\Phi(\mathbf{r}) - \left\{\Phi(\mathbf{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cdot d\mathbf{r}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\, d\mathbf{r} = 0$$

$$\nabla\Phi\cdot d\mathbf{r} = 0$$

أو :

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (1\text{-}53)$$

ومعنى هـذا اذا كانت الازاحـة ضمن السطـح فـان المجـال E سيكـون عـموديـاً على هـذا السطـح اي ان خطـوط المجـال (field lines) عـموديـة على السطـح المتسـاوي الجهد.

1-14 الطاقة الكهربالية المستقرة (Electrostatic Energy) : -

الطاقة الكهربائية المستقرة عبارة عن طاقة كامنة تنتج من الفعل او التـأثير المتبـادل بين الشحنات.

لمعرفـة طريقـة حسـاب هـذه الطـاقـة نفرض ان شحنـة مثل q_1 موجودة في نقطـة معينة في الفراغ وشحنة أخرى q_2 ثم نقلها من مالانهاية الى نقطة تبعد مسافـة r_{12} عن الشحنة q_1. ان جهـد الشحنـة q_1 في نقطـة r_{12} يسـاوي $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ وهـذه القيمـة عبارة عن مقدار الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنة من مالانهـايـة الى نقطـة معينـة، امـا الشغل المطلوب لنقل الشحنة q_2 من مالانهاية الى النقطة التي تبعد مسافة r_{12} عن q_1 هو $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ ، واذا تم اضـافـة شحنـة ثـالثـة q_3 الى هـذه المجموعة فـالشغل

المطلوب لنقلها يجب ان يعادل مجال كل من الشحنتين q_1 و q_2 فاذا كانت المسافة بين كل من هاتين الشحنتين والشحنة الثالثة هي r_{13} و r_{23} فان الزيادة في الطاقة الكامنة تكون :

$$\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

فاذا استمررنا بنفس الطريقة فان الطاقة الكلية اللازمة لتجميع كمية من الشحنات تكون :

$$W = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}}\right) + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right) + \dots$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i \sum_{j<i} \frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (1.54)$$

ان الحد $(j<i)$ وضع في المعادلة لضمان حساب كمية الطاقة المطلوبة او الشغل بين كل زوج من الشحنات مرة واحدة فقط.

ويمكن كتابة المعادلة السابقة باشكال مختلفة منها :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\tfrac{1}{2}\, q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \dots\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\tfrac{1}{2}\, q_2\left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \dots\right)$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\tfrac{1}{2}\, q_3\left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}} + \frac{q_4}{r_{34}} + \dots\right) + \dots$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\tfrac{1}{2}\sum_{i=1} q_i \sum_{j=1} \frac{q_j}{r_{ij}}; \quad i \neq j \qquad (1.55)$$

في هذه المعادلة تم احتساب الطاقة بين كل زوج مرتين لذلك فقد تم ضربها بعامل $\frac{1}{2}$ وبما ان المقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}$ ـ هو الجهد $\emptyset_i$ الناتج من جميع الشحنات عدا الموجودة في نقطة (q_i) وبالتعويض تصبح المعادلة السابقة :

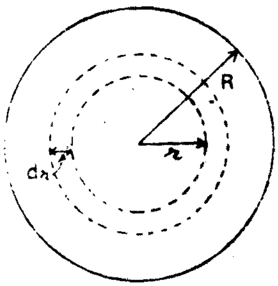
$$W = \tfrac{1}{2}\sum_i q_i \Phi_i \qquad (1.56)$$

اما اذا لم تكن الشحنات ثابتة اي كان هناك توزيع مستمر للشحنة فان الشغل المطلوب يكون :

$$W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d\tau \qquad (1\text{-}57)$$

مثال(4-1) : - جد مقدار الطاقة الكلية في كرة مشحونة بانتظام نصف قطرها يساوي R.

ان الطاقة الكلية المراد حسابها تساوي في الحقيقة كمية الشغل المطلوب لنقل الشحنات من اللانهاية الى الكرة .



الشكل (25-1)

نفرض ان هذه الكرة عبارة عن عدة طبقات رقيقة متراصفة من الشحنات. وستحسب الشغل المطلوب لتجميع او تكوين طبقة او قشرة رقيقة من الشحنات في هذه الكرة ثم بالتكامل نحسب كمية الشغل الكلي المطلوب وليكن سمك هذه الطبقة هو dr (وهي تمثل في الحقيقة كرة وليكن نصف قطرها r كما في الشكل (25-1). ان الشحنة الموجودة داخل هذه الكرة مقدارها $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. -- على فرض ان كثافة الشحنة هي ρ

ان كمية الشحنة الموجودة في سطح هذه الكرة (القشرة التي سمكها dr) يكون :

$$\therefore \quad dq = \rho \; 4\pi r^2 dr$$

والشغل المطلوب لتجميع شحنات هذه القشرة ونقلها من اللانهاية يكون :

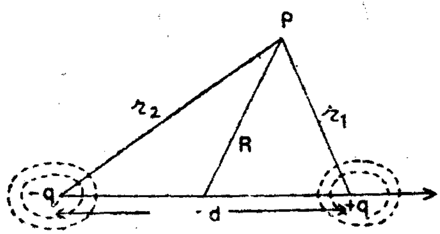
$$\begin{aligned} dW &= \text{potential at } r \times dq \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{4/3\pi r^3\rho}{r}\rho\ 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0}\ r^4 dr \end{aligned}$$

وهكذا فان الشغل الكلي المطلوب لتجميع شحنات الكرة الكبيرة كلها يكون :

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \qquad (1.58)$$

1-15 ثنائي القطب الكهربائي (Electric Dipole) :-

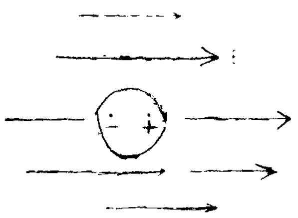
لاحظنا ان متجه الفيض الكهربائي (electric flux vector) يتجه شعاعياً الى الخارج ويمكن ايجاد قيمته بتطبيق بسيط لقانون كاوس. على كل حال اذا كان هناك اكثر من شحنة واحدة فان نموذج او شكل المجال يصبح اكثر تعقيداً. على سبيل المثال نفرض ان هناك شحنتين متساويتين في المقدار احداهما موجبة (1∓q) والاخرى سالبة تفصل بينهما مسافة صغيرة (الشكل 26-1) مثل هذه المنظومة تسمى ثنائي القطب (Dipole).



الشكل (1-26)

وغالباً ماتصادفنا مثل هذه المنظومة في الفيزياء على سبيل المثال :

i) عندما توضع ذرة او جزيئة داخل مجال كهربائي فان الشحنات الموجبة والسالبة فيها تتحرك منفصلة بعضها عن بعض تحت تأثير قوة المجال مكونة ثنائي القطب كما في الشكل (27-1) ،



الشكل (27-1)

ii) هناك بعض الجزيئات تكون شحناتها الموجبة منفصلة عن الشحنات السالبة بصورة بسيطة حتى في غياب المجال الخارجي مثل جزيئة الماء H_2O (الشكل (33-I)) وعلى الرغم من ان هذا المثال يتلاءم تماماً وتعريف ثنائي القطب، انما يمكن اعتباره كذلك في حالة دراسة المجال في المسافات الطويلة جداً.

لدراسة المجال في ثنائي القطب نفرض ان شحنتين وضعتا على محور Z احداهما على مسافة $\frac{d}{2}$ + والاخرى على مسافة $\frac{d}{2}$ - من نقطة الاصل فماذا يكون المجال نتيجة هذا التشكيل في نقطة P مثلاً ؟

اذا كانت P قريبة من الشحنتين فان الجهد يكون نفسه تقريباً كما لو ان الشحنتين كانتا منفصلتين (لاتؤثر احداهما في الاخرى) وتكون الاسطح المتساوية الجهد كروية تقريباً كما في الشكل (26-1) (لاحظ ان الشحنتين ليستا في مركزي الكرات التي تمثل الاسطح المتساوية الجهد، هل تستطيع ايضاح السبب ؟) اما اذا كانت نقطة p تبعد كثيراً عن نقطة الاصل بمسافة r فان الجهد يكون

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) \tag{1.59}$$

حيث r1 و r2 هما المسافات بين نقطة p والشحنتان q+ و q- على التوالي :

$$\text{Now } r_1^2 = R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right) R \cos\theta$$

اذا كانت θ هي الزاوية بين محور Z وقيمة الجهد في نقطة p

$$\therefore \quad r_1^2 = R^2\left\{1 + \frac{d^2}{4R^2} - \frac{d\cos\theta}{R}\right\}$$

$$\text{Hence, } \frac{1}{r_1} = \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{d^2}{4R^2} - \frac{d\cos\theta}{R}\right\}^{-1/2} = \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{d\cos\theta}{2R} \ldots\right\}$$

$$\approx \frac{1}{R} + \frac{d\cos\theta}{2R^2}$$ وبنفس الطريقة فان :

وبالتعويض في المعادلة (59-1) نحصل على :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\theta}{R^2} \qquad (1.60)$$

أن المتجه المحاذي لمحور ثنائي القطب الذي يمثل اتجاه الشحنة q- والشحنة q+ وقيمته (qd) ، يسمى عزم ثنائي القطب (dipole moment) ، ويرمز له بالحرف p.

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = pr\cos\theta = qdr\cos\theta$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \qquad (1.61)$$

نستنتج من المعادلة السابقة مايلي :

1- الجهد هنا لايعتمد على نظام الاحداثيات المستخدمة اي ان المعادلة يمكن استخدامها حتى لو كانت P لاتشير الى اتجاه محور (Z) ، نفسه .

2- الجهد هنا يتناسب مع معكوس مربع المسافة ($\frac{1}{r^2}$) لذلك يكون التغير فيه.

يمكن اعتبار جهد ثنائي القطب تدرجاً (gradient) حيث :

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

لذلك يمكن كتابة العلاقة (1-61) بالشكل الآتي :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_0. \qquad (1.62)$$

حيث ان جهد وحدة الشحنة $\emptyset_0$ يساوي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$

كلما عرف الجهد فان الجهد الكهربائي يمكن ايجاده مباشرة بأخذ تدرج الجهد $\emptyset$ ولذلك فان ثنائي القطب الذي يكون اتجاهه محاذياً لمحور Z (الشكل (1-26)) فمركبات المجال الثلاثة تكون :

$$\left.\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r\cos\theta}{r^3}\right)\\
&= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3zx}{r^5} \qquad (1.63)$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3zy}{r^5}$$

قد يكون من المفيد حساب المجال الكهربائي الناتج من ثنائي القطب الموجود في احداثيات قطبية كروية.

$$\Phi(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\therefore \quad E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} ,$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3} ,$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0 \tag{1.64}$$

اما المجال الناتج من ثنائي القطب الكهربائي فهو :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) + \left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\right)\right]$$

$$\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p} \quad \text{and} \quad \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\right) = -\frac{3\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5}$$

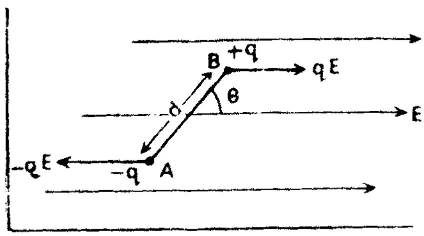
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}\right]$$

1-16 ثنائي القطب في مجال كهربائي منتظم
(Dipole in uniform electric field)

اذا وضع ثنائي قطب ذي شحنتين q - و q + تفصل بينهما مسافة مقدارها d في مجال منتظم (الشكل 28-1) فالطاقة الكامنة للثنائي تكون :

$$W = q(\Phi_B - \Phi_A) = -qd\cos\theta\, E$$
$$= -q\mathbf{d}\cdot\mathbf{E} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \qquad (1.66)$$



الشكل (1.28)

يتبين من المعادلة السابقة ان الطاقة لاتعتمد على موقع الثنائي وانما تعتمد فقط على الزاوية بين P و E (عزم الثنائي والمجال) ونستدل ايضاً على عدم وجود قوة لها تأثير في الثنائي. على كل حال بما ان المجال يظهر قوة مقدارها q E + على الشحنة q +

- q E6 - على الشحنة q - لذا يتولد مزدوج قوى (couple) نرمز له بالحرف T.

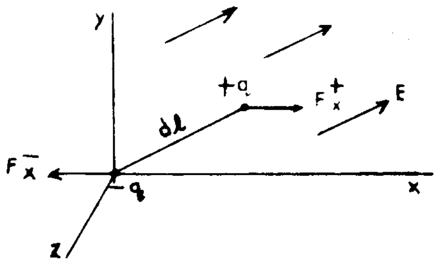
$$\mathbf{T} = -\frac{\partial W}{\partial\theta} = pE\sin\theta = \mathbf{p}\times\mathbf{E} \qquad (1.67)$$

وهذا المزدوج يحاول جعل الثنائي باتجاه موازي للمجال .

17 ـ 1 ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم
(Electric diole in a Non – uniform Electric Field) :ـ

لايجاد القوة المؤثرة على ثنائي قطب موجود في مجال كهربائي غير منتظم ، نفرض ان شحنة مقدارها q– موجودة في نقطة الاصل كما في الشكل (29–1) . القوة بالاتجاه الموجب لمحور X المسلطة على ثنائي القطب تساوي :

$$F_x^+ = q(E_x + dE_x)$$



الشكل (1ـ29)

والقوة بالاتجاه السالب لمحور X تساوي : $F_x^- = qE_x$

ومحصلة القوى بالاتجاه الموجب لمحور X تساوي .

$$F_x = qdE_x$$

وبما ان المجال غير منتظم فان :

$$dE_x = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)dz$$

$$\therefore \quad F_x = q\left(dx\frac{\partial E_x}{\partial x} + dy\frac{\partial E_x}{\partial y} + dz\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= q\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x$$

$$= q(\mathbf{l}\cdot\nabla)\,E_x = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,E_x \qquad (1.68)$$

وذلك لأن

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{e}}_x dx + \hat{\mathbf{e}}_y dy + \hat{\mathbf{e}}_z dz \quad \text{and}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد المركبات الباقية وعليه فان محصلة القوى المسلطة على ثنائي القطب تساوي :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \qquad (1.69)$$

1-18 الطاقة الكامنة المتبادلة بين اثنين من ثنائي القطب : (Mutual potential energy of two dipoles)

نفرض ان هناك ثنائي عزم الاول هو P_1 وعزم الثاني هو P_2. وليكن الثنائي الاول موضوعاً في مجال الثنائي الثاني فان الشغل يساوي :

$$W = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}) \qquad (1.70)$$

حيث E هو المجال الناتج من الثنائي الثاني ،

انظر 65-1

$$\therefore \quad W = -\left[\mathbf{p}_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}\left\{\frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} - \mathbf{p}_2\right\}\right]$$

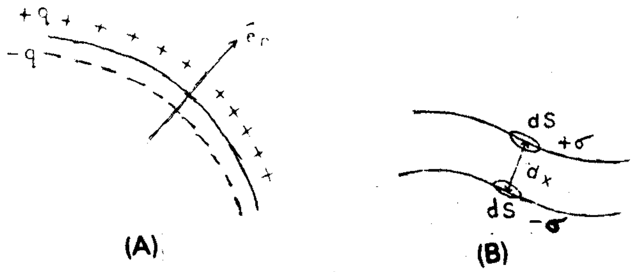
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}\left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2}\right] \qquad (1.71)$$

1-19 الطبقات المزدوجة الكهربائية (Electric Double Layers) : -

لوحظ في اثناء دراسة بعض المشاكل الحيوية والغروية وجود طبقتين من الشحنات حول سطح واحد تتكون من صفين متجاورين من شحنات متساوية في المقدار احداهما

موجبة والاخرى سالبة مفصولة بعضها عن بعض بمسافات صغيرة جداً (dX) كما في الشكل (1-30 A). ان حاصل ضرب الكثافة السطحية للشحنة σ والمسافة الفاصلة بين الطبقتين dX تسمى قوة الطبقة (Strength of the layer) ويرمز له بالحرف D.

$$D = \sigma dx$$



الشكل (1-30)

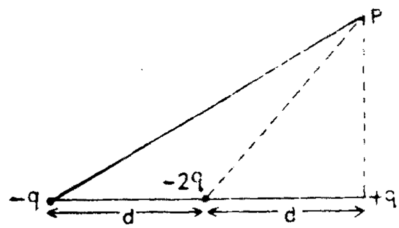
ويرينا الشكل (1-30 B) عنصري مساحة من سطحين ذوي شحنة $\pm \sigma dS$ تفصل بينهما مسافة dX وهذه في الحقيقة تمثل عزماً ثنائياً هو P ويساوي $\sigma dS\, dx$ وبالتعويض فانه يساوي DdS. ، لذلك يمكننا ان نتصور مزدوج الطبقات الكهربائي صفين متراصين من ثنائيات القطب اما اتجاه عزم الثنائي فهو عمودي على السطح وجهد مزدوج الطبقات من نقطة تبعد مسافة r يساوي :

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\hat{\mathbf{e}}_n DdS\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{D}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\hat{\mathbf{e}}_n dS\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{Dd\Omega}{4\pi\epsilon_0} \qquad (1.72)$$

حيث ان $d\Omega$ هو عنصر الزاوية المجسمة المتكونة عند النقطة من عنصر المساحة dS.

1-20 رباعي القطب الكهربائي (Electric Quadrupole) : ـ

أي تجمع لعدة شحنات مثل q_1 ، q_2 ، q_3 ، ..... ، q_i ، ..... ، q_r يشغل حيزاً محدوداً يتصرف كما لو كان شحنة نقطية قيمها يساوي المجموع الجبري لهذه الشحنات Σq_i والمجال الكهربائي يقل هنا لانه يتناسب مع معكوس المسافةن ولو حدث ان اصبح المجموع الجبري Σq_i مساوياً للصفر فان المجال يكون صفراً ايضاً لانه اذا كان المجال مساوياً لمعكوس مكعب المسافة فقد تكون المنظومة في هذه الحالة ثنائياً. سنمضي قدماً ونفترض ان المجموع العددي (Scalar sum) للشحنات Σq_i وكذلك المجموع الاتجاهي (Vector sum) للعزوم Σp_i يساوي صفراً ايضاً وسنأخذ مثالاً لهذا ، هو توزيع الشحنات المبين في الشكل (31-1). والمعروف برباعي القطب الخطي (Linear Quadrupole).



الشكل (1-31)

يمكن اعتبار المنظومة او التشكيل الموضح في هذا الشكل على انها عزمان لثنائيين p متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه موضوعين على خط واحد وتنفصل بينهما مسافة مقدارها d. ولذلك فان الجهد في نقطة p مثلاً والناتج من رباعي الاقطاب هذا يحسب كالآتي :

$$\Phi_p = -d\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) = -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0}\left\{-\frac{1}{r^2}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{2\cos\theta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\right\}$$

$$= -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\sin^2\theta}{r^3} - \frac{2\cos^2\theta}{r^3}\right\} \quad \left\{\because \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta\right\}$$

$$= \frac{pd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (1-73)$$

اما عزم رباعي القطب فيحسب اذا شبه بعزم ثنائي القطب كالآتي :

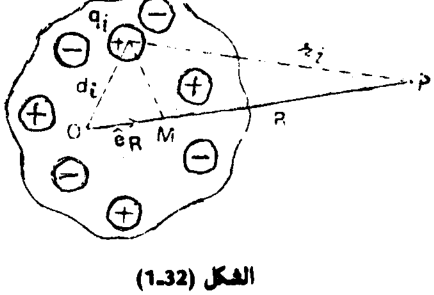
$$Q = pd = qd^2$$

$$\therefore \quad \Phi_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (1.74)$$

ويظهر جلياً ان المجال ينقص بمقدار $\frac{1}{r^4}$

1-21 الجهد الناتج من توزيع شحنات بصورة اعتباطية
:(Potential due to an arbitrary distribution of charge)

لو توزعت مجموعة من الشحنات النقطية ضمن حيز معين بطريقة معقدة (الشكل (1-32))فماذا يكون الجهد الناتج من هذه الشحنات في نقطة p التي تبعد مسافة مقدارها R عن نقطة الاصل.



الشكل (1-32)

نفرض أن q_i هي شحنة موجودة في هذا الحيز وتبعد مسافة d_i عن مركزها فالجهد الناتج عن هذه الشحنة يساوي :

$$\Phi_i(r_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{d}_i|} \qquad (1.75)$$

حيث r_i هي المسافة بين نقطة p والشحنة q_i. اذا كانت المسافة R اكبر بكثير من المسار d_i ($|R \gg d_i|$) فان المعادلة السابقة يمكن كتابتها بالشكل التقريبي الآتي :

$$\Phi_i(r_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R}$$

هذا يصح لأي شحنة q_i

لذا فالجهد الكلي لكافة الشحنات يساوي :

$$\Phi(R) = \frac{\Sigma q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (1.76)$$

وهذا المقدار نفسه كما لو ان الجهد كان ناتجاً من شحنة نقطية مقدارها Q موجودة في نقطة الاصل حيث ان $Q = \sum_i q_i$.

اذا كان عدد الشحنات الموجبة مساوياً لعدد الشحنات السالبة اي ان $Q = 0$ في حيز معين وهذا يعني ان الحيز متعادل ولا يترتب على ذلك وجود اي جهد حول هذا الحيز، الا ان هناك في بعض الاحيان اجساماً او مناطق متعادلة لكن توزيع الشحنة داخلها يولد تأثيراً متبايناً في نقاط معينة. ولمعرفة مقدار الجهد سنأخذ نفس الحيز الموضح في الشكل (32–1) وسنستخدم نفس المعادلة (75–1) لقياس الجهد باستثناء واحد هو اننا في الحالة الاولى فرضنا ان d_i اصغر بكثير من R اما الآن فنفرض ان r_i تختلف عن R بمسافة مثل OM وكما هو موضح في الشكل لاجل الحصول على مقدار تقريبي افضل للجهد.

$$\therefore \quad r_i = R - \mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R \qquad (1.77)$$

حيث $\hat{\mathbf{e}}_R$ هو المتجه الذي يمثل اتجاه المسافة R.

اهمال الحدود الاعلى

$$\therefore \quad \frac{1}{r_i} = \frac{1}{R\left(1 - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}\right)} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}\right)$$

$$\therefore \quad \Phi(R) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{R}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \qquad (1.78)$$

نجد أن الحد الأول هنا هو نفسه في المعادلة (76–1) وهو يساوي صفراً في هذه الحالة، لاننا فرضنا ان $Q = 0$.

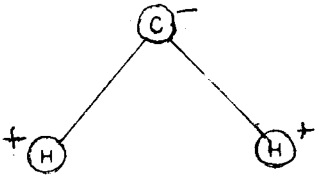
$$\therefore \quad \Phi(R) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{4\pi\epsilon R^2} \qquad (1.79)$$

لو كان عزم ثنائي القطب لهذا التوزيع هو $\mathbf{p} = \Sigma q_i \mathbf{d}_i$ فان :

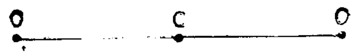
$$\Phi(R) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \qquad (1.80)$$

وهكذا يتبين ان جهد اي مجموعة من الشحنات موزعة بشكل تبدو فيه متعادلة بمجموعها هو في الحقيقة جهد ثنائي القطب (dipole potential).

سنأخذ مثالاً على هذا التوزيع هو جزيئة الماء (H_2O) . ان هذه الجزيئة لها عزم ثنائي القطب لوجود مقدار من الشحنة السالبة في ايون الاوكسجين والشحنة الموجبة في كل من ايوني الهيدروجين (الشكل (33–1).



الشكل (1.33)



الشكل 1.34)

من جهة اخرى لو اخذنا جزيئة ثـاني اوكسيـد الكاربون (CO_2) والتي هي جزيئة خطية متناظرة (الشكل (34–1 فانها بالاضافة لكونها متعادلة لاتملك عزم ثنـائي القطب فانها بالاضافة لكونها متعـادلـة لاتملـك عزم ثنـائي القطب (هل يعني هـذا ان مثل هـذا التوزيع لايولد اي جهد على الاطلاق ؟).

تمارين الفصل الأول

1-1 جسيمان كتلة كل منهما m وشحنته q متباعدة بعضهما عن بعض معلقان من نفس النقطة بخيطين طول كل منهما L. برهن ان زاوية ميل الخيطين عن الخط الشاقولي (Θ) ، تحسب من المعادلة الآتية :

$$q^2 \cos\theta = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^3\theta$$

1-2 اربع كرات صغيرة متساوية كتلة كل منها m وتحمل شحنة مقدارها q معلقات من نقطة واحدة بخيوط خفيفة طول كل منها L . جد ضلع المربع الذي تكون الكرات نتيجة قوة التنافر بينها؟ اذا زيدت شحنة كل كرة وطول الخيط وذلك بضربها بمعامل مثل k، جد الكتلة التي يجب ان تكون الكرة التي تجعل طول ضلع المربع مساوياً لـ Ka ؟

1-3 اطلقت جسيمات α شحنتها 5×10^6 eV باتجاه نويات ذرات ثقيلة شحنة كل منها تساوي 25 مرة بقدر شحنة الالكترون. جد اقرب مسافة تصل جسيمات α والنويات؟.

1-4 اذا علمت ان كتلة الارض هي 6×10^{24} كغم وكتلة القمر 7×10^{22} كغم والمسافة بينهما 4×10^8 م. جد كية الشحنات الكهربائية المفروض وجودها على الارض والقمر لتتعادل قوة الجذب التثاقلي بينهما اذا علمت ان النسبة بين شحنتيهما هي نفس النسبة بين كتلتيهما وثابت الجذب التثاقلي يساوي $6.7\times10^{11}\ Nm^2\ Kg^{-2}$–.

1-5 اذا كان المجال الكهربائي في كل نقطة من قشرة كروية مشحونة بانتظام هو صفر. برهن وبدون استخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس ان القوة الكهربائية المستقرة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة.

1-6 كرة نصف قطرها 'a' مملوءة بشحنات موجبة وكثافة شحنتها الحجمية ρ تتغير بتغير المسافة r من مركز الكرة ولكنها ثابتة لمسافة معطاة مثل r، جد قيمة الشحنة الكلية في الكرة اذا كانت :

(a) $\rho = \frac{\rho_0 a}{r}$

(b) $\rho = \rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$

1-7 لـو كانت قيمة المجال الكهربائي في الغلاف الجوي على ارتفاع 1400 متر فوق سطح الارض تؤثر بالاتجاه الاسفل هو 20 فولت / متر. وقيمة المجال على سطح الكرة الارضية ايضاً بالاتجاه الاسفل يساوي 200 فولت / متر. جد معدل كثافة الشحنة في الغلاف الجوي تحت ارتفاع 1400 متر. وبين فيما اذا كان التأثير في الايونات الموجبة او السالبة.

1-8 صفيحة مربعة الشكل مشحونة بانتظام كثافة شحنتها σ . اثبت ان الجهد في مركز الصفيحة هو $\Phi_0 = \frac{\sigma a}{\pi \epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$
حيث a هو طول ضلع الصفيحة.

1-9 اذا كانت كثافة الشحنة للالكترون (للكهرب) في ذرة الهيدروجين موزعة بالشكل $\rho(r) = \frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$ ، حيث a_0 هو نصف قطر بور (Bohr radius). اثبت ان طاقة التأثيرات التبادلية (interaction energy) بين الالكترون والبروتون تحسب من المعادلة الآتية : $U = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a_0}$.

1-10 كرة معدنية سعتها الحجمية 10 لتر مملوءة بالنتروجين لو كانت كثافة النتروجين هي $3x10^{22}$ جزيئة لكل لتر. جد جهد الكرة اذا تم اخراج الكترون واحد من كل جزيئة الى مسافة بعيدة جداً عن الكرة.

1-11 اذا كان نصف قطر نواة اليورانيوم هو 10^{-14}م وتحتوي على 92 الكترون ، لو فرضنا ان الشحنة موزعة بانتظام في النواة. جد الطاقة الكهربائية المستقرة للنواة بالـ (MeV)؟ اذا تم تقسيم نواة اليورانيوم الى قسمين متساويين نصف قطر كل منهم $8x10^{-15}$ م. جد الطاقة الكهربائية المستقرة المتحررة؟

1-12 شحنتان مختلفتان بالمقدار والاشارة موضوعتان في حيز معين. برهن على ان السطح المتساوي الجهد الذي تكون فيه V=0 هو كروي. ماذا يحدث لو ان الشحنتين متساويتي المقدار ؟

1-13 ثنائيان كهربائيان A و B وضعا بشكل يكون فيه اتجاه الثنائي A يمر خلال B واتجاه الثنائي B عمودي على A. برهن ان اتجاه القوة المسلطة من قبل A على B ليس هو نفس اتجاه القوة المسلطة من قبل B على A. الا يخالف هذا الشيء قانون نيوتن الثالث في الحركة ؟

1-14 شحنتان قيمة كل منها Q - وتنفصل بينهما مسافة مقدارها 2a. وضع بينهما جسيم كتلته m ويحمل شحنة مقدارها Q + . اذا ازيح هذا الجسيم مسافة صغيرة بالاتجاه العمودي على الخط الواصل بين الشحنتين ثم ترك حراً. جد الفترة الزمنية لمحصلة الحركة الاهتزازية. ماذا يحصل لو ان الجسيم اعطي ازاحة صغيرة على نفس الخط الواصل بين الشحنتين ؟

الفصل الثاني

الكهربائية المستقرة في المواد العازلة

Electrostatics in Dielectrics

الفصل الثاني

الكهربائية المستقرة في المواد العازلة

Electrostatics in Dielectrics

درسنا في الفصل الاول المجال الكهربائي الناتج من وجود شحنات في الفراغ، ومعروف منذ فترة طويلة ان للوسط (medium) دور مهم في ايجاد القيمة المطلقة للمجال.

يتباين المجال الكهرومغناطيسي (electromagnetic field) تبايناً واضحاً بين جسيم وآخر على مستوى المسافات الفاصلة بين الذرات، لذلك في دراستنا للظاهرة الكهرومغناطيسية سوف لانعير اهمية للتراوح الحاصل في قيم المجال على مستوى الذرات. وسندرس في هذا الفصل نموذج بنيوي منسجم للمادة يمكن بواسطته الحصول على قيم المجالات الصحيحة دائماً. لذا يجب الاشارة الى ان المجالات البنيوية ليست بالضرورة المجالات الفعلية المؤثرة على الجسيمات داخل المادة.

2-1 الموصلات والعوازل (Conductors and Insulators) : -

تصنف المواد بصورة عامة من ناحية خواصها الكهربائية الى صنفين رئيسيين حسب تصرفها تحت تأثير مجال كهربائي خارجي وهما :

1 - المواد الموصلة (Conductors) : -

وهي تلك المواد التي تحتوي ذراتها على الكترونات حرة تستطيع تحت تأثير مجال كهربائي (الالكترونات جسيمات خفيفة جداً تستطيع الحركة اذا كانت حرة)،يولد هذا المجال الكهربائي خلال هذه المواد سيلاً متدفقاً من الشحنات يسمى التيار الكهربائي (electric current) مثل هذه المواد مادة الكربون، هناك بعض المواد عناصر كانت ام مركبات تزول مقاومتها نهائياً في درجات حرارة معينة وتتصرف كموصلات فائقة التوصيل (super conductors) مثل الزئبق في درجة حرارة $42\ ^{o}K$.

2 - المواد العازلة (Dielectrics or Insulators) : -

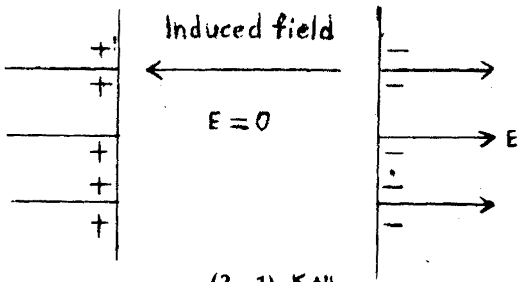
وهي تلك المواد التي تكون فيها الالكترونات مرتبطة بقوة كبيرة بالذرات او الجزيئات الأم المكونة لها فتعجز عن الحركة تحت تأثير مجال كهربائي خارجي (في الحقيقة الالكترونات تتحرك تحت تأثير المجال الكهربائي لكن حركتها هذه بسيطة جداً وبذلك لايتكون سيل من الالكترونات المتحركة). مثل هذه المواد الكبريت (Sulphur)، والمايكا (mica)، والبورسلين (Porcelain). قد يحدث ان تنهار مقاومة المواد العازلة فجأة تحت تأثير مجال كهربائي عالي جداً ، والعازل الجيد مثلاً تنهار مقاومته تحت تأثير مجال يصل الى 10^9 فولت / متر.

ان هناك مواد جيدة التوصيل ومواد جيدة العزل وبينهمايقع صنف ثالث يسمى اشباه الموصلات (Semiconductors) لها مواصفات وسطية بين التوصيل والعزل ويجدر الذكر ان تقنية العصر الحديث تعتمد على مثل هذه المواد.

2-2 الموصل في مجال كهربائي (Conductor in an electric field) : -

ماذا يحدث اذا وضع موصل تحت تأثير مجال كهربائي؟ يرينا الشكل (1-2) (2-1) قطعة من مادة موصلة موضوعة تحت تأثير مجال كهربائي. الالكترونات ستتحرك بحرية على سطح القطعة نتيجة وجود المجال (لكن لايمكنها مغادرة السطح لوجود قوة كبيرة تربطها) ونتيجة حركتها يتولد مقدار من شحنة الصافية على سطحي القطعة. تحتث هذه الشحنات على الاسطح مولدة مجالاً كهربائياً داخل القطعة نفسها معاكس في اتجاهه للمجال الخارجي. تستمر هذه الالكترونات بالحركة الى ان تصبح قيمة المجال الداخلي صفراً. اي زوال المجال الكهربائي المستقر في القطعة. بما ان $E = -\nabla\Phi$ ويساوي صفراً ،والجهد Φ لايتغير من نقطة الى اخرى فان الموصل يصبح في هذه الحالة منطقة متساوية الجهد(equipotential region) بالاضافة لذلك ولكون المجال مساوياً للصفر ولان تدرج المجال يساوي $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon = 0$

فهـذا يعني ان ρ تسـاوي صفراً $(\rho = 0.)$ ايضـاً وهـذا معنـاه ان الشحنـة ليست مـوزعـة على الحجم وانـا هي مستقرة على الاسطـح الخـارجية فقـط وتسمى هـذه الاسطـح بـالاسطـح المتسـاويـة الجهـد. اما اذا كانت الشحنـات متحركة على الاسطـح الخـارجيـة فمعنى هـذا وجـود مجـال كهربـائي مستقر الذي يولد تياراً في السطح. المجال يكون عمودياً على الاسطح المتساوية الجهد.

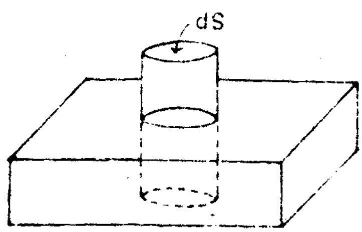


الشكل (2 . 1)

2-3 المجال الكهربائي عند سطح موصل مشحون

- : (Electric field at the surface of a charged conductor)

تصور اسطوانة مسـاحـة قـاعـدتهـا (dS) موضـوعـة على سطـح مـوصـل بحيث يكـون نصفهـا داخـل السطـح والنصف الآخر في الهـواء وقـاعـدتـاهـا مـوازيتين للسطـح كما في الشكل (2-2).



الشكل (2 . 2)

اذا كان المجـال يسـاوي E. الفيض على السطـح هـو EdS.وقيمـة الفيض على الاسطـح الاخرى تسـاوي صفراً وذلـك لعـدم وجـود مجـال داخلي في الموصـل ، لـذلـك وحسب قانون كاوس فان الفيض يساوي:

$$EdS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

حيث σ, هي الكثافة السطحية للشحنة.

$$E = \sigma/\epsilon_0 \qquad (2.1)$$

2-4 المتسعات (Capacitors) :

المتسعة هي وسيلـة اوجهـاز لخـزن الطـاقـة ، وتتكـون من زوج من المـوصـلات ذات قطبين مختلفين يحملان نفس المقدار من الشحنـة. اذا فرضنـا ان مقـدار الشحنـة هو Q + موزعة على السطـح بكثـافـة سطحيـة هي $+\sigma$ و $-\sigma$ على كل من السطحين الموصلين والكثافة هنـا لاتكون ثـابتـة مثل الجهـد Φ_+ و Φ_- لكون السطحين متسـاوي الجهد. فاذا كان فرق الجهد V بين الموصلين يساوي :

$$V = \Phi_+ - \Phi_- \qquad (2.2)$$

ويتناسب فرق الجهد طردياً مع قيمة الشحنة Q، اي ان :

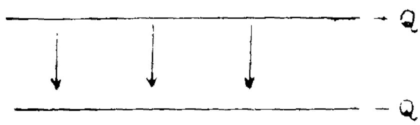
$$Q = CV \qquad (2.3)$$

حيث ان C هـو ثـابت يسمى سعـة المتسعـة (capacitance or capacity of the capacitor) ويعتمد على قابليـة المتسعـة في الاحتفـاظ بـالشحنـات وكـذلـك على الشكل الهندسي للموصل المتكونة من المتسعة.

فيما يلي حساب سمات بعض انواع المتسعات البسيطة :

1) المتسعة ذات الالواح المتوازية (parallel plate capacitor):

لو اخذنا لوحين مساحة كل منهما A تفصل بينهما مسافة صغيرة هي (d) ، الشكل (2-3).نشحن اللوحين بشحنتين متساويتي المقدار احداهما موجبة والاخرى سالبة Q+ و Q-.
اذا كانت ابعاد اللوحين الجانبية اكبر بكثير من المسافة الفاصلة بينهما في هذه الحالة يمكن اهمال تأثير الظاهرة الحافية (edge effect) ، (نتوء المجال الكهربائي على طرفي اللوحين في المتسعة). اي ان المجال يكون منتظماً ويكون فرق الجهد هو الجهد اللازم لنقل وحدة شحنة من لوح الى آخر.



الشكل (3 ـ 2)

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \left(\because \quad \sigma = \frac{Q}{A} \right)$$

$$\therefore \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad (2.4)$$

2) سعة متسعة على شكل كرة معزولة

: (Capacitance of an isolated sphere)

نفرض ان كرة نصف قطرها (a) ، تحمل شحنة مقدارها Q ولنتخيل كرة اخرى كبيرة جداً ذات نصف قطر يساوي مالانهاية (infinite radius) تحمل شحنة مقدارها Q -
بذلك يمكن اعتبار هاتين الكرتين متسعة كروية والجهد الكهربائي V يساوي :

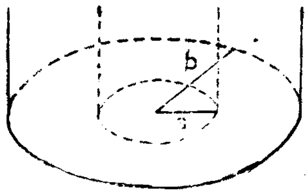
$$V = -\int_{\infty}^{a} E dr = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \qquad (2.5)$$

$$\therefore \quad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a \qquad (2.6)$$

3) متسعة كبل ذي موصلين متحدي المحور (Co- axial cable capacitor) :

نفرض ان اسطوانتين ذواتي موصلين متحدي المحور لهما طول لامتناه ، نصف قطريهما a و b كما في الشكل (4-2) اذا كانت الكثافة الخطية للشحنة هي $+\lambda$، في الاسطوانة الداخلية ، فالمجال E يساوي :

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$ (انظر 1-35)



الشكل (4 - 2)

وفرق الجهد بين الاسطوانتين يساوي : -

$$V=\Phi_a-\Phi_b=-\int_b^a E dr=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln a-\ln b)$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a} \qquad (2.7)$$

اذن السعة C (لطول مقداره l) يساوي :

$$C=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}}=\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (2.8)$$

2-5 طاقة المتسعة (The energy of a capacitor) : -

بما ان الشحنة في المواد الموصلة تستقر على الاسطح لذا فان الطاقة الكامنة لموصل يمكن حسابها من المعادلة (1-56) بتحويل الجمع الى التكامل :

$$W = \tfrac{1}{2}\int \sigma \Phi dS \qquad (2.9)$$

وفي حالة المتسعة الطاقة الكامنة تساوي :

$$W = \tfrac{1}{2}\int \sigma_+ \Phi_+ \, dS + \tfrac{1}{2}\int \sigma_- \Phi_- \, dS$$

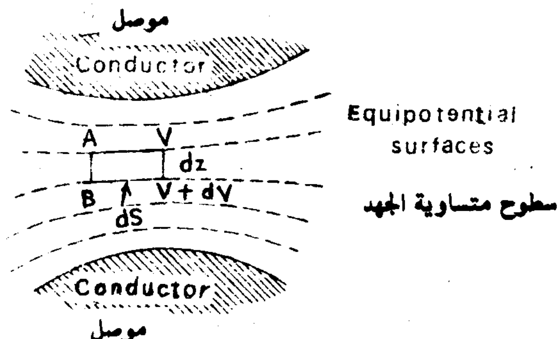
حيث Φ_+, Φ_- هو جهد قطبي المتسعة و σ_+, σ_- كثافة الشحنات السطحية على الموصلين.

$$W = \tfrac{1}{2}Q(\Phi_+ - \Phi_-) = \tfrac{1}{2} QV \qquad (2.10)$$

ويمكن صياغة هذه المعادلة لتلائم حسابات المتسعة كالآتي :

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (2.11)$$

يمكن التعبير عن هذه الطاقة باشكال مختلفة اذاماتم اعتبار توزيعها في الفراغ بين الشحنات المؤلفة او المشغولة لمجالها الكهربائي ، ولتوضيح ذلك نفرض ان سطحين متساويي الجهد قريبين جداً من بعضها وضعا بين موصلين كا هو موضح في الشكل (2-5) وان هناك فرق جهد صغير جداً dV بينهما.



الشكل (2 - 5)

اذا تم ادخال موصلين جهدهما مساوٍ لجهد الاسطح المتساوية الجهد ولاتتقاطع معها فان حال المثال تبقى بدون تغيير. ان الموصلين في هذه الوضعية يمكن اعتبارهما متسعة سعتها تساوي $\frac{\epsilon_0 dS}{dz}$ حيث dS مساحة كل لوح dZ المسافة الفاصلة بينهما. اما طاقة هذه المتسعة تساوي :

$$dW = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 dS}{dz} (dV)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 dS}{dz} (Edz)^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dS dz$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

حيث $d\tau$ تساوي $dSdz$ وتعني مقدار الحجم الذي تشغله المتسعة

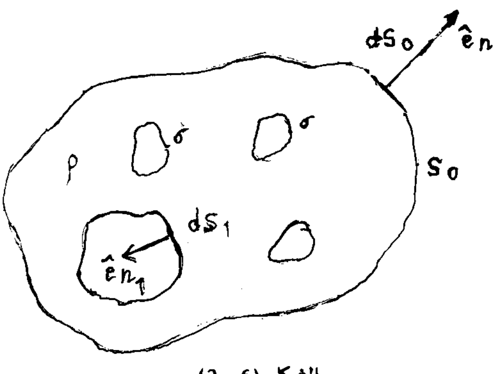
$$\therefore \quad W \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

لذلك يمكننا اعتبار هذه الطاقة كانها موزعة خلال المجال وكثافتها في اي نقطة تساوي $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

الآن سنشتق من هذه النتيجة حالات اكثر شدة يرينا الشكل (6-2) مجمعاً من الموصلات ضمن سطح بعيد جداً عنها بحيث لايؤثر المجال الموجود فيه عليها ويمكن اهماله. نفرض ان كية من الشحنة موزعة على حجم هذا السطح بكثافة حجمية مقدارها ρ وكثافة سطحية مقدارها σ على الموصلات فان الطاقة الكهربائية المستقرة تساوي :

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau + \frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS_1 \qquad (2.12)$$

حيث ان التكامل السطحي اخذ لاسطح كل الموصلات والتكامل الحجمي لكل الحيز المشغول بالمجال ، اي الحجم المحدد بالسطح So.



الشكل (6 - 2)

باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ يمكن كتابة :

$$\frac{1}{2}\int \rho\Phi d\tau = \frac{1}{2}\int \epsilon_0(\nabla \cdot E)\Phi d\tau$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int\left\{\text{div}\,(\Phi E) - E\cdot\nabla\Phi\right\}d\tau$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int \text{div}\,(\Phi E)\,d\tau + \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int \Phi E\cdot\hat{e}_n dS + \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$

باستخدام مبرهنة التباعد (divergence theorem) فان التكامل الاول اخذ للسطح المغلق So الذي يحدد الحجم وكذلك لاسطح الموصلات .

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \rho\Phi d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int \Phi E\cdot\hat{e}_n dS_0 + \frac{\epsilon_0}{2}\int \Phi E\cdot\hat{e}_{n_1} dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$

(على اسطح الموصلات)

حيث e_n and $\hat{e}_{n_1}$ هما متجهات الوحدة العمودية على الاسطح المتعاقبة dSo و dS1.
بما ان الجهد Φ يتناسب عكسياً مع المسافة r^{-1} والمجال E يتناسب عكسياً مع مربع المسافة r^{-2} بينما dS تتناسب طردياً مع مربع المسافة r^2 ، فان التكامل الاول يتناسب عكسياً مع المسافة $\frac{1}{r}$ لذلك فان قيمته تزول (تقترب من الصفر) عندما تكون r كبيرة جداً (اي على السطح So مثلاً).
وبما ان التكامل الثاني هو حول اسطح الوسط ،والمتجهات المرسومة نحو خارج الوسط هي $\hat{e}_{n_1}\,dS_1$ تصبح هنا داخل اسطح الموصلات كما هو موضح في الشكل ، ونظراً لان المجال E يساوي $E = -\sigma/\epsilon_0$ في هذا الاتجاه فان :

$$\frac{1}{2}\int \rho\Phi d\tau = -\frac{1}{2}\int \sigma\Phi dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$

والطاقة الكلية تساوي :

$$W = -\frac{1}{2}\int \sigma\Phi dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau + \frac{1}{2}\int \sigma\Phi dS_1 = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau \qquad (2.13)$$

بما ان المجال E يساوي صفراً داخل الموصلات لذلك يمكن اعتبار هذه الطاقة متوزعة خلال الوسط المحيط بالموصلات وكثافتها تساوي $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

الصيغة (2-13) محدودة نسبياً فلو اردنا حساب الطاقة الكهربائية المستقرة لشحنة نقطية q ، باستخدام هذه الصيغة سنجد ان الطاقة تساوي :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}\, 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_0^\infty$$

$$= \infty$$

وهذا يعني ان طاقة شحنة نقطية تساوي مالانهاية وهذه النتيجة مرفوضة فيزياوياً،لذلك فان مصطلح مثل كثافة الطاقة لايتفق ومصطلح شحنة نقطية.

2-6 الاستجابة الكهربائية لوسط غير موصل للمجال الكهربائي

:(Electric Response of a Non-conducting Medium to an Electric Field)

درسنا فيما سبق رد فعل المواد الموصلة عند وضعها في مجال كهربائي. سندرس الآن تصرف مواد المجموعة الثانية المذكورة في الجزء (1 . 2) والمسماة في حينها بالعوازل (dielectrics) التي ليس لها قابلية التوصيل الكهربائي.

لاحظ كافندش (Cavindish) وبعده فاراداي (Faraday) ان سعة الموصل لاتعتمد فقط على شكل وحجم اللوح الموصل ولكن تعتمد ايضاً على طبيعة المادة العازلة الموضوعة بينهما،لذا فسعة المتسعة تزداد اذا ما وضعت قطعة من مادة عازلة بين لوحيها. ونفرض ان السعة C تساوي Q/V وهي تزداد عند وضع مادة عازلة،وبما ان Q ثابتة،اذن وكما لاحظ كلٍ من كافندش وفارادای زيادة السعة ناتجة من انخفاض في فرق الجهد V اي ضعف المجال الكهربائي. فاذا ماازدادت السعة بعامل مقداره E_r فان المجال سيضعف بعامل مقداره $\frac{1}{\epsilon_r}$ لذلك فان المجال في وسط عازل يساوي

$$E = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\,|\mathbf{r}|^3} \qquad (2.14)$$

ان المقدار المتغير القيمة ϵ_r والذي يعتمد على طبيعة المادة العازلة يسمى ثابت العزل (Dielectric constant) للوسط. على سبيل المثال فمقداره للفراغ يساوي واحداً وللهواء يساوي 1.00057 ولمعظم المواد الصلبة يتراوح من واحد الى عشرة وللماء يساوي (81).

2-7 الاستقطاب (Polarization) :

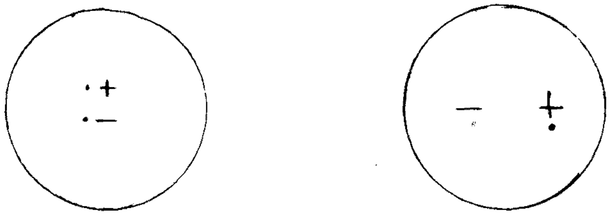
لمعرفة كيفية ارتباط ثابت العزل ϵ_r بخصائص المادة المحصنة سندرس ماذا يحدث للعازل عندما يسلط عليه مجال كهربائي.

نفرض ان ذرة معزولة عددها الذري (atomic number) يساوي Z . في غياب المجال الكهربائي (كما في الشكل 2-7A) فان النواة تكون في حالة توازن مستقر (Stable equilibrium) وذلك لتطابق مركز ثقل (Centre of gravity) شحناتها الموجبة مع شحناتها السالبة،اذا وضعت هذه الذرة تحت تأثير مجال كهربائي خارجي،فماذا سيحدث؟

ان المجال سيدفع شحنات النواة الموجبة باتجاهه وسيدفع شحنات الالكترون السالبة بالاتجاه المعاكس (الشكل 2-7B) حالما تبدأ السحابة الالكترونية بالحركة بعيداً عن النواة تنشأ قوة جذب كهربائي مستقر قوي بين النواة والسحابة الالكترونية محاولة اعادة الشحنات المتحركة الى وضعها الاصلي المستقر وتبقى الشحنات الموجبة والسالبة متباعدة الى ان تتوازن قوة الجذب مع المجال الخارجي،ولايعد مركزي ثقل الشحنات الموجبة

والسالبة متطابقاً فتتصرف الذرة كأنها ثنـائي قطب ذو عزم يتنـاسب طردياً مع مقـدار المجال الخـارجي المؤثر عليها فكلما كان المجـال كبيراً تكون ازاحـة الشحنـات بعضها عن بعض كبيرة والعكس صحيح،وتسمى الـذرة في هـذه الحـالـة مستقطبة (polarized) تحت تأثير مجـال خـارجي. اذا كانت الازاحـة بين مركزي الشحنـات هي δ فـان عزم ثنـائي القطب يكون :

$$p = Z.\delta \tag{2.15}$$

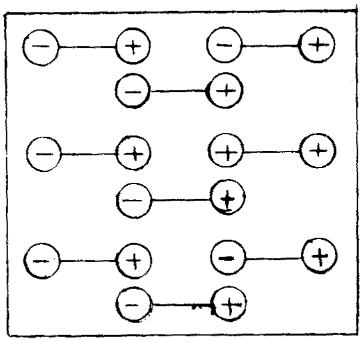


(a) Unpolarized atom   (b) Polarized atom

ذرة غير مستقطبة (A)   الشكل (2 - 7)   ذرة مستقطبة (B)

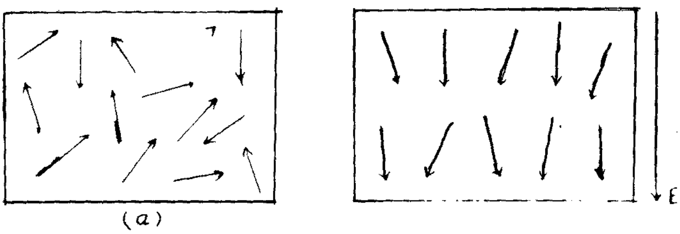
عند وضع عازل في مجال كهربائي فان جميع ذراته تصبح مستقطبة لذلك فان

الـوسـط كلـه يكـون مستقطبـاً (استقطـاب الكتروني (electronic polarization) كما في الشكل (2-8).



الشكل (2 - 8)

أن المواد العازلة بصورة عامة تنقسم الى نوعين رئيسين، الأول هو المواد العـازلـة التي لاتتصرف جزيئاتها كثنـائي قطب الا تحت تـأثير مجـال كهربـائي خـارجي، والثـاني هو المواد العازلة التي تتصرف جزيئاتها كثنائي القطب حتى في غياب المجال الكهربائي،اي انها ثنائيـات قطب دائميـة. الا انـه نتيجـة للتهييج الحراري (thermal agitation) تكون عزوم الثنائيات مترتبة بصورة عشوائية(الشكل 2-9 A)وعليه فان المادة كلها تبقى، غير مستقطبة (unpolarized). وعند تسليط مجال كهربائي خارجي عليها تعيـد الثنـائيـات ترتيب نفسها تحت تأثير هذا المجال لتتجه جميعها باتجاهـه (الشكل 2-9B)، ان جزيئـات النوع الاول تسمى جزيئـة لاقطبيـة (non – polar molecule) . مثـال ذلـك جـزيئـة (H_2O_2) و (CO_2) والنوع الثاني تسمى جزيئة قطبية (Polar molecule) ومن امثلتهـا جزيئـة (H_2O , Nacl). لـذلـك فـان الاستقطـاب يمكن ان ينتـج تحت تـأثير المجـال في تراصف الجزيئات التي لها لاتماثل طبيعي في توزيع شحناتها (الجزيئات القطبيـة) او من اللاتماثل المستحث في الجزيئات المتماثلة طبيعياً.



(b)Oriental polarization

الشكل (9 - 2)

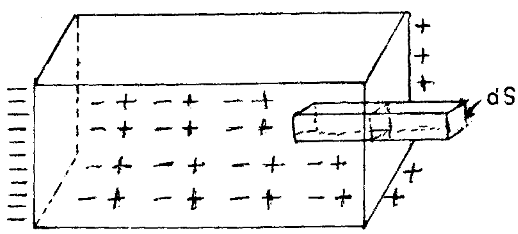
عندما نتعامل مع النظم الكبيرة لاتكون في تمـاس بصورة رئيسـة مع القوى المسلطـة من ذرة او جزيئة على اخرى وانما مع معدل عدد كبير من الـذرات او الجزيئـات، وهـذا هو مايعرف بالوصف العيني للمجال والذي تهمل فيه تفاصيل التأثيرات الـدقيقـة للـذرات او لما في داخل الذرات ويكون المعنى بالقياس هو مقدار المجال في منطقـة اكبر بكثير من الذرة الواحدة وهذا النوع من المجال يتولـد عنـدمـا لايكون للمـادة بنـاء او تركيب ذري (atomic Structure).

تعرف كثافة الاستقطاب العيني(macroscopic polarization) بانها مقدارعزم ثنائي القطب الكهربائي لوحدة الحجم. وتساوي المجموع الاتجاهي (vector sum) لعزوم ثنائي القطب المجهري (microscopic dipole moments) الموجودة في وحدة الحجم. ويكون الناتج متجها باتجاه عزم ثنائي القطب المفرد اي باتجاه المسافة الفاصلة بين الشحنات (S) ويرمز لها بالرمز P فاذا كان عدد الجزيئات في وحدة الحجم يساوي N وعدد الشحنات الموجبة والسالبة في كل جزيئة هو q+ ومفصولة بعضها عن بعض بمسافة S فان كثافة الاستقطاب (Polarization density) P تساوي :

$$P = Nq\delta \qquad (2.16)$$

اما وحدة الكثافة (p) فهي كولومب / متر ^{2} .

اذا كان الاستقطاب في لوح عازل موضوع في مجال كهربائي منتظماً (الشكل 10-2) فانه لايتكون اي مقدار صافي لكثافة الشحنة في هذه القطعة وذلك لان ثنائيات القطب المفردة تصطف جميعها بصورة موازية للمجال فتصبح الشحنة السالبة للثنائي بجانب الشحنة الموجبة للثنائي الذي يليه. لهذا فان كثافة الشحنات الموجبة والسالبة المزاحة تحت تأثير المجال هي نفسها. ومقدار الشحنة الصافي يساوي صفراً. وتجدر الاشارة هنا الى ان في حالة كون الاستقطاب منتظماً فان التعادل الكهربائي قد لايتحقق وذلك لوجود شحنات موجبة على سطح اللوح وشحنات سالبة على السطح الآخر، تسمى شحنات صورية او كاذبة (fictious charges) او شحنات مقيدة (bound charges) ولكن التسمية المتداولة هي شحنات الاستقطاب (Polarization charges) .



الشكل (2 - 10)

. اما اذا كان الاستقطاب غير منتظماً فيجب ان نتوقع وجود بعض الشحنات في الحجم المعين للوح وذلك لعدم تساوي ازاحة الشحنات الموجبة مع ازاحة الشحنات السالبة.

نفرض ان عنصر مساحة dS في سطح اللوح (الشكل 10-2) اذا كانت الكثافة السطحية لشحنةالاستقطاب هي p فمقدار الشحنة الكلية في عنصر المساحة يكون pdS. وهذا المقدار هو نفسه اذا كان بدل عنصر المساحة dS صندوق مساحة مقطعه العرضي dS ايضاً وطوله S يساوي المسافة الفاصلة بين الشحنات الموجبة والسالبة.

$$\therefore \quad \sigma_P \, dS = Nq\delta dS$$

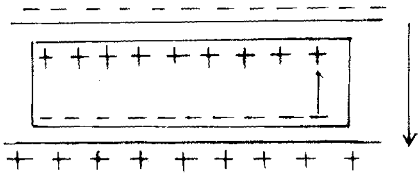
$$\sigma_P = Nq\delta = P \qquad (2.17)$$

حيث أن P هو مقدار متجه الاستقطاب P. لذا فان الكثافة السطحية للشحنة تساوي قيمة الاستقطاب في المادة. والمعادلة اعلاه صحيحة اذا كان متجه الاستقطاب عمودياً على السطح اما للحالات العامة فتصبح بالشكل الآتي :

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \qquad (2.18)$$

والآن سنتفحص كيفية زيادة سعة المتسعة اذا ماوضعت قطعة عازلة بين لوحيها. نفرض ان متسعة متوازية الالواح شحنتها السالبة في الاعلى والموجبة في الاسفل (كما في الشكل 11-2) لتكن مساحة كل لوح تساوي A وكثافة الشحنة السطحية تساوي σ والمسافة الفاصلة بين اللوحين هي d.

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \; V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \; C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{\delta} \qquad (2.19)$$



الشكل (11 ـ 2)

فاذا وضعنا قطعة عازلة بين لوحي المتسعة (كما هو في الشكل) (لاحظ وجود فجوة بين القطعة ولوحي المتسعة وهذه الفجوة موجودة دائماً حتى اذا كان سمكها قطر جزيئة واحدة) نتيجة الحث فستصبح الشحنات الموجبة في الجهة العليا للقطعة العازلة والشحنات السالبة في الجهة السفلى وهذا سيولد مجالاً بنيوياً في المادة معاكس في اتجاهه

للمجال الموجود بين لوحي المتسعة وبالنتيجة فهو يقلل منه وهذا المجال البنيوي يسمى مجال ازالة الاستقطاب (depolarization field) وعرفنا ان الكثافة السطحية لشحنة الاستقطاب هي P لذلك فان المجال الفعلي داخل متسعة فيها قطعة عازلة يكون.

$$E = \frac{(\sigma - P)}{\epsilon_0} \qquad (2.20)$$

وبما ان قوة الاستقطاب P (strength of the polarization) تتناسب مع المجال E أي :

$$\mathbf{P} = \text{constant} \times \mathbf{E}$$
$$= \epsilon_0 X \mathbf{E} \qquad (2.21)$$

ثابت التناسب اعتيادياً يكتب كما يلي $E_0 X$ نعوض في المعادلة (2.20) .

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - XE$$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{1+X}$$

نلاحظ أن المجال يختزل بالعامل. $\frac{1}{1+X}$ ثابت التناسب عرف بالفقرة (2.6) . أي أن :

$$\epsilon_r = 1 + X \qquad (2.22)$$

$$\therefore \quad V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0(1+X)} \qquad (2.23)$$

$$C = Q/V \quad \frac{\sigma A}{\sigma d/\epsilon_0(1+X)}$$

$$= \frac{\epsilon_0 A}{d}(1+X)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \qquad (2.24)$$

كذلك ان السعة تزداد بالعامل ϵ_r قيم ϵ_r عند درجة حرارة الغرفة لبعض المواد اعطيت في الجدول (2.1).

الجدول (2.1)

Material	المادة	ϵ_r
Carbon tetrachloride	تتراكلوريد الكاربون	2.24
Paraffin wax	شمع البارافين	2.25
Polythelene	بولي اثلين	2.30
Nylon	النايلون	3.50
Porcelain	(فخار) بورسلين	6.00
Mica	مايكا	7.00
Water	الماء	81.00

2-8 قوانين المجال الكهربائي المستقر عند وجود عازل

-:(Law's of Electrostatic field in the presence of Dielectrics)

لاحظنا في المعادلة (14-2) ان المجال العازل ليس نفسه المتوقع في قانون كولومب لذا فان هذا القانون ليس نافذاً في جميع الحالات وقد برهن عملياً في الهواء الا انه اختلف في العوازل لذا فأن القوانين الكهربائية المستقرة المبينة عليها تحتاج الى اعادة صياغتها للتتلائم مع العوازل.

لقد ركزنا فيما مضى على الاستقطاب المنتظم الا انه عملياً عادة مانجد الاستقطاب في العوازل غير منتظم نتيجة لكون العازل غير منتظم او لتباين المجال في العازل المنتظم.
وسنتناول الآن حالة عدم كون الاستقطاب متساوياً في جميع مناطق العازل. عند وضع

قطعـة غير مستقطبـة من عـازل معين في مجـال كهربـائي. تمر كيـة من الشحنـة خلال عنصر مساحـة (dS) من العـازل نتيجـة عمليـة الاستقطـاب، وهـذه الكميـة تسـاوي حاصل ضرب مركبة الاستقطاب p العمودية على عنصر المساحة dS في كية المساحـة dS اي تساوي $\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS$ وكما ذكرنـا سـابقـاً، ان ازاحـة معينـة تحـدث للشحنـات في الكثـافـة الحجمية للشحنة اذا كانت P غير منتظمة الشحنة الكلية المزاحـة خـارج اي حجم (ليكن V مثلاً) نتيجة الاستقطاب تساوي :

$$\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS$$

حيث S تمثل السطح الذي يحدد الحجم. امـا كيـة الشحنـات المعـاكسـة في اشـارتها للشحنات الخارجة والمتبقية في هذا الحجم (نرمز لها بالحرف q') فتساوي :

$$q' = -\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (2.25)$$

فاذا كانت ρ' هي كثافة شحنات الاستقطاب داخل هذا الحجم.

$$\therefore \quad q' = \int_V \rho' d\tau$$

(2-26) .... لذلك

$$\int_V \rho' d\tau = -\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (2.26)$$

وباستخدام مبرهنة التباعد (Divergence theorem) نحصل على :

$$\int_V \rho' d\tau = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{P} d\tau \qquad (2.27)$$

$$\therefore \quad \rho' = -\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad (2.28)$$

لـذلـك نجـد أن كثـافـة شحنـة الاستقطـاب ρ' (مقـاسـة بـالكولـومب / متر) تعطى بالتباعد السالب لكثافة الاستقطاب p.
ان صيغة قانون كاوس في الفضاء الحر هي

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$$

ويمكن كتابة صيغة مكافئة لهـذا القـانون للوسـط العـازل مع الاخـذ بنظر الاعتبـار وجود شحنات الاستقطاب بجانب الشحنات الحرة لذلك :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \left(E + \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \rho. \tag{2.29}$$

وسندخل الآن مجالاً متجهاً جديداً هو D ويساوي :

$$D = \epsilon_0 E + P \tag{2.30}$$

وهكذا فان المعادلة (29-2) يمكن صياغتها بادخال المتجه D بالشكل الآتي :

$$\nabla \cdot D = \rho \tag{2.31}$$

وهذه هي الصيغة المطورة لقانون كاوس والتي تتضمن تـأثير شحنـات الاستقطـاب في حساسيتها. وعليه فان دفق المجـال D الخـارج من السطح المغلق S يسـاوي المجموع الكلي للشحنات الحرة داخل هذا السطح. ان هذه الصيغة لقانون كاوس ملائمة جداً للحسابات.
والمتجه D لـه نفس مقـاسـات (او ابعـاد) P ويسمى الازاحـة الكهربـائيـة (electric displacement).

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

ومن المعادلة (30-2) نحصل على :

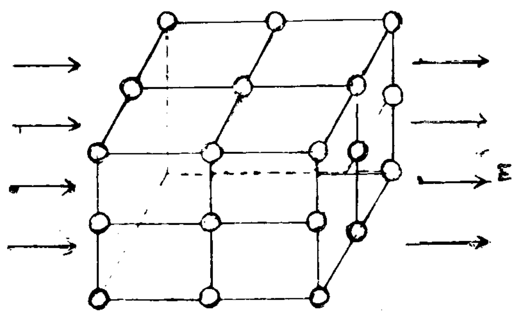
$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E \\ &= (1+\chi)\epsilon_0 E = \epsilon_0 \epsilon_r E \\ &= \epsilon E \end{aligned} \tag{2.32}$$

حيث أن ϵ تساوي $\epsilon_r \epsilon_0$ وتسمى سماحية الوسط (Permittivity of the medium) و ϵ_0 هو سماحية الفضاء الحر (permittivity of the free space) بينما ϵ_r هو السماحية النسبية للوسط (relative permittivity of the medium). لذلك فان قانون كاوس المعادلة (2-31) يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$\nabla \cdot \epsilon E = \rho \tag{2.33}$$

لاحظ ان المعادلة الكهربائية المستقرة الاخرى والتي هي $\nabla \times E = 0$ تبقى بدون تغير في العوازل.

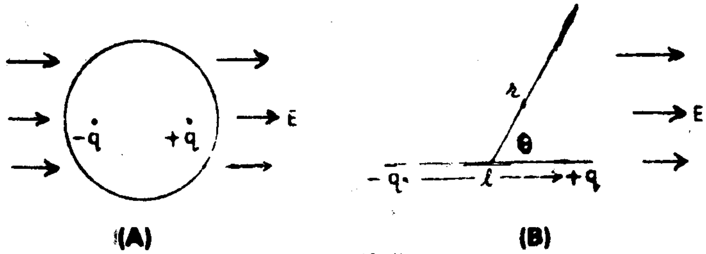
مثال (2-1) : - عازل اصطناعي (artifical dielectric) يتكون من عدد كبير من الكرات المعدنية ذات حجم عيني (macroscopic size) مرتبة بحيث تصبح ذات تركيب تشابكي (lattice structure) ثلاثي الابعاد (الشكل 2-12). جد سماحية هذا العازل ؟



الشكل (2 - 12)

نفرض ان مجالاً منتظماً مقداره E مسلط على العازل. هذا العازل سيولد شحنة محتثة على كل كرة كما في الشكل (2-13A) وبهذا تصبح كل كرة مشابهة في الحقيقة لذرة مستقطبة لها عزم ثنائي القطب (Dipole moment) هو P ويساوي ql (الشكل 2-13B)..فاذا كان عدد الكرات لوحدة الحجم هو N فان الاستقطاب P يساوي :

$$\mathbf{P} = Nql$$



الشكل (2 . 13)

من المعادلتين 2ـ30 و 2ـ32

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\therefore \quad \epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} = \epsilon_0 + \frac{Nql}{E} \qquad (2.34)$$

اما الجهد في نقطة معينة والناتج من المجال المنتظم يساوي :

$$V_0 = -\int_0^r E\cos\theta\, dr = -Er\cos\theta \qquad (2.35)$$

حيث r المسافة بين النقطة ومركز المجال وللسهولة اختير هنا في مركز ثنائي القطب. و (Θ) هي الزاوية بين محور ثنائي القطب والخط الشعاعي (radial line). والجهد الناتج من ثنائي القطب يساوي :

$$V_d = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (2.36)$$

الجهد الكلي عند النقطة هو :

$$V = V_0 + V_d = -Er\cos\theta + \frac{ql\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (2.37)$$

ونظراً لكون عدد الشحنات الموجبة مساوياً لعدد الشحنات السالبة في الكرة المعدنية فان الجهد فيها يكون صفراً. لذلك فاذا كان نصف قطر الكرة هو (a) فان :

$$0 = -E\,a\cos\theta + \frac{ql\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \qquad (2.38)$$

$$\therefore\quad \frac{ql}{E} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \qquad (2.39)$$

وبالتعويض في المعادلة (2-34) نحصل على :

$$\epsilon = \epsilon_0 + 4\pi\epsilon_0 N a^3$$

أو .... (2-40)

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + 4\pi N a^3$$

$$\epsilon_r = 1 + 3VN \qquad (2.41)$$

حيث V هو حجم الكرة ويساوي ($\frac{3}{4}\pi a^3$). وهكذا نجد أن سماحية هذا العازل تعتمد على كل من عدد وحجم الكرات المعدنية المتكون منها.

2-9 طاقة المجال بوجود عازل

(Energy of the field in the presence of a dielectric)

لاحظنا في الجزء (2-5) اذا كانت الشحنة موزعة بكثافة حجمية P وكثافة سطحية σ فالطاقة الكامنة (Potential energy) تساوي :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\Phi d\tau + \frac{1}{2}\int_S \sigma\Phi dS_1$$

وهذه النتيجة لاتتأثر بوجود العازل. حسب مبرهنة كاوس $\rho = \nabla.D$ فان :

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\Phi d\tau = \frac{1}{2}\int_V \Phi(\nabla\cdot \mathbf{D})d\tau = \frac{1}{2}\int_V \left\{\nabla\cdot(\Phi\mathbf{D}) - \mathbf{D}\cdot\nabla\Phi\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \Phi\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}d\tau \qquad (2.42)$$

حيث استخدمنا تعريف متطابقة المتجه التي تنص على :

$$\text{div}(\Phi\mathbf{D}) = \Phi\ \text{div}\ \mathbf{D} + \mathbf{D}\ \text{grad}\ \Phi$$

ومبرهنة التباعد (Divergence theorem). ان التكامل الاول يجب ان يأخذ حول السطح المغلق الذي يحدد الحجم كله (والذي يساوي صفراً) وكذلك حول اسطح الموصلات، وبما أن التكامل مأخوذ حول سطح الوسط، فان المتجه $\hat{e}_n dS$ المرسوم باتجاه خارج الوسط، أي يصبح باتجاه داخل الموصلات، كما هو موضح في الشكل (2–6).

بالاضافة الى ذلك يمكننا بسهولة ايضاح ان المركبة العمودية لـ D هي :

$$\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{n_1}dS_1 = -\sigma dS_1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\int_V \rho\Phi d\tau = -\frac{1}{2}\int_{S_1} \sigma\Phi dS_1 + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}d\tau$$

والطاقة الكلية W تساوي :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\Phi d\tau + \frac{1}{2}\int_{S_1} \sigma\Phi dS_1$$

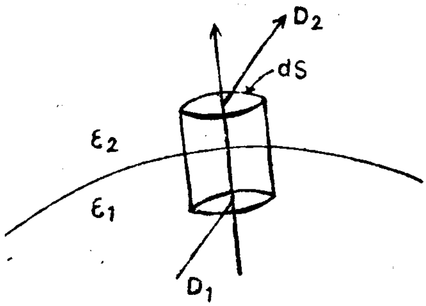
$$= \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}d\tau \qquad (2.43)$$

وهذا التعبير يرينا انه بامكاننا اعتبار الطاقة وكانها متوزعة على الفضاء كله، وبكثافة تساوي $\frac{1}{2}$ D E.

2-10 الشروط الحدودية (Boundary conditions):

عند حل اي مسألة كهربائية مستقرة تتضمن اكثر من وسط عازل واحد يكون من المهم معرفة ماذا يحدث على الاسطح الحدودية (boundary surfaces) التي تفصل المواد المختلفة بعضها عن بعض.

تصور ان قرصاً يحتوي على جزء من سطح حدودي يفصل بين وسطين ومحوره عمودي على السطح الحدودي (الشكل 14-2).



الشكل (2 - 14)

لتكن ϵ_1 و ϵ_2 هما السماحيات النسبية (relative permittivities) للوسطين ، وليكن سمك هذا القرص صغير جداً بحيث ان الزيادة الحاصلة في الفيض الخارج ، الناتجة عنه تأتي فقط من سطحية المستويين. بتطبيق قانون كاوس فان :

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot D \, d\tau = \int_V \rho \, d\tau \qquad (2.44)$$

حيث ان ρ هي كثافة الشحنات الحرة وبما انه لاتوجد اي شحنة حرة على السطح فان :

$$\int_v \nabla\cdot D d\tau = 0$$

وباستخدام مبرهنة التباعد :

$$\int_v \nabla\cdot D d\tau \quad \int_s D\cdot\hat{e}_n dS \qquad (2.45)$$

$$\therefore \quad \int_s D\cdot\hat{e}_n dS = D_1\cdot\hat{e}_{n_1} dS + D_2\cdot\hat{e}_{n_2} dS = 0$$

حيث أن D_1 و D_2 هما قيم D في الوسطين و $\hat{e}_{n_1}$ و $\hat{e}_{n_2}$ هما متجهات الوحدة بالاضافة الى ذلك :

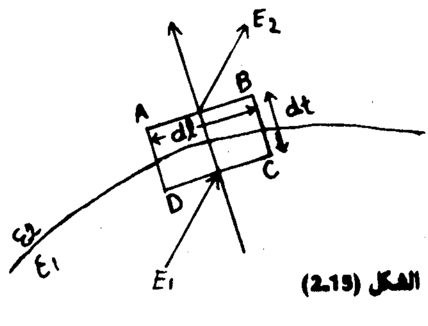
$$\hat{e}_{n_1} = \quad \hat{e}_{n_2} = \hat{e}_n$$

$$\therefore \quad (D_1\cdot\hat{e}_n - D_2\cdot\hat{e}_n)\, dS = 0 \quad or \quad D_1\cdot\hat{e}_n = D_2\cdot\hat{e}_n \qquad (2.46)$$

لذلك فان المركبات العمودية لـ (D) متساوية في الوسطين. وهذا يعني أن D مستمرة.

لنبين الآن المسار المستطيل AB CD على الحدود الفاصلة (الشكل 2.15) بحيث ان الجانبين CD = AB = dl موازيين للسطوح والجانبين الاخرين ايضاً dt = DA = BC عمودياً على السطح.

ليكن E_1 ، E_2 هما المجالان في كلا الوسطين بما أن المجال الكهربائي يمكن حفظه فسوف لاينجز شغل صافٍ عند نقل وحدة شحنة حول المسار المغلق ABC DA.



الشكل (2.15)

$$\therefore \quad \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E_{\parallel(1)}dl - E_{\parallel(2)}dl + \text{contribution from } BC \text{ and } DA$$
$$= 0 \qquad (2\ 47)$$

حيث $E_{11(1)}$،$E_{11(2)}$ يمثلان مركبتي المجال E في الوسطين والموازية للسطح فاذا فرضنا ان BC ، DA أي dt هي في الصفر بحيث تقترب من التلاشي نحصل على :

$$E_{\parallel(1)}\, dl - E_{\parallel(2)}dl \quad 0$$
$$\because \quad E_{\parallel(1)} = E_{\parallel(2)} \qquad (2.48)$$

هذا يعني ان المركبة المماسية (tangential component) للمجال E ، E_{11} مستمرة عبر الحدود الفاصلة.

أن المعادلتين (2–46) و (2–48) تحققان الشرطين الخاصين بمتجه الازاحة D (Displacement vector) والمجال الكهربائي E في منطقة الحدود الفاصلة.

ويمكن صياغة هذه الشروط بالتعبير عنها بمصطلحات الجهد. فاذا كان لدينا وسطان على اتصال مع الجهود ، Φ_1 و Φ_2 على التعادل متساوية في جميع نقاط الاتصال بين الوسطين أي :

$$\Phi_1 = \Phi_2$$
$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \qquad (2.49)$$

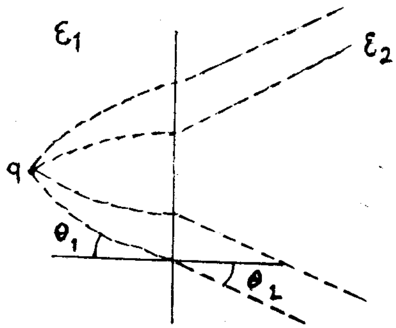
لاحظ ان الشرط الخاص بمتجه الازاحة في المعادلة (2–46) قد تتحقق لافتراضنا عدم وجود شحنات حرة على الحدود الفاصلة.

فاذا كان هناك اي شحنة على الحدود الفاصلة ولتكن كثافتها σ فان المعادلة (2.46) تتغير الى الصيغة الآتية

$$\mathbf{D}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_n - \mathbf{D}_2\cdot\hat{\mathbf{e}}_n = \sigma \qquad (2.50)$$

وهذه هي في الحقيقة المركبة العمودية لـ D فقد ابـدلت هنـا

مثال (2-2) : بين انه عند تغير الوسط العـازل تنكسر خطوط المجـال بموجب القـانون $\epsilon_1 \text{ Cot } \theta_1 = \epsilon_2 \text{ Cot } \theta_2$ حيث θ_1، θ_2 هي الـزاويـــة بين اتجـاه المجـال والخـط العمـودي على السطـح الحـدودي الفـاصـل (كما في الشكل (16-2) و ϵ_1، ϵ_2 هما السماحيات النسبية للوسطين .



الشكل (16 - 2)

بموجب شرط الحد الفاصل الاول (46-2)) فان :

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = \mathbf{D}_2 . \hat{\mathbf{e}}_n$$

أي

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

أو

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \qquad (2.51)$$

ومن الشرط الثاني نحصل على :

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \qquad (2.52)$$

بدمج المعادلتين (51-2) و (52-2) نحصل على :

$$\epsilon_1 \cot \theta_1 = \epsilon_2 \cot \theta_2$$

2-11 العوازل اللاقطبية (Gaseous Non-Polar Dielectrics)

تعامل العوازل في النظرية الكهرومغناطيسية على انها اوساط مستمرة (Continuous medium) والكميات العينية (macroscopic quantities) مثل كثافة الشحنة (charge density) والاستقطاب الكهربائي (electric polarization) تعرف ايضاً بالدوال المستمرة (Contionuous functions) . ونظراً لكون العازل حقاً مجمعاً من الشحنات الموجبة والسالبة يكون من الضروري ايجاد علاقة تربط بين الخواص الكهربائية للجسيمات ذات التركيب المتقطع والخواص القابلة لها للاوساط المستمرة، وسنحاول في هذا الجزء والذي يليه بناء هذه العلاقة. اذا لم يكن المجال كبيراً فان قوة ثنائي القطب المتولد بالحث تتناسب طردياً مع المجال الفعلي المسلط على الجسيم ايوناً كان ام جزيئة وسنسميه E_{local} .

$$\therefore \quad \mathbf{p} = \alpha\epsilon_0 \, \mathbf{E}_{local} \qquad (2.53)$$

حيث $\alpha\epsilon_0$ هو ثابت التناسب و P هو عزم ثنائي القطب المتولد بالحث.

تجدر الاشارة هنا الى ان المجال الموضعي (E_{local},local field) المؤثر على جسيم معين ليس هو نفس المجال العيني (macroscopic field) ، الذي هو عبارة عن معدل المجال في بقعة هي في الكبر بحيث تحتوي على عدد كبير من الجسيمات ويحسب بأخذ معدل المجموع الاتجاهي للمجالات الكهربائية المسلطة على كل ثنائيات القطب الموجودة في الوسط بضمنها الجسيم الذي نريد متجه مجاله الموضعي E_{local} ان المجال الموضعي E_{local} في الحقيقة يساوي المجال العيني E والناتج من بعض الذرات القريبة من الذرات المعينة التي يمكن معاملتها على انها وسط مستمر ذي استقطاب مقداره p، بالاضافة الى الزيادة الناتجة من ثنائيات القطب القريبة ومجال الثنائي الذي نريد حساب مجاله الموضعي. لان مجال هذا الثنائي لايؤثر على نفسه . وهذا صحيح في حالة المواد السائلة والصلبة، اما في حالة الغازات ولكون الجزيئات بعيدة بعضها عن بعض معظم الوقت فان المجالات قصيرة المدى تهمل لذلك فان المجال الموضعي E_{local} يساوي المجال العيني E لذلك ففي حالة الغازات تكون :

$$\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} \text{ (by 2.21)} \tag{2.54}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\chi}{N} \tag{2.55}$$

حيث ان a تسمى قـابليـة استقطـاب (Polarizability) الذرة او الجزيئة ويقيس مقاومة الجيسم للازاحة الحاصلة في سحابته الالكترونية (electron cloud)، اما العامل او المقـدار χ الـذي ظهر في المعـادلتين (21-2) و (54-2) فيسمى المتـأثريـة الكهربـائيـة (electric susceptibility) للوسط.

مثال 3-2 : اشتق معادلة تعبر عن عزم ثنائي القطب المحتث ومنها للتعبير عن قـابليـة الاستقطاب لذرة ذات نموذج قديم (تقليدي) بسيط.

ان الذرة بنموذجها التقليدي البسيط هي عبارة عن شحنة نقطية موجبة Ze محـاطـة بسحابة كروية متناظرة سالبة الشحنة Ze ـ كثافتهـا منتظمـة، في المسـافـة التي تسـاوي نصف قطر الذرة r_0، وتصبح صفراً في انصاف الاقطار الاكبر (larger radii) من ذلك.

اذا وضعت الذرة في مجال كهربـائي E، ستزاح النواة بمسـافـة لتكن 'd' بـاتجـاه المجـال والقوة المسلطة عليها باتجاه المجال ايضاً تساوي ZeE. أن قوة كهربائية مستقرة تنشأ بين النواة وسحابة الشحنة وتحاول اعادة الذرة الى وضعها الاصلي. ان الشحنـة السـالبـة التي تجذب النواة هي بموجب قانون كاوس جزء من السحـابـة الموجودة ضمن الكرة التي نصف قطرها هو 'd' وهذه الشحنة تساوي :

$$\tfrac{4}{3}\pi d^3\rho = \tfrac{4}{3}\pi d^3 \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_0^{\,3}} = \frac{Zed^3}{r_0^{\,3}}$$

حيث ان ρ هي كثافة الشحنة.

$$\therefore \quad \frac{(Ze)(Zed^3/r_0^{\,3})}{4\pi\epsilon_0 d^2} = Z e\mathbf{E}$$

أي أن

$$Ze\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 r_0^{\,3}\mathbf{E}$$

لكن ثنائي القطب الذري P هو :

$$\mathbf{p} = Ze\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \mathbf{E} = \alpha\epsilon_0 \mathbf{E} \tag{2.56}$$

$$\therefore \quad \alpha = 4\pi r_0^3 \tag{2.57}$$

نجد أن قابلية الاستقطاب هنا لاتعتمد على المجال او العوازل التي تتحقق فيها هذه الحالة تسمى العوازل الخطية (linear dielectric).

مثال (2-4) : احسب عزم ثنائي القطب المفرد p في جزيئة رابع كلوريد الكاربون (Carbon tetrachloride) مستخدماً البيانات الاتية، ثم جد كذلك معدل ازاحة الالكترون :

$\epsilon_r = 2.24$ (السماحية النسبية) (relative permittivity)

Density (الكثافة) = $1.60\ gm/cm^3$

Molecular Weight (الوزن الجزيئي) = 156

Field (المجال) = 10^7 Volts / metre

$$\text{(الكثافة الجزيئية)} = N = \frac{\text{Avogadro's number (عدد افوكادرو)}}{\text{Molecular Weight (الوزن الجزيئي)}} \times \text{density الكثافة}$$

$$= \frac{6.02 \times 10^{23}}{156} \times 1.60$$

$$= 6.17 \times 10^{21} \text{ molecules/cm}^3$$
$$= 6.17 \times 10^{27} \text{ molecules / m}^3$$

ان عزم ثنائي القطب لجزيئة واحدة p يساوي :

$$p = \frac{P}{N} = \frac{\epsilon_0 \chi E}{N} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\, E}{N} \quad (\because \quad \epsilon_r = 1 + \chi)$$

$$= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1.24 \times 10^{7}}{6.17 \times 10^{27}}$$

$$= 1.77 \times 10^{-32} \text{ coulomb metres}$$

نفرض ان معدل ازاحة الالكترون تساوي 'd' بما ان هنـاك 74 الكترونـاً في جزيئـة CCl_4 فان :

$$p = 74\, de \text{ and}$$

$$d = \frac{p}{74e}$$

$$= \frac{1.77 \times 10^{-32}}{74 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$= 1.5 \times 10^{-15}\text{m}$$

2-12 العوازل الغازية القطبية (Gaseous polar dielectrics) :-

سندرس الآن تصرف العوازل التي تمتلك جزيئاتها عزم ثنائي قطب دائمي. كما رأينا سابقاً فان المجال الموضعي المؤثر على جزيئة واحدة في الغـازات هو نفس المجـال الخـارجي E.

ان هذا المجال يولد عزم ثنائي قطب محتث آخر على الجزيئة معطياً اياهـا نفس نوع قابلية الاستقطاب للجزيئات اللاقطبية ومن جهة اخرى فان هذا المجال يحـاول ان يرتب ثنائيات القطب المفردة في خط واحد بـالرغم من كون هـذه المحـاولـة ضعيفـة وغير مؤثرة نتيجة الحركة الحرارية للجزيئات. نحن نعرف ان الطاقة الكامنة لثنائي القطب موضوع في مجال كهربائي تساوي :

$$W = -\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -\,p\, E \cos\theta \qquad \text{(انظر المعادلة 1-66)}$$

وتتباين هذه الطاقة مع اختلاف اتجاه ثنائي القطب، فتصبح اقل مايمكن عندما تكون الزاوية Θ تساوي صفراً، اي عندما يكون اتجاه محور ثنائي القطب باتجاه المجال. ولاخذ فكرة عن قيم هذه الطاقة سنحسب مقدار الطاقة اللازم لعكس ثنائي القطب اي جعله باتجاه معاكس لاتجاه المجال وهذا المقدار ببساطة يساوي 2pE وسنفرض ان مسافة الفاصل الذري (atomic spacing) تساوي 10^{-10} متراً والمجال E يساوي 10^{6} فولت / متر فان اقصر طاقة يمكن تحقيقها في العوازل الغازية (gaseous dielectric)، في هذه الحالة تحسب كالآتي :

$$\therefore \quad p = e \times \text{atomic spacing} \qquad \text{(مسافة الفاصل الذري)}$$
$$= 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-10}$$

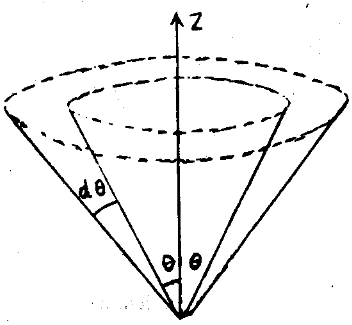
$$2pE = 2 \times 1.6 \times 10^{-29} \times 10^{6} \text{ joules}$$
$$= 2 \times 10^{-4} \text{ eV} \qquad (2.58)$$

وهذه الطاقة اقل من الطاقة الحركية (Kinetic energy) للجزيئة في درجة حرارة الغرفة والتي تكون ذات قيمة 0.04 eV. لذلك فان الحركة الحرارية العشوائية (random thermal motion) لن تتأثر كثيراً بوجود المجال E فيبقى ثنائي قطب بعض الجزيئات في اتجاهات مختلفة على كل حال وبشكل عام ستحاول ثنائيات القطب الاصطفاف بالاتجاه الذي تكون فيه طاقتها الكامنة اقل مايمكن اي باتجاه المجال فنجد بهذا السبب عدداً من الجزيئات تشير بهذا الاتجاه، وستحسب الآن القيمة الصافية للاستقطاب الناتج في هذا الاصطفاف وهذا الحساب ممكن باستخدام طرق الميكانيك الاحصائي (Statistical mechanics).

نفرض أن عدد الجزيئات الموجودة في وحدة الحجم يساوي N. بما انه في غياب المجال الكهربائي تكون احتمالية اتخاذ الجزيئات لطاقة الاتجاهات متساوية (أي ان عدد الجزيئات المتجهة شرقاً يساوي عدد الجزيئات المتجهة غرباً مثلاً) لذلك فان عدد الجزيئات التي تكون ثنائيات قطبها ضمن الزاوية المجسمة $d\Omega$ يساوي $N\frac{d\Omega}{4\pi}$ ومقدار الزاوية المجسمة التي تتراوح بين θ و $\theta + d\theta$ (كما في الشكل 17–2 يساوي :

$$d\Omega = \frac{2\pi r \sin\theta \, r \, d\theta}{r^2} = 2\pi \sin\theta \, d\theta \qquad (2.59)$$

$$\therefore \quad N\frac{d\Omega}{4\pi} = \tfrac{1}{2} N \sin\theta \, d\theta \qquad (2.60)$$



الشكل (17 - 1)

فاذا سلطنا الآن مجالاً مقداره E وباتجاه محور Z فان ثنائيات القطب تحتاج الى طاقة اضافية مقدارها $W = -pE\cos\theta$ ليشكل اتجاه زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال واحتمالية التوزيع هنا تعتمد على عامل بولتزمان (Boltzmann factor) وهو $e^{-W/kT}$ عدد الجزيئات لوحدة الحجم التي توجد ثنائيات اقطابها ضمن المدى بين θ و $\theta + d\theta$ يساوي :

$$N(\theta)\, d\theta = Ce^{-W/kT} d\Omega \qquad (2.61)$$

ونظراً لكون المقدار W/KT صغيراً جداً فيمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} N(\theta)\, d\theta &= C\left(1 - \frac{W}{kT}\right) d\Omega \\ &= C\, 2\pi \sin\theta \left(1 + \frac{pE\cos\theta}{kT}\right) d\theta \qquad (2.62) \end{aligned}$$

العدد الكلي للجزيئات لوحدة الحجم يساوي :

$$= 4\pi C$$

$$\therefore \quad C = \frac{N}{4\pi}$$

and

$$N(\theta) = \frac{N}{2}\sin\theta\left(1 + \frac{pE\cos\theta}{kT}\right) \tag{2.63}$$

وهذه المعادلة ترينا ان عدد الجزيئات التي تكون باتجاه الجال (اي $\cos\theta = 1$) هو أكبر من تلك التي تكون بعكس اتجاه الجال (اي $\cos\theta = 1$) وهذا يطابق المشاهد التي استنتجناها مبكراً وهي ان عدد من ثنائيات القطب سوف يصطف عند وضع الجال. بما ان مركبة ثنائي القطب باتجاه θ مع الجال تساوي $P\cos\theta$ فان المقدار الصافي لعزم ثنائي القطب لوحدة الحجم يساوي :

$$P = \int_0^\pi N(\theta)\, p\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{N}{2}\int_0^\pi \sin\theta\left(1 + \frac{pE\cos\theta}{kT}\right) p\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{Np^2E}{3kT} \tag{2.64}$$

ان هذا المقدار هو ماتساهم به عزوم ثنائي القطب الدائمية الى الاستقطاب. ان الكمية $\frac{p^2}{3kT}$ عادة ماتسمى بقابلية الاستقطاب التوجيهية (orientational polarizability) اضافة الى ذلك فان الجزيئات ستحتاج الى عزم ثنائي قطب محتث باتجاه الجال دون الاخذ بنظر الاعتبار اتجاه عزم ثنائي القطب الدائمي مما يؤدي الى زيادة الاستقطاب بمقدار $Na_0\epsilon_0\epsilon$ حيث ان a_0 هو مايسمى بقابلية الاستقطاب التشوهية (deformation polarizability) لذلك فان مقدار الاستقطاب الصافي P يساوي :

$$\mathbf{P} = \left(N\alpha_0\epsilon_0 + \frac{Np^2}{3kT}\right)\mathbf{E} \tag{2.65}$$

والتأثرية X (Susceptibility) تساوي :

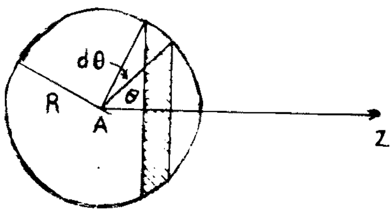
$$\chi = N\left(\alpha_0 + \frac{p^2}{3kT\epsilon_0}\right) \qquad (2.66)$$

ان المعادلة (2.66) كيف تعطينا قياس التأثرية الكهربائية في درجات الحرارة المختلفة ومعلومات عن عزوم ثنائي القطب الدائمية والمحتثة والخط البيـاني للعلاقـة بين χ و $1/T$ هو خط مستقيم ويمثل ميله عزم ثنائي القطب الدائمي وتقاطعه في النقطة $1/T = 0$ يعطينا التأثرية الكهربائية الناتجـة عن الاستقطـاب المحتث بـالاضـافـة الى ذلـك يمكن استنتـاج معلومات مهمة عن اشكال الجزيئات من معرفتنـا للتـأثريـة الكهربـائيـة وعزوم ثنـائي القطب. على سبيل المثال لو اخذنـا جزيئتي ثـاني كبريتيـد الكاربون CS_2 والمـاء H_2O كلتاهما تحتويان على ذرتين متماثلتين بـاواصر مع ذرة مشتركة. وهنـاك الكترون (كهرب) ينتقل عبر هذه الاصرة والتي هي C–S في الجزيئةالاولى وO–H في الثانية وهناك عزوم ثنـــائي القطب لكل آصرة. نظراً لكــون عــزوم ثنـــائي القطب في جــزيئـــة المـــاء H_2O يساوي 6×10^{-30} كولومب / متر ويساوي صفراً في جزيئة CS_2 ويمكننا ان نقول بما ان عزم ثنائي القطب يلغي احدهما الآخر في الجزيئـة CS_2 فـان هـذه الجزيئـة هي خطية اي S–C–S، وان جزيئة H_2O ليست خطية (لاحظ الشكل 1–33).

2–13 السوائل اللاقطبية (Non–polar Liquid)

في بعض العوازل الصلبـة والسـائلـة تكون الجزيئـات قريبـة بعضهـا من بعض لـذلـك لايمكن غض النظر عن تأثير المجالات قصيرة المدى (Short - range fields) على بعضهـا. ويصبح الامر اكثر تعقيداً عند وجود جزيئـات قطبيـة بينهـا لان المجـالات المتولـدة من ثنائيات القطب الدائمية تكون احياناً اكبر بكثير من اي مجال بنيوي ، على كل حال فان المجالات قصيرة المدى في السوائل اللاقطبية ليست قوية ويمكن الحصول على قيمة تقريبية جيدة للمجال الموضعي E_{local} وذلك باتباع الطريقة الآتية :

تصور ان فجوة كروية صغيرة مأخوذة من مادة منتظمة الاستقطاب بما ان الوسط مستقطب فان شحنات الاستقطاب ستظهر على اي سطح من الوسط. المجال في نقطة مثل A داخل الفجوة (وهو المجال الموضعي E_{local}) يساوي المجال البنيوي زائداً المجالات المتولدة من شحنات الاستقطاب على سطح الفجوة (الشكل 2ـ18).



الشكل (18 ـ 2).

ليكن المجال البنيوي المسلط باتجاه المحور Z.

ان كمية شحنات الاستقطاب في عنصر مساحة dS, من سطح الفجوة تساوي $\sigma_P\, dS$, حيث σ_P هي الكثافة السطحية لشحنات الاستقطاب.

$$\sigma_P dS = \mathbf{P}\cdot\hat{e}_n dS = \epsilon_0\chi\mathbf{E}\cdot\hat{e}_n dS$$
$$= -\,\epsilon_0\chi E\cos\theta\, dS \qquad (2.67)$$

حيث ان θ هي الزاوية بين الخط العمودي على dS. واتجاه المجال. والاشارة السالبة تظهر في المعادلة وذلك لكون الخط العمودي الخارج من العازل هو الخط العمودي الداخل الى الفجوة. مقدار المجال الصافي في نقطة A والناتج من شحنات الاستقطاب سيكون باتجاه المحور Z نتيجة التناظر اما مركبة هذا المجال في نقطة A باتجاه Z فتساوي:

$$\frac{\epsilon_0\chi E\cos\theta\, dS\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

حيث R هو نصف قطر الفجوة والمجال الناتج من عنصر المساحة كله $dS = 2\pi R\sin\theta R d\theta$ يساوي :

$$\frac{\epsilon_0\chi E\cos^2\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}\times 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta$$

وقيمة المجال الكلي في نقطة A والناتج من كافة شحنات الاستقطاب على السطح يساوي :

$$\frac{1}{2}\chi E\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \tfrac{1}{3}\chi E$$

لذلك فان المجال المؤثر في نقطة A يساوي :

$$\mathbf{E}_{\text{local}} = \mathbf{E} + (1/3)\chi\mathbf{E}$$

$$= \mathbf{E}\{1 + (1/3)\chi\} \qquad (2.68)$$

$$\therefore \quad \mathbf{P} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E}_{\text{local}}$$

$$= N\alpha\epsilon_0\mathbf{E}\{1 + (1/3)\chi\} \qquad (2.69)$$

$$\therefore \quad \epsilon_0\chi\mathbf{E} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E}(1 + \tfrac{1}{3}\chi) \qquad (2.70)$$

i.e.

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} \qquad (2.71)$$

ويمكن صياغة هذه المعادلات باشكال مختلفة اذا ماتذكرنا أن $X = (\epsilon_r - 1)$ $P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$ فيمكن كتابة المعادلة (2.70) بالشكل الآتي :

$$\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = N\alpha\epsilon_0\mathbf{E} + \frac{N\alpha\epsilon_0\mathbf{E}}{3}(\epsilon_r - 1)$$

أو

$$\epsilon_0(\epsilon_r - 1) = N\alpha\epsilon_0\left\{\frac{2 + \epsilon_r}{3}\right\}$$

كذلك (2.72)

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3}$$

وكان اول من اشتق هذه المعادلة هما كلاوسيوس(Clausuis)وموسوتي (Mossotti) وتعرف بصورة عامة بمعادلة كلاوسيوس وموسوتي (Clausuis –(Mossotti)equation) وترينا هذه المعادلة ان المجال الموضعي اكبر من المجال العيني وتعطينا مقدار هذه الزيادة ايضاً. على كل حال يجب ان يتبادر الى الذهن ان هذه المعادلة او الصيغة (formula) ليست دقيقة جداً لانه استخدم في اشتقاقها كميات تقريبية.

جـــدول (2-2)

«السماحيـــة النسبيـــة لبعض المـــواد في الظروف الطبيعيـــة (درجـــة الحرارة والضغط) N.T.P»

Substance المادة	الغاز Gas		السائل Liquid	
	ϵ_r	الكثــــافـــة ρ (density)	ϵ_r	الكثافة ρ (density)
CS_2	1.0029	0.0034	2.64	1.293
$C\,Cl_4$	1.0030	0.0030	2.24	1.590
O_2	1.0005	0.0014	1.51	1.190
CO_2	1.0010	0.0019	1.61	0.975

2-4 العوازل الصلبة ـ اجسام عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية : (Solid Dielectrics - Electrets)

من السهل تحضير مواد في الحالة الصلبة تمتلك استقطاباً دائمياً يبقى حتى في غياب المجال الخارجي. وعلى سبيل المثال اذا صهرنا كمية من الشمع وتم تسليط مجال كهربائي قوي عليه وهو في حالته السائلة فان ثنائيات القطب تصطف جزئياً وتبقى على هذه الوضعية عند انجماد الشمع. لذلك فان المواد الصلبة المشكلة بهذه الطريقة تمتلك كالمغناطيس عزم ثنائي قطب دائمياً وتسمى اجساماً عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية (electrets) على كل حال فان شحناتها تتفرغ (discharge) عندما تجتذب

شحنات حرة في الهواء. كذلك وجد استقطاب داخل دائمي في بعض البلورات (Crystals) المعقدة، ولكن لانلاحظها لأن مجالاتها الخارجية تتفرغ كما في الاجسام العازلة ذات الاقطاب الكهربائية المختلفة الدائمية (electret).

يمكن تطبيق نظرية ثابت العزل على البلورات التي لها عزم ثنائي قطب دائمي بنفس الخطوات المطبقة في السوائل اللاقطبية.

2-15 اجهادات المجال الكهربائي (Electric Field Stresses) :

سندرس في هذا الجزء كيفية حساب القوى على الاجسام المشحونة والمستقطبة في المجال الكهربائي المستقر، طرق اجهادات المجال (field stresses).

لاحظ فراداي (Faraday) في اثناء دراسته لانحناء خطوط القوى في المجال الكهربائي المستقر ان الخطوط المتجاورة تميل بشكل ظاهر الى التنافر فيما بينها وكان كل انبوب من انابيب القوى يرغب في طبيعته التي هي الشد والانبساط جانبياً، بالاضافة الى ذلك اعتقد فراداي بوجود هذا الضغط والشد (pressures and tensions) في المجالات الكهربائية المستقرة.

لنحاول الآن معرفة كيفية امكان ادخال مضلع الاجهادات المستعملة عادة في الميكانيك واستخدامها في منظومة القوى الكهربائية، حيث ان استخدام كلمة اجهاد في جسم مادي لايخلق اي مشكلة او صعوبة الا ان استخدامها في مجال القوى الكهربائية لايمكن تصوره لاسيما وان هذه القوى تؤثر في الفضاء الخالي فكيف يكون الاجهاد بغياب اي شيء مادي، لذلك فان فكرة الاجهاد في الفضاء الخالي تبدو عديمة المعنى الا اذا آمنا بوجود الاثير (ether) الذي يقوم بنقل الاجهاد وفكرة الاثير كانت مألوفة قبل ظهور النظرية النسبية التي قادت الفيزياويين الى التخلي عنها. اذن ماهو المخرج؟ حسناً، سوف لاندرس كيفية تأثير الشحنات بعضها على بعض عبر الفضاء الخالي، وانما فقط سنراقبها وهي تفعل ذلك وتسعى لبناء هيكل فكري يتضمن الاجهاد والتوتر (strain) الذي يمكننا من حساب مثل هذا التفاعل التبادلي (interaction). سنحاول

الآن الحصول على تعبير تحليلي (analytical expression) للاجهادات والضغوط في المجال الكهربائي ، ان الشد (tension) بمحاذاة خطوط القوى يفترض به ان يحافظ على قوة الحركة الخارقة (ponder motive force) التي تعمل على الموصل الذي تتجمع فيه نهايات خطوط القوة. هذه القوة تعجل في ابتعاد عنصر المساحة بعيداً عن الموصل $\frac{\sigma^2}{2\epsilon} = \frac{1}{2}\sigma E$ لوحدة المساحة، حيث ان σ هي كثافة الشحنة السطحية و E هي شدة المجال الكهربائي، فاذا كانت الانابيب بمثل هذه الحالة من الشد فيجب عليها ان تسلط ضغطاً جانبياً على الانابيب المجاورة واذا لم تتصرف بهذا الشكل فعليها ان تنكمش (Shrink) لتصبح خطاً مستقيماً وبالامكان ايجاد تعبيراً لهذا الضغط بافتراض حالة خاصة نفرض ان مكثف كروي مكون من كرتين نصف قطريهما 'a' و 'b'. وان مستوياً قطع هذا المكثف الى نصفين متساويين عبر مركزه، ان هذين النصفين سيتنافران فيما بينهما، ويرجع سبب ذلك الى الاجهادات في وسط مستوى القطع، وبما ان خطوط القوى شعاعية فاننا نرى ان الاجهادات عمودية على خطوط القوى وهكذا هناك ضغطاً مثل P والمساحة التي يعمل عليها الضغط هي $\pi(b^2-a^2)$ والتنافر الكلي بين النصفين يكون $\mathcal{P}\pi(b^2-a^2)$ - والقوى على وحدة المساحة حول كل نصف كرة هي $\frac{1}{2}\sigma E\pi a^2$ والقوة الكلية المسلطة على نصف الكرة الداخلي $\frac{1}{2}\sigma E\pi b^2$ وعلى نصف الكرة الخارجي هي $\frac{1}{2}\sigma E\pi(b^2-a^2)$.

$$\frac{1}{2}\sigma E\pi(b^2-a^2) = -\mathcal{P}\pi(b^2-a^2)$$

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2}\sigma E \qquad (2.73)$$

فاذا كانت هذه الاجهادات موجودة فستحسب من فعلها الآلي الملحوظ على الموصلات، ومصطلح اجهادات المجال كما طبق في المجال الكهربائي المستقر هو مثال للعلاقة المثمرة بين الآلية او النظرية الكهربائية.

تمارين الفصل الثاني

2-1 لوحان كبيران متوازيان مساحة كل منهما تساوي (A) وتفصل بينهما مسافة (d')، جهد اللوح الاول يساوي صفراً وجهد اللوح الثاني يساوي (v). وضع بينهما لوح ثالث مقدار شحنته (q). جد جهد هذا اللوح؟.

2-2 جد مقدار النقص في الطاقة الذي يحصل عند ربط موصلين سعتهما C_2 , C_1 وجهدهما V_2,V_1 على التوالي بعضهما مع بعض.

2-3 متسعة ذات الواح موصلة متوازية تفصل بينهما مسافة (t) ، فاذا وضع بين لوحيها لوح موصل ثالث سمكه (d'). برهن على ان الزيادة في السعة ستكون بمقدار $\frac{t}{t-d'}$.

2-4 موصل متوازي الالواح تم ملؤه بمادتين عازلتين متساويتين في الحجم ومختلفتين بثابت العزل ϵ_r جد سعة هذا الموصل؟

2-5 جد المجال الكهربائي داخل وخارج كرة من مادة عازلة منتظمة الاستقطاب؟

2-6 اذا علمت ان ثابت العزل لغاز الهيليوم في درجة الصفر المئوي وضغط واحد جو هو 1.000074، جد عزم ثنائي القطب المحتث لكل ذرة اذا ماوضع الغاز في مجال كهربائي ؟

2-7 مكثف كروي يتكون من كرتين متحدتي المركز نصف قطريهما "a" و "d" ($a < d$)، وقشرة كروية سماحيتها ϵ محصورة بين كرتين نصف قطريهما "b" و "c" ومركزها يتطابق مع مركز الكرة، برهن ان السعة C في المكثف تحسب من المعادلة :

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{C} = \frac{1}{a} - \frac{1}{d} + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

2-8 اذا كان مركز كرة موصلة نصف قطرها (r) وتحمل شحنة مقدارها (q) يقع على الحد المستوي الفاصل بين عازلين سماحية كل منهما ϵ_1 و ϵ_2، جد جهد هذه المنظومة، وتوزيع الشحنة على سطوح الكرة؟

2-9 كرة كتلتها (M) ونصف قطرها R عائمة على سطح سائل كثافته (m) وسماحيته ϵ فاذا كان ربع الكرة غاطساً في السائل عندما كانت غير مشحونة. كم يجب ان تكون شحنتها ليغطس نصفها تماماً في السائل؟

2-10 اذا كانت السماحية النسبية لغاز الامونيا NH_3 اذا ماقيست في درجة الحرارة $273^{o}K$ و $373\ ^{o}K$ وضغط واحد جوهما 1.00834 و 1.00487 على التوالي. احسب عزم ثنائي القطب الدائمي لهذا الغاز، وعلى فرض ان قابلية استقطابه هي نفسها لموصل كروي. جد ايضاً نصف قطر جزيئته؟

2-11 برهن ان الطاقة المبذولة في استقطاب عازل هي $\frac{(\epsilon_r - \epsilon_0)E^2}{2}$

2-12 ان سطحين موصلين طويلين اسطواني الشكل ذوي محور واحد تم غطسها عمودياً في سائل عازل. وعندما يصبح مقدار فرق الجهد بين السطحين V فان السائل يرتفع بين (electrodes)، بين السطحين بارتفاع مقداره h. جد المتأثرية الكهربائية لهذا السائل؟

الفصل الثالث

مسائل القيمة الحدودية في مجالات الكهربائية المستقرة

"Boundary Value Problems in Electrostatic Fields"

الفصل الثالث

مسائل القيمة الحدودية في مجالات الكهربائية المستقرة

" Boundary Value Problems in Electrostatic Fields"

سنقدم في هذا الفصل بعض التقنيات المستخدمة عادة في حل المسائل التي تتعلق بالكهربائية المستقرة وسنأخذ قليلاً من المسائل التي يكون فيها استخدام هذه التقنيات ذا فائدة كبيرة. وستوضح الامثلة المختارة الخصائص المهمة للمجال الكهربائي.

3-1 معادلات بواسون ولابلاس (poisson's and Laplace equations)

لاحظنا ان المجال الكهربائي يمكن التعبير عنه بوضوح تام بدلالات جهده حسب المعادلة الآتية :

$$E = -\nabla\Phi$$

وبأخذ تباعد هذه المعادلة نحصل على :

$$\nabla\cdot E = -\nabla\cdot\nabla\Phi = -\nabla^2\Phi$$

ونعرف ايضاً باستخدام قانون كاوس ان :

$$\nabla\cdot E = \rho/\epsilon_0 \qquad (3.1)$$

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$$

وتعرف هذه المعادلة باسم معادلة بواسون (Poisson's equation).
واذا لم تكن هناك اي شحنة في الحيز المعني فان ρ تساوي صفراً.

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad (3.2)$$

وهـذه هي معـادلـة لابـلاس (Laplaces equation) وتطبـق في الحيز الحر من الشحنات.

ان لابلاسيان ∇^2 هو مؤثر غير متجه وله الصيغة الآتية في نظم الاحداثيات الثلاثة المستخدمة بصورة عامة.

(i) نظام الاحداثيات المتعامدة (Cartesian system):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3.3)$$

(ii) نظام الاحداثيات القطبية الكروية (Spherical polar coordinate system):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad (3.4)$$

(iii) نظام الاحداثيات القطبية الاسطوانيه (Cylindrical polar coordinate system):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3.5)$$

يمكن الحصول على حل لمسألة الكهربائية المستقرة عندما يعين الجهد في كل النقاط. وبمعنى آخر يمكن حل المسألة مباشرة بحل معادلة بواسون أو لابلاس. ذلك لأن الجهد المستخلص بهذه الطريقة والمتحقق في شروط حدودية (boundary conditions) معينة تلائم التصورات الخاصة بالالكترودات. مثل هذه المسائل تسمى مسائل القيمة الحدودية (boundary value problems) ان مسائل القيمة الحدودية تخلق مصاعب رياضية مستعصية لكن يمكن حلها تقريباً باستخدام التقنيات العددية (numerical techniques). مع ذلك هناك مسائل قليلة يمكن حلها بصورة دقيقة جداً لكون درجة التناظر فيها عالية جداً وذلك باستخدام سلسلة من الدوال المعروفة وقبل الدخول في مناقشة هذه المسائل ستناقش احدى النظريات المهمة التابعة من معادلتي بواسون ولابلاس.

3.2 مبرهنة ايرنشو (Earnshaw's Theorem) : -

تنص المبرهنة على ان «الجسم المشحون لايمكن ان يبقى في تـوازن مستقر (stable equilibrium) تحت تأثير القوى المستقرة منفردة».

ان اي قيمة قصوى (extremum value) للجهد $\emptyset$ يجب ان تحقق الشرط $\nabla^2\Phi \neq 0$. فاذا كان الجهد Φ اعظم مايمكن فان قيمة $\nabla^2\Phi$ تكون سالبـة اما اذا كان الجهد Φ وطأ مـايمكن فتكون $\nabla^2\Phi$ موجبـة في الحيز الخـالي من الشحنـات تكون $\nabla^2\Phi = 0$، مسـاويـة للصفر (معـادلـة لابلاس Laplace's equation) وهـذا يعني عـدم وجـود قيـة عظمى وقيمة صفرى للجهد. ولكي تستقر الشحنة موجبة يجب ان تكون في نقطـة يكون فيها الجهد اصغر مـايمكن اي $\nabla^2\Phi$ يجب ان تكون موجبـة ـ على كل حـال عرفنـا في الفقرة (3.1) ان كون $\nabla^2\emptyset$ تدل على متجه قيمة عظمى ولذلـــــك فان الشحنة تكون غير مستقرة، اما في حالة كون الشحنـة سـالبـة فـان حـالـة الاستقرار تتطلب ان يكون الحد $\nabla^2\Phi$ سالبـاً بينمـا في معـادلـة بواسون نعرف ان $\nabla^2\Phi = \rho/\epsilon_0$. وهذا يعني انه لاتوجد نقطة في حالة توازن مستقر في المجال الكهربائي المستقر.

هذا لايعني انه لايمكن موازنة شحنة بالقوى الكهربـائيـة المستقرة. وعلى سبيل المثـال اذا كان هناك اربع شحنـات سـالبـة في الرؤوس الاربعـة لمربع، فـان محصلـة القوى على شحنة موجبة في مركز هـذا المربع تسـاوي صفر. ولكن التوازن هنـا ليس مستقراً اي اذا ازيحت الشحنة الموجبة قليلاً فانها لن ترجع الى وضعها المتوازن.

قد نتسائل هنا عن كيفيـة استقرار الـذرات والجزيئـات وهي متكونـة من شحنـات موجبـة وسـالبـة والجواب اذا كانت القوى الكهربـائيـة المستقرة هي القوى الوحيدة السائـدة في الـذرات فـان شحنـاتها كانت ستلتئم مع بعضهـا وتتعـادل الآن حقيقـة كون الـذرات والجزيئـات مستقرة فعلاً وهـذا يعني ان هنـاك قـوى اخرى من طبيعـة مختلفـة موجودة بجانب القوى الكهربائية المستقرة في الذرات والجزيئات.

3-3 الشروط الحدودية ونظرية التوحد
: (Boun dary conditions and uniqueness theorem)

المسائل في الكهربائية المستقرة عادة ماتتضمن حيز محدد من الفضاء. ومن الضروري ان يكون الحل الفيزيائي المنطقي لمادلتي بواسون او لابلاس الخاص بالمسألة هو الحل الصحيح والوحيد لها، وسنوضح هنا ان الجهد Φ حقيقي في مشتقته الاولى والثانية هو حقاً مستمر في حيز معين وان :

أ- قيمة الجهد Φ على سطح مغلق هو قيمة نوعية (شرط ديرخليت)(Dirichlet condition) أو

ب - المشتقة الاعتيادية للجهد $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$.$\Phi$ أي متجه المجال هو نوعي ايضاً في كل مكان على السطح المغلق (شرط نيومان) وان الحل احادي فقط.

ان المبرهنة التي سنبرهن عليها تسمى مبرهنة التوحيد (Uniqueness theorem) وتعتبر من المبرهنات الاساسية لنظرية الجهد.

نفرض ان ليس هناك حلاً واحداً فقط وانما حلان لمادلة لابلاس Φ_1 و Φ_2 ضمن الحيز المحدود وتحقق الشروط الحدودية.

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \text{ at the boundary.} \qquad \text{(عند الحدود)} \qquad (3.6)$$

لتكن

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$

لذلك (عند الحدود)

$$\Phi = 0 \text{ and } \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ at the boundary.} \qquad (3.7)$$

بما أن Φ_1 و Φ_2، هما حلان لمادلة لابلاس.

$$\nabla^2\Phi_1 = \nabla^2\Phi_2 = 0$$

$$\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2\Phi = 0 \qquad (3.8)$$

أي ان Φ هي ايضاً حل آخر لمعادلة لابلاس، سنستخدم الآن نظرية كرين المعروفة (Green's theorem) ونمني :

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V [\psi \nabla^2 \phi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi] d\tau \qquad (3.9)$$

حيث ψ و ϕ هما دالتان عدديتان اعتباطيتان و $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ ـ هي المشتقة الاعتيادية لـ ϕ على السطح و dS و $d\tau$ هما عنصري مساحة وحجم على التوالي. اذا جعلنا $\psi = \phi = \Phi$ فاننا نحصل على :

$$\int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_V \left[\Phi \nabla^2 \Phi + \left|\nabla\Phi\right|^2\right] d\tau \qquad (3.10)$$

لأي شرط كان من الشروط الحدودية فان الجانب الايسر للمعادلة (3.6) يضمحل او يزول، بالاضافة لذلك فان الحد $\nabla^2 \Phi$ يساوي صفراً في المعادلة (3.8).

$$\int_V \left|\nabla\Phi\right|^2 d\tau = 0 \qquad (3.11)$$

بما ان التكاملية (integrand) هو قيمة محددة موجبة

$$\nabla \Phi = 0 \qquad (3.12)$$

وبالتالي فان $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = C$ و C ثابت خلال الحجم. اذا تحقق شرط ديرخليت على السطح فان C = 0 على السطح (من المعادلة (3.6) وعليه فهو يساوي صفر خلال الحيز وان $\Phi_1 = \Phi_2$ أي هناك حلاً واحداً فقط، من جهة اخرى فان شرط نيومان يتحقق ايضاً على السطح.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{a constant}$$

بما ان الثابت عشوائي فيمكن اعتباره صفراً ويكون الحل ايضاً احادياً

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

لاحظ انه اذا تحقق شرط ديرخليت على جزء من السطح S وتحقق شرط نيومان على الجزء المتبقي فان الطرف الايسر من المعادلة (30-1) يزول ويبقى هناك حلاً واحداً فقط.

3.4 حل معادلة لابلاس في احداثيات متعامدة

:(Solution of Laplace's Equation in Rectangular Coordinates)

سنتناول الآن بعض الطرق لحل المسائل التي لايوجد فيها شحنات حرة. ولذلك فاننا سنهتم بمعادلة لابلاس والتي يعبر عنها في الاحداثيات المتعامدة بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3.13)$$

سنفرض ان حل هذه المعادلة، $\Phi\ (x, y, z)$ يتمثل في حاصل ضرب دوال هي، $X(x)$، $Y(y)$ ، $Z(z)$. وكل واحد منها يعتمد على احداثي واحد فقط لذلك، ولتكن :

$$\Phi(x, y, z) = X(x)\ Y(y)\ Z(z) \qquad (3.14)$$

وبالتعويض في المعادلة (3.13) مع القسمة على $X(x)\ Y(y)\ Z(z)$، نحصل على :

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (3.15)$$

لاحظ اننا قمنا باحلال مشتقات كلية (total derivatives) محل مشتقات جزئية (Partial derivatives) وهذا ممكن في هذه الحالة لان كل مشتقة تتضمن احداثي واحد فقط.

ولكي تسري المعادلة (3.15) على اي قيم عشوائية للاحداثيات المستقلة فان كل حد في الطرف الايسر يجب ان يساوي ثابتاً، لذلك :

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = k_1^2\ ;\ \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = k_2^2\ ;\ \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = k_3^2 \qquad (3.16)$$

وتحقيقاً للشرط الذي ينص على أن :

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0 \tag{3.17}$$

فاننا نجد ان كل هذه الثوابت ليست حقيقية وليست كلها خيالية. وعلى الاقل يجب ان يكون احدها حقيقي والآخر خيالي. والثالث اما حقيقي او خيالي. اما اذا فرضنا ان الثوابت k_1^2, k_2^2, k_3^2 هي :

$$k_1^2 = -\alpha^2, k_2^2 = -\beta^2, \text{ and } k_3^2 = \gamma^2$$

فان المعادلة (3.16) يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2, \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2$$
$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \tag{3.18}$$

ويمكن التحقق من ان حل هذه المعادلات هو :

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{i\beta y} + B_2 e^{-i\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{3.19}$$

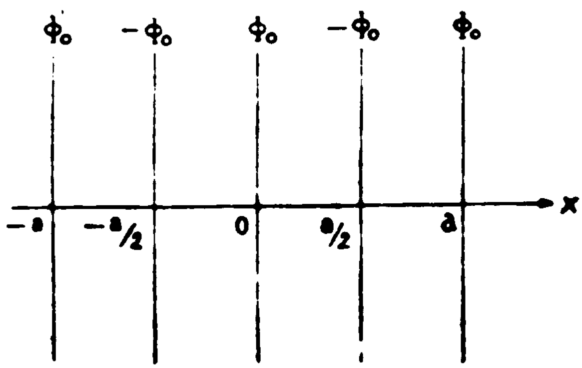
من الواضح ان الحلين الاولين هما حلين متذبذبين (oscillatory) بينما الحل الاخير ذو طبيعة اسية (exponential) ـ الجهد Φ هو حاصل ضرب هذه الدوال ويمكن ايجاد هذه الثوابت من الشروط الحدودية التي يحققها الجهد.

ربما يلاحظ ان المعادلة (3.19) هي احد الحلول الخاصة للمعادلة (3.15) ، اي قد تكون هناك قيم اخرى لـ α, β, γ لاتعطي حلولاً صحيحة اخرى. لذلك فان الصيغة العامة للحلول تكتب بالشكل الآتي :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{r, s, t}^{\infty} (A_1^r e^{i\alpha_r x} + A_1^r e^{-i\alpha_r x})$$
$$\times (B_1^s e^{i\beta_s y} + B_2^s e^{-i\beta_s y})(C_1^t e^{\gamma_t z} + C_2^t e^{-\gamma_t z}) \tag{3.20}$$

وسنوضح طريقة استخدام هذه الطريقة في حل المثالين الآتيين :

مثال (1-3): لديك ، مجموعة اسلاك موضوعة بصورة موازية للمحور (y) وتقع في المستوى الذي تكون فيه Z مساوية للصفر. ومرتبة على محور X بحيث تفصل بينها مسافات متساوية هي $x = \pm n\left(\frac{a}{2}\right)$ حيث ان n تساوي صفر، 1,2,3، ... الخ. الاسلاك الفردية الموقع (اي ان n تساوي عدد فردي) لها جهد قيمته Φ_0 - والاخرى زوجية الموقع لها جهد قيمته Φ_0. جد الجهد في كل نقاط الفراغ.



الشكل (1 - 3)

ان الجهد Φ لايعتمد على y ويتغير دورياً مع X. وبما انه دالة زوجية لـ (X) ، فيمكن تمثيله بتسلسلة الجيب تمام (Cosine series).$\left(\cos\frac{2\pi kx}{a}\right)$ اما اعتيادية دالة الجهد Φ على Z فهي غير معروفة ولكن كما قلنا اعلاه يمكن التوقع بأنها اسية (exponential) لذلك فان Φ لها الصيغة العامة :

$$\Phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(z) \cos \frac{2\pi kx}{a} \qquad (3.21)$$

مع ذلك لازلنا بحاجة لتعيين الصيغة f (z)، اذا كان هذا الجهد Φ جهداً صحيحاً، فانه يجب ان يحقق معادلة لابلاس وهي $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$ في المنطقة الموجودة فوق الاسلاك حيث لاتوجد اي شحنة •

$$\therefore \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{4\pi^2k^2}{a^2} f_k(z) \cos\frac{2\pi kx}{a} + \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial z^2} \cos\frac{2\pi kx}{a} \right\} = 0.$$

وهذه المعادلة يجب ان تكون صحيحة لأي قيمة للعامل K.

$$\therefore \quad -\frac{4\pi^2k^2}{a^2} f_k(z) + \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial z^2} = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$f_k(z) = A_k e^{\pm\frac{2\pi k}{a}z}$$

حيث ان A_k هو ثابت.

ان طبيعة السؤال هذا تتطلب ان تكون قيمة Z اكبر من الصفر، لذلك فاننا سنحتفظ بالقيمة السالبة لهذا الاس.

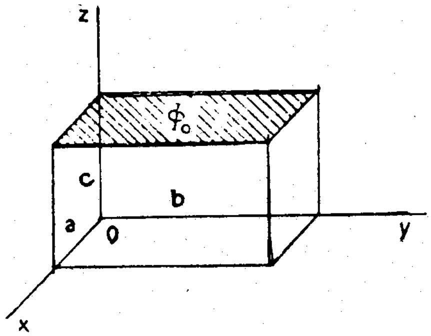
$$\therefore \quad f_k(z) = A_k e^{-\frac{2\pi k}{a}z}$$

لذلك ،

$$\Phi(x, z) = \sum_k A_k e^{-\frac{2\pi k}{a}z} \cos\frac{2\pi kx}{a} \quad \text{for} \quad z > 0 \qquad (3.22)$$

عندما تكون Z = 0 ، فان الجهد Φ, المحسوب من المعادلة (3.22) يجب ان يطابق الجهد الموصوف **(prescribed potential)** وهذا يتطلب تعيين الثابت A_k.

مثال (3ـ2): صندوق متوازي المستطيلات ابعاده باتجاه المحاور الثلاثة X,y,Z هي c,b,a على التوالي كما موضح في الشكل (3ـ2). فاذا كان جهد السطح المظلل ϕ_o بينما جهد الاسطح الاخرى هو صفر. جد الجهد في نقطة ما داخل الصندوق.



الشكل (2 - 3)

بما ان الجهد يساوي صفر في النقاط X=0وX=a وكذلك في النقاط$y = 0$, y=b فان الدالتين Y,X يجب ان تكونان بالصيغة الآتية :

$$X = \sin \alpha x, \quad Y = \sin \beta y$$

$$\text{where } \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \qquad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

بالاضافة لذلك ولكون Y , X متذبذبان فان Z وهي جزء من الجهد يجب ان تكون اسية لذلك فان صيغة الجهد يجب ان تكون كالآتي :

$$\Phi = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sinh \gamma_{mn} z$$

$$\text{where} \quad \gamma_{mn} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \text{(see 3.17)}.$$

(انظر 73–1).

لقد تم التعبير عن العامل الاسي بصيغة دالة الجيب الزائدي (hyperbolic sine function)

لاحظ أن :

$$\{\text{Note: } e^{\pm \gamma_{mn} z} = \cosh \gamma_{mn} z \pm \sinh \gamma_{mn} z\}$$

لذلك فان الحل العام يكون :

$$\Phi = \sum_{n,\, m}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sinh \gamma_{mn} z \qquad (3.23)$$

3.5 معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكروية

–: (Laplace's Equation in Spherical polar Coor dinates)

عندما يكون للسؤال تناظر محوري يكون من الملائم عادة استخدام احداثيات قطبية كروية $r, \theta, \phi,$ ، واتخاذ محور التناظر كمحور قطبي (polar axis) $\theta = 0$

تأخذ معادلة لابلاس الصيغة الآتية في الاحداثيات القطبية الكروية :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (3.24)$$

لقد استخدمنا الرمز V للتعبير عن الجهد وذلك تلافياً للاتباس الذي قد يحصل مع رمز الاحداثي ϕ.

سنستخدم اسلوب فصل المتغيرات كما في حالة الاحداثيات المتعامدة للبحث عن حل للصيغة (3.25) :

$$V = RS \qquad (3.25)$$

حيث R هي دالة r فقط و S هي دالة الاحداثيات الزاوية θ و ϕ فقط. وبالتعويض في المعادلة (3.24) نحصل على :

$$\frac{S}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (3.26)$$

وبتقسيم المعادلة على الحد RS/r^2 نحصل على :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{S \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{S \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (3.27)$$

وهكذا نجد ان الحد الاول هو دالة لـ r فقط، بينما الحدين الباقيين لايعتمدان على r. وتتحقق هذه المعادلة اذا اعتبرنا الحد الاول مقدار ثابت ليكن K أي :

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = K \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} = -K \tag{3.29}$$

ان حل هذه المعادلات يأخذ صيغة حسبت اذا مااعتبرنا الثابت K مساوياً الى $l(l+1)$ حيث ان l حد ثابت اختياري أيضا لذلك فان حل المعادلة (28–3) يكون:

$$R = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{3.30}$$

حيث A و B هما ثابتان اختياريان ،والآن يمكن كتابة المعادلة (29ـ3) بالشكل الآتي :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} = -l(l+1)S \tag{3.31}$$

اي حل لهذه المعادلة يكون السطح S_l دالة θ و ϕ وتسمى توافقاً سطحياً (surface harmonic) ذا درجة l، لذلك يكون حل معادلة لابلاس (24–3) كالآتي :

$$V = RS = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right)S_l \tag{3.32}$$

اي حل لمعادلة لابلاس يسمى توافق كروي (spherical harmonic) ستبقى نفس التقنية المستخدمة لحل المعادلة (24–3) في حل المعادلة (21–3) وعليه :

$$S = P(\theta)\,Q(\phi) \tag{3.33}$$

حيث $P(\theta)$ هو دالة لـ θ فقط و $Q(\phi)$ هو دالة لـ ϕ فقط. وبالتعويض في المعادلة (3-31) نحصل على :

$$\frac{Q}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{P}{\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2}+l(l+1)PQ=0 \qquad (3.34)$$

وبتقسيم المعادلة على $PQ/\sin^2\theta$ نحصل على :

$$\frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=0 \qquad (3.35)$$

نجد ان الثوابت هنا منفصلة ايضاً والحدين الاولين هما دالة لـ θ فقط وان الاخير دالة لـ ϕ فقط.

لتكن:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=-m^2 \qquad (3.36)$$

حيث ان m^2 هو ثابت ، وحل هذه المعادلة هو :

$$Q_m=Ce^{\pm im\phi} \qquad (3.37)$$

حيث ان C هو ثابت ، ولتكن هناك قيمة واحدة للجهد فقط يكون من الضروري ان نجعل :

$$e^{\pm im\phi}=e^{\pm im(\phi+2\pi)} \qquad (3.38)$$

وهذا يكون صحيحاً فقط عندما تكون m عدداً صحيحاً. ولجعل دوال Q_m عيارية او متناسقة يجب اختيار قيمة للثابت C بحيث ان :

$$\int_0^{2\pi} Q_m^* Q_m d\phi = 1.$$

ولتحقيق هذا يجب ان تكون قيمة C هنا مساوية لـ $(1/\sqrt{2\pi})$ ان دوال Q_m هي ايضاً متعامدة (orthogonal) اي ان :

$$\text{i.e.} \int_0^{2\pi} Q_m^* Q_n d\phi = 0 \qquad \text{if } m \neq n$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} Q_m^* Q_n d\phi = \delta_{mn} \qquad (3.39)$$

3-6 معادلة ليكندر (Legendres' Equation) :-

باستخدام المعادلة (3-31) يصبح الجزء الخاص بـ θ في المعادلة (3-35) بالشكل الآتي :

$$\frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta = m^2$$

وبتقسيم المعادلة على الحد $\sin^2\theta/P$ نحصل على :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+l(l+1)\ P-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P=0 \qquad (3.40)$$

سنحول هذه المعادلة بجعل $x=\cos\theta.$

$$\left(\therefore \quad \frac{d}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}=-\sin\theta\frac{d}{dx}\right)$$

فان المعادلة تتغير الى :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0 \qquad (3.41)$$

وهذه تسمى المعادلة العامة لليكندر ، اما اذا جعلنا قيمة m تساوي صفراً ، فاننا نحصل على المعادلة الاعتيادية لليكندر ونعني :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+l(l+1)\,P=0$$

$$(1-x^2)\,P''-2x\,P'+l\,(l+1)\,P=0 \qquad (3.42)$$

سنحاول اولاً الحصول على حل للمعادلة (3–42) وذلك عن طريق سلسلة من التكاملات. لنفرض ان الحل هو :

$$P\,(x)=a_0x^\lambda+a_1x^{1+\lambda}+a_2x^{2+\lambda}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda} \qquad (3.43)$$

اذ علينا ايجاد الثابتين a_k و λ ، وبالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,(k+\lambda)\,(k+\lambda-1)\;x^{k+\lambda-2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Big[\,(k+\lambda)\,(k+\lambda-1)+2\,(k+\lambda)-l(l+1)\,\Big]x^{k+\lambda}=0 \qquad (3.44)$$

وهذه المعادلة يجب ان تقبل اي قيمة لـ X. لذلك فان معامل اي قوة لـ X يجب ان يزول. يمكن ايجاد اوطأ قوة لـ X من المعادلة (3–44)(اذا ماجعلنا k=o) فيكون (λ – 2) لذلك فان معامل الحد $x^{\lambda-2}$ يجب ان يكون صفراً اي

$$a_0\,\lambda\,(\lambda-1)=0 \qquad (3.45)$$

وتعرف هذه المعادلة باسم المعادلة الاسية (indicial equation) ومادام $a_0 \neq 0$ (لأن المفروض ان تكون معامل اوطأ طاقة ممكنة) فاما : $\lambda = 1$ أو $\lambda = 0$

ان معامل $x^{j+\lambda}$ (عندما تكون j هي اي قيمة لـ K) يمكن ايجاده من المعادلة (3-44)، اذا فرضنا ان K تساوي لـ (j+2) في الحد الاول وتساوي لـ j في الحد الثاني :
اي :

$$a_{j+2}(j+\lambda+2)(j+\lambda+1) - a_j[(j+\lambda)(j+\lambda+1) - l(l+1)]$$

ويجب ان تكون صفراً وبذلك فان

$$\therefore \quad a_{j+2} = \frac{(j+\lambda)(j+\lambda+1) - l(l+1)}{(j+\lambda+2)(j+\lambda+1)} a_j \qquad (3.46)$$

لذلك اذا عرف a_j فان a_{j+2} تعرف ايضاً. واذا ابتدأنا بقيمة اختيارية لـ a_0 يمكن حساب a_2 و a_4.... الخ ومن جهة اخرى يمكن ايجاد قيم a_3 ، a_5 ... ، الخ بتعيين قيمة اختيارية ايضاً لـ a_1 اخذين في حسابنا هذا قيمة $\lambda = 0$, على انها صفر.

$$\therefore \quad a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad (3.47)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{l(l+1)}{2!} a_0 \\
a_4 &= \frac{6 - l(l+1)}{4.3} a_2 = -\frac{6 - l(l+1)}{4.3} \frac{l(l+1)}{2!} a_0 \\
&= \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!} a_0 \\
a_6 &= -\frac{(l-4)(l-2)l(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} a_0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_3 &= \frac{2 - l(l+1)}{3.2} a_1 = -\frac{(l-1)(l+2)}{3!} a_1 \\
a_5 &= \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (3.48)$$

لذلك

$$P_1 = a_0\left\{ 1 - \frac{l(l+1)}{2\,!} x^2 + \frac{(l-2)\,l\,(l+1)\,(l+3)}{4\,!} x^4 \ldots\ldots \right\} \tag{3.49}$$

$$P_2 = a_1\left\{ x - \frac{(l-1)\,(l+2)}{3\,!} x^3 + \frac{(l-3)\,(l-1)\,(l+2)(l-4)}{5\,!} x^5 \ldots\ldots\ldots \right\} \tag{3.50}$$

وهذان حلان لمعادلة ليكندر (3-42) والحل العام هو

$$W = AP_1 + BP_2 \tag{3.51}$$

وهكذا وجدنا حلول معادلة لكيندر. ولكن هل لهذه الحلول اهمية اعتماداً على خواصها المتقاربةه‍السلسلة متقاربة اذا كانت النسبة بين حدين ناتجين اي $\frac{a_{j+2}}{a_j} x^2$ اصغر من وحدة واحدة لـ j الكبيرة .

وجدنا من (3-47) ان النسبة :

$$\frac{a_{j+2}}{a_j} = 1 \text{ as } j \to \infty$$

السلسلة ستتقارب اذا كانت $x^2 < 1$ ،اي ان قيمة X تقع في المدى 1 - الى 1 +. وبما ان X في مسألتنا تخص $\cos\theta$ اذاً فهي تقع في المدى 1- الى 1 + على كل حال اذا كانت $x = \pm 1$ فان السلسلة ستتباعد والحل يصبح غير مقبول الا اذا انتهت او تحددت السلسلة لتصبح متعددة الحدود (polynomial) تفحص المعادلتين (3-49) , (3-50) سيبين ان p تنتهي او تتحدد مع امتلاك X لأعلى أس من المألوف معادلة متعددات

الحدود هذه لجعلها تمتلك قيمة وحدوية في x = 1 وعندها تسمى متعددة الحدود ليكندر من الترتيب 1. ويرمز لمتعددة الحدود هذه بالرمز $P_l(x)$: ويحدث التعادل عند اخذ :

$$a_0 = \frac{1}{1 - \frac{l(l+1)}{2\,!} + \ldots \text{up to the cofficient of the highest power of } x} \tag{3-52}$$

(الى معامل اعلى أس لـ X)

$$a_1 = \frac{1}{1 - \frac{(l-1)(l+2)}{3\,!} + \ldots \text{up to the coefficient of the highest power of } x} \tag{3.53}$$

وهكذا نأخذ من المعادلتين (3 ـ 49) و (3ـ50) :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{for } l = 0,\ a_0 = 1 \text{ and } P_0(x) = 1 \\
\text{for } l = 1,\ a_1 = 1 \text{ and } P_1(x) = x \\
\text{for } l = 2,\ a_0 = -\tfrac{1}{2} \text{ and } P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
\text{for } l = 3,\ a_1 = -\tfrac{3}{2} \text{ and } P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)
\end{array}\right\} \tag{3.54}$$

والصيغة العامة لـ $P_l(X)$ هي :

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r (2l - 2r)\,!}{2^l r!\,(l-r)!\,(l-2r)!}\, x^{l-2r} \tag{3.55}$$

حيث $N = \frac{l}{2}$ اذا كان (l) زوجياً و $N = \frac{l-1}{2}$ اذا كان (l) فردياً .

وتعطينا صيغة رودريك (Rodrigues formula) ابسط تمثيل لمتعددة حدود ليكندر (Legendre polynomials) ونعني بها

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l\,!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l \tag{3.56}$$

وبامكانك اقناع نفسك بأن هـذه الصيغـة تعطي نفس التعبير لـ $P_\ell(x)$ كالـذي تعطيـه المعادلة (3–55) عند اخذ نفس قيم ℓ.

هناك طريقة اخرى بعد للتعبير عـــن متعـددة حـــدود ليـــكنـدر اذا مـددنـا المقـــــدار $(1-2xs+s^2)^{-1/2}$ حسب مبرهنـــة مـــاكلـورين (Maclaurians theorem) سنجد ان معاملات قوى مختلفة لـ S هي متعددة حدود ليكندر اي :

$$(1-2xs+s^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, s^l \qquad (3.57)$$

والدالة $(1-2xs+s^2)^{-1/2}$ تسمى الدالة المولدة (generating function) لمتعددة حدود ليكندر.

سنبرهن الان ان متعددة الحدود ليكندر تكـــون مجموعـــــة تعـامـديـة كاملـة (Complete orthogonal set) من الدوال.

سنكتب معادلة ليكندر بالصيغة الأتية :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_l'(x)\right] + l(l+1)\, P_l(x) = 0. \qquad (3.58)$$

وعند ضربها بالمقدار $P_q(x)$ وتكاملها ضمن الحدود (1,1–) نحصل على :

$$\int_{-1}^{1} P_q(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P_l'(x)\right]dx + l(l+1)\int_{-1}^{1} P_q(x)\, P_l(x)dx = 0$$

$$\therefore \quad \left[P_q(x)\left\{(1-x^2)\, P_l'(x)\right\}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)\, P_l'(x)\, P_q'(x)\, dx$$

$$+\, l(l+1)\int_{-1}^{1} P_q(x)P_l(x)dx = 0$$

الحد الاول يزول عند كلتا النهايتين .

$$\therefore \quad -\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_l'(x)P_q'(x)dx + l(l+1)\int_{-1}^{1} P_q(x)P_l(x)dx = 0 \quad (3.59)$$

وبتبادل (inter changing) ℓ و q نحصل على :

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P'_q(x)P'_l(x)dx+q(q+1)\int_{-1}^{1}P_l(x)P_q(x)dx=0 \quad (3.60)$$

وبطرح (60–3) من (59–3) نحصل على :

$$\Big\{l(l+1)-q(q+1)\Big\}\int_{-1}^{1}P_l(x)P_q(x)\,dx=0 \qquad (3.61)$$

$$\text{If}\quad l\neq q,\qquad \int_{-1}^{1}P_l(x)P_q(x)dx=0 \qquad (3.62)$$

الذي يثبت ان متعددات حدود ليكندر لمختلف الرتب هي متعامدة. اذا كانت $l=q$، فان التكامل يصبح محدداً وقيمة المقدار $\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2dx$ يمكن ايجادها بسهولة باستخدام الدالة المولدة $(1-2xs+s^2)^{-1/2}$.

وهكذا.

$$(1-2xs+s^2)^{-1}=\Big[\sum^{\infty}P_l(x)s^l\Big]^2 \qquad (3.63)$$

$$\int_{-1}^{1}(1-2xs+s^2)^{-1}\,dx=\int_{-1}^{1}\Big[\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)s^l\Big]^2dx.$$

وبتكامل الطرف الايسر :

$$\frac{1}{s}\ln\frac{1+s}{1-s}=\int_{-1}^{1}\Big[\sum_{l=0}^{\infty}s^lP_l(x)\Big]^2dx$$

بما ان حاصل الحدود في الجمع في الطرف الايمن يزول نتيجة حالة التعامد ، لذلك.

$$\frac{1}{s}\ln\frac{1+s}{1-s}=\sum_{l=0}s^{2l}\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2dx \qquad (3.64)$$

بتمديد الطرف الايسر وتسوية معاملات اس S^2 نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\left[P_l(x)\right]^2 dx=\frac{2}{2l+1},\ l=0,1,2,\ldots \qquad (3.65)$$

ويمكن كتابة حالة التعامد بالشكل الآتي :

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\,P_q(x)\,dx=\frac{2}{2l+1}\,\delta_{ql} \qquad (3.66)$$

والتعامد العياري لدوال ليكندر هو :

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,P_l(x)$$

لذلك عندما تكون m=0 اي في المسائل التي لها تماثل سمتي (azimuthal symmetry) ، يكون حل معادلة لابلاس هو :

$$V=R(r)\,S(\theta)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\;P_l(\cos\theta) \qquad (3.67)$$

بما ان متعددات الحدود ليكندر تكون مجموعة تعامدية كاملة في الدوال فان اي دالة f(x) ضمن فاصل (interval) $-1\leqslant x\leqslant 1$ يمكن التعبير عنها بصيغة متعددة الحدود ليكندر على الشكل الآتي :

$$f(x)=C_0+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+\ldots\ldots$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x) \qquad (3.68)$$

لاجل ايجاد معامل C_l سنضرب الطرفين بالحد $P_m(x)$ ونأخذ التكامل :

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\sum^{\infty} C_l\int^{1} P_l(x)P_m(x)dx=\frac{2C_m}{2m+1}$$

$$\therefore \quad C_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x)dx \qquad (3.69)$$

ووجد ان هذه الخاصية مفيدة في حل بعض المسائل.

3-7 دوال ليكندر المرافقة (Associated Legendre functions)

سنناقش الآن حل معادلة لابلاس عندما يـــكون للجـــهد تغيـــر سمتـــي (azimuthal variation) اي أن $m \neq 0.$ نحن نعرف أن $y = P_l(x)$ هو حل المعادلة :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)\,y = 0 \qquad (3.70)$$

وعند تفاضلها m من المرات ، نحصل على :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} - 2x(m+1)\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (l-m)(l+m+1)\frac{d^my}{dx^m} = 0 \qquad (3.71)$$

اذا جعلنا ·

$$v = \frac{d^my}{dx^m} = \frac{d^mP_l(x)}{dx^m} \qquad (3.72)$$

ستتغير المعادلة (3-71) الى :

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} - 2x(m+1)\frac{dv}{dx} + (l-m)(l+m+1)v = 0 \qquad (3.73)$$

وهذه المعادلة متحققة بوضوح بالتعويض :

$$v = \frac{d^mP_l(x)}{dx^m}$$

واذا وضعنا تعويضاً آخر مثل :

$$w = v(1 - x^2)^{m/2} \qquad (3.74)$$

سنحصل على :

$$(1 - x)^2 \frac{d^2w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] w = 0 \qquad (3.75)$$

وهذه هي نفسها معادلة ليكندر العامة (3-41) وحلها هو :

$$w = v\,(1 - x^2)^{m/2} = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = P_l^m(x). \qquad (3.76)$$

حيث مثلناها بالرمز $P_l^m(x)$. والدوال $P_l^m(x)$ ا المعرفة كما في اعلاه تسمى متعددة الحدود ليكندر المرافقة (associated Legendre poly nomials). شروط التعامد المتعددة الحدود المرافقة لليكندر هي :

$$2 \quad (l + m)!\ \delta \qquad (3.77)$$

لذلك فان التوافقيات السطحية العيارية :
(surface harmonics) يعطي حسب المعادلة الآتية :

$$S_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l + 1)(l - m)!}{4\pi(l + m)!}}\; P_l^m (\cos \theta)\, e^{im\varphi} \qquad (3.78)$$

ويمكن كتابة الحل العام لمعادلة لابلاس بالشكل الآتي :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] S_{lm} (\theta, \varphi) \qquad (3.79)$$

ويوضح الجدول (1-3) بعـــــض الدوال التوافقيـــــة الكرويـــة (Spherical harmonic functions)

جـدول (1-3)

$$S_{1,0} = +\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

$$S_{1,1} = -\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$S_{1,-1} = +\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$S_{2,0} = +\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$S_{2,1} = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta \sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

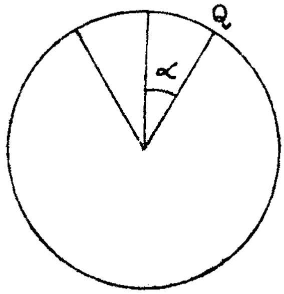
ربما سنعتقد ان المعالجة التي اعطيت في الاجزاء القليلة الماضية عبارة عن هراء في هراء (hocus - focus) ولكن لاتيأس تمالك نفسك ولنحل بعض الامثلة وسنجد فائـدة الصيغ المعطاة ومدى سهولة استخدامها وتسهيلها حل بعض المسـائل الفيزيـاويـة المعقـدة ولكن قبل البدء بالاسئلة يجب ملاحظة مايلي :

(i) اذا كان الحيز المعني يتضمن الفضاء الكلي داخل كرة ما،فيجب هنـا ازالـة الحـدود التي تقترب من اللانهاية في الحيز،اي كل $B_{\ell m}$ يجب جعلها صفراً،ذلـك لأننـا نعني بحل محـدد فقط.

(ii) اذا كان الحيز لايتضمن نقطة الاصل يجب اعادة $B_{\ell m}$.

(iii) اذا كنـــا نعنـــــي الشـــــروط الحدوديـــــة المتماثلــــــة (Spherical Symmetrical boundary conditions) سنأخـذ بنظر الاعتبـار الحـدود ذات $m = 0$ فقط.

مثال (3-3) : جد جهد قبة كروية (spherical cap) ذات زاوية α ومشحونة الى الحد الذي اصبح لها كثافة سطحية منتظمة مقدارها σ_0 (الشكل 3-3)،



الشكل (3 ـ 3)

يمكن اعتبار القبة الكروية على انها جزء مقطوع من سطح كرة بواسطة مخروط دائري ذي زاوية شبه رأسية مقدارها α) (right circular cone of semivertical angle
للحصول على حل للمسألة هذه سنعتبر ان الكرة كلها مشحونة وكثافتها السطحية σ حيث :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \quad \text{from } \theta = 0 \quad \text{to} \quad \theta = \alpha \\ &= 0 \quad \text{from } \theta = \alpha \quad \text{to} \quad \theta = \pi \end{aligned}$$

بما ان للمسألة لها تماثل سمتي (Azimuthal symmetry) ، يعبر عن σ بصيغ التوافق،

$$\sigma = a_0 + a_1 P_1 (\cos\theta) + a_2 P_2 (\cos\theta) + \ldots \text{ (see 3.68)} \qquad (3.80)$$

حيث

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \sigma P_l (\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

$$= \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\pi}^{\theta=\alpha} \sigma P_l (\cos\theta)\, d(\cos\theta) + \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} \sigma P_l (\cos\theta) d(\cos\theta)$$

$$= \frac{2l+1}{2}\, \sigma_0 \int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} P_l(\cos\theta)\, d(\cos\theta) \quad (\because\ \sigma = 0 \text{ from } \theta = \pi \text{ to } \theta = \alpha)$$

$$\therefore \quad a_0 = \tfrac{1}{2}\, \sigma_0 \int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} d(\cos\theta) = \frac{1}{2}\, \sigma_0\, (1 - \cos\alpha)$$

والآن يمكن ملاحظته ،

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} P_l(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

$$= \left[\frac{P_{l+1}(\cos\theta) - P_{l-1}(\cos\theta)}{2l+1}\right]_{\theta=\alpha}^{\theta=0} \qquad \text{(المسألة 1-3)}$$

$$\therefore \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\sigma_0\left[(1-\cos\alpha) + \sum_{l=1}^{\infty}\left\{P_{l-1}(\cos\alpha) - P_{l+1}(\cos\alpha)\right\}P_l(\cos\theta)\right] \qquad (3.81)$$

والآن يمكن حساب الجهد في نقطة P على المحور القطبي والتي تبعد مسافة r من المركز من المعادلة الآتية :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint\frac{\sigma dS}{PQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint\frac{\sigma dS}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{1/2}} \qquad (3.82)$$

حيث dS تمثل عنصر المساحة في Q على سطح الكرة و a، نصف قطر الكرة. اذا كانت $<a$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint\frac{\sigma}{a}\left(1+\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}\cos\theta\right)^{-1/2}dS$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint\frac{\sigma}{a}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n dS \quad \text{by } (3.57)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\sigma_0}{2a}\left[(1-\cos\alpha) + \sum_{l=1}^{\infty}\left\{P_{l-1}(\cos\alpha) - P_{l+1}(\cos\alpha)\right\}P_l(\cos\theta)\right]$$

$$\times\left[1 + P_1(\cos\theta)\left(\frac{r}{\theta}\right) + P_2(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \dots\right]2\pi\, a^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a\sigma_0}{4\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\left[(1-\cos\alpha)+\sum_{l=1}^{\infty}\left\{P_{l-1}(\cos\alpha)-P_{l+1}(\cos\alpha)\right\}P_l(\cos\theta)\right]$$

$$\times\left[1+P_1(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)+P_2(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^2+\ldots\right]d(\cos\theta)$$

$$= \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[(1-\cos\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]$$

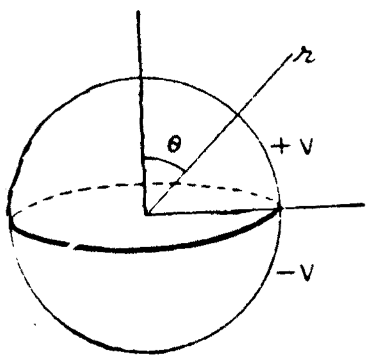
حيث استخدمنا (3-66) ،وهكذا فان الجهد في نقطة (r, θ) يعطى حسب المعادلة الآتية :

$$V(r,\theta)=\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[(1-\cos\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n \times P_n(\cos\theta)\right] \quad (3.83)$$

If $r > a$

$$V_P=\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[(1-\cos\alpha)\left(\frac{a}{r}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)\right] \quad (3.84)$$

مثال 3-4 : كرة موصلة نصف قطرها a مصنوعة من نصفين كرويين تفصل بينهما حلقة عازلة والجهد في نصف الكرة العلوي هو +V في نصفها السفلي هو V- جد الجهد في نقطة ما داخل الكرة.



الشكل (3 - 4)

بما ان المسألة لها تماثل سمتي، m=0 والجهد يعطى من المعادلة :

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l (\cos \theta) \qquad (3.85)$$

فيجب ان يكون للجهد قيمة محددة في نقطة الاصل ، اذا لم تكن هناك شحنات لذلك ، فان الحد الثاني داخل القوس والذي يعطي الجهد اللامحدود في نقطة الاصل يجب ازالته اي $B_\ell = 0$ لكل قيم ℓ، وهكذا .

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l (\cos \theta) \qquad (3.86)$$

الجهد على سطح الكرة $(r = a)$هو :

$$V(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l (\cos \theta) \qquad (3.87)$$

اما المعامل A_ℓ فيمكن ايجاده باستخدام المعادلة (3-69)

$$A_l a^l = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\pi} V(a, \theta) P_l (\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \qquad (3.88)$$

$$= \frac{2\ell+1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} V(a, \theta) P_l (\cos \theta) \sin \theta \, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} V(a, \theta) P_l (\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \right].$$

والآن ، $V(\theta)$ يحسب من المعادلة :

$$V(\theta) = \begin{cases} +V & \text{for} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ -V & \text{for} \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases} \qquad (3.89)$$

اذا عوضنا عن $\cos\theta$, بالرمز X نحصل على :

$$A_l a^l = \frac{2l+1}{2}\left[-\int_{-1}^{0} V\, P_l(x)dx + \int_{0}^{1} VP_l(x)dx\right] \qquad (3.90)$$

$$\therefore \quad A_0 = 0$$

$$A_1 = \frac{3}{2a}\left\{-V\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + V\left(\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1}\right\} = \frac{3V}{2a} \qquad (3.91)$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = \frac{7}{2a^3}\left\{-V\left(\frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4}\right)_{-1}^{0} + V\left(\frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4}\right)_{0}^{1}\right\} = -\frac{7V}{8a^3}$$

لاحظ ان كل المعادلات الزوجية تزول .

والجهد داخل الكرة هو :

$$V(r,\theta) = A_1 r P_1(\cos\theta) + A_3 r^3 P_3(\cos\theta) + \dots$$
$$= \frac{3Vr}{2a} P_1(\cos\theta) - \frac{7V}{8a^3} r^3 P_3(\cos\theta) + \dots$$

مثال (3-5) : جد الجهد عند جميع نقاط الفضاء المحيط بكرة موصلة نصف قطرها a موضوعة في مجال كهربائي منتظم E_0.

اذا اخذنا محاورنا بالشكل الذي يكون فيه المحور القطبي متطابقاً مع اتجاه المجال فيكون للمسألة تماثل سمتي ، وليكن محور التماثل محور Z مثلا حيث $\theta = 0$. والجهد على محور التماثل يعطى من :

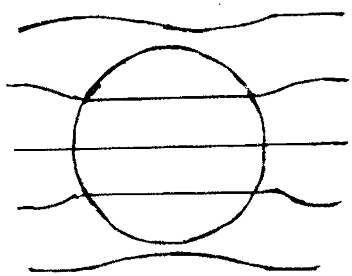
$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] \qquad (\because \quad P_l(\cos\theta) = 1) \qquad (3.92)$$

مع r = Z، اذا قيم هذا الجهد بوسيلة ما وفي نقطة اعتباطية وتم تمديد دالة الجهد بسلسلة اسية كما في (3-92) عند ذاك يمكن ايجاد الجهد لاي نقطة في الفضاء بضرب اس الحدين r^l و $\frac{1}{r^{l+1}}$ بالمقدار $P_l(\cos\theta)$.

يرتبط المجال المنتظم E_0 باتجاه المحور Z مع جهده بالعلاقة الآتية :

$$E_0 = -\nabla\Phi_0$$

ربما سترفض تعريف Φ هذا مادام انه لايحقق الشرط $= \Phi_0$ كلما اقترب r من اللانهاية $r\to\infty$ مع ذلك لاحظ اننا افترضنا مجالاً منتظماً ذا تمدد لانهائي ومصدره يقع في اللانهاية ، هكذا Φ لاتضمحل مع اقتراب r من اللانهاية



الشكل (5 - 3)

ان المجال حول الكرة مباشرة يتشوه (distorted) نتيجة الشحنة المحتثة على السطح ، ولكن سيكون مساوياً لـ E في المسافات الكبيرة (الشكل 5-3). والجهد الكلي في نقطة $V(r,\theta)$V هو Φ زائداً الجهد الناتج من الشحنة المحتثة في الكرة الموصلة (94-3)، وهذا الجهد يكون عديم الاهمية في القيم الكبيرة لـ r ، و :

$$V(r,\theta) = \Phi_0.$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \qquad (3.95)$$

عندما تكون قيمة r كبيرة فان المقادير المتضمنة لـ B_l في المعادلة (95-3) يمكن اهمالها وهكذا ،

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$= A_0P_0(\cos\theta) + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos\theta) + \dots \qquad (3.96)$$

وبما ان هذه يجب ان تكون مساوية لـ Φ_{0} المعطاة في (93-3)

$$A_1 r P_1(\cos\theta) = - E_0 r P_1(\cos\theta)$$

وهكذا ، فان $A_1 = -E_0$ وكل A_l الاخرى تزول لذلك من المعادلة (95-3)

$$V(r,\theta) = A_1 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$= - E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \qquad (3.97)$$

عندما توضع كرة موصلة في مجال منتظم تولد الشحنات المحتثة مجالاً كهربائياً داخل الكرة يلغي المجال الخارجي ومعطية مجالاً مقداره صفر في الفضاء وهكذا فان الجهد على السطح، (r=a) هو صفر.

$$\therefore \quad V(a,\theta) = - E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = 0$$

$$E_0 a P_1(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \qquad (3.98)$$

ويمكن ايجاد المعامل B_l بنفس الطريقة المتسببة في المثال السابق

$$B_l a^{-(l+1)} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} E_0 a P_1(x)\, P_l(x)\, dx$$

$$\therefore \quad B_l = \frac{(2l+1)a^{l+2}}{2} E_0 \int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_1(x)\, dx$$

$$= \frac{(2l+1)\, a^{l+2}}{2} E_0 \frac{2}{2l+1} \delta_{1l} \text{ (by 3.66)}$$

$$\therefore \quad B_1 = E_0 a^3 ;\; B_2 = B_3 \ldots = 0 \qquad (3.99)$$

وهكذا

$$V(r,\theta) = - E_0 r P_1(\cos\theta) + \frac{E_0 a^3}{r^2} P_1(\cos\theta)$$

$$= - E_0 r \cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \qquad (3.100)$$

ويمكن ايجاد مركبات المجال من هذه المعادلة باستخدام العلاقات الآتية :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r},\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

مثال (3-6) : جد الجهد عند اي نقطة ، في الفضاء نتيجة شحنة مقدارها q موزعة بانتظام حول حلقة دائرية نصف قطرها a ومحورها هو المحور Z ويقع مركزها في النقطة Z = b .

الجهد في نقطة p التي تقع على محور التماثل في Z = r هو :

$$V(z=r) = \frac{q}{AP} = \frac{q}{(r^2 + c^2 - 2rc\cos\alpha)^{1/2}} \qquad (3.101)$$

حيث A هي اي نقطة في الحلقة تبعد عن نقطة الاصل O مسافة C و α هي الزاوية التي يصنعها المستقيم AO مع المحور Z.

$$(r^2 - 2rc\cos\alpha + c^2)^{-1/2} = r^{-1}\left(1 - \frac{2c\cos\alpha}{r} + \frac{c^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= r^{-1}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\alpha)\left(\frac{c}{r}\right)^l \quad \text{(by 3.57)}$$

$$= \sum^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\alpha)$$

وهكذا ،

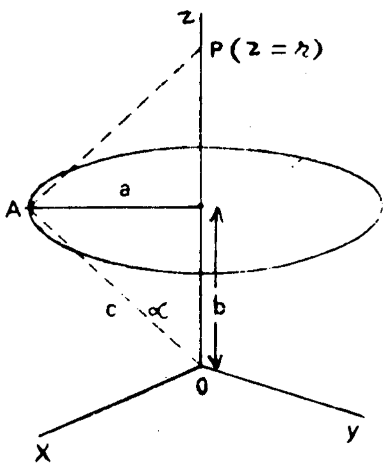
$$V(z=r) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\alpha) \qquad (3.102)$$

والجهد عند اي نقطة في الفضاء

$$V(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) \qquad (3.103)$$

If $r < c$,

$$V(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) \qquad (3.104)$$



الشكل (6 - 3)

3-8 معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية

: (Laplace's Equation in cylinderical coordinates)

تاخذ معادلة لابلاس الشكل الآتي في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (3.105)$$

ومرة اخرى نستخدم طريقة المتغيرات وتكتب :

$$V(r, \phi, z) = R(r)\, Q(\phi)\, Z(z) \qquad (3.106)$$

حيث :

R هي دالة r فقط

Q هي دالة Q فقط

Z هي دالة z فقط.

وبالتعويض في (3-105) نحصل على :

$$\frac{QZ}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{RZ}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2}+RQ\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0 \qquad (3.107)$$

وبتقسيم المعادلة على $\frac{RQZ}{r^2}$, نحصل على :

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2}+\frac{r^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} \qquad (3.108)$$

نجد ان الطرف الاين هو دالة لـ ϕ فقط وان الطرف الايسر لايعتمد على ϕ. ، والمعادلة تتحقق اذا كان كل طرف مساوياً لثابت ، لتكن :

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2}=-\nu^2, \qquad (3.109)$$

حيث ν مقدار ثابت ، وحل هذه المعادلة هو:

$$Q(\phi)=e^{\pm i\nu\phi}, \qquad (3.110)$$

لنضمن امتلاك $Q(\phi)$ قيمة واحدة فقط ، يجب ان تأخذ ν القيم التكاملية (integral values) (انظر 38-3) والطرف الايسر من المعادلة (108-3) يصبح الآن بالشكل الآتي :

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\nu^2.$$

بالقسمة على r^2 والنقل نحصل على :

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \qquad (3.111)$$

وكما فعلنا في السابق ليكن :

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=k^2 \qquad (3.112)$$

حيث K مقدار ثابت .

عليك هنا ان لاتختار لان الثابت في المعادلة (3-109) اخذ اشارة سالبة وحل في المعادلة (3-112) اشارة موجبة فهي مسألة ملائمة لااكثر لاتهتم بها من ناحيتك، حل المعادلة (3-112) هو :

$$Z(z)=e^{\pm kz}. \qquad (3.113)$$

والجزء 'r' في المعادلة يصبح الآن بالشكل الآتي :

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}=-k^2 \qquad (3.114)$$

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+(k^2r^2-\nu^2)=0 \qquad (3.115)$$

اذا جعلنا X=Kr تتحول المعادلة الى الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \qquad (3.116)$$

وتسمى هذه معادلة بيسل (Bessels' equation) وكما في كتابة معادلة ليكندر سنحاول ايجاد حلها بالصيغة الآتية :

$$R(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}. \qquad (3.117)$$

وبالتعويض في (3-116) نحصل على :

$$\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) - \nu^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \right] x^{k+\lambda-2}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0$$

i.e.

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \{(k+\lambda)^2 - \nu^2\} x^{k+\lambda-2} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0 \qquad (3.118)$$

معامل اقل أس $\lambda = 0$ يعطي معادلة أسية (indicial equation)

$$a_0 (k^2 - \nu^2) = 0 \qquad \therefore \quad k = \pm \nu \qquad (3.119)$$

اذا اخذنا اقرب أس اعلى $\lambda = 1$ ، يكون معاملها $a_1\{(k+1)^2 - \nu^2\}$ ويجب ان تكون صفراً.

$$\therefore \qquad a_1 \{(k+1)^2 - \nu^2\} = 0$$

لأن $k = \pm \nu$، لدينا :

$$a_1 (2\nu \pm 1) = 0$$

وبما ان ν عدد صحيح فان $(2\nu \pm 1) \neq 0$ وهكذا :

$$a_1 = 0. \qquad (3.120)$$

معامل x^{k+j} هو :

$$a_{j+2} \{(k+j+2)^2 - \nu^2\} + a_j = 0$$

$$a_{j+2} = - \frac{a_j}{(k+j+2)^2 - \nu^2} \,. \qquad (3.121)$$

وهذه تعطينا العلاقة بين معامل الحدود المتغيرة ، لأن $a_1 = 0$ فان كل الارقام الفردية تزول.

اذا كانت $\nu = k$ فان معامل الارقام الزوجية تكون :

$$a_0, -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}, \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)}\frac{a_0}{2!}, \ldots$$

$$\ldots \frac{(-1)^s}{2^{2s}(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s)}\frac{a_0}{s!}, \ldots$$

and

$$R(r) = a_0\left[x^\nu - \frac{1}{2^2(\nu+1)}x^{\nu+2} + \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\,2!}x^{\nu+4} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(-1)^s}{2^{2s}(\nu+1)\ldots(\nu+s)\,s!}x^{\nu+2s}\ldots\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^s x^{\nu+2s}}{2^{2s}\, s!\,(\nu+1)\ldots(\nu+s)} \tag{3.122}$$

من المألوف تعريف a_0 كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{3.123}$$

وهكذا ،

$$R(r) = J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+2s}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)\, 2^{2s} s!\,(\nu+1)\ldots(\nu+s)}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} \tag{3.124}$$

وتعرف هذه باسم دالة بيسل (Bessel's function) من النوع الاول ذات ترتيب ν ويرمز لها بالرمز $J_\nu(x)$. وبين الاختبار النسبي (ratio test) ان الدالة تتباعد (Converges) لأي قيمة لـ X.

If $k = -\nu$

$$R(r) = J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(s-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \tag{3.125}$$

الصيغة العامة لمعادلة بيسل لذلك يجب ان يكتب على النحو الآتي :

$$R = A\,J_\nu(x) + B\,J_{-\nu}(x) \qquad (3.126)$$

حيث ان B,A ثوابت ، وهذه صحيحة حقاً عندما لاتكون ν رقماً صحيحاً عندها تكـون $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ كما عرفنـــا في المعـــادلتين (3-124)، (3-125) حلين خطيين مستقلين اما اذا كانت ν رقماً صحيحاً (كما في حـالتنـا هـذه) يمكن اعتبـار ان الحلين خطيين مستقلين (linearly dependent) ، اذا كانت ν رقماً صحيحاً فـان حـدود الاولية في مقام المعادلـة (3-25) والتي يكون لها $S = 0, 1, 2, \ldots (\nu - 1)$ تزول،لان $\frac{1}{\Gamma(s-\nu+1)} = 0.$ وهكذا يمكن كتابة (3-125) على النحو الآتي :

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(s-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \qquad (3.127)$$

Put $p = s - \nu$

$$\therefore \quad J_{-\nu}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}$$

$$= (-1)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x) \qquad (3.128)$$

لذلك عندما تكون ν عدداً صحيحاً فان المعادلة (3-126) ليست حلاً عاماً لمعادلة بيسـل من الـدرجـة الثـانيـة ، ويكـون من الضروري ايجـاد حـل خطي مستقـل آخر (linearly independent solution) ، والحـل الملائم هـو اخـذ دالـة نيـــــــومـان (Neumann function) أو مايعرف ايضاً بدالة بيسل من الدرجة الثانية ، والتي تعرف :

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (3.129)$$

من السهولة الادراك انها تتوافق مع معادلة بيسل ، ويمكن ايضاً اثبات ان $N_\nu(x)$ لاتعتمد على $J_\nu(x)$. والحل الفاعل لمعادلة بيسل في المحاور الاسطوانية هو:

$$V(r, \phi, z) = \sum_{m,\nu}^{\infty} \left[A_{m\nu} J_\nu (k_m r) + B_{m\nu} N_\nu (k_m r) \right] e^{\pm i\nu\phi} e^{\pm kz} \qquad (3.130)$$

ذلك لاننا اخذنا بنظر الاعتبار حقيقية ادخال مختلف قيم K لتعطينا حلاً مقبولاً.

وندرج في ادناه بعض الخواص المفيدة لدوال بيسل :

(1) يمكن اثبات باختيار نفس الاسلوب المتبع في حالة متعددة الحدود ليكندر (Legendre polynomials) ان دوال بيسل تحقق الشرط التمامدي الآتي :

اذا $x = k_m\rho$ هو الجذر من درجة m (mth root) للمقدار $J_\nu(x)$ اي $J_\nu(K_m\rho) = 0$ في الفاصل (interval) $0 \leqslant r < \rho$ ،

$$\int_0^\rho J_\nu (k_m r) J_\nu (k_{m'} r)\, r dr = \frac{\rho^2}{2} J^2_{\nu+1} (k_m \rho)\, \delta_{mm'} \qquad (3.131)$$

(2) بما ان $J_\nu (k_m r)$ تشكل مجموعة متعامدة كاملة (Complete orthogonal Set) فان اي دالة f(r) يمكن ان تمتد ضمن المجال $0 \leqslant r \leqslant \rho$ بصيغها :

اي :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{m\nu} J_\nu (k_m r) \qquad (3.132)$$

حيث :

$$D_{m\nu} = \frac{2}{\rho^2 J^2_{\nu+1} (k_m \rho)} \int_0^\rho f(r) J_\nu (k_m r)\, r dr \qquad (3.133)$$

3. $$J_0' (k_m r) = \frac{d J_0 (k_m r)}{dr} = - k_m J_1 (k_m r) \qquad (3.134)$$

4. $$J_\nu' (k_m r) = \frac{\nu}{r} J_\nu (k_m r) - k_m J_{\nu+1} (k_m r) \qquad (3.135)$$

5. $$\int J_1 (k_m r)\, dr = - \frac{1}{k_m} J_0 (k_m r) \qquad (3.136)$$

6. $$\int (k_m r) J_0 (k_m r)\, dr = r J_1 (k_m r) \qquad (3.137)$$

مثال 7-3 : - في كبل ذي موصلين متحدي المحور (coaxial cable) تم الحفاظ على الجهد في الاسطوانة الخارجية التي نصف قطرها 'b' مساوياً للصفر ، والجهد في الاسطوانة الداخلية التي نصف قطرها "a" هو V_1. جد تعبيراً للجهد في حيز بين الاسطوانتين.

بما ان الكبل ذا الموصلين متحدي المحور والمتماثل اسطوانياً ، لايوجد هناك اعتماد على ϕ ، لذلك فان $v=0$ بالاضافة الى ذلك اذا كان الكبل طويلاً يمكن الغاء تأثير النهاية (end effect) اي لايوجد اعتماد على Z وهكذا فان K=0 -

وتتقلص معادلة لابلاس تحت هذه الظروف الى :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=0. \qquad (3.138)$$

تكامل $r\frac{dV}{dr}$ يساوي A (ثابت).

$$V(r) = A\ln r + C \qquad (3.139)$$

حيث C ثابت آخر. والشروط الحدودية تعطينا :

$$\text{at } r=b,\ V(b) = A\ln b + C = 0 \qquad C = -A\ln b$$

$$\text{and} \quad \text{at } r=a,\ V(a) = A\ln a - A\ln b = V_1$$

$$\therefore \quad A = -\frac{V_1}{\ln(b/a)}$$

$$\text{and} \qquad \ln V(r) = -\frac{V_1}{\ln(b/a)}(\ln r - \ln b) = -\frac{V_1}{\ln(b/a)}\ln\frac{r}{b} \qquad (3.140)$$

مثال (3-8) : ـ اسطوانة لانهائية الطول نصف قطرها "a" ومحورها منطبق على المحور Z تم الحفاظ على الجهد في سطحها الاسطواني مساوياً للصفر. اذا غلفت هذه الاسطوانة بلوح جهده V_1 عند النقطة Z=0 احسب الجهد في نقطة ما داخل الاسطوانة.

الحل لايعتمد على ϕ . اذن ν =0 . في القيم الكبيرة لـ Z،تقترب V من الصفر وهكذا لايمكن ادخال e^{+kz} اضافة لذلك يجب ان يكون لـ V قيمة محددة في نقطة الأصل، وهذا لايحدث اذا كان B_ν = 0 لان الحد الثاني داخل القوس(انظر 130-3) يعطي زيادة لانهايةالى الجهد في نقطة الاصل مالم تكنB_ν =0 صفراً. ذلك يمكن حساب الجهد من المعادلة الآتية :

$$V(r, \phi, z) = \sum_m A_{mo} \, J_0 \, (k_m r) \, e^{-k_m z} \qquad (3.141)$$

والشروط الحدودية تعطينا :

$$V (a, \phi, z) = - \sum_m A_{mo} \, J_0 \, (k_m a) \, e^{-k_m z} = 0,$$

$$V(r, \phi, 0) = \sum_m A_{mo} \, J_0(k_m \, r) = V_1 \qquad (3.142)$$

من المعادلة (133-3) :

$$A_{mo} = \frac{2}{a^2 J_1^{\,2} \, (k_m a)} \int_0^a V_1 \, J_0 \, (k_m r) \, r dr$$

$$= \frac{2V_1}{a^2 J_1^{\,2} \, (k_m a)} \, \frac{a}{k_m} \, J_1 \, (k_m a) \qquad \text{(by 3.137)}$$

$$= \frac{2V_1}{a k_m J_1 \, (k_m a)}$$

$$\therefore \; V \, (r, \phi, z) = \frac{2V_1}{a} \sum_m \frac{J_0 \, (k_m r)}{k_m J_1 \, (k_m a)} \, e^{-k_m z} \qquad (3.143)$$

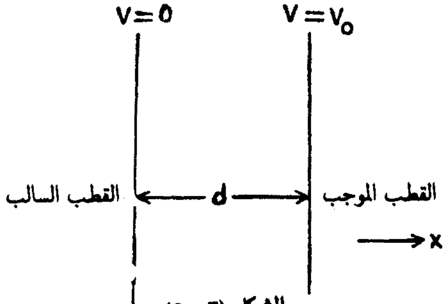
3-9 حل معادلة بواسون باستخدام دالة كرين

: (Solution of Poisson Equation Using Green Function)

درسنا طرق حل معادلة لابلاس ، وسنطرح الآن طريقة لحل معادلة بواسون.

سنوضح اولاً استخدام معادلة بواسون بدراسة مثال بسيط له تطبيقات عملية مهمة ، هو مسألة توزيع الجهد في صمام ثنائي محدد بالشحنة الحيزية

.(Space charge limited diode)



الشكل (3 - 7)

تصور صماماً ثنائياً ذا لوحين متوازيين (الشكل 7–3) ومساحة قطبية (electrodes) الجانبية من الكبر بحيث يمكن الغاء تأثير الحافة (edge effect) من الحسابات، عند التشغيل يغادر الكترون من القطب السالب (حيث X=0 عندما V=0) ويتسارع باتجاه القطب الموجب (X=d عندما V=Vo) خلال هذه العملية تتجمع شحنة حيزية في الحيز بين القطبين تحدد من سريان التيار. وبما ان الحيز بين اللوحين فارغ تأخذ معادلة بواسون الشكل الآتي :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\rho/\epsilon_0 \qquad (3.144)$$

حيث ρ تمثل كثافة الشحنة.

اذا كانت J تمثل التيار لوحدة المساحة وu سرعة الالكترون فان :

$$J = -\rho u \qquad (3.145)$$

على فرض ان سرعة انبعـاث الالكترونـات (emission velocity of electrons) يمكن الغاؤها ، يصبح لدينا باخذ اعتبارات الطاقة :

$$\frac{1}{2}mu^2 = eV \qquad (3.146)$$

باستخدام المعادلتين (145–3) و (146–3) يمكن كتابة المعـادلـة (144–3) على النحو الآتي :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{u\epsilon_0} = \frac{J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

وعند اجراء التكامل نحصل على :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{2J}{\epsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} V^{1/2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2J^{1/2}}{\epsilon_0{}^{1/2}}\left(\frac{mV}{2e}\right)^{1/4}$$

وبالتكامل مرة اخرى مع استخدام الشروط الحدودية نحصل على : -

$$V^{3/4} = (3/2)\left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}x.$$

لذلك

$$V = (3/2)^{4/3}\left(\frac{J}{\epsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}x^{4/3} \qquad (3.147)$$

نظراً لطبيعة المعادلة غير المتجـانسـة فـان مسـائل القيم الحـدوديـة التي تتضمن معـادلـة بواسون تكون بصورة عـامـة اكثر صعوبـة ، ويمكن الحصول على حـل لمعـادلـة بـواسـون (وايضاً معادلـة لابلاس) عن طريق مـايعرف بـدالـة كرين (Green's function) ولهـذه الدالة اهميـة نظريـة كبيرة وذلـك لانهـا تسـاعـد في حل معـادلـة تفـاضليـة ذات شروط حدودية مناسبة بالتربيع سنقدم اولاً دالة كرين ثم نوضح باختصار طريقة حل معـادلـة بواسون بواسطتها ،لتكن $\mathcal{L}$ عـاملاً تفـاضليـاً (differential operator) و g (x) دالـة مستمرة (Continuous function) ، وسنجد كيف ان ايجاد دالة f(x) مثل :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{g(x)}{\epsilon_0} \qquad (3.148)$$

هو ممكن على الرغم من انها تتوافق مع المعادلة التفاضلية غير المتجانسة ولها شروط حدودية نوعية معينة. اذا كان هناك حل وحيد لكل g(x) على انفراد يجب ان يوجد في المقابل عامل عكسي (inverse operator) هو $\mathcal{L}^{-1}$ لكي يصبح الحل الاصولي (formal solution) لجميع g(x) في المعادلة (3-148) هو:

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}\frac{g(x)}{\epsilon_0} \qquad (3.149)$$

لقد فرضنا ان العامل $\mathcal{L}^{-1}$ لايعني فقط العملية المقلوبة لما يمثله العامل $\mathcal{L}$، وانما استخدام الشروط الحدودية المرافقة. ولنأخذ على سبيل المثال المعادلة :

$$\frac{d}{dx}y=2x$$

والتي تخضع للشرط y = 1 عندما x = 0 ، العامل العكسي لـ $\frac{d}{dx}$ هو $\int dx$.

$$\therefore\ y=\int 2x\,dx=x^2+b$$

حيث b ثابت ، واستخدام الشروط الحدودية يعطي b=1. لذلك نفرض ان عمل العامل $\int dx$ على المقدار 2x يعطي الحل الوحيد الآتي :

$$y=x^2+1$$

يمكن التعبير عن الحل (3-149) بصيغ دالة دلتا لديراك (Dirac Delta function) كالآتي :

$$f(x)=\int \mathcal{L}^{-1}\delta(x-x')\frac{g(x')}{\epsilon_0}dx' \qquad (3.150)$$

من التعريف فان حل المعادلة (3-148) عندما تكون $g(X)=\delta(X-X')$ تسمى دالة كرين $G(x-x')$ للعامل $\mathcal{L}$ والشروط الحدودية المعطاة، ودالة كرين $G(x-x')$ اذا تتوافق والمعادلة :

$$\mathcal{L}G(x,x')=\frac{\delta(x-x')}{\epsilon_0} \qquad (3.151)$$

وبنفس الشروط الحدودية في الدالة f(x) :

$$\therefore \quad G(x, x') = \mathcal{L}^{-1}\frac{\delta(x - x')}{\epsilon_0} \qquad (3.152)$$

لهذا فان الحل f (x) للمعادلة (3–148) هو :

$$fx = \int \mathcal{L}^{-1}\frac{\delta(x - x')}{\epsilon_0} g(x')dx'$$

$$= \int G(x, x')g(x')dx' \qquad (3.153)$$

وتختصر المشكلة هذا الى ايجاد دالة كرين المناسبة للعامل المعطى ، وحال ايجادها يمكن الحصول بسهولة على الحل f(x) بالتكامل.

يجب ان نلاحظ انه على الرغم من اننا اخذنا للسهولة بمسألة احادية البعد الا ان الصيغة (3–153) قد تتوسع لتصبح ثلاثية الابعاد كالآتي :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{L}^{-1}\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \qquad (3.154)$$

$$f(r) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g(r')dr' \qquad (3.155)$$

وسنبين الآن كيفية ايجاد حل معادلة بواسون مع اما الشروط الحدودية لديرخليت (Dirichlet) أو لنيومان (Neumann) وذلك باستخدام مقارب لدالة كرين.

معادلة بواسون هي :

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad (3.156)$$

وقد قمنا سابقاً بايجاد تعبير للجهد العددي (1–41)

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho(r)\, d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (3.157)$$

لنعتبر ان هذا التعبير يتوافق ومعادلة بواسون (3-156) وبتطبيق لابلاسيان على طرفي المعادلة (3-157) ، نحصل على :

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2 \int \frac{\rho(r)d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau \qquad (3.158)$$

ونعرف بالحساب المباشر ان عندما $r \neq 0$ فان :

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r \cdot \frac{1}{r}\right) = 0 \qquad (3.159)$$

فعندما تكون $r = 0$ تصبح غير معرفة ، على كل حال يمكن معرفة قيمة $\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau$ عند الحالة $r = 0$ باجراء العملية المحددة الآتية ، ونفرض ،

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \lim_{\alpha \to 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}\right) d\tau$$

الآن

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right) = -\frac{3\alpha^2}{(r^2+\alpha^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\alpha \to 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right) d\tau = \lim_{\alpha \to 0} \iiint \left\{ -\frac{3\alpha^2 r^2}{(r^2+\alpha^2)^{5/2}} \right\} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left[-12\pi \int_0^\infty \frac{\alpha^2 r^2}{(r^2+\alpha^2)^{5/2}} \, dr \right]$$

Put $r = \alpha p$

$$\therefore \quad \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \lim_{\alpha \to 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right) d\tau$$

$$= -12\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(p^2+1)^{5/2}} = -4\pi \qquad (3.160)$$

Hence,

$$\nabla^2\Phi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-4\pi) = -\rho/\epsilon_0$$

لذلك فان التعبير (157–3) الخاص بالجهد العددي يتوافق مع معادلة بواسون. ويمكن صياغة النتيجتين (159–3) و (160–3) بعلاقة واحدة.

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r) \qquad (3.161)$$

أو بصورة اعم ،

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (3.162)$$

وبمقارنتها مع المعادلة (151–3) نستنتج ان المقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ هو دالة كرين للعامل ∇^2 وهو مساوي للجهد الناتج من وحدة شحنة نقطية،وعلى كل حال هذه هي احدى دوال كرين للعامل ∇^2 ،والصيغة العامة لدالة كرين هي :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \qquad (3.163)$$

تمثل F هنا دالة توافقية (harmonic function) وهكذا فانها تتوافق مع معادلة لابلاس.

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \qquad (3.164)$$

ويمكن تصور $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ على انه الجهد الناتج من منظومة من الشحنات خارج الحجم الذي نحن بصدد دراسته.

نحن نعرف ان حل معادلة بواسون يجب ان يتوافق مع شروط حدودية معينة : شرط ديرخليت (Dirichelt condition) هو أن Φ محدده او شرط نيومان (Neumann condition) الذي ينص على ان $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ هو المحدد. ولمعرفة كيفية التعامل مع الشروط الحدودية ، سنحول معادلة بواسون الى صيغة تكامل متخذين مبرهنة كرين ، ونعني :

$$\int_V [\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi]\, d\tau = \int_S \left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right] dS \qquad (3.165)$$

حيث Φ و ψ تمثلان دالتين اعتباطيتين عدديتين يمكن تحويل معادلة بواسون الى معادلة تكاملية اذا جعلنا $\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ في (3-165) وان يكون Φ جهداً عددياً يتوافق ومعادلة بواسون.

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad (3.166)$$

بهذه التعويضات يمكن كتابة المعادلة (3-165) على النحو الاتي :

$$\int_V\left[-\Phi\frac{\partial(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\tau$$
$$= \int_S\left[\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right]dS \qquad (3.167)$$

حيث استخدمنا المعادلة (3-162) اذا كانت r ضمن الحجم V ، فان تكامل الحد الاول من الطرف الايسر يساوي $-\frac{\Phi(r)}{\epsilon_0}$، ويتبع ذلك من ثم :

$$\Phi(r) = \int_V \frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right\}dS' \quad (3.168)$$

لاحظ ان هذا ليس حلاً لمعادلة بواسون وانما ببساطة هو الصيغة التكاملية لها. ويمكن ايجاد تعميم لها بسهولة اذا اخذنا كما في السابق Φ على انها الجهد و $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ هي دالة كرين ، وسوف نحصل بصيغ $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ على مايلي :

$$\frac{\Phi(r)}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\epsilon_0}d\tau + \int_S\left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}\right]dS' \quad (3.169)$$

Here $\quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

لاجل التخلص من واحد او الآخر من التكاملات السطحية في (3-169) سنختار $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ بحيث تتوافق او تحقق شرط ديرخليت او نيومان ، وهكذا لتحقيق شرط ديرخليت الحدودي.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \text{ for } r' \text{ on } S \qquad (3.170)$$

$$\Phi(r) = \int_V \rho G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\tau - \epsilon_0 \int_S \Phi \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \qquad (3.171)$$

ولتحقيق شرط نيومان يجب تحديد $\frac{\partial G_N}{\partial n}$ على السطح.

بما ان

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0}.$$

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\tau = -\int \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0}.$$

وباستخدام مبرهنة التباعد :

$$\int_S \frac{\partial G}{\partial n'} dS' = -\frac{1}{\epsilon_0} \qquad (3.172)$$

لذلك فان ابسط شرط لنيومان على G_N هو :

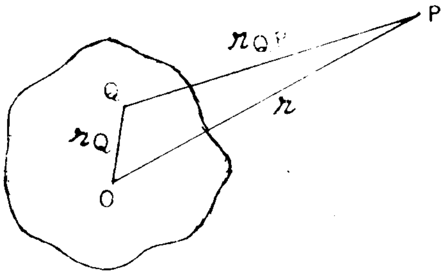
$$\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 S} \text{ for } r' \text{ on } S \qquad (3.173)$$

$$\Phi(r) = \int_V \rho(r')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\tau + \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' + \frac{\Phi_s}{\epsilon_0 S}$$

$$= \int_V \rho(r')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\tau + \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' + \frac{\langle \Phi \rangle_s}{\epsilon_0} \qquad (3.174)$$

حيث $\langle \Phi \rangle_S$ تمثل متوسط قيمة الجهد حول السطح S واذا كان السطح لانهائياً فان $\langle \Phi \rangle_S = 0$

سنبين في هذا الجزء كيف يمكن التعبير عن الجهد الناتج من التوزيع الساكن للشحنات على انه مجموع الاضافات الناتجة من اقطاب مختلفة التعدديه ، أي ، أحادي القطب (monopoles) ، ثنائي القطب (dipoles) ، رباعي القطب (quadrupoles) .. الخ ـ نفرض أن كثافة توزيع معين للشحنة في الحجم V هي ρ_e (الشكل (8 ـ 3).



الشكل (8 ـ 3)

الجهد الناتج من هذه الشحنة في نقطة P هو :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_e\, d\tau}{r_{QP}} \qquad (3.175)$$

حيث $d\tau$ يمثل عنصر حجم في Q ، وتعطينا r_Q و r المسافة بين P والنقطتين Q و O (نقطه الاصل) اذا كانت P بعيده أي $r >> r_Q$، يمكننا الحصول على أقل تقريب صفري الترتيب (lowest – zero order – approximaton) بالغاء تجميع حول نقطة الاصل وهذا ممكن بفرض $r_Q = 0$ لكل نقطة Q ، و :

$$r_{QP} = r \qquad (3.176)$$

كنتيجة لدينا :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_e\, d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int \rho_e\, d\tau = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (3.177)$$

حيث $Q = \int \rho_e d\tau$ تمثل الشحنة الكلية التي يحتوي عليها التوزيع ، وبالتالي فان الجهد في نقطة P عبارة عن جهد ناتج من شحنة نقطية Q في نقطة الاصل ، وللحصول على تقريب افضل للتصرف في (3-175) عند النقطة p يجب الحصول على تقريب اقرب للمقدار $\frac{1}{r_{QP}}$.

لديـ

$$r_{QP} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \qquad (3.178)$$

حيث x_Q, y_Q, z_Q, x, y, z تمثل الاحداثيات الديكارتية (Cartesian caordinate) للنقطتين Q,P على التوالي، وبالتعبير عن $\frac{1}{r_{QP}}$. كسلسلة ماكلورين (Maclaurin series) نحصل على :

$$\frac{1}{r_{QP}} = \left(\frac{1}{r_{QP}}\right)_o + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)x_Q + \left(\frac{\partial}{\partial y_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)y_Q\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial z_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)z_Q\right]_o + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_Q^2}\frac{1}{r_{QP}}\right)x_Q^2\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_Q^2}\frac{1}{r_{QP}}\right)y_Q^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_Q^2}\frac{1}{r_{QP}}\right)z_Q^2$$

$$+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_Q \partial y_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)x_Q y_Q + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_Q \partial z_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)x_Q z_Q$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_Q \partial z_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)y_Q z_Q\right]_o + \cdots \qquad (3.179)$$

ويشير الرمزالسفلي الدليلي o الى ان الكميات داخل الاقواس احتسبت في نقطة الأصل من الصعوبة احتساب معاملات التمدد (expansion coefficients) المختلفة لهذه السلسلة التي تظهر في الاقواس/ وعلى كل حال فان الحدود ذات الترتيب الادنى (Low order terms) هي التي تعيننا/ وهذه يسهل التعامل معها، وهكذا فان الحد الاول هو :

$$\left(\frac{1}{r_{QP}}\right)_o = \frac{1}{r} \qquad (3.180)$$

يظهر من (179 ـ 3) ، وبتفحص المعادلة (178 ـ 3) نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial x_Q}\frac{1}{r_{QP}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{QP}}\right)_O = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_Q\,\partial y_Q}\frac{1}{r_{QP}}\right)_O = \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{1}{r_{QP}}\right)_O = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r_{QP}} = \frac{1}{r} - \left(x_Q\frac{\partial}{\partial x} + y_Q\frac{\partial}{\partial y} + z_Q\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x_Q\frac{\partial}{\partial x} + y_Q\frac{\partial}{\partial y} + z_Q\frac{\partial}{\partial z_Q}\right)^2\frac{1}{r} + \dots$$
$$= \frac{1}{r} - (\mathbf{r}_Q\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla)^2\frac{1}{r} + \dots \qquad (3.181)$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho_e d\tau}{r_{QP}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{r} - (\mathbf{r}_Q\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla)^2\frac{1}{r} + \dots\right]\int\rho_e d\tau$$
$$= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \qquad (3.182)$$

حيث ان كل حد في هذه السلسلة يأتي من الحد المناظر له في السلسلة $\frac{1}{r_{QP}}$. والحد الاول يعطي الجهد في نقطة P الناتج من شحنة Q التي تساوي $= \int\rho_e d\tau$ في نقطة الأصل ، ويمكن تسميته جهد احادي القطب (monopole' potential) والحد الثاني هو :

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla)\frac{1}{r}\,\rho_e d\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\int\mathbf{r}_Q\,\rho_e\,d\tau = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{p}$$

$$(\because\quad \mathbf{p} = \int\mathbf{r}_Q\,\rho_e\,d\tau)$$

$$= \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^3} \qquad (3.183)$$

وهذا هو جهد ثنائي القطب (انظر 61-1) ويمكن بنفس طريقة اثبات ان الحد التالي V_2 يناظر جهد رباعي القطب.

من المناسب في هذه المرحلة تنبيه القاريء الي ان التمدد في احداثيات ديكارتية يصبح كثير التعقيد ولاسيا في الحدود العليا (higher terms) ويكون من الملائم تحت هذه الظروف تمديد الجهد باستخدام التوافق الكروي (spherical harmonics) وسنوضح هذه الطريقة بدراسة مثال بسيط.

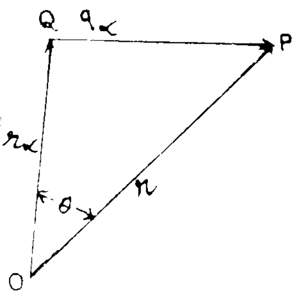
لنفرض اننا مهتمون الآن بالجهد في نقطة P والناتج من شحنة q في نقطة Q (الشكل 9-3) ونفرض ان الشحنة q_α ونقطة P ونقطة الاصل تقع كلها في المستوى $\phi = 0$ عليه يكون الجهد في نقطة P نتيجة q_α هو :

$$V_\alpha = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|} = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0(r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_\alpha+r_\alpha^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0(r^2-2rr_\alpha\cos\theta+r_\alpha^2)^{1/2}} = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0}(r^2-2rr_\alpha\cos\theta+r_\alpha^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}\left(1-\frac{2r_\alpha\cos\theta}{r}+\frac{r_\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2} \qquad (3.184)$$

حيث r، r_α تمثلان مسافة النقطتين Q، P عن نقطة الاصل ،و θ تمثل الزاوية بينهما. ونحن نعرف ان $\left(1-\frac{2r_\alpha\cos\theta}{r}+\frac{r_\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2}$ هو الدالة المولدة (generating function) لمتعددة الحدود ليكندر (Legendre polynomials) اي :



الشكل (3 - 9)

$$\left(1-\frac{2r_\alpha\cos\theta}{r}+\frac{r_\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2}=1+\frac{r_\alpha}{r}P_1(\cos\theta)+\frac{r_\alpha^2}{r^2}P_2(\cos\theta)+\ldots$$

$$\therefore \quad V_\alpha=\frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}+\frac{q_\alpha r_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{q_\alpha r_\alpha^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}P_2(\cos\theta)+\ldots \quad (3.185)$$

Hence, $$V=\Sigma V_\alpha=\sum\frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}+\sum\frac{q_\alpha r_\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}P_1(\cos\theta)+\ldots \quad (3.186)$$

ويمكن التحقق من ان الحد الاول يعطي الاضافة الناتجة من احادي القطب والحد الثاني من ثنائي القطب وهكذا الى اخره.

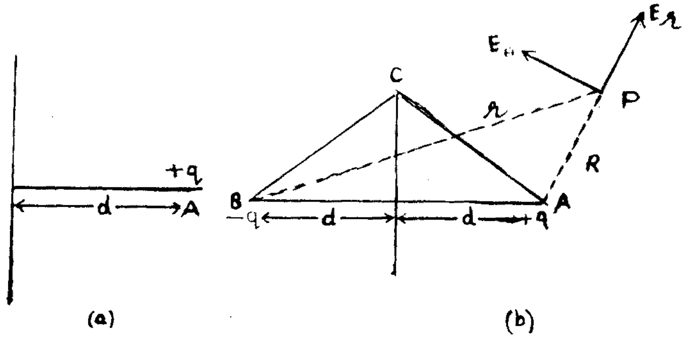
3-11 طريقة صور الكهربائية المستقرة (Method of Electrostatic Images):

سنناقش الآن طريقة عامة لحل مسائل الكهربائية المستقرة دون التحدد بحل معادلة تفاضلية ، وهذه الطريقة يمكن تطبيقها بصورة مثمرة على بعض الامثلة النوعية. وسنوضح هذه الطريقة بمثال بسيط.

(i) شحنة نقطية ومستوى موصل لانهائي.

:(Point charge and an infinite conducting plane)

افرض ان شحنة نقطية موضوعة في نقطة تبعد مسافة عمودية مقدارها d عن لوح موصل لانهائي الامتداد (الشكل 3-10 A).



الشكل (3 ـ 10)

بما ان اللوح موصل فان الشحنة q ستحث شحنات على اللوح. وجهدها ثابت على كل النقاط في اللوح ، ولنفرض ان هذا الجهد هو صفر. وهذا يعني ان الشحنة المحتثة ستولد جهداً مساوياً ومعاكساً لجهد الشحنة الحاثة. ونعرف ان المجال في الطرف الثاني (الايسر) للوح هو صفر ونريد ان نعرف الجهد والمجال في نقطة ما في الطرف الايمن للوح وكذلك سنهتم بتوزيع الشحنة المحتثة على اللوح الموصل.

ولنأخذ مسألة اخرى ، نفرض ان شحنة q وضعت خلف مستوى اللوح وتبعد عنه مسافة d بالضبط. شكل (3-10B) والجهد في اي نقطة من المستوى في نقطة C هو صفر $\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}=0\right)$ وهـذا يعني اذا مـاتم رفع اللوح الموصل ووضعت الشحنة q- في النقطة B. فان كل نقطة من المستوى كانت مشغولة سابقاً باللوح الموصل يبقى جهدها صفراً. وهكذا فان ادخال الشحنة q في B ورفع اللوح لايؤثر ان على الفيض في الطرف الايمن المستوي وبقيت شروط المسألة الاصلية بدون تغير بإدخال هذا التدبير. في الحقيقة ان ادخال الشحنة q لايفسر الوضع مقارنة مع الوضع الواقعي (لأن المجال لم يعد صفراً في الطرف الايسر للمستوي) وعلى كل حال سوف لانعير لهذه الحقيقة اهمية تذكر مازلنا مهتمين بالجانب الايمن للمستوي ، اذن بما ان شروط المسألة بقيت دون تغير بوضع الشحنة q في B. وحسب مبدأ التوحد فان جهد الشحنة q+ في A والشحنة q - في B مطابق للجهد الناتج من الشحنة q+ في A والشحنة المحتثة على اللوح . وهكذا يمكن حـل المسـألـة ب وافتراض الشحنـة q - في B. ومن التشـابـه المرئي تسمى الشحنة q صورة (image) الشحنة q+ في A من الضروري الادراك ان الشحنة q ليس لها وجود حقيقي ولكنها صورة مؤثرة (او صورة ذات تأثير فعال) فقط.

الجهد في نقطة P (الشكل 3-10 B) والناتج من الشحنة q والشحنة المحتثة على الموصل هو:

$$V_P=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+4d^2+4Rd\cos\theta}} \qquad (3.187)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين BA وAP ، وتمثل R المسافة بين P والشحنة.

اما مركبات المجال فهي :

$$E_R = -\frac{\partial V_P}{\partial R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{q\,(R+2d\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0\,(R^2+4d^2+4Rd\cos\theta)^{3/2}} \quad (3.188)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial V_P}{\partial\theta} = \frac{2qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\,(R^2+4d^2+4Rd\cos\theta)^{3/2}} \quad (3.189)$$

لاجل احتساب كثافة الشحنة السطحية في نقطة ما على اللوح الموصل يجب اولاً احتساب المجال العمودي على اللوح E في نقطةC.

$$P = E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cos\theta}{R^2} - \frac{R\cos\theta+2d}{(R^2+4d^2+4Rd\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$\therefore \quad E \text{ at } C = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2d}{R^3} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

قانون كاوس

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{qd}{2\pi R^3} \quad (3.190)$$

وتتناسب الكثافة السطحية عكسياً مع مكعب المسافة بين الشحنة $+q$ وموقع النقطة على اللوح.

القوة التي تسلطها الشحنة المحتثة في اللوح على الشحنة $+q$ هي نفسها التي تسلطها صورتها عليها :

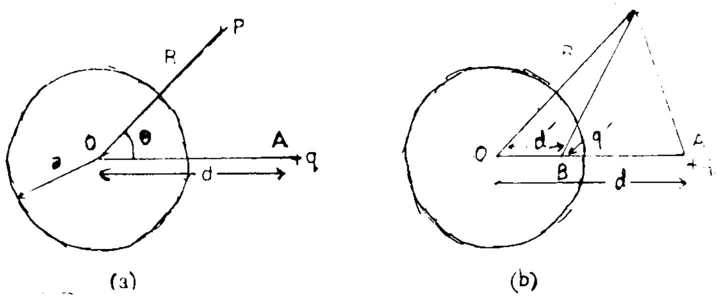
$$F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \quad (3.191)$$

والعلاقة السالبة توضح ان الشحنة تنجذب نحو الوح. وهكذا نستنتج ان مسألة توزيع الشحنة على السطح والجهد والمجال الناتج من المنظومة يمكن حلها بواسطة ادخال صورة او مجموعة صور موضوعة بشكلٍ مناسب خارج الحيز موضوع البحث وبتجاهل سطح التكهرب الواقعي او بعبارة اخرى استبدال الشروط الحدودية بالصور ولانجاح هذه الطريقة يجب ان نحمي توزيع بوري مكافيء بسيط اي التوزيع الذي يبقى السطح فيه سطحاً متساوي الجهد مع الجهد المطلوب.

لتطبيق هذه الطريقة على بعض الحالات البسيطة.

(ii) شحنة نقطية بجوار كرة مؤرضة (A point charge in the vicinity of a ground sphere)

نفرض ان كرة موصلة نصف قطرها "a" تبقى في الجهد الصفري (Zero potential) والشحنة q في نقطة A التي تبعد مسافة d عن مركز الكرة (d>a) ، شكل (3–11A).
نفرض ان مركز الكرة يتطابق ونقطة الاصل بما ان q' تقع خارج الكرة واهتمامنا ينصب على الحيز خارج الكرة ايضاً لذا يجب ان تكون الصورة داخل الكرة. وبالتماثل يجب ان تقع على الخط الواصل بين A ومركز الكرة لذلك يمكن استبدال وضعية السؤال بالوضعية المكافئة لها (شكل 3–11B) مع الشروط الحدودية.



الشكل (11 ـ 3)

$$V(R, \theta)\Big|_{|R|=a} = 0 \qquad (3.192)$$

ليكن موقع الشحنة الصورة في نقطة OB = d′, B ، الجهد في نقطة P هو:

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{d}|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{d}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \,|\, R\hat{\mathbf{e}}_R - d\,\hat{\mathbf{e}}_d \,|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \,|\, R\hat{\mathbf{e}}_R - d'\,\hat{\mathbf{e}}_d \,|} \end{aligned} \qquad (3.193)$$

حيث $\hat{e}_d, \hat{e}_R$ يمثلان متجهات وحدة باتجـــاه OA, OP على التوالي :

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R \left| \hat{e}_R - \frac{d}{R}\hat{e}_d \right|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d' \left| \hat{e}_d - \frac{R}{d'}\hat{e}_R \right|} \qquad (3.194)$$

على سطح الكرة R = a

$$V_P\Big|_{|R|=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\left|\hat{e}_R - \frac{d}{a}\hat{e}_d\right|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d'\left|\hat{e}_d - \frac{a}{d'}\hat{e}_R\right|} = 0$$

وهذا يتحقق اذا :

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{d'} \text{ and } \frac{d}{a} = \frac{a}{d'} \text{ i.e. } d' = \frac{a^2}{d}$$

$$q' = -\frac{qd'}{a} = -\frac{qa}{d} \qquad (3.195)$$

النقاط B,A نقاط معكوسة (inverse points) بالنسبة للكرة وبالتناوب عندما تكون $|R| = a$ فان :

$$\left|\mathbf{R} - \mathbf{d}\right|^{-1}_{|R|=a} = \left(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta\right)^{-1/2}_{|R|=a}$$
$$= (a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{-1/2}$$
$$= d^{-1}(1 - 2h\cos\theta + h^2)^{-1/2} \qquad (3.196)$$

nd

$$\left|\mathbf{R} - \mathbf{d}'\right|^{-1}_{|R|=a} = a^{-1}(1 - 2h'\cos\theta + h'^2)^{-1/2} \qquad (3.197)$$

حيث :

where $\qquad h = \frac{a}{d}$ and $h' = \frac{d'}{a}$

Now $\qquad (1 - 2hx - h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_{n(x)}$

where $\qquad |h| < 1$ and $|x| < 1$

$$\therefore \qquad \left|\mathbf{R} - \mathbf{d}\right|^{-1}_{|R|=a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n d^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \qquad (3.198)$$

and $$\left|\mathbf{R}-\mathbf{d}'\right|^{-1}_{R=a}=\sum_{n=0}^{\infty}d'^{n}a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta) \qquad (3.199)$$

Hence,

$$V(a,\theta)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}(qa^nd^{-(n+1)}+q'd'^na^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)=0 \qquad (3.200)$$

بما ان متعددة الحدود ليكندر مستقلة خطياً ، فان معامل كل متعددة الحدود ليكندر يزول في اثناء التمدد وهكذا عندما n = 0 ، فان :

$$qd^{-1}+q'a^{-1}=0 \text{ or } q'=-\left(\frac{a}{d}\right)q \qquad (3.195a)$$

and for $n=1$

$$qad^{-2}+q'd'a^{-2}=0$$

i.e.

$$qad^{-2}-\left(\frac{a}{d}\right)qd'a^{-2}=0$$

or

$$d'=a^2/d \qquad (3.195b)$$

وعندما تكون i > n فان الشرطين (3 - 195 A) و (3-195B) يخفضن كل العوامل الناجحة الى الصفر.

وبتعويض قيم q' و d' في المعادلة (3-194) يتحول التعبير المطلوب الى الجهد.
لاحظ انه كلما قربت الشحنة q من السطح اكثر فاكثر كبرت الشحنة q اكثر فاكثر ايضاً وتتحرك مبتعدة عن المركز.

ويمكن ايجاد كثافة الشحنة على السطح من العلاقة :

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ويمكن بالتكامل المباشر اثبات ان كمية الشحنة المحتثة الكلية على الكرة يساوي في المقدار للشحنة الصورية.

(iii) اذا شحنت الكرة وعزلت ووضع بجوارها شحنة q
(The sphere is charged and insulated a charge q is placed in its vicinity)

افرض الآن ان الكرة عزلت وتم شحنها بالشحنة Q. والشحنة q تبعد مسافة d عن المركز . والجهد الناتج من هذه المنظومة في نقطة ما يمكن ايجاده بطريقة التراكب الخطي (linear superposition). سنفرض اولاً ان الكرة تم تأريضها لذلك سيكون جهدها صفراً والشحنة المحتثة q' المساوية لقيمة صورة الشحنة q متوزعة فيها. وسنعزل الكرة الآن بقطع اتصالها بالأرض ، ونعطيها شحنة اضافية $(Q-q')$ والآن الشحنة الكلية في الكرة هي Q. وبما ان القوى الناتجة من الشحنة النقطية q متوازنة بوجود الشحنة q فان توزيع الشحنة المضافة $(Q-q')$ يصبح منتظماً على سطح الكرة. والجهد في نقطة ما لخارج الكرة الآن هو مجموع جهود الشحنات q ، q' والشحنة المضافة $(Q - q')$ ، والاضافة على الجهد، الناتجة من الشحنة المضافة $(Q - q')$ هي نفسها لو كانت شحنة نقطية قيمتها $(Q - q')$ وهكذا .

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R} - \mathbf{d}|} - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0\, d\,|\mathbf{R} - \frac{a^2}{d}\hat{\mathbf{e}}_d|} + \frac{Q + \frac{qa}{d}}{4\pi\epsilon_0\,|R|} \qquad (3.201)$$

(iv) الكرة مداومة عند جهد ثابت (The sphere is maintained at a fixed potential)

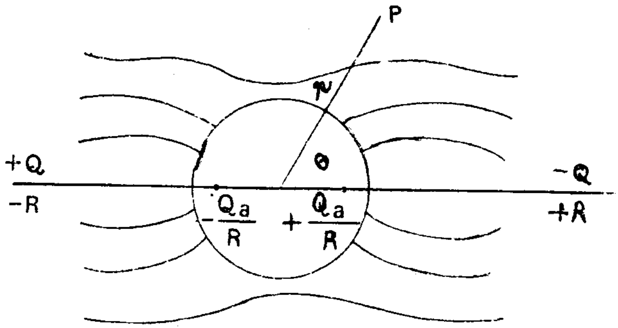
بما انه تم ابقاء الجهد في الكرة بقيمة V. فسيكون مقدار الشحنة التي تحملها V_a (حيث a هي سعة الكرة).

$$\therefore\quad V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{R} - \mathbf{d}|} - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 d|\mathbf{R} - \frac{a^2}{d}\hat{\mathbf{e}}_d|} + \frac{Va}{4\pi\epsilon_0|R|} \qquad (3.202)$$

(V) كـــرة مــوصلـــــة فـــــي مجـــــال كهربـــائـــــي منتـــظم . (Conducting sphere in a uniform electric field)

لقد حللنا هذه المسألة مسبقاً (مثال 5-3) باستخدام التوافق الكروي. وسنبين الآن كيفية حلها بطريقة الصور.

كرة مؤرضة موصلة نصف قطرها (a) موضوعة في مجال كهربائي منتظم E_0 ومركزها في نقطة الاصل. ان المجال الملاصق للكرة سيتشوه نتيجة الشحنة المحتثة على السطح (الشكل 12-3)



الشكل (12 - 3)

يمكن اعتبار المجال المنتظم على انه ناتج من شحنتين ملائمتين احداهما موجبة والاخرى سالبة موجودتين في اللانهاية وافرض على سبيل المثال ان الشحنة Q - موجودة في النقطة $Z=+R$ والشحنة $Q+$ في النقطة $Z=-R$ ، والمجال الناتج في نقطة قرب الاصل هو تقريباً $\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ بالاتجاه الموازي للمحور Z. وفي الغاية عندما $R, Q \to \infty$ مع الابقاء على النسبة $\frac{Q}{R^2}$ ثابتة ، يكون الجهد منتظماً ومساوياً للمقدار $E_0 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

الجهد في نقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل والناتج من المنظومة التي تحتوي على الشحنات $\pm Q$ في $Z=\pm R$ والشحنة المحتثة على الكرة هونفس الجهد الناتج من الشحنات $+Q$ في $-R$ و $-Q$ في $+R$ والشحنة الصورية $\frac{Qa}{R}$ في $-\frac{a^2}{R}$ و $-\frac{Qa}{R}$ في $+\frac{a^2}{R}$.

$$\therefore\ V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\,(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\,(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}$$

لأن $r \ll R$ ، فان الحدين الاولين يعطيان الجهد $-\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, r\cos\theta$ بالتمدد

والغاء الحدود العليا) . ويمكن اعتبار الشحنتين الصورية $\frac{Qa}{R}$ و- $\frac{Qa}{R}$ - كثنائي قطب مسافة الفاصلة بينهما هي $\frac{2a^2}{R}$ وهكذا فان مقدار الجهد الاضافي الناتج منهما في نقطة P هو $\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ حيث $\frac{2Q\,a^3}{R^2}$ P.

$$\therefore\ V_P = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0\,R^2}\, r\cos\theta + \frac{(2Qa^3/R^2)\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= -E_0\, r\cos\theta + \frac{E_0\, a^3\cos\theta}{r^2} = -E_0\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (3.203)$$

وكثافة الشحنة المحتثة تساوي :

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} = 3\epsilon_0\, E_0 \cos\theta \qquad (3.204)$$

3-12 الصور في العوازل (Images in Dielectrics) :

يمكن تطبيق طريقة الصور لايجاد فرق الجهد الناتج من شحنة نقطية قرب سطح عازل. وسنوضح كيفية ذلك بدراسة مثالين نموذجيين.

(i) ايجاد المجال الناتج من شحنة نقطية q تبعد عمودياً مسافة d من عازل شبه لانهائي محدد بسطح مستوي (الشكل 3-13)

: (The field produced by a point charge "q" placed at a perpendicular distance 'd' from a semi - infinite dielectric bounded by a plane surface (Fig.3-31).

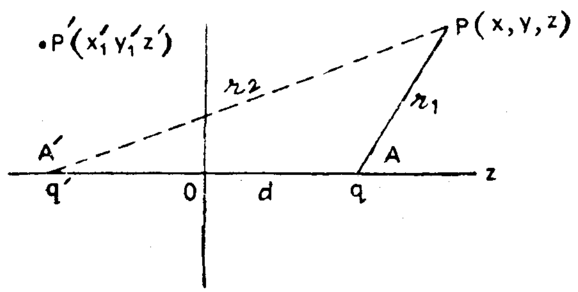
ليكن السطح متطابقاً مع المستوي الذي فيه Z=0. ولتكن 0 نقطة الأصل،وA نقطة على المحورZ تقع فيها الشحنة q،ان مجال هذه الشحنة النقطية سيستقطب العازل الذي

بدوره سيؤثر على المجال في الفراغ على الطرف الايمن. وسنفترض ان المجال المتولد من شحنة الاستقطاب في نقطة ما من الطرف الايمن يساوي لذاك المتولد من الشحنة q التي هي صورة الشحنة q في النقطة A. والسؤال الذي يجب ان نجيب عنه الآن هو ماقيمة q التي تتوافق وفرضيتنا؟

الجهد في نقطة P في الفراغ هو :

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

أو بموجب الاحداثيات الديكارتية، الجهد في نقطة P(x,y,z)



الشكل (13 ـ 3)

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\{x^2 + y^2 + (z - d)^2\}^{1/2}} + \frac{q'}{\{x^2 + y^2 + (z + d)^2\}^{1/2}}\right] \quad (3.205)$$

والآن ماهو الجهد في نقطة P′ في الوسط العازل نتيجة الشحنة q′؟ بالتأكيد ليس نفسه الذي يتولد من الشحنة النقطية q′ في النقطة P′ لو كانت في الفراغ. سنفرض ان هذا الجهد هو نفسه المتولد من الشحنة q″ في النقطة A لو كان الفضاء فراغاً، والعازل ليس موجوداً. هذا الجهد في النقطة P′(x′, y′, z′) هو :

$$V_{P'} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 \{x'^2 + y'^2 + (z' - d)^2\}^{1/2}} \quad (3.206)$$

الجهد في الفراغ عندما تكون النقطة p في المستوي Z = O هو :

$$V_P\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q+q'}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}}\right\} \qquad (3.207)$$

وذاك في 'P عندما يكون في نفس النقطة لكن في العازل هو

$$V_{P'}\Big|_{z=0} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0\,(x'^2+y'^2+d^2)^{1/2}} \qquad (3.208)$$

وعلى الحدود Vp= V'p التي تحقق تلقائياً الشرط الحدودي الاول الذي ينص على ان المركبات المماسية لـ E يجب ان تكون نفسها على جانبي الحدود ، وهذا الشرط يعطينا :

$$q + q' = q'' \qquad (3.209)$$

والشرط الحدودي الثاني الذي ينص على ان المركبات العمودية لـ P يجب ان تكون مستمرة خلال الحدود اي

$$\frac{\partial V_P}{\partial z} = \epsilon\,\frac{\partial V_{P'}}{\partial z} \quad \text{at} \quad z = 0 \qquad (3.210)$$

حيث ϵ تمثل سماحية العازل.

$$\frac{\partial V_P}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{q(z-d)}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}} - \frac{q'(z+d)}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{d\,(q-q')}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \quad \text{at} \quad z = 0 \qquad (3.211)$$

وبنفس الطريقة :

$$\frac{\partial V_{P'}}{\partial z} = \frac{q''\,d}{4\pi\epsilon_0\,(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \quad \text{at} \quad z' = 0 \qquad (3.212)$$

تعطينا المعادلة (3-210)

$$\frac{d(q-q')}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\epsilon\,q''\,d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$q - q' = \epsilon\,q'' \qquad (3.213)$$

وبحل المعادلتين (3-209)و (3-213) :

$$q'' = \frac{2q}{\epsilon + 1}; q' = -\frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon + 1} \qquad (3.214)$$

وقوة التجاذب بين العازل والشحنة النقطية هي :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} = -\frac{q^2(\epsilon - 1)}{16\pi\epsilon_0 d^2 (\epsilon + 1)} \qquad (3.215)$$

(ii) كرة عازلة في مجال منتظم (Dielectic sphere in a uniform field) :

كرة عازلة نصف قطرها "a" وثابت عزلها ϵ_1 موضوعة في مجال عازل منتظم E_0 (uniform dielectric field) موجود في وسط ثابت عزله ϵ_2 ، نظراً لعدم وجود اي شحنات حرة داخل او خارج السطح يجب ان يتوافق الجهد V (خارج) والجهد V (داخل) الكرة مع معادلة لابلاس ونعني :

(i) $\nabla^2 V_1 = 0, \nabla^2 V_2 = 0$

وكذلك يجب ان يحقق الجهد الشروط الحدودية ايضاً أي :

(ii) يجب أن تكون $V(r,\theta)$ مستمرة عند $r=a$ لكل θ اي

$V_1 = V_2$ عند $r = a$

(iii) المركبات العمودية لـ D يجب ان تكون مستمرة ايضاً عند $r = a$ ولكل θ اي :

on $r = a$ for all θ

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{on} \quad r = a$$

(iv) يجب أن يكون $V(r,\theta)$ ذا قيمة محددة عند $r = 0$

(v) $V_2(r, \theta) = V_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$ as $r \to \infty$

الجهد الذي هو حل معادلة لابلاس يمكن التعبير عنه بصيغة

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta) \qquad (3.216)$$

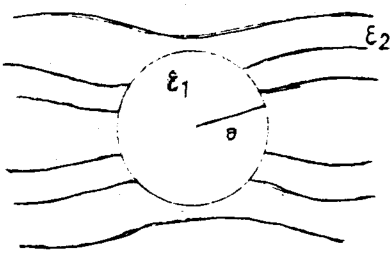
بما ان الجهد في نقطة الاصل يجب ان يكون محدد (الشرط الرابع) لذا يجب ان لايتواجد اي حد بصيغة $Br^{-(l+1)}$ في التعبير عن V_1 لانه يعطي زيادة لانهائية للجهد في $r=0$.

$$\therefore \quad V_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \qquad (3.217)$$

والجهد في الخارج V_2 يحسب من :

$$V_2 = \sum^{\infty} \left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta) \qquad (3.218)$$

يمكن ايجاد الثوابت من الشروط الحدودية.



الشكل (14 - 3)

الجهد V_2 في اللانهاية هو:

$$V_2 = C_0 P_0(\cos\theta) + C_1 r P_1(\cos\theta) + C_2 r^2 P_2(\cos\theta) + \ldots \qquad (3.219)$$

وبموجب الشرط الخامس يجب ان تساوي المعادلة اعلاه المقدار $-E_0 r P_1(\cos\theta)$ كل الحدود في المعادلة (219-3) تزول عدا الحد الثاني اذا كان

$$l = 1, \qquad C_1 = -E_0 \qquad (3.220)$$

ويعطينا الشرط الحدودي الثاني :

$$V_1 = V_2 \text{ on } r = a \text{ for all } \theta$$

$$A_1 a = - E_0 a + \frac{D_1}{a^2} \qquad (3.221)$$

والشرط الثالث يعطينا:

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{on} \quad r = a \text{ for all } \theta$$

$$\epsilon_1 A_1 = - \epsilon_2 \left(E_0 + \frac{2D_1}{a^3} \right) \qquad (3.222)$$

وحل المعادلتين (3-221) و (3-222) يعطينا :

$$D_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 ; A_1 = - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \qquad (3.223)$$

اذا ،

$$V_1 = - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos\theta = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 z \qquad (3.224)$$

$$V_2 = - E_0 r \cos\theta + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{E_0 a^3 \cos\theta}{r^2} \qquad (3.225)$$

المجال داخل الكرة هو :

$$E_{\text{int}} = - \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \qquad (3.226)$$

والجهد ثابت منتظم وموازي للجهد المسلط.

$$\text{If } \epsilon_1 > \epsilon_2, \qquad E_{\text{int}} < E_0 \qquad (3.227)$$

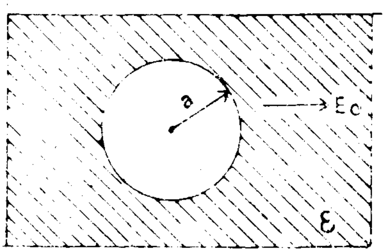
وهذا كما بينا في الفصل السابق ما يحدث لأن شحنات الاستقطاب المحتثة على السطح تزيد من المجال المعاكس ويمكن ايجاد المجال في الخارج من (225-3)، وهو يساوي للمجال E_0 زائداً مجال ثنائي قطب عزمه :

$$p = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} a^3 E_0 \qquad (3.228)$$

وهكذا تتصرف كرة عازلة في مجال منتظم كأنها ثنائي قطب بسيط

(iii) فجوة كروية في وسط عازل (A spherical cavity in a dielectric medium) :

يمكن حل مسألة الفجوة الكروية في وسط عازل ثابت عزله E بنفس اسلوب الحل المتبع في مسألة الكرة العازلة اذا جعلنا $\epsilon_1 = 1$ ، $\epsilon_2 = \epsilon$ في المعادلة (226-3) نحصل على



الشكل (15 - 3)

$$E_{\text{in}} = \frac{3\epsilon}{1 + 2\epsilon} E_0 \qquad (3.229)$$

$$\text{If } \epsilon > 1, \qquad E_{\text{in}} > E_0$$

المجال في الخارج يساوي المجال المسلط E_0 زائداً المجال الناتج من ثنائي قطب في نقطة الاصل والذي عزمه :

$$p = \frac{1 - \epsilon}{1 + 2\epsilon} a^3 E_0 = -\frac{(\epsilon - 1)}{1 + 2\epsilon} a^3 E_0 \qquad (3.230)$$

المعاكس في اتجاهه للمجال المسلط .

تمارين الفصل الثالث

3-1 برهن العلاقة الآتية لمتعددة الحدود ليكندر :

$$\int P_l (\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{P_{l+1}(\cos\theta) - P_{l-1}(\cos\theta)}{2l+1}$$

3-2 رباعي قطب خطي شحناته $q, -2q, q$ ،ومسافاته الفاصلة "a" موضوع في غلاف كروي موصل ومؤرض نصف قطرها "b" بحيث ان الشحنة الوسطية 2q - تقع في مركزها (نقطة الأصل).جد الجهد داخل وخارج الكرة. برهن في الغاية عند $a\to 0$

$$V(r,\theta,\phi) \sim \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(1 - \frac{r^5}{b^5}\right) P_2(\cos\theta)$$

حيث Q تساوي qa^2 ،

3-3 نصف كرة نصف قطرها "a" مشحونة بانتظام بشحنة مقدارها Q. على فرض ان مركز قاعدة نصف الكرة هذه يقع عند نقطة الاصل. برهن ان الجهد في نقطة $(r \gg a)$ يحتسب من المعادلة :

$$V \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[1 + \frac{3a}{2r}\cos\theta\right]$$

3-4 كرة مشحونة كثافة شحنتها السطحية σ في جميع السطح عدا في قطعة كروية قرب القطب محددة بالدائرة ذات $\theta=\alpha$،جد الجهد داخل وخارج الكرة .

3-5 كرة موصلة مؤرضة نصف قطرها "a" موضوعة في مجال جهدي $=\frac{r^2 \sin 2\theta}{4\pi\epsilon_0}$ $V(r,\theta,\phi)$ مركزه في نقط الاصل. جد الجهد في نقطة ما خارج الكرة؟

3-6 غلاف كروي موصل معزول غير مشحون وضع في مجال منتظم E_0 اذا قطع هذا الغلاف الى نصفين بمستوٍ عمودي على المجال. جد القوة المطلوبة لمنع نصفي الكرة من الانفصال.

3-7 اسطوانة دائرية موصلة نصف قطرها "a" وطولها لانهائي موضوعة في مجال منتظم محورها عمودي على المجال. جد الجهد في نقطة ما خارج الاسطوانة اذا ماتم ابقاء الجهد في الاسطوانة صفراً.

3-8 ثقب او تجويف (hollow) على شكل اسطواني دائري قائم (right circular cylinder) نصف قطره "a" يتطابق محوره مع المحور Z. ويقع وجها التجويف الدائريين في النقطتين Z = 0 و Z = b ، الجهد على السطح الاسطواني هو V (Ø , Z) وجهد الوجهين صفر . جد باستخدام الاحداثيات الاسطوانية سلسلة او مجموعة حلول الجهد في نقطة داخل الاسطوانة.

3-9 جد الجهد في نقطة ما والناتج من شحنة خطية مقدارها q لوحدة الطول موضوعة بصورة موازية لمستوى موصل لانهائي احتفظ بالجهد فيه صفراً.

3-10 مستو موصل فيه حدبه (boss) على شكل نصف كرة نصف قطرها "a" ومركزها على المستوي. تم تأريض المستوي، ووضعت شحنة نقطية 'q' على محور تماثل المنظومة في نقطة تبعد b>a من المستوي. جد الجهد والشحنة المحتثة في الحدبة.

3-11 كرة نصف قطرها "a" حوفضت عند الجهد صفر. وهناك ثنائي قطب كهربائي عزمه q يشير بعيداً عن الكرة ويبعد عن مركزها مسافة d. برهن ان الصورة (image) يجب ان تكون ثنائي قطب ذا عزم $\frac{pa^3}{d^3}$ وشحنة $\frac{pa}{d^2}$ وفي النقطة المعاكسة (inverse point) .

3-12 فجوة كروية نصف قطرها "a" اقتطعت من قطعة معدنية موصلة احتفظ بالجهد فيها صفراً ووضعت شحنة q على مسافة d من مركز ثقلها (Center of gravity) برهن أن القوة المسلطة عليها هي: $\frac{q^2ad}{4\pi\epsilon_0\,(a^2-d^2)^2}$.

3-13 فجوة كروية نصف قطرها "a" اقتطعت من وسط لانهائي سماحيته النسبية ϵ_r.
برهن ان الجهد في نقطة من الوسط العازل الناتج من ثنائي قطب p في مركز الفجوة هو نفسه الجهد المتولد من ثنائي قطب p' اءدخل في عازل مستمر (continuous dielectric) حيث :

$$p' = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_0 + 1} p$$

3-14 اسطوانة دائرية لانهائية سماحيتها النسبية ϵ_r موضوعة في مجال منتظم E ومحورها عمودي عليه. برهن ان المجال داخل الاسطوانة هو $E_0 \frac{2}{\epsilon_0 + 1}$. جد مجال منع الاستقطاب (depolarizing field) داخل الاسطوانة.

3-15 اسطوانة عازلة نصف قطرها "a" في مجال ثنائي البعد (two dimentional field) على سطحها توزيع من الشحنات المحتثة. $q \sin n\theta$ coul/m². جد الجهد في

أ - داخل الاسطوانة . ب - خارج الاسطوانة .

الفصل الرابع

المغناطيسية المستقرة Magnet ostatics

الفصل الرابع

المغناطيسية المستقرة Magnet ostatics

تعاملنا فيما مضى مع الشحنات الكهربائية الثابتة منطقياً ان تكون الخطوة التالية هي التعامل مع حركة هذه الشحنات والقوى المجتمعة معها وهو ماستقدمه في هذا الفصل . ربما سنتفاجيء من العنوان الذي يحمله هذا الفصل «المغناطيسية المستقرة» الا اننا في الحقيقة مازلنا نتقدم بتأني في مملكة الكهربائية. اما كيف تتعلق المغناطيسية في موضوع الكهربائية فهذا ماسنعرفه في الاجزاء القادمة.

4-1 التيار الكهربائي (Electric Current):

لاحظنا في الفصل الثاني كيف ان الالكترونات موصل موضوع في مجال كهربائي تكتسب سرعة معدلها بالاتجاه المعاكس للمجال. وهذا ينتج سيلاً متحركاً من الشحنات ونقول ان هناك تياراً كهربائياً يجري في هذا الموصل. تجدر الاشارة الى ان الموصل الحامل للتيار الكهربائي يكون متعادلاً كهربائياً لان عدد الشحنات السالبة فيه يكون مساوياً لعدد الشحنات الموجبة. ان التيار الكهربائي ليس بالضرورة ناتجاً من حركة الالكترونات ، انما هناك حالة اخرى يتولد فيها التيار نتيجة حركة شحنات اخرى وعلى سبيل المثال في اشباه الموصلات او البلازما،يتولد التيار نتيجة حركة الشحنات الموجبة،ان المعالجة الرياضية التي سنقدمها الآن هي عامة ويمكن تطبيقها على اي شحنة متحركة.

اذا كان عدد الشحنات لوحدة الحجم في نقطة P هو N وكل منها تحمل شحنة مقدارها q وتتحرك بمتوسط سرعة مقدارها U،فان كمية الشحنة المارة عبر وحدة مساحة عمودية على اتجاه متوسط السرعة الجارفة لوحدة الزمن يساوي :

$$\mathbf{j} = Nq\mathbf{u} \qquad (4.1)$$

وتسمى $\vec{J}$ كثافة التيـار (Current density) وهي دالـة اتجـاهيـة (vector function) للمكان واتجاهها باتجاه حركة الشحنات الموجبة.

اذا كان dS عنصر مساحة في المـادة،فـان كميـة الشحنـة المـارة خلالـه في وحـدة الزمن تساوي $\vec{J}.\hat{e}_n ds$ حيث $\hat{e}_n$ هي وحدة المتجـه عمودية على dS. ويسمى هـذا دفق $\vec{J}$ عبر المسـاحـة dS. وتسمى الشحنـة الصـافيـة المـارة خـلال السطـح لـوحـدة الـزمن بـالتيـار الكهربائي (electric current) ويرمز لها بالحرف I ، وعليه :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \hat{e}_n \, dS \qquad (4.2)$$

والآن لتكن S سطحـاً مغلقـاً يحتـوي حجماً مقـداره V، اذا كانت الكثـافـة الحجميـة للشحنة هي ρ فـان مقـدار الشحنـة الكلي في هـذا الحجم يسـاوي $\int \rho d\tau$ بما ان الشحنـة الكهربـائيـة لاتفنى ولاتستحـدث (اي ان الشحنـة محفـوظـة) فـاذا كان هنـاك اي تسرب للشحنة خارج هذا السطح فان مقدار الشحنة المتسربة يجب ان يساوي معـدل النقص في مقدار الشحنة الكلية داخل هذا الحجم اي :

$$\int \mathbf{j} \cdot \hat{e}_n \, dS = -\frac{d}{dt}\int \rho \, d\tau \qquad (4.3)$$

بما ان السطح مثبت في الفضاء فيكون معدل تغير الشحنـة داخل الحجم بطيئـاً نتيجـة تغير الزمن للكثافة الحجمية ρ .

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{e}_n \, dS = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau \qquad (4.4)$$

وعند تحويل التكامل السطحي الى التكامل الحجمي بواسطة مبرهنة التباعد نحصل على

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{e}_n \, dS = \int \operatorname{div} \mathbf{j} \, d\tau = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 \qquad (4.5)$$

هـذا التكامـل يجب ان يسـاوي صفراً لأي حجم V نختـاره ، لـذلـك فـان التكامليـة (integrand) يجب ان تزول اي :

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4.6)$$

وتعرف هذه بأسم معادلة الاستمراريـة (equation of continuity) وهي مبينـة كما هي مذكورة اعلاه على قانون حفظ الشحنة.

في حالة الاستقرار

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \qquad (4.7)$$

وتصح هذه المعادلـة في المنطقـة التي لايوجـد فيهـا مصـدر (Source) اومصب (Sink) للتيار.

4–2 قـــانـــون اوم ـ المـــوصليـــة الكهربـــائيـــة (Ohm's law, Electrical conductivity) :

لوحـظ تجريبيـاً ان شـدة التيـار الكهربـائي لعـدة مواد تتنـاسب خطيـاً مع المجـال E المسلط.

$$\mathbf{j} \propto \mathbf{E} \quad \text{or} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad (4.8)$$

حيث ان σ هي كمية ثـابتـة لكل مـادة في درجـة حرارة معينـة. وتسمى الموصليـة الكهربائية (electrical conductivity) للمادة.

يحسب التيار المستقر (steady current) I من المعادلة الآتية :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = \sigma \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS \qquad (4.9)$$

اذا كان للموصل مقطع عرضي منتظمA فان :

$$I = \sigma A E \qquad (4.10)$$

فـاذا كان فرق الجهـد بين نهـايتي المـوصـل هـو V وطـول المـوصـل هـو l فـان المجـال الكهربائي داخل الموصل سيكون منتظماً ويحسب من المعادلة الآتية :

$$E = \frac{V}{l} \tag{4.11}$$

$$I = \frac{\sigma A V}{l} \text{ and, hence,}$$

لذلك

$$\frac{V}{I} = \frac{l}{\sigma A} = R \tag{4.12}$$

حيث R هي مقاومة (resistance) الموصل وتقـاس بـالاوم. وتسمى المعـادلـة (4–12) قانون أوم (Ohm's Law) والمادة التي تخضع لهـذا القـانون تسمى اومـيـة (Ohmic). وعلى كل حال هناك لحظات معينة يفشل فيها قـانون أوم وعلى سبيل المثـال نستشهـد بسلوك ثنائي قطب محدد بالشحنة الحيزية (Space charge limited dipole) المذكور في الفصل السـابق،حيث وضحنـا هنـاك ان الجهـد في نقطـة معينــة في منطقــة بين الالكترودات (electrodes) يحسب من المعادلة الآتية :

$$V = \left(\frac{3 x m^{1/4}}{2^{5/4} e^{1/4} \epsilon_0{}^{1/2}} \right)^{4/3} J^{2/3} \quad \text{(see 3.147)}$$

وكثافة التيار (Current density) J تساوي :

$$J = \frac{I}{A}$$

$$V = \left(\frac{3 x\, m^{1/4}}{2^{5/4}\, e^{1/4} \epsilon_0{}^{1/2}} \right)^{4/3} \frac{I^{2/3}}{A^{2/3}}$$

$$I = \frac{4}{9} \epsilon_0 A \left(\frac{2e}{m} \right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{x^2} \tag{4.13}$$

أي

$$I \propto V^{3/2} \tag{4.14}$$

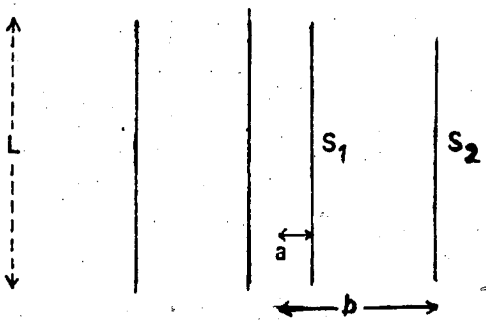
وترى ان هـــــذا لايتطـابـــــق مـــع قـانـــون أوم. ومثـل هـذا السلـوك اللاأومي (non - Ohmic behaviour) يحدث ايضاً في نقاط اتصال اشباه الموصلات.

4-3 حساب المقاومة (The calculation of resistance):

سنأخذ مثالاً مبسطاً لتبيان طريقة حساب مقاومة موصل ، ونؤكد على أن هذه الحسابات صحيحة في المواد الاومية (Ohmic materials) فقط.

نفرض ان كيبل محوري (شكل 1-4) من النوع - الذي يستخدم عادة لنقل الفولتية عبر سلكه الداخلي،ليكن نصف قطر السلك الداخلي "a" ونصف قطر الغلاف الموصل الخارجي "b"،وليكن الغلاف الخارجي مؤرضاً (earthed) وجهد السلك الداخلي V. فاذا كان الفراغ بين الموصل مملوءاً بمادة ليست عازلة تماماً فان تياراً سيتسرب عبر المادة من السلك الداخلي الى الغلاف الخارجي ويساوي :

$$I = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad (4.15)$$



الشكل (1 . 4)

حيث J هي كثافة التيار و S_1 هو سطح السلك.

$$I = \int_{S_1} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi a L \sigma E(a) \qquad (4.16)$$

حيث L هو طول الكيبل و E(a) قيمة المجال على السطح S_1 الذي هو عمودي على السطح :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

(حيث Φ هو الجهد)

$$\therefore \quad \mathbf{J} = -\sigma\nabla\Phi \qquad (4.17)$$

لذلك

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\sigma\nabla^2\Phi \qquad (4.18)$$

فاذا كان التيار ثابتاً

(انظر 7–4) div J = 0

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad (4.19)$$

ولو تذكرنا فان هذه المعادلة قد مرت علينا في الفصل السابق (معـادلـة لابلاس). عنـد دراسة الجهد الكهربائي المستقر وحلها هو :

$\Phi = A \ln r + C$ (انظر 139–3)

والشروط الحدودية تعطينا قيم الثوابت Aو C

At $r = a$, عندما $\qquad V = A \ln a + C$

$r = b$, وعندما $\qquad 0 = A \ln b + C$

$$A = V/\ln\left(\frac{a}{b}\right) \qquad \text{and } C = -V \ln b/\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Phi = \frac{V}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln r - \frac{V}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln b \qquad (4.20)$$

من المعادلة (4.16)

$$I = 2\pi a L\sigma E(a) = -2\pi a L\sigma\nabla\Phi$$

$$= -2\pi a L\sigma \frac{V}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{a} = -\frac{2\pi L\sigma V}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

لذلك

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\pi L\sigma}. \qquad (4.21)$$

نلفت الانتباه هنا الى التشابه ألذي يوضحه هذا المثال بين حل مسائل الكهربائية المستقرة ومسائل التيار المستقر، كما مبين اعلاه فان الحالتين مبنيتان على معادلة لابلاس. في السابق كان السطحان المعدنيان يعملان كلوحي متسعة، اما الان فانهما الكترودان يدخل ويخرج منهما التيار في المادة.

من الجدير بالذكر على الرغم من ان التقنية المستخدمة في المسألة اعلاه لاتظهر اي صعوبات في حساب المقاومة الا ان مثل هذا الحساب لايكون سهلا دائما عندما تكون المادة ذات شكل اعتباطي حتى وان كانت هذه المادة اومية.

4 - 4التأثيرات المغناطيسية (Magnetic Effects) :-

اننا الان بوضوح يسمح لنا دراسة العلاقة بين الكهربائية والمغناطيسية ، والذين سبقونا تعاملوا مع الكهربائية والمغناطيسية كموضوعين منفصلين. صحيح ان بالامكان التعبير عن التفاعلات التبادلية للمغناطيسات بقانون التربيع العكسي كالمستخدم في الكهربائية ونعني :

$$F=K\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (4.22)$$

حيث m_1 , m_2 هما قوة القطبين (pole strength) ولكن هذا لايعني وجود شحنات مغناطيسية حرة كالموجودة في الكهربائية، والاقطاب المغناطيسية في الحقيقة تشابه شحنات الاستقطاب في العوازل وذلك لان اصغر دقيقة مغناطيسية تكون ثنائية القطب وليست وحيدة القطب. لذلك لم تتم محاولة للربط بين الموضوعين.

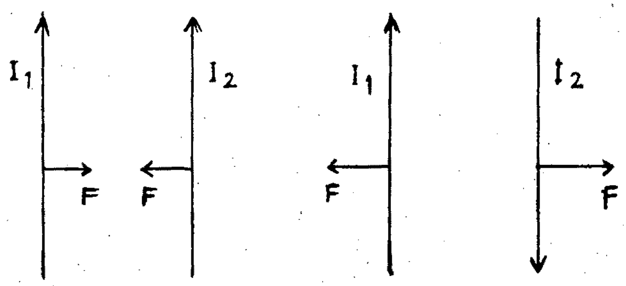
وفي بدايات القرن التاسع عشر وقعت امور جلبت انتباهاً وتطوراً مفاجئاً في هذا الاتجاه. واكتشف اوسترد (Oesterd) ان التيار الكهربائي يسلط قوة على الابرة المغناطيسية مشابهة للقوة التي يسلطها مغناطيس دائمي، وقدم هذا الاكتشاف الى الاكاديمية الفرنسية من قبل اراكو (Arago) في الحادي عشر من ايلول عام 1820. وهذا يوضح ان هناك قوى ليس فقط بين الشحنة واخرى او بين مغناطيس وآخر وانما هناك قوى ايضاً بين الشحنات المتحركة والمغناطيس وهذا هو الذي جمع في البداية موضوعي الكهربائية والمغناطيسية وظهر الي حيز الوجود مايسمى بالكهرومغناطيسية (electromagnetism). وبعد اسبوع بالتحديد من تأريخ وصول اخبار اكتشاف اوسترد

الى الاكاديمية بين أمبير (Ampére) ان سلكين متوازيين يحملان تياراً يجذب بعضهما البعض الاخر. اذا كان التيار بنفس الاتجاه ويتنافران اذا كانت التيارات متعاكسة الاتجاه.

واصل أمبير ابحاثه بنفس الحماس الى ان توصل الى تحليل رياضي رائع للموضوع كله وطور المكافيء للمغناطيسيات التي تحمل التيار الكهربائي. ونشر نتائجه في مذكرات. وبعد نصف قرن وصفه ماكسويل (Maxwell) بأنه بنيوتن الكهربائية، (Newton of electricity)، ووصف اعماله بأنها واحدة من اعظم انجازات العلم. وأمبير هو الذي اطلق لقب الكهرودايناميك (electrodynamic) على العلم الذي يتعامل مع التأثير المتبادل للتيارات. وعلى فرض ان القوة بين عناصر دائرتين مختلفتين (different circuits) تؤثر على طول الخط الذي يربط بينهما، استطاع أمبير ان يشتق صيغة تعبير عن القوة بين الدائرتين والتي تبين فيما بعد انها خاطئة نتيجة خطأ الافتراض الذي فرضه أمبير اصلاً وهو ان القوة بين العناصر تعمل على الخط الواصل بينهما اما الحالة المشابهة لها في الجزيئات المغناطيسية فنحن نعرف ان القوة لاتتخذ الاتجاه المحاذي للخط الواصل بينهما، وكان يمكن صياغة تعبير صحيح لو ازيل هذا الفرض او التقيد .

5 – 4 المجال المغناطيسي (The magnetic field) : -

اشرنا في الجزء السابق الى ملاحظات أمبير الخاصة بالقوى المتبادلة بين الاسلاك المتوازية التي تحمل تيارات كهربائية وكما هو موضح في الشكل (2–4).



الشكل (2 . 4)

المغناطيس الدائمي يسلط قوة ايضا على الاسلاك الحاملة للتيارات الكهربائية فاذا علق سلك يحمل تيارا كهربائيا بين قطبي مغناطيس فانه يسلط عليه قوة عمودية على اتجاه التيار وبالنتيجة فان السلك ينحرف. وعندما يعكس اتجاه التيار في السلك فان اتجاه الانحراف ينعكس ايضا.

لذا فان تأثير سلك يحمل تيارا مستقرا على سلك اخر حامل للتيار هو نفس تأثير المغناطيس عليه. وهذه التأثيرات يمكن ايضاحها بصورة جلية بادخال مصطلح المجال المغناطيسي.

ان التيار المار بأحد الاسلاك (ليكن I_1 مثلا) ينتج مجالا مغناطيسيا يولد قوة تؤثر على الشحنات المتحركة المكونة للتيار I_2 في السلك الاخر. وقد وجد تجريبيا ان القوة المسلطة في السلك الذي يحمل تيارا قيمته I_1 على السلك لذا فان مقدار القوة المؤثرة على شحنات متحركة في مجال مغناطيسي معين يتناسب مع الشحنة ومع سرعتها ايضاً. ووجد ايضاً انه يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين المتجه U وكثافة الفيض المغناطيسي B (magnetic flux density). (ملاحظة : لقد عرفنا الفيض الكهربائي في الفصل الأول بأنه $E.\hat{e}_n dS$. وبنفس الطريقة نعرف الفيض المغناطيسي بأنه يساوي ($B.\, n_e\, dS$) وتؤثر بالاتجاه العمودي على هذه المتجهات ، لذلك :

$$\mathbf{F} \propto q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{F} = kq\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{4.23}$$

وفي نظام كاوسيان (Gaussian system) ، ان الثابت K يساوي 1/C وفي نظام الوحدات العالمية (S.I) فان الثابت يساوي واحداً. وفي حالة وجود المجال المغناطيسي والمجال الكهربائي معاً فان القوة التي تحدثها شحنة متحركة مقدارها q تساوي :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{4.24}$$

وتسمى هذه القوة باسم قوة لورنتس (Lorentz force) ووجد ان هذا القانون (4-24) ينطبق حتى على الجسيمات التي تتحرك بسرعة مقاربة لسرعة الضوء،وهذا يدل على ان الشحنة الموجودة على جسم معين مستقلة عن سرعته. وبمعنى آخر ان الشحنة كالكتلة المستقرة (Rest mass) غير متغيرة نسبياً (relativisticaly invariant)..تم استخدام

المعادلة (4–24) لتعريف الوحدة الى الفيض المغناطيسي والذي يرمز له بـالحرف (B) بمـا ان وحدة E هي فولت / متر،فان الحد UxB يجب ان يكون له نفس الوحدة لذلك فـان وحـدة B يجب ان تكون $\frac{\text{فولت} \times \text{ثانية}}{\text{متر}^2}$ ويعرف الحـد(فولت × ثـانيـة) بـاسم فيبر (Weber) ولذلك يعبر عن B بالوحدة $\frac{Wb}{m^2}$ ويمكن التعبير عنهـا ايضـاً بـالوحـدة نيوتن على أمبير على متر وتسمى تيسلا (tesla) ويرمز لها بالحرف T.

4–6 القوة على تيار (Force on a Current) : -

درسنا في الجزء السابق القوة المسلطة على جسيم واحد فقط وسندرس الآن مـاذا يحـدث اذا كان لدينا عدد من الشحنات المتحركة مثل الكترونـات التوصيل في المـادة. فـاذا كان عدد الالكترونات لوحدة الحجم هو N ، فان القوة لوحدة الحجم تكون :

(اذا فرضنا ان E=0) $\mathbf{F} = Nq\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

والقوة الكلية تساوي

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, d\tau = \int_S\int_l (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\,(d\mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS) \tag{4.25}$$

حيث dS هي مساحة المقطع العرضي للموصل و $d\ell$ هو عنصر من طوله باتجاه التيـار.

بما ان J و $d\ell$ متوازيان فان :

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_S\int_l (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})(\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS) = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{4.26}$$

اذا كان السلك حامل التيار على شكل حلقة مغلقة (Closed loop).

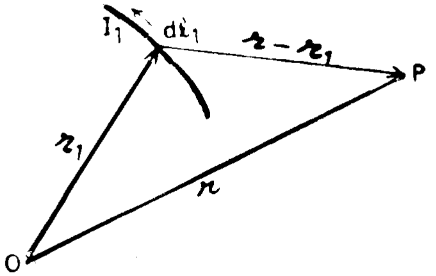
$$\mathbf{F} \quad \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{4.27}$$

4–7 قانون بايوت ـ سافارت (Biot – Savart Law)

بعـد شهر من اكتشـاف أمبير تمكن بـايـوت (Biot) وسـافـارت (Savart) من تحليـل التجارب المختلفة وصيـاغـة قوانين منـاسبـة تربـط كثـافـة الفيض المغنـاطيسي B والتيـار وكذلك قانون القوة بين تيار وآخر.

(i) لتكن dl_1 عنصر طول من سلك معين ويكون اتجاه العنصر باتجاه التيار I_1 الجاري في هذا السلك (الشكل 3–4).

ان كثافة الدفق المغناطيسي dB الناتج من هذا العنصر في نقطة P المحددة بمتجه الموضع r يعطى مقداراً واتجاهاً من المعادلة الآتية :



الشكل (4 . 3)

$$dB = k\,\frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (4.28)$$

حيث r_1 هو متجه موضع العنصر dl. وهذا يعني ان كثافة الدفق المغناطيسي تتناسب طردياً مع التيار الجاري في الدائرة،وطول العنصر المأخوذ من السلك،وعكسياً مع مربع المسافة بين النقطة وعنصر الطول (مرة اخرى قانون التربيع العكسي)،ويعتمد الثابت K على المادة ونظام الوحدات المستخدمة في الفضاء الحر اذا كان التيار مقيساً بالوحدة e.s.u وكثافة الفيض المغناطيسي بالوحدة K,e.m.u تساوي $k = 1/c$ في النظام العالمي (S.I) . فتؤخذ وحدات للثابت K مساوية لـ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ لضمان توافق القوانين التجريبية مع الوحدات العالمية .S.I، والثابت μ_0 يعبر عن نفوذية الفضاء الحر (Permeability of free space) وقيمته بالتحديد تساوي $4\pi \times 10^{-7}\ NA^{-2}$

$$\therefore\quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (4.29)$$

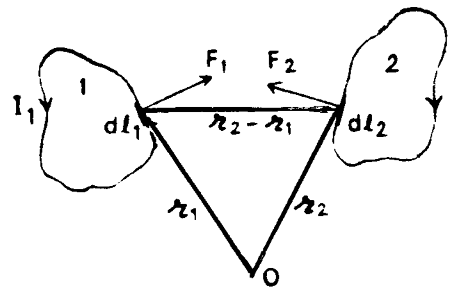
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (4.30)$$

والمعادلتين (29–4)و (30–4) هما صيغتي بايوت وسافارت.

ii) اذا كان هناك دائرتان مغلقتان كما هو موضح في الشكل (4–4) فان القوة المسلطة على الدائرة الثانية من قبل الاولى هي :

$$\mathbf{F}_2 = \oint I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2 \qquad (4.31)$$

حيث B_2 هو كثافة الفيض المغناطيسي الناتج من الدائرة الاولى في الموقع الموجود فيه الدائرة الثانية ، وعلى فرض ان B_2 ثابتة على كل الحيز الذي تشغله الدائرة.



الشكل (4 . 4)

$$\therefore \quad \mathbf{F}_2 = \oint_2 I_2\, d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (4.32)$$

وبنفس الطريقة تكون القوة المسلطة من قبل الدائرة الثانية على الاولى تساوي :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad (4.33)$$

يبدو ان المعادلتين (32–4) و (33–4) ستظهر ان وصفاً غير مقبول ، حيث سيعتقد ان القوانين F_2 ، F_1 متساويتان ومتعاكستان في الاتجاه ، على كل حال وبما ان

$$\frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \neq \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$\mathbf{F}_2 \neq -\mathbf{F}_1$$

هل هذا لايعارض قانون نيوتن ؟ واضح انه يعارض لكن لتوسيع التكامل في المعادلة (4-32).

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 \oint_1 \left[\frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right]$$

الآن التكامل الاول هو:

$$\oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\oint \nabla_2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \cdot d\mathbf{l}_2 = 0$$

(هنا ∇_2 تميز فقط عن الحدود التي تتضمن r_2)

$$\therefore \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{F}_1 \qquad (4.34)$$

والآن اي الصيغ مقارنة مع الصيغة المستخلصة من المعادلة (4-33) وبنفس طريقة التحويل تتطابق مع قانون نيوتن.

لتحقق الآن فيماذا كانت ملاحظات أمبير بخصوص القوى بين الاسلاك المتوازية حاملة التيارات يمكن حسابها استناداً الى اسس قانون بايوت وسافارت. ان لدينا في الشكل (4-5) سلكين متوازيين تفصل بينهما مسافة مقدارها "d" يسري فيهما تياران I_1 ، I_2 على التوالي ، اذا فرضنا ان السلك الاول يقع بمحاذاة المحور الاحداثي Z فان السلك الثاني يمر بنقطة (a,o ,o) ، لنحسب الآن كثافة المجال المغناطيسي في نقطة p والتي احداثياتها هي (a,o,z) الناتج من التيار I_1 الذي يسري في السلك الاول باستخدام المعادلة (4-29) ، ولتكن المسافة بين P ونقطة الاصل هي r.

نأخذ عنصر طول dl_1 من السلك الاول في نقطة الاصل كما في الشكل. ان مركباته هي (o,o,dz) وتلك التي لـ r هي (a,o,z). لذلك فان مركبات الحد $dl_1 \times r$ هي (o,adz,o) وهذا يعني بوضوح ان المجال المغناطيسي dB في نقطة P والناتج من عنصر الطول dl_1 يكون موازياً للمحور y و B كذلك تكون موازية للمحور y ومركباتها B_x تساوي صفراً وكذلك B_z تساوي صفراً.

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\,dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

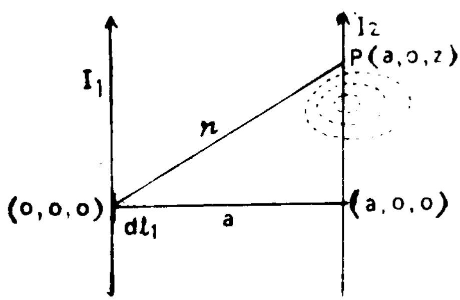
اذا جعلنا $z = a \tan \theta$

$$\therefore \quad B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cdot a \sec^2 \theta}{a^3 \sec^3 \theta} d\theta = \frac{2\mu_0 I_1}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \qquad (4.35)$$

نرى أن B تتناسب طردياً مع التيار I_1 وعكسياً مع المسافة a وبما ان B هي دائماً عمودية على المستوى الذي يحتوي السلك والمتجه نصف قطري r (radius vector) فان خطوط ثبوت B (اي الخطوط التي تكون فيها B متساوية تشكل دوائر مغلقة يقع مركزها في السلك وهي في المستوي العمودي على التيار.

ويمكن استخدام النتيجة اعلاه لايجاد القوة dF التي تؤثر على عنصر الطول dl_2 المأخوذ من السلك الثاني نتيجة التيار الذي يسري في السلك الاول وتحسب هذه القوة من المعادلة (4–26) ، وبما ان B هي بالاتجاه الموجب للمحور y وdl_2 باتجاه المحور Z فان القوة المؤثرة على عنصر الطول dl_2 ستكون بالاتجاه السالب للمحور X ومركباتها في هذا الاتجاه تكون :

$$dF_x = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \, dl_2}{2\pi a} \qquad (4.36)$$

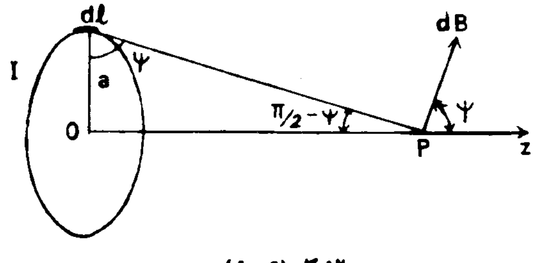


الشكل (4 . 5)

وهكذا نرى انه اذا كانت التيارات بنفس الاتجاه ، فان نوع القوة يكون تجاذبياً اما اذا كانت التيارات متعاكسة الاتجاه فتكون القوة تنافرية ومتطابقة مع مشاهدات أمبير.

مثال (4-1) : ـ باستخدام قانون بايوت وسافارت جد كثافة الفيض المغناطيسي B الناتج من ملف دائري يحمل تياراً مقداره I في نقطة تقع على محور الملف.

ليكن نصف قطر الملف هو "a" وليكن محوره متطابقاً مع المحور Z كما في الشكل (4-6) .



الشكل (4 . 6)

سنحسب اولاً كثافة الفيض المغناطيسي في نقطة P التي تبعد مسافة r عن عنصر الطول dℓ المأخوذ من الملف. بما ان المجال المغناطيسي dB الناتج من عنصر الطول dℓ هو عمودي على dℓ وعمودي على r ايضاً، وعند اجراء التكامل حول الملف فان مجموع مركبات dB العمودية على المحور تكون صفراً بينما المركبات الموازية للمحور تساوي :

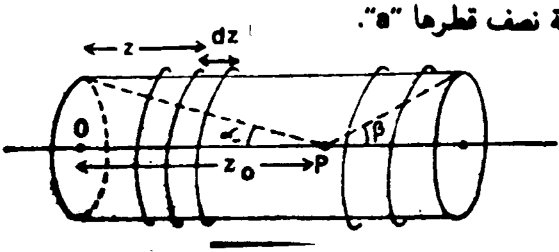
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \psi$$

حيث ψ هي الزاوية المحصورة بين المجال المغناطيسي dB والمحور.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \cos \psi dl = \frac{\mu_0 I \cos \psi}{4\pi r^2} 2\pi a$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (4.37)$$

مثال (4-2) : ـ جد المجال داخل ملف لولبي (Solenoid) طوله L وعدد لفاته N من اللفات،ملفوفة حول اسطوانة نصف قطرها "a".



الشكل (4 . 7)

يوضح الشكل (7–4) الملف اللولبي ، لنحسب المجال في نقطة مثل P التي تبعد مسافة z_0 عن النقطة O ،اذا كانت اللفات متقاربة جداً فيمكن اعتبار ان التيار يسري بانتظام حول الاسطوانة اي اذا اعتبرنا ان الطول مقسم الى عنصر طول dz كالذي هو موضح في الشكل والذي يبعد مسافة z عن النقطة O،ان التيار في هذا الجزء من الملف يساوي $\frac{N}{L}\,dzI$ والمجال الناتج من عنصر الطول في نقطة P هو :

$$dB = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 NI}{L}\frac{a^2dz}{[(z_0-z)^2+a^2]^{3/2}}$$ انظر : (4.37)

$$B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 NI}{L}\int_0^L \frac{a^2dz}{[(z_0-z)^2+a^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu_0 NI}{L}\left[-\frac{z_0-z}{\sqrt{(z_0-z)^2+a^2}}\right]_0^L$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2L}\left[\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2+a^2}}+\frac{L-z_0}{\sqrt{(L-z_0)^2+a^2}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2L}\left[\cos\alpha+\cos\beta\right] \qquad (4.38)$$

الزاويتان α, β موضحتان في الشكل (38–4) لو اخذنا ملفاً لولبياً لانهائي الطول فان $\alpha = \beta = 0$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \qquad (4.39)$$

ونلاحظ ان B لاتعتمد على موقع النقطة p لذلك يمكن ان نستنتج ان كثافة الدفق المغناطيسي متساوية في اي نقطة داخل الملف اللولبي.

8–4 قوانين المغناطيسية المستقرة (The law's of Magnetostatics)

يمكن التعبير الى كثافة الفيض المغناطيسي المعادلة (30–4) ويمكن التعبير عنه بدلالة كثافة التيار لذلك :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\, d\tau$$

$\because \quad I d\mathbf{l}_1 = \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\, dl_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_n\, dS = \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\, d\tau)$

$$\therefore \qquad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right)\right] d\tau. \qquad (4.40)$$

وبأخذ التباعد (divergence)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla \cdot \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right)\right] d\tau.$$

وباستخدام المتطابقة: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C})$

نحصل على :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right) \cdot \{\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\}\, d\tau$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \left\{\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right)\right\} d\tau \qquad (4.41)$$

وبما ان ∇ تعمل على r فقط لذلك فان التكامل الاول يصبح صفراً. الحد الثاني يحتوي على العامل $\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\right)$ (Curl grad) يكون صفراً ايضاً. لذلك فان :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (4.42)$$

وهذا هو القانون الاول في المغناطيسية المستقرة وهو مطابق للعلاقة $\nabla \times E=0$ في الكهربائية المستقرة والعلاقة توضح ان المجال المغناطيسي لولبي الشكل (Solenoidal) على الضد من المجال الكهربائي الذي هو غير دوراني (irrotational) ، الآن لاتمام التشابه مع الكهربائية المستقرة ستجد قيمة $\nabla \times \mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}\, d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right)\right] d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\, d\tau \qquad (4.43)$$

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\, d\tau\right).$$

وباستخدام المتطابقة : $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

نحصل على :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\nabla \cdot \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\, d\tau\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\, d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) d\tau. \qquad (4.44)$$

ونحن نعرف ان

(انظر (3-162)

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \qquad (4.45)$$

وكذلك لدينا العلاقة

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) = -\nabla_1\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) \qquad (4.46)$$

حيث ∇_1 تعمل على r_1 فقط. وباستخدام (4-45) و (4-46) يمكن كتابة (4-44) على النحو الآتي :

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\, d\tau$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) d\tau + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int \left[\nabla_1 \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{\nabla_1 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right] d\tau + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

(ملاحظة : $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$)

وباستخدام مبرهنة التباعد يمكن ان تثبت ان الحد الاول سيزول اذا اخذنا السطح خارج الحيز الحامل للتيار كبيراً بما فيه الكفاية. والحد الثاني هو صفر ايضاً لان $\nabla\cdot\mathbf{j} = 0$ للحالة المستقرة (Steady State)

$$\therefore \quad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} \tag{4.47}$$

وهذا هو القانون الثاني للمغناطيسية المستقرة الذي يطابق القانون $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ في الكهربائية المستقرة والصيغة التكاملية لهذا القانون هي :

$$\int_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\,dS = \mu_0\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS.$$

وحسب مبرهنة ستوك(Stoke's theorem) :

$$\int_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\,dS = \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \quad \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = \mu_0 I \tag{4.48}$$

وهذا يعرف بأسم قانون أمبير (Ampere's Law) وهو ان التكامل الخطي لكثافة الفيض حول اي ممر مغلق يساوي التيار الذي يسري في المساحة المتضمنة بهذا الممر مضروباً في μ_0 ونقدم الآن جدولاً يلخص القوانين الخاصة بالمغناطيسية المستقرة والكهربائية المستقرة.

الكهربائية المستقرة	المغناطيسية المستقرة
$\nabla\times\mathbf{E} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$

4-9 الجهد المغناطيسي (The magnetic Potential) :

(ا) جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه(Magnetic Scalar potential).

في الكهربائية المستقرة عرفنا ان حالما نجد الجهد الكهربائي المستقر V يمكننا حساب المجال الكهربائي المستقر E. فهل هناك جهد مماثل في المغناطيسية المستقرة يمكن فيه حساب المجال المغناطيسي ، بما ان $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ يمكن التعبير عن E على انه تدرج

(gradient)كية غير متجه هي∇.ويبين الجدول المقدم في الجزء السابق في حالة كون0 = تظهر اوضاع مشابهة في المغناطيسية المستقرة ويعني .0 = $\nabla \times B$ لذلك يمكن التعبير عنB على انه تدرج كمية غير متجه هي Φ ي :

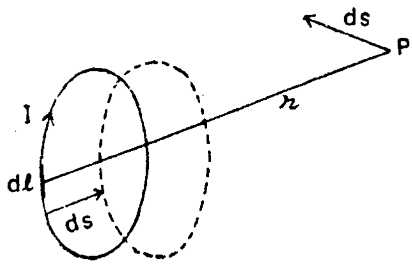
$$B = -\nabla \Phi_m \qquad (4.49)$$

وتسمىΦ_m بجهد الكمية المغناطيسية غير المتجه(magnetic scalar potential) وبالتعويض عن قيمة B في العلاقة $\nabla \cdot B = 0$ نحصل على :

$$\nabla \cdot B = -\nabla \cdot \nabla \Phi_m = -\nabla^2 \Phi_m = 0. \qquad (4.50)$$

وهكذا نجد ان Φ_m تحقق معادلة لابلاس.

وضحنا في الشكل (8–4) دائرة تحمل تياراً مقداره I، كثافة الدفق المغناطيسي في نقطة مثل P الناتج من هذا التيار تساوي.



الشكل (8 . 4)

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl \times r}{|r|^3}$$

اذا ازيحت النقطة P بمسافة δs، فان التغير في الجهد سيكون :

$$\delta\Phi = -B \cdot \delta s = -\delta s \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \times r}{|r|^3}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\delta s \cdot (dl \times r)}{|r|^3} \qquad (4.51)$$

نلاحظ ان الحد δs قد وضع داخل التكامل لانه ثابت اثناء عملية التكامل.

لنفرض الآن ان النقطة P مثبتة وتم ازاحة الدائرة نفسها بمقدار δs فان التغير في الجهد يجب ان يكون نفسه المذكور اعلاه. في هذه الازاحة مسح عنصر الطول dl مساحة مقدارها $|dl||\delta s| \sin\theta$، اذا كانت θ هي الزاوية المحصورة بين dl و δs. ان مقدار المساحة الممسوحة يساوي $-\delta s \times dl$. والزاوية المتكونة من هذه المساحة في نقطة P تساوي :

$$d\Omega = -\frac{\mathbf{r}\cdot(\delta\mathbf{s} \times d\mathbf{l})}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{\delta\mathbf{s}\cdot(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3}.$$

وبالتعويض في المعادلة (4-51) نحصل على :

$$\delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

لذلك فان الجهد Φ في نقطة P يساوي :

$$P = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega \qquad (4.52)$$

قارن هذه العلاقة مع جهد مزدوج الطبقات الكهربائية المستقرة (1-72) (electrostatic double layer) ونعني

$$\Phi(r) = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

نستخلص من هذا ان جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه رياضياً يملك نفس الخواص كما في جهد مزدوج الطبقات الكهربائية المستقرة والآن :

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = -\oint \nabla\Phi_m \cdot d\mathbf{l} = -\Phi_m \qquad (4.53)$$

ان الكمية Φ_m تسمى احياناً بالقوة الدافعة المغناطيسية (magneto motive force).

ب ـ الجهد المتجه (Vector Potential)

جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه مفيد وذو معنى في الحيز الخالي من التيار فقط. ويمكن ايجاد كثافة الفيض المغناطيسي B من الدالة العددية Φ_m في حالة كون $J = 0$ فقط. هل هناك دالة اخرى للجهد غير خاضعة لهذا التحديد ويمكن استخدامها في حيز تكون فيه (J) ذات قيمة معينة؟ . اذا كان هناك مثل هذا الجهد فانه يجب ان يخضع للعلاقة الاساسية التي هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (4.54)$$

ونحن نعرف ان : $\text{div curl } \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0.$

ولذلك يمكن التعبير عن B وكأنها لفة المتجه A (Curl of a vector A).

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (4.55)$$

ان المتجه A الذي يحقق المعادلة (55–4) يسمى الجهد المتجه (Vecter potential) يمكن ان نرى بسهولة ان المعادلة (55–4) ليست تعريفاً فريداً لـ (A) حيث يمكن ان نضيف لـ (A) اي دالة يكون لها صفراً (Curl A = 0) مثل تدرج ψ, العددي (gradient of a scalar وتبقى قيمة B نفسها.

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

لنذكر القاريء ان في الكهربائية المستقرة لم يكن الجهد العددي V محدداً تماماً بتعريفه الذي هو $\mathbf{E} = -\nabla V$ فاذا كان V هو جهد بعض المسائل فان جهداً آخر مختلف وهوV والذي يساوي V + C حيث C هو ثابت يعطي نفس المجال ايضاً.

$$-\nabla V' = -\nabla (V + C) = -\nabla V - \nabla C = -\nabla V = \mathbf{E}$$

لتحديد A بصورة اكثر يجب فرض حصر آخر عليها ويجب ان لايؤثر على B. افضل حالة في المغناطيسية المستقرة تتحقق فيها A هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \qquad (4.56)$$

وحسب هذا الاختيار هو انه يبسط الحل اكثر من اي اختيار آخر،ويجب ان نختار غير هذا في الكهربائية الديناميكية (الحركية) (electrodynamic).

لذلك فان العلاقتين $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ معاً تعرفان الجهد المتجه A الذي يحقق المعادلة الاساسية $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ لقد كنا دائماً نحاول ان نوازي بين المغناطيسية المستقرة والكهربائية المستقرة وذلك عن طريق المعادلتين الاساسيتين،والآن نسأل:هل هناك علاقة في المغناطيسية المستقرة تناظر معادلة بواسون $\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ الموجودة في الكهربائية المستقرة؟ لدينا قانون أمبير (47–4) : $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$

الآن $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$= -\nabla^2 \mathbf{A}$ (نجد هنا فائدة اختبار حالة $\nabla \mathbf{A} = 0$)

$$\therefore \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \tag{4.57}$$

وهذه المعادلة تشابه معادلة بواسون (Poisson equation) عدا ان A هي متجه،وهذا لايشكل اي صعوبة مادام كل مركبة من مركبات A تحقق المعادلة التفاضلية (differential equation) لذلك

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x; \ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y; \ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z, \tag{4.58}$$

والحل يكون :

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x}{|\mathbf{r}|} d\tau \text{ etc.} \tag{4.59}$$

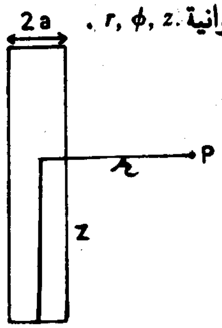
والهيئة العامة للحل بصيغة المتجهات تكون :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|} d\tau \tag{4.60}$$

لذلك يمكن حساب المجال الناتج من تيار معين بايجاد A اولاً من المعادلة (4-60) والتعويض بها في المعادلة (4-55)

<u>مثال (4-3) : -</u> جد الجهد المتجه وكثافة الفيض المغناطيسي B الناتج من سلك لانهائي الطول ويحمل تياراً اولاً في نقطة خارج السلك وثانياً في نقطة داخل السلك.

نفرض ان السماحية داخل السلك تساوي μ_1. ولنجعل محوره يتطابق مع المحور Z،لذلك تكون كثافة التيار مركبة واحدة هي j_z فتكون المركبة الوحيدة لـ A هي A_z ، ويكون من الملائم ايضاً استخدام الاحداثيات الاسطوانية r, ϕ, z.



الشكل (4 . 9)

(1) داخل السلك :

$$\nabla^2 A_z = -\mu_1 j_z = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2} \tag{4.61}$$

حيث ان a هو نصف قطر المقطع العرضي للسلك.

مادام A_z لاتعتمد على Z و ϕ، يمكن كتابة المعادلة (4-61) على الصيغة الآتية :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2}$$

وبالتكامل :

$$r\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\mu_1 I r^2}{2\pi a^2} + \text{a constant} \tag{4.62}$$

عندما تكون r مساوية لصفر فان الحد $r\frac{\partial A_z}{\partial r}$ يساوي صفراً ايضاً. كرر التكامل ثانية :

$$A_z = -\frac{\mu_1 I r^2}{4\pi a^2} + \text{a constant}$$

نفرض ان A_z تساوي صفراً عندما تكون r مساوية لـ A.

$$A_z = \frac{\mu_1 I}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right); \tag{4.63}$$

بما ان $B = \nabla \times A$ ومركبات لف A (Curl A) هي :

$$\begin{aligned}
(\text{curl A})_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\\
(\text{curl A})_\phi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\\
(\text{curl A})_z &= \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

نصل الى نتيجة هي :

$$B_\phi = \frac{\mu_1 I r}{2\pi a^2} \tag{4.65}$$

ويمكن الوصول الى نفس النتيجة باستخدام قانون أمبير (Ampere's law).

(2) خارج السلك :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial r}=\frac{C}{r} \qquad (4.66)$$

حيث C هو ثابت و $A_z = C\ln r + C'$ (C' هو ثابت آخر) وعندما $a = r$, $A_z = 0$ ،
$C' = -C\ln a$

$$A_z = C\ln\frac{r}{a} \qquad (4.67)$$

ويمكن ايجاد قيمة C من الشروط الحدودية للحد $\frac{\partial A_z}{\partial r}$ عندما $r = a$ ، لذلك وبما ان $B = \nabla \times A$ فان :

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

الآن يجب ان تكون B_ϕ مستمرة عندما $r = a$. من (4-63) عندما $r = a$.

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r}=\frac{\mu_1 I}{2\pi a}$$

ومن المعادلة (4-66) :

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r}=-\frac{C}{a}$$

$$\therefore \quad -\frac{C}{a}=\frac{\mu_1 I}{2\pi a} \quad \text{i.e.} \quad C=-\frac{\mu_1 I}{2\pi}$$

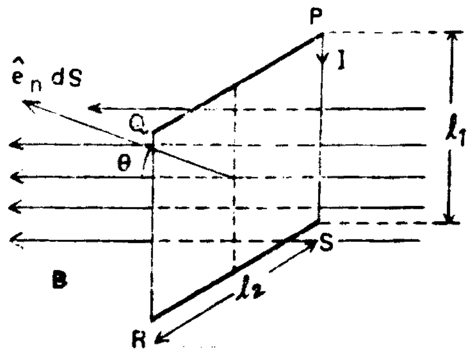
$$A_z=-\frac{\mu_1 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a}. \qquad (4.68)$$

ومن هذا يمكن ايجاد B.

$$B=\frac{\mu_1 I}{2\pi r} \qquad (4.69)$$

4-10 اطارات التيار في المجالات الخارجية ـ ثنائي القطب المغناطيسي
: (Current loops in External Fields - Magnetic Dipole)

سندرس في هذا الجزء الخواص المغناطيسية لاطارات التيار الصغيرة (small current loops) كتلك المتكونة من دوران الالكترون حول النواة في الذرات والنتائج التي توصلنا اليها ستفيدنا كثيراً في دراسة التصرف المغناطيسي وعلى الرغم من التسمية الا انه للسهولة سنختار اطاراً مستطيلاً (rectangular loop) ، حيث ان النظرية الناشئة منها يمكن استخدامها في الاطارات الدائرية (Circular loops) ايضاً.



الشكل (4 . 10)

الشكل (4-10) يرينا اطاراً سلكياً بسيطاً بشكل مستطيل يحمل تياراً معلقاً بوضع مستوٍ شاقولي في مجال مغناطيسي افقي هو B. بحيث يكون المستقيم العمودي على المستوي زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال. لتكن "a" هي المقطع العرضي (Cross - section) للسلك. والتيار الذي يسري في السلك يساوي :

$$I = Neua \tag{4.70}$$

حيث "N" هو عدد الالكترونات الحرة لوحدة الحجم،"e" شحنة الالكترون و "U" سرعته ، القوة dF_1 المؤثرة على عنصر الطول الصغير dl_1 المأخوذ من الضلع PS للاطار هي :

$$d\mathbf{F}_1 = Neau\, d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} \tag{4.71}$$

حيث المتجه dl_1 هو باتجاه التيار ، القوة الكلية على الضلع PS تكون :

$$\mathbf{F}_1 = I\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} = Il_1\, B\hat{\mathbf{e}}_y \quad (\because\ PS \perp B). \tag{4.72}$$

فاذا فرضنا ان المجال B موازٍ للمحور X والتيار موازي للمحور Z،فان القوة F تعمل بالاتجاه الموجب للمحور Y وكما هو موضح في الشكل (11–4). يوضح الشكل منظراً من الاسفل للملف (Coil). وهناك قوة ثانية F_2 مساوية للقوة F_1 بالمقدار ومعاكسة لها في الاتجاه تعمل على الضلع QR. وبنفس الطريقة هناك قوى اخرى تعمل على الاضلع PQ و SR وهذه القوى هي ايضاً متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاتجاه. لذلك تكون محصلة القوى في الاطار صفراً. لذلك لاتكون هناك اي حركة انتقالية في الاطار ، ولكن سيكون هناك عزم هوT يحاول ادارة الاطار على محوره العمودي ومقدار هذا العزم هو:

$$|\mathbf{T}| = Il_1\, Bl_2 \sin\theta = IdS\, B\sin\theta \tag{4.73}$$

حيث dS هي المساحة التي يحدها الاطار وتساوي $l_1 l_2$ ، وبصيغة المتجهات تكون :

$$\mathbf{T} = I\hat{\mathbf{e}}_n dS \times \mathbf{B} \tag{4.74}$$

ان هذا العزم سيحاول ان يقلل من الزاوية A ، فاذا كانت الطاقة الكامنة للاطار هي U_p فان مقدار العزم الذي يحاول تقليل الزاوية Θ يكون $-\dfrac{\partial U_P}{\partial\theta}$.

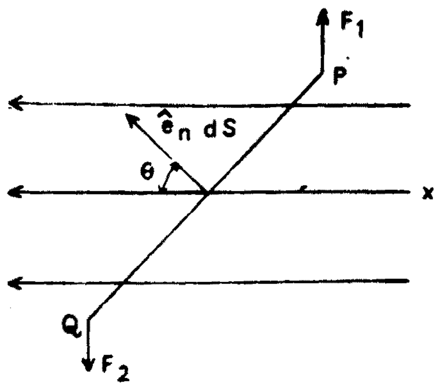
$$\therefore -\frac{\partial U_P}{\partial\theta} = -IdSB\sin\theta$$

$$U_P = -IdSB\cos\theta + \text{a constant.} \tag{4.75}$$

اذا كان مقدار الفيض المغناطيسي في الدائرة هو Φ ويساوي $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS$

$$\therefore \quad U_P = -I\Phi \tag{4.76}$$

(ملاحظة يجب ان لايحدث التباس بين Φ Φ



الشكل (4 . 11)

الآن يمكننا مقارنة المعادلة (75–4) بالمعادلة(66–1) التي تعطينا قيمة الطاقة الكامنة لثنائي قطب كهربائي عزمه P موضوع في مجال كهربائي مقداره E والتي هي :

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \tag{4.77}$$

نجد ان المجال المغناطيسي الناتج من اطار تيار مشابه بالصيغة لمجال الكهربائية المستقرة الناتج من ثنائي قطب كهربائي،ونستخلص من هذا انه يمكن ايجاد القوى والعزوم المؤثرة على اطار صغير للتيار موضوع في مجال مغناطيسي اذا جمعنا مع التيار عزم ثنائي قطب مغناطيسي هو m ويساوي $I\hat{e}_n\,dS$

$$\therefore \quad U_P = -\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}. \tag{4.78}$$

4–11 ثنائي قطب مغناطيسي في مجال مغناطيسي غير منتظم

: (Magnetic Dipole in a Non - uniform Magnetic Field)

لاحظنا ان الطاقة الكامنة لثنائي قطب مغناطيسيmفي مجال مغناطيسيBتساوي:

$$U = -\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}).$$

ونعرف ان هناك علاقة اخرى تربط القوة بالطاقة الكامنة وهي

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{m} + (\mathbf{m}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{m}) + \mathbf{m}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \qquad (4\cdot79)$$

استخدمنا هنا متطابقة مهمة في المتجهات وذلك لأن m ليست دالة لاحداثيات الفضاء (راجع ملحق A).

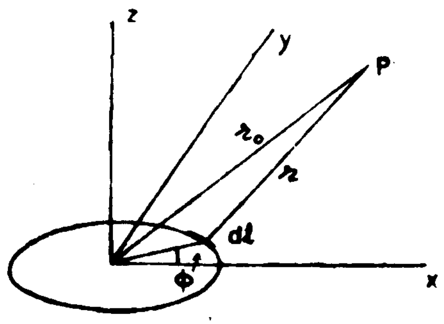
$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{m} = 0,\ \nabla\times\mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{m}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}. \qquad (4.80)$$

4-12 جهد الكمية المغناطيسية المتجه الناتج من اطار تيار صغير
(Magnetic vector potential due to a small current loop)



الشكل (4 . 12)

نفرض ان دائرة نصف قطرها "a" تحمل تياراً مقداره I. الشكل (4-12). سنبين هنا كيفية حساب الجهد المتجه لمثل هذا الاطار التياري باتباع وسيلة بسيطة تستخدم فيها الاحداثيات المتعامدة وسنعطي في الجزء اللاحق وسيلة اخرى بديلة. سنفرض ان نقطة مناط الاسناد (frame of reference) تقع على مركز الملف بحيث يكون المحور Z عمودياً

على الملف،ولتكن المسافة بين النقطة p وعنصر الطول dl هي r و ϕ هي زاوية السمت (azimuthal angle) للعنصر. ان مركبات dl والذي يساوي $ad\phi$ هي

$(-\, a \sin\phi\, d\phi,\ a\cos\phi\, d\phi,\ 0)$

حيث

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|}\, d\tau = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}|},$$

ومركبته باتجاه X تساوي :

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{-\, a \sin\phi\, d\phi}{|\mathbf{r}|}$$

$$r^2 = (x - a\cos\phi)^2 + (y - a\sin\phi)^2 + z^2$$

ولأن a اصغر بكثير في r_0 $(a \ll r_0)$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\phi + ay\sin\phi}{r_0^3} + \cdots$$

حيث r_0 هي المسافة بين P ونقطة الاصل.

$$\therefore\quad A_x = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{ax\cos\phi + ay\sin\phi}{r_0^3}\right)\sin\phi\, d\phi$$

$$= -\frac{\mu_0 I a^2 \pi y}{4\pi r_0^3} \qquad (4.81)$$

وبنفس الطريقة

$$A_y = \frac{\mu_0 I a^2 \pi x}{4\pi r_0^3} \quad \text{and} \quad A_z = 0. \qquad (4.82)$$

قيمة عزم ثنائي القطب المكافيء للدائرة هي :

$$m = \text{area} \times \text{current} = \pi a^2 I$$

ويكون اتجاهه عمودياً على مستوى الملف اي باتجاه المحور Z.

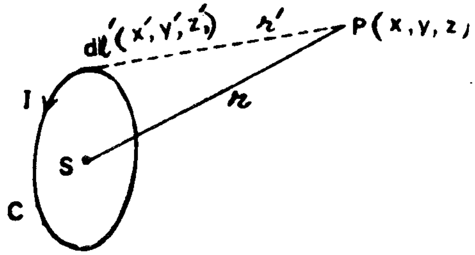
$$m_x = 0,\ m_y = 0,\ m_z = \pi a^2 I$$

لذلك فان مركبات (4-81 , 4-82) تتناسب مع المتجه m X r فيمكن بعد اسقاط الحدود المشتركة كتابة

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\mathbf{m} \times \mathbf{r}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\mathbf{m} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right\} \qquad (4.83)$$

4-13 طريقة بديلة لايجاد الجهد المتجه A ومتجه المجال B الناتج من اطار تيار

(An Alternative Method for Finding the Vector Potential A and, hence , the Field B due to a Current Loop)



الشكل (4 . 13)

نفرض ان دائرة خويطية (filament circuit) تحمل تياراً مقداره I (الشكل 4-13). الجهد المتجه A عند النقطة P(x,y,z) والناتج من اطار التيار هو:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\mathbf{l}'}{r'} \qquad (4.84)$$

حيث dl (x′ ,y′ ,z′) يمثل عنصر الطول من الدائرة.

باستخدام مبرهنة ستوك (Stoke's theorem) (انظر ملحق A).

$$\oint \frac{d\mathbf{l}'}{r'} = \int_S \hat{\mathbf{e}}_n \times \nabla'\left(\frac{1}{r'}\right) dS$$

$$\therefore \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \hat{\mathbf{e}}_n \times \nabla'\left(\frac{1}{r'}\right) dS$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \left(\hat{\mathbf{e}}_n \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_r'}{r'^2}\right) dS \qquad (4.85)$$

حيث $\hat{e}_n, \hat{e}_r$ هما متجه الوحدة العمودية على السطح الذي تتضمنه الدائرة بمحاذاة r' على التوالي ، فاذا كانت ابعاد اطار التيار صغيرة جداً مقارنة مع المسافة التي تفصلها عن نقطة P فان $\frac{\hat{e}_r'}{r'^2}$ سيكون ثابت تقريباً اثناء التكامل ، لذلك سنكتبه على شكل $\frac{\hat{e}_r}{r^2}$

$$\therefore \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\hat{e}_r}{r^2} \times \int_S \hat{e}_n \, dS = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\,\hat{e}_r \times \hat{e}_n S$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\mathbf{m} \times \frac{\hat{e}_r}{r^2}\right) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \tag{4.86}$$

حيث m تمثل عزم ثنائي قطب مغناطيسي للاطار ويساوي $\hat{e}_n IS$، كثافة الفيض المغناطيسي B تساوي :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\mathbf{m}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) - (\mathbf{m}\cdot\nabla)\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)\right]$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) = 0$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla)\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right).$$

الآن

$$\nabla\left(\mathbf{m}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{m} \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right).$$

والحد الاخير يزول

$$(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \nabla\left(\mathbf{m}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)$$

$$= \left[\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5}\right]$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m}\right] \tag{4.87}$$

وهذه العلاقة مشابهة للعلاقة (1-65) والخاصة بمجال ثنائي القطب الكهربائي. كان امبير يؤمن ان التأثيرات المغناطيسية ناتجة من الاطارات التيارية. وعرض فرضيته القائلة ان كل فترة في الحقيقة هي اطار تيار دقيقة،واقترح اضافة لذلك ان التأثيرات المغناطيسية على الحديد ناتجة من التيارات الذرية واقتراحه هذا جدير بالاهتام لأنه ان لم تكن لديهم في ذلك الوقت معلومات كافية عن التركيب الذري.

يمكن بسهولة اعادة التعبير عن m بصيغة التيار I وكتابة المعادلة (4-87) بالصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{grad}\left(\frac{I\,\hat{\mathbf{e}}_n S\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \\ &= -\operatorname{grad}\left\{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{e}}_n S\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right\} \\ &= -\operatorname{grad}\left\{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\Omega\right\} \end{aligned} \tag{4.88}$$

حيث Ω تمثل الزاوية الجسمة المتكونة من الاطار في r.

(انظر 4-52)

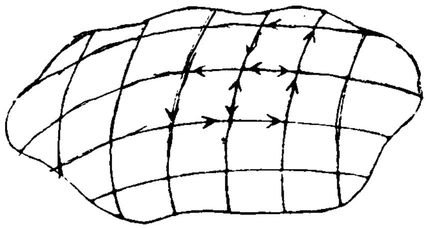
$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad}\Phi m \tag{4.89}$$

وهذه متطابقة مع المعادلة (4-49)

هذا التعبير لايحمل اي دليل ولا تعبيراً لشكل الاطار. لذلك يمكن منطقياً الافتراض ان هذا التعبير يمكن استخدامه لاي شكل من الاطارات الصغيرة حتى الاطارات غير المستوية.

يمكن اثبات ان النتائج التي توصلنا اليها في اعلاه يمكن توسيعها لتشمل حالات اطارات اكبر اياً كان شكلها وذلك باستخدام طريقة التقسيم الى اجزاء اصغر و الاضافة بالتراكيب (Sub - division and Super - Position) حيث يمكن ان نتصور ان الدائرة التيارية ذات حجم معين متكونة من مشبكات صغيرة (Small meshes) كما في الشكل (4-4) ولكل ثقب في هذا المشبك تيار معين يجري على حافاته ومجموع كل التيارات في

كل ثقوب المشبك يمثل التيار الكلي كمحصلة ، لأن التيارات تمرر بعضها البعض في كل مكان من المشبك عدا الاطراف الحدودية،كل ثقب في المشبك يضيف الى الجهد المقدار $\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$.



الشكل (14 . 4)

وكثافة الفيض الناتج من الاطار الكبير هو نفسه مجموع الفيض للاطارات الصغيرة المفردة.

$$B = -\nabla\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right) \qquad (4.90)$$

حيث Ω هي الزاوية المجسمة المتكونة في الاطار في نقطة P .

وهكذا فقد حل محل الاطارات التيارية لمزدوج الطبقات متكون من اقطاب مغناطيسية.

(double layer of magnetic poles) أو مايسمى بالغلاف المغناطيسي (magnetic shell).

4–14 الاوساط المغناطيسية (Magnetic Media):-

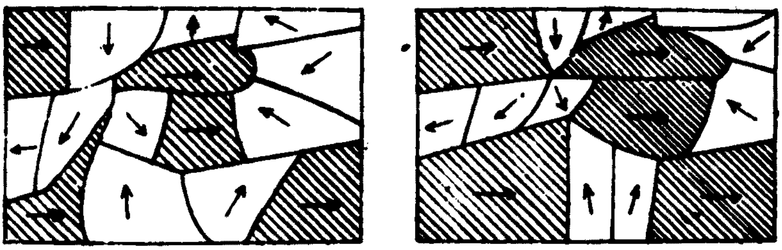
تعاملنا فيما مضى مع التأثيرات المغناطيسية لتيارات موجودة في الفراغ،فكيف يتأثر المجال المغناطيسي بوجود وسط عادي ؟ سنناقش هذا السؤال في هذا الجزء.

لوحظ تجريبياً ان بعض المواد تكتسب استقطاباً مغناطيسياً (magnetic polarization) اذا ماوضعت في مجال مغناطيسي تماماً كما تكتسب المواد العازلة استقطاباً كهربائياً اذا ماوضعت في مجال كهربائي،وهذا بلاشك هو التأثير العيني (macroscopic effect) على كل حال سيكون من المفيد ولو باختصار ان ندرس الاسس الفيزياوية لهذا التأثير. استجابة المواد للمجال المغناطيسي المسلط تعتمد على الخواص الفردية للذرات والجزيئات وعلى التفاعل التبادلي (interaction)-ان الحركة المدارية (orbital motion) للالكترونات حول الذرات والجزيئات تولد تيارات تظهر ثنائيات القطب المغناطيسية،في كثير من المواد يكون معدل التيارات الالكترونية الصغيرة متجمعة مع الحركة المدارية والبرم (Spin) الالكتروني مساوياً للصفر. مثل هذه الذرات في مجال مغناطيسي تتولد فيها تيارات الكترونية صغيرة بالحث في السحابة الالكترونية ، ويكون اتجاه هذه التيارات مجتمعاً مع المجال المغناطيسي معاكساً لاتجاه المجال الحثي B (inducing field)،(الفصل الخامس) هذه المواد تعرف بالمواد الدايامغناطيسية او المواد قليلة الانفاذية المغناطيسية (diamagnetic substances).

هناك مواد اخرى تملك ذراتها عزماً مغناطيسياً ذاتياً وذلك لان التيارات الناتجة من الحركة المدارية والبرم الالكتروني لايكون معدلها صفراً. بالرغم من ان البرم الالكتروني يميل لان يكون على شكل ازواج يلغي احدهما الآخر الا ان هناك ذرات لاتكتمل فيها الازواج اذا ماوضعت مثل هذه المواد في مجال مغناطيسي فان عزم الذرات المغناطيسي الذاتي والمغناطيسية المحتثة يزيدان ويعظمان المجال الخارجي،ومثل هذا التأثير يكون اكثر وضوحاً في درجات الحرارة المنخفضة ، مثل هذه المواد تسمى بالمواد البارامغناطيسية او المواد ذات الانفاذية المغناطيسية التي تزيد على الواحد (Paramagnetic substances) هناك بعد صنف آخر من المواد التي لاتظهر صفات مغناطيسية حتى في درجات الحرارة العالية وتسمى هذه المواد بالمواد الفيرومغناطيسية او المواد عالي الانفاذية المغناطيسية (ferromagnetic substances). في هذا النوع من المواد تكون قوى التقارن التبادلية (mutual coupling forces) بين عزوم ثنائي اقطاب الجزيئات المتجاورة اقوى بكثير من التأثير العشوائي للتهيج الحراري لذا تبقى ثنائيات القطب محتفظة بتنسيق خاص تكون فيه متوازية ضمن حيز صغير يسمى منطقة نفوذ (domain)، الشكل (15-4). ويعتقد ان المجال البنيوي الصافي الناتج بجوار هذه المواد يعتمد الحجوم النسبية لمنطقة النفوذ وعلى اتجاه ثنائيات القطب الجزيئية في كل منطقة نفوذ،وفي المجال الخارجي

الضعيف تتكون حصيلة صافية من مناطق النفوذ المصطفة في اتجاه المجال معطية تأثيراً بارامغناطيسياً كبيراً، وعند ازدياد المجال فان مناطق النفوذ المصطفة اصلاً تكبر على حساب الاخرى.

في الحقيقة لايستطيع احد ان ينكر ان المناقشات القديمة مازالت عاجزة عن توضيح تصرف الوسط المغناطيسي والنظرية التي قد تستطيع توضيح ذلك يجب ان تبنى على مبادىء وصيغ ميكانيك الكم (quantum mechanic) وعلى كل حال سنستخدم المناقشات القديمة هذه في توضيح تصرف المواد الدايامغناطيسية والبارامغناطيسية وهي تعطينا نوعاً ما فكرة عن التفاعلات التبادلية الجارية في عمل هذا الوسط.



مجال مغناطيسي قوي   مجال مغناطيسي ضعيف

الشكل (4 . 15)

4-15 التمغنط (Magnetization) :

كل ذرة او جزيئة يمكن ان تعتبر كثنائي قطب مغناطيسي صغيراً جداً (tiny) ذو عزم مغناطيسي هو :

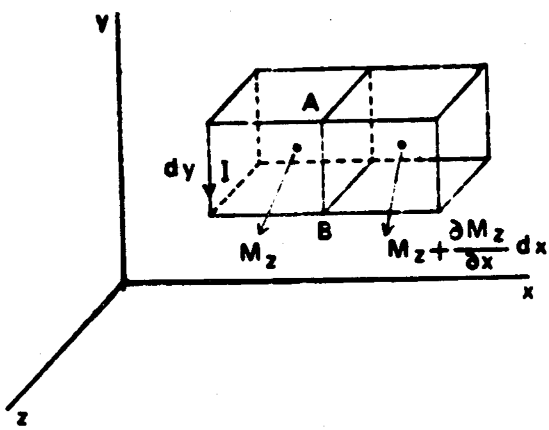
$$Q_m l = \hat{e}_n I dS \qquad (4.91)$$

حيث Q_m هي قوة القطب المغناطيسي، l هي المسافة الفاصلة للقطب (pole separation) ، I التيار ، dS مساحة الاطار. وفي بعض المواد المعدنية (material substance) تكون ثنائيات القطب المغناطيسية هذه في ترتيب عشوائي ، لكن اذا ماوضعت في مجال مغناطيسي يحدث بعض الترتيب فيها،ما في الثنائيات الكهربائية ويقال في حينها عن المادة بأنها متمغنطة (magnetized). ويوصف مقدار تأثر المغانيط الذرية هذه بكمية تسمى التمغنط (magnetization) والتي تعرف بأنها

مقدار عزم الثنائي المغناطيسي في وحدة الحجم. وبغية تعريف M هذه سيكون من اللازم الفرض بأن للوسط ثنائيات متناهية جداً في الصغر ومستمرة التوزيع،على الرغم من ان ذلك مخالف للواقع لأن الثنائيات متقطعة ولها حجم معين ، الا ان هذا الفرض انه ان يقودنا ايضاً الى خطأ جسيم لايمكن التغاضي عنه ذلك لانه يفترض ان يحتوي عنصر الحجم احصائياً على عدد كبير جداً من الذرات ومع هذا فان عنصر الحجم يجب ان يكون صغيراً جداً في القياس البنيوي لكي تتمكن من اعتبار M دالة نقطية متجه (vector point function) لاحظ ايضاً انه لايشترط كون التمغنط M منتظماً خلال المادة وهكذا.

$$M = \frac{dm}{d\tau} \qquad (4.92)$$

افرض ان عنصراً حجمياً ذا اضلاع $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ في النقطة (x,y,z) ضمن جسم ممغنط (magnetized body) كما هو موضح في الشكل (4-16).



الشكل (4 . 16)

ان مركبة العزم المغناطيسي باتجاه المحور z ضمن هذا الحجم هي :

$$M_z\, \delta x\, \delta y\, \delta z$$

والآن من المعادلة (4-91)

$$M_z\, \delta x\, \delta y\, \delta z = I\, \delta x\, \delta y \qquad (4.93)$$

حيث I تمثل التيار الذي يسري في الاطار الذي مستويه يوازي المستوي XY.

$$\therefore \quad I = M_z \delta z \qquad (4.94)$$

التيار الذي في الاطار عند النقطة (x+δx,y,z) هو :

$$I' = I + \frac{\partial I}{\partial x}\delta x = M_z \delta z + \frac{\partial M_z}{\partial x}\delta x \delta z.$$

لذلك فان مركبة التيار الذي يسري في الحد الفاصل AB باتجاه المحور y تعطى من المعادلة :

$$I - I' = -\frac{\partial M_z}{\delta x}\delta x \delta z$$

وبنفس الطريقة اذا اخذنا اطار التيار في المستوي. YZ نجد للتيار مركبة اخرى باتجاه المحور y قيمتها $\frac{\partial M_x}{\partial z}\delta x\delta z.$ والتيار الكلي باتجاه المحور y هو :

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\delta x \delta z.$$

ويمكن كتابته بصيغة المركبة y لكثافة تيار التمغنط (magnetization current density) j_M وهكذا :

$$j_{My}\delta x \delta z = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\delta x \delta z$$

$$j_{My} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \qquad (4.95)$$

وبنفس الطريقة نجد المركبات الاخرى :

$$j_{Mx} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$j_{Mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \qquad (4.96)$$

من الواضح ان الطرف الايمن للمعادلتين (4-95)و(4-96) يمثل مركبات لف(Curl M)

$$\therefore \quad \mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (4.97)$$

لاحظ ان تيار التمغنط يسري فقط اذا كانت M تتغير او تتباين اما اذا كانت M منتظمة فان $J_M = 0$ ، ويمكن الوصول الى نفس النتيجة اذا استخدمنا الجهد المتجه من المعادلة (83-4):

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{M(r) \times \nabla\left(\frac{1}{|r|}\right)\right\} d\tau \qquad (4.98)$$

وباستخدام المتطابقة :

$$\nabla \times (\phi P) = \phi\nabla \times P - P \times \nabla\phi,$$

تصبح المعادلة (98-4) بالشكل الاتي

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\nabla \times M}{|r|} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\nabla \times \left(\frac{M}{|r|}\right)\right\} d\tau \qquad (4.99)$$

والآن سننحرف قليلاً لتثبيت علاقة مهمة خاصة بالمتجهات ستكون لها فائدة كبيرة في تحويل المعادلة (99-4) الى صيغة مناسبة ، والعلاقة التي نريد تكوينها وهي ان لاي متجه مثل "a" ، لدينا :

$$\int (\nabla \times a)\, d\tau = -\int a \times \hat{e}_n dS \qquad (4.100)$$

ولتكن "b" متجهاً ثابتاً (Constant vector)

$$\therefore\quad b\cdot\int_s a \times \hat{e}_n\, dS = \int_s (b \times a)\cdot\hat{e}_n\, dS$$

(باستخدام مبرهنة التباعد)

$$= \int_v \nabla\cdot(b \times a)\, d\tau$$

$$= -b\cdot\int \nabla \times a\, d\tau$$

مادم "b" متجهاً اعتباطياً :

$$\int_s a \times \hat{e}_n\, dS = -\int_v \nabla \times a\, d\tau$$

والآن باستخدام هذه النتيجة يمكن صياغة المعادلة (99-4) بالشكل الآتي :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\nabla \times M}{|r|} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_s \frac{M \times \hat{e}_n\, dS}{|r|}$$

مادام موقع M موضعياً فان التكامل السطحي المأخوذ حول سطح خارج الحيز الذي يسري فيه التيار يتلاشى ، لذلك :

$$A = \frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{\nabla \times M}{|r|}\,d\tau \qquad (4.101)$$

وكنا قد اثبتنا ان :

$$A = \frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{j(r)}{|r|}\,d\tau$$

$$\therefore \quad j_M = \nabla \times M$$

4-16 متجه المجال المغناطيسي (Magnetic Field Vector):-

يمكن القول بصورة عامة اذا كان الوسط موصل للكهربائية وقابل للتمغنط ستتواجد معاً كثافة تيار حقيقية J بالاضافة الى كثافة تيار التمغنط j_M ويجب اخذ الاثنين معاً في الحساب،وهذا يعني ان :

$$\nabla \times B = \mu_o (j + j_M)$$

$$= \mu_o (j + \nabla \times M) \qquad (4.102)$$

$$\therefore \quad \nabla \times (B - \mu_o M) = \mu_o j \qquad (4.103)$$

والآن سندخل متجهاً جديداً هو H وتعريفه هو :

$$B - \mu_o M = \mu_o H \qquad (4.104)$$

$$B = \mu_o (M + H) \qquad (4.105)$$

لذلك يمكن كتابة المعادلة (4-103) بالشكل الآتي :

$$\nabla \times H = j \qquad (4.106)$$

وهذه هي الصيغة الجديدة لقانون أمبير والتي يمكن استخدامها في الفراغ وفي وسط معين وهي لذلك فان صيغة عامة اكثر من المعادلة (4-47) الخاصة بالفراغ.

$$B = \mu_o H \qquad \therefore \quad \nabla \times B = \mu_o j$$

وهذه حالة خاصة للمعادلة (4–106) وبالصيغة التكاملية تكون :

$$\int_s \nabla \times \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS$$

او

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I \qquad (4.107)$$

والكمية H تسمى شدة المجال المغناطيسي (magnetic field intensity) وتظهر من المعادلة (4–107) وحدات H وهي أمبير / متر،ويمكن استنتاج وحدات M من المعادلة (4–105) وهي نفس وحدات H،وعلى كل حال فان وحدات H تختلف عن وحدات B.

لقد بينا سابقاً في هذا الفصل ان B هي المناظر المغناطيسي للمجال الكهربائي E،والآن نرى ان H هو المناظر للازاحة الكهربائية (electric displacement) ، ويمكن ملاحظة ان من فوائد H هو سهولة ايجاد لفة H (Curl H) وذلك من كثافة التيار الحقيقية لكن B مرتبطة بعلاقة مع مجموع كثافة التيار الحقيقية وكثافة تيار التمغنط.

4–17 المتأثرية المغناطيسية والنفوذية

: (Magnetic susceptibility and permeabity)

وجد ان في كثير من المواد ان الممغنطة M تتناسب خطياً مع H،وهذا يعني ان :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad (4.108)$$

حيث ان χ_m ثابت مجرد من الوحدات ويسمى المتأثرية المغناطيسية للمادة (magnetic susceptibility) والمتأثرية دالة لدرجة الحرارة وهي صغيرة جداً بالنسبة للمواد البارامغناطيسية والمواد الدايامغناطيسية ، وقيمتها موجبة للمواد البارامغناطيسية وسالبة للمواد الدايامغناطيسية.

والآن :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \\ &= \mu_0\mu_r \mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \text{ where } \mu_r = 1 + \chi_m \end{aligned} \qquad (4.109)$$

وتسمى μ هنا بالنفوذية المغناطيسية (magnetic permeability) وبما ان النفوذية المغناطيسية للفراغ هي μ_0 فان $\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$ تدعى بالنفوذية النسبية للوسط (relative permeability) لاتزيد او تقل عن الواحد الا بجزء قليل ، حيث تكون للمواد البارامغناطيسية اكبر من الواحد $\mu > 1$ اما للمواد الدايامغناطيسية فتكون اصغر من الواحد $\mu < 1$ وهي كبير جداً للمواد المغناطيسية الحديدية (الفرومغناطيسية) حيث تصل الى (1000).

4-18 الشروط الحدودية (Boundary conditions):

رأينا في الكهربائية المستقرة المتجهين E و D. يخضعان لشروط حدودية معينة كذلك فان المناظر لهما B و H تخضعان لشروط معينة في المناطق الحدودية الفاصلة بين وسطين مختلفين في النفوذية.

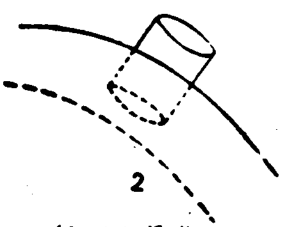
حسب مبرهنة التباعد :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, d\tau = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n\, dS \qquad (4.110)$$

ان الشرط $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ لايتغير بوجود مواد مغناطيسية.

$$\int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = 0 \qquad (4.111)$$

وهذه هي مبرهنة كاوس،والمعادلة تعني ان مقدار فيض المجال B الخارج من اي سطح مغلق هو صفر.



الشكل (4 . 17)

افرض ان قرصاً صغيراً ارتفاعه "h" موضوع عرضاً (astride) على الحد الفاصل بين وسطين (الشكل 17–4) ، فاذا كان الارتفاع "h" صغيراً جداً (h ⟶ 0) ، فان التكامل $\int \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n\, dS$ لايضيف شيئاً الا من قاعدتي القرص العليا والسفلى فقط،اي :

$$\int_1 \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS - \int_2 \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = 0 \qquad (4.112)$$

الآن $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = B_\perp\, dS$ حيث $B_\perp$ هي مركبة B العمودية على dS.

$$\therefore \qquad \int_1 \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = \int \mathbf{B}_{(1)\perp} dS \text{ and} \int_2 \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = -\int \mathbf{B}_{(2)\perp} dS$$

$$\therefore \qquad \int \mathbf{B}_{(1)\perp} dS = \int \mathbf{B}_{(2)\perp} dS$$

وهذه المعادلة نافذة مهما كان حجم dS.

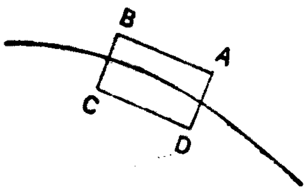
$$B_{(1)\perp} = B_{(2)\perp} \quad \text{i.e.} \qquad (4.113)$$

اي ان $B_\perp$ مستمرة

اما الشرط الخاص بـ (H) فيمكن ايجاده من قانون أمبير. نفرض ان دائرة صغيرة مثل ABCDA (الشكل 18–4) فيها الضلعان BC , DA صغيران جداً والضلعان AB = CD = dl

الآن

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I \qquad (4.114)$$



الشكل (4 . 18)

حيثI تمثل التيار. بما ان BC,DA يميلان الى الصفر.

$$H_{(1)\parallel} dl - H_{(2)\parallel} dl = I \qquad (4.115)$$

حيث $H_{(1)\parallel}$ ، $H_{(2)\parallel}$ تمثــلان المركبتين المماسيتين (tangential) لـ (H) في الوسطين وهكـذا نرى وجود تقطـع (discontinuity) في مركبـة المجـال المغنـاطيسي (H) يساوي التيار السطحي (surface current) وفي حالة عدم وجود تيار سطحي فان.

$$H_{(1)\parallel} = H_{(2)\parallel} \tag{4.116}$$

وفيما يلي مقارنة بين الشروط الحدودية للكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة.

(1) مركبـة B العموديـة مستمرة بـدقـة عبر الحـدود ، لكن مركبـة D العمـوديـة وتكـون مستمرة فقط في حالة عدم وجود شحنة سطحية.

(2) مركبة E المماسية مستمرة بدقة ، لكن مركبة H المماسيـة تكون مستمرة عبر الحـدود في حالة عدم وجود تيار سطحي.

4–19 كرة ممغنطة بانتظام في مجال مغناطيسـي خارجي

(Uniformly Magnetized Sphere in External Magnetic Field)

قمنا بحل المسألة الخاصة بالكرة القابلة للاستقطاب (Polarizable sphere) الموضوعة في مجـال كهربـائي منتظم وذلـك بـاستخـدام التـوافـق الكروي (Spherical harmonic) وسنـدرس في هـذا الجـزء المسـألـة المغنـاطيسيـة المنـاظرة لهـا. في الشكل (19–4) لـدينـا كرة موضوعة في مجال منتظم H_0 ، اتجاهه باتجاه المحور Z،ولتكن μ, μ_2 هما. النفوذيات النسبية داخل وخارج الكرة على التوالي،وسنفرض ان الجهـد داخل وخـارج الكرة هو :

$$\Phi_1 = -H_1 r\cos\theta \qquad (r < a) \tag{4.117}$$

$$\Phi_2 = -H_0 r\cos\theta + Ar^{-2}\cos\theta \qquad (r > a) \tag{4.118}$$

حيث ان H_1 هو المجال داخل الكرة،و θ هي الزاوية المحصورة بين متجه نصف القطر (radius vèctor) واتجاه المجال. لاحظ ان لم يتم ادخال الحد $r^{-2}\cos\theta$ في المعادلة (4–117) الخاصة بالجهد داخل الكرة Φ_1 وذلك لأنه بادخال هذا الحد تصبح قيمة Φ_1 لانهائية عندما تكون r مساوية لصفر. احد الشروط الحدودية الفاصلة يقضي بأن المركبة المماسية لـ H مستمرة على الحدود الفاصلة وهذا يعني ان Φ_1 تصبح مساوية لـ Φ_2 عند النقطة $r = a$.

$$-H_1 a\cos\theta = -H_0 a\cos\theta + Aa^{-2}\cos\theta$$
$$H_1 = H_0 - Aa^{-3} \qquad (4.119)$$

سنفرض ان التمغنط داخل الكرة M_1 موازي للمجال H_0 ومتكون من مركبتين الاولى مركبة دائمية M_0 والثانية مركبة محتثة من المجال H_1 وتحسب كما يلي :

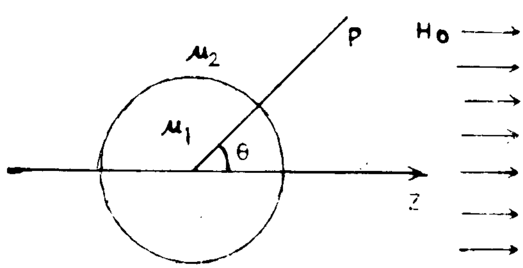
$$\mathbf{M}' = \chi_m \mathbf{H}_1 = (\mu_1 - 1)\mathbf{H}_1$$
$$\mathbf{M}_1 = (\mu_1 - 1)\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_0$$

حيث :

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_1) = \mu_0(\mathbf{H}_1 + (\mu_1 - 1)\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_0)$$
$$= \mu_0\mu_1\mathbf{H}_1 + \mu_0\mathbf{M}_0 \qquad (4.120)$$
$$\mathbf{B}_2 = \mu_0\mu_2\mathbf{H}_0 \qquad (4.121)$$

والمركبات نصف القطرية (radial components) لـ B هي :

$$-\mu_0\mu_1\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) + \mu_0\mathbf{M}_0\cos\theta = \mu_0(\mu_1\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_0)\cos\theta \quad \text{(داخل الكرة)} \quad (4.122)$$



الشكل (4 . 19)

$$-\mu_0\mu_2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)=\mu_0\mu_2(\mathbf{H}_0+2Ar^{-3})\cos\theta \quad \text{(خارج الكرة)} \qquad (4.123)$$

وحسب الشروط الحدودية الفاصلة يجب تساوي هاتين المركبتين في النقطة r = a.

$$\mu_0(\mu_1\mathbf{H}_1+\mathbf{M}_0)\cos\theta=\mu_0\mu_2(\mathbf{H}_0+2Aa^{-3})\cos\theta$$

$$\mu_1\mathbf{H}_1+\mathbf{M}_0=\mu_2\mathbf{H}_0+2\mu_2Aa^{-3}.$$

$$A=\frac{H_0-H_1}{a^{-3}} \qquad \text{(انظر 119 - 4)}$$

$$\mu_1\mathbf{H}_1+\mathbf{M}_0=\mu_2\mathbf{H}_0+2\mu_2(\mathbf{H}_0-\mathbf{H}_1)$$

اي :

$$(\mu_1+2\mu_2)\mathbf{H}_1=3\mu_2\mathbf{H}_0-\mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{H}_1=\frac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\mathbf{H}_0-\frac{1}{\mu_1+2\mu_2}\mathbf{M}_0. \qquad (4.124)$$

ويسمى الفرق بينهما (H_d) باسم المجال المزيل للتمغنط (demagnetizing field) والـذي هو :

$$\mathbf{H}_d=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_0 \qquad (4.125)$$

4-20 مقارنة بين مجالات الكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة

:(A conparison of static electric and magnetic fields)

سيكون من المفيد للايضاح عمل مقارنة بين المجالات الكهربـائيـة والمغنـاطيسيـة ، وفيما يلي الجدول (1-4) الذي يوضح مقارنة جزئية بين المجالين والعلامـات التي تم استنتـاجهـا لحد الآن :

جـدول (4-1) مقارنـة بين معـادلات المجـال الكهربـائي المستقر والمجـال المغناطيسي المستقر

المجال المغناطيسي	المجال الكهربائي	العلاقة
$d\mathbf{F} = (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	القوة
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	العلاقة الاساسية للمجال
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}}{\lvert \mathbf{r} \rvert} d\tau$	$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$; $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho d\tau}{r}$	اشتقاق المجال من الجهد
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$	علاقات تكوينية
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	مصادر المجالات

تمارين الفصل الرابع

4–1 يتغير التيار الذي يسري في موصل زمنياً حسب المعادلة $I = I_0 e^{-\alpha t}$ حيث I_0 و α ثوابت،جد مقدار الشحنة Q المجتمعة في الموصل بعد زمن مقداره t_0؟

4–2 اذا فرضنا ان كل ذرة نحاسية تضيف شحنة الكترونية مرة واحدة الى التيار الذي في السلك. جد معدل سرعة انجراف الشحنات عندما يسري في سلك قطره (1mm) تيار مقداره (1A)؟

(علماً ان (At. mass of Cu = 63.6 amu; density of Cu = 8.9×10^3 kg/m^3)

4–3 الانتقال الكلي للشحنة الموجبة من طبقة الايونوسفير الى الارض نتيجة التيار وفي طقس حسن هو حوالي $90\ c/km^2$ في كل سنة. ماهو التيار التقريبي وفي طقس حسن في تساقط على $1mm^2$ على الأرض وكم شحنة الكترونية يمثل في الثانية ؟

4–4 احسب القوة المتولدة بين ملفين دائريين مستويين صغيرين ذوي لفة واحدة قطرها "a" ويحملان تياراً مقداره I ، وتقعان على نفس المحور وتنفصل بينهما مسافة Z علماً ان ($a << Z$).

4–5 سلكان رفيعان لامتناهيان في الطول احدهما في النقطة (0,0,0) والاخر في النقطة (R,0,0) موازيان للمحور X ويحملان تياراً مقداره I بالاتجاه الموجب، حيث R كبيرة جداً. برهن على ان الجهد المغناطيسي في النقطة (r,ϕ,Z) هو :

$$\Phi_m = -\frac{I}{2\pi}(\pi - \phi)$$

4–6 احسب كثافة الفيض في مركز اطار مربع طول ضلعه (10 Cm) ويحمل تياراً مقداره (10A)؟

4–7 كيبل ذو موصلين متحدي المحور نصف قطر قلبه "a" ونصف قطر غلافه "b" يسري التيار I في قلب الكيبل متوزعاً بانتظام فيه ثم يرجع عبر الغلاف ومتوزعاً بانتظام حولها ايضاً. جد كثافة الفيض المغناطيسي في الحالات : (ا) في القلب $(r < a)$

(ب) في الفضاء بين القلب والغلاف $(a < r < b)$

(جـ) خارج الغلاف $(r > b)$.

4–8 تيار يسري في موصل دائري طويل نصف قطره "a" وطريقة توزيع التيار على الموصل هو بالشكل الذي تكون فيه كثافته على بعد "r" من المحور تساوي :

$$j = j_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$$

جد مقدار التيار الكلي في السلك وكثافة الفيض المغناطيسي داخل وخارج السلك؟

4–9 جسيم كتلته M يدور في مدار دائري نصف قطره "r" وسرعته الزاوية w، فاذا كان الجسيم يحمل شحنة مقدارها q. برهن ان عزم ثنائي القطب المغناطيسي يكون مجتمعاً مع حركة الشحنة المعطاة حسب المعادلة :

$$m = \left(\frac{q}{2M} \right) G$$

حيث G تساوي Mr^2w وهي الزخم الزاوي للجسيم.

4–10 كرة مشحونة بانتظام تدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها w. برهن ان كثافة الفيض المغناطيسي B في مركز الكرة هو :

$$B = \frac{\mu_0 \rho \omega a^2}{3}$$

حيث "a" هو نصف قطر الكرة و "ρ" كثافة الشحنة. جد ايضاً الجهد المتجه داخل وخارج الكرة.

1-14 برهن على ان خطوط قوة المجال المغناطيسي H تتكسر عند تغير الوسط الذي تمر فيه. برهن ايضاً على ان :

$$\mu_1 \cot \theta_1 = \mu_2 \cot \theta_2$$

حيث μ_1, μ_2 هما نفاذية الوسط و θ_1, θ_2 هما الزوايا المشكلة مع الخط العمودي.

4-12 جد قوة المجال المغناطيسي داخل فجوة اسطوانية نصف قطرها "a" في موصل اسطواني طوله مالانهاية ونصف قطره "a" وكثافة تياره الكهربائي J ثابتة في اي مقطع من الموصل، علماً ان محوري الموصل والفجوة متوازيان وتفصل بينهما مسافة "C"، حيث $a > b + c$.

الفصل الخامس

الحث الكهرومغناطيسي

Electromagnetic Induction

الفصل الخامس

الحث الكهرومغناطيسي

Electromagnetic Induction

بدأنا في الفصل السابق دراسة العلاقة بين الكهربائية والمغناطيسية. وقد حصلنا على معلومات قيمة بهذا الخصوص على الرغم من كونها ناقصة ذلك لاننا اخذنا بنظر الاعتبار فقط المجالات المغناطيسية التي لاتعتمد على الزمن (time independent) وسنتناول في هذا الفصل سلوك المجالات الكهربائية والمغناطيسية التي تعتمد على الزمن (time - dependent).ونبين كيف ان المجال المغناطيسي المتغير زمنياً (time varying magnetic field) يولد مجالاً كهربائياً والعكس بالعكس.

5-1 القوة الدافعة الكهربائية (Electromotive force):

اذا اريد ان يسري تيار مستقر في موصل معين فيجب ان يوجد فرق جهد بين طرفي هذا الموصل. ويتم حفظ فرق الجهد هذا بواسطة مصدر القوة الدافعة الكهربائية (electromotive force e.m.f.) وهناك انواع متعددة من الاجهزة التي توفر قوة دافعة كهربائية ، مثل البطاريات والمولدات ـ الخ ، وهذه جميعاً تقوم بتحويل احد انواع الطاقة الى طاقة كهربائية،وعلى سبيل المثال فان البطاريات تستخدم طاقة كيميائية مخزونة فيها لتوليد تيار كهربائي في الدائرة،واذا كان فرق الجهد المتولد بين طرفي بطارية هو (V) فولت فهذا معناه ان قوتها الدافعة الكهربائية هي (V) فولت،اذا ربط قطبا البطارية بموصل فان مجالاً كهربائياً ساكناً سيتولد فيه،والتكامل الخطي للمجال حول مسار بين نقطتين (A,B) مساوٍ لفرق الجهد بين النقطتين ، فاذا كانت النقطتان هما قطبا البطارية فان القوة الدافعة الكهربائية للبطارية تساوي :

$$V=\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad (5.1)$$

والآن اذا جرى تيار في الموصل فيجب على البطارية ان تؤدي عملاً يحافظ على فرق الجهد بين قطبيها ثابتاً،فاذا انتقلت شحنة مقدارها "q" من احد قطبي البطارية الى القطب الآخر عبر الموصل،فان الشغل المنجز من البطارية يكون :

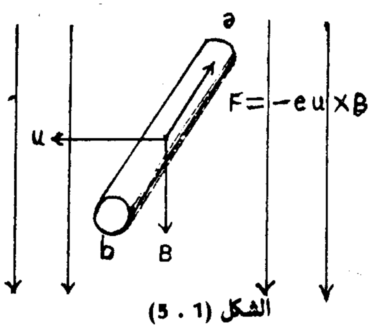
$$Vq=\int_A^B q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

القوة الدافعة الكهربائية للبطارية تساوي :

$$V=\frac{1}{q}\int_A^B q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad (5.2)$$

لاحظ ان مصطلح القوة الدافعة الكهربائية ليس ملائماً تماماً لانه في الحقيقة لايعني قوة وانما كمية ووحداتها هي طاقة / شحنة ، على كل حال سيترسخ المفهوم الحقيقي للمصطلح في اذهاننا عند الاستخدام.

الآن نفرض ان قضيباً معدنياً يتحرك بسرعة ثابتة (u) وبالاتجاه العمودي على المجال المغناطيسي المنتظم B (كما في الشكل 1–5).



الشكل (5 . 1)

نتيجة لذلك ستتولد قوة مغناطيسية على كل الكترون في القضيب يمكن حسابها من المعادلة (24–4) وستتحرك الالكترونات الحرة باتجاه نهاية القضيب مجتمعة هناك مولدة مجالاً d E يحسب كما يلي :

$$\mathbf{E}=-\mathbf{u}\times\mathbf{B} \qquad (5.3)$$

وفرق الجهد بين نهايتي القضيب هو :

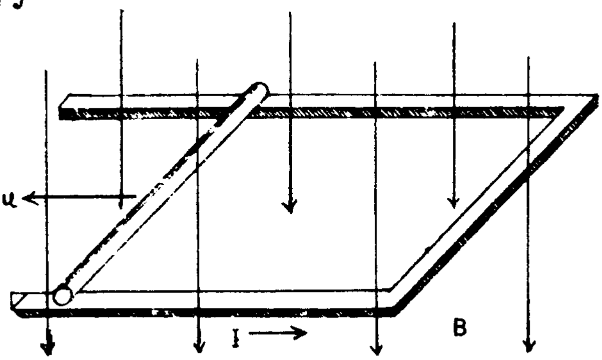
$$V_{ba} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = uBL \qquad (5.4)$$

حيث L هو طول القضيب. ان فرق الجهد هذا لايولد تياراً. لكن اذا كان هذا القضيب جزءً من دائرة (كما هو موضح في الشكل(2–5) فان تياراً سيجري في هذه الدائرة. ان التكامل الخطي للقوة المؤثرة على شحنة مثل q حول الدائرة يساوي :

$$\oint (q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = quBL.$$

والقوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة المغلقة والناتجة من حركة الموصل تساوي :

$$V = \frac{1}{q}\oint (q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = uBL. \qquad (5.5)$$



الشكل (2 . 5)

ويمكن تسميتها القوة الدافعة الكهربائية الحركية(motional e.m.f) لانها تعتمد على سرعة الموصل وليس على موقعه،وهكذا يكون لدينا نوعان من الجهد فرق جهد الكهربائية المستقرة الناتج من الشحنات الثابتة (Stationary charges) وفرق جهد الكهربائية المستقرة الناتج من الشحنات المتحركة.

ان UBL تمثل الفيض المغناطيسي خلال المساحة التي يمسحها القضيب في وحدة الزمن فاذا كانت Φ هي الفيض المغناطيسي الكلي خلال الدائرة فان UBL هي معدل تغير الفيض في الدائرة لذلك يمكن كتابة المعادلة الآتية :

$$|e.m.f.| = uBL = \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (5.6)$$

والملاحظات التجريبية بهذا الخصوص كانت نتيجة اعمال كل من فارادای (Faraday) في المملكة المتحدة وهنري (Henry) في الولايات المتحدة كل على انفراد.

5-2 قانون فاراداي للحث الكهرومغناطيسي
: (Faraday's Law of Electromagnetic Induction)

لاحظ كل من فاراداي وهنري انه :

(1) اذا حرك مغناطيس قرب سلك على شكل دائرة وبدون اي مصدر للكهربائية فان تياراً سيتولد في الدائرة ويستمر هذا التيار كلما كانت الحركة مستمرة ويختفي التيار مع توقف الحركة.

(2) تلاحظ نفس التأثيرات اعلاه اذا ماثبت المغناطيس وتم تحريك السلك الدائري قربه،ويعطينا هذا انطباعاً ان التيار لكي يتولد في سلك يجب ان تكون هناك حركة نسبية،ولكن يمكن توليد التيار بدون اي حركة آلية.

(3) ان تياراً عابراً (transient current) يحتث في اطار سلكي اذا ماتم غلق وفتح التيار الثابت لدائرة قريبة من هذا الاطار السلكي. وبكلمة اخرى ان تياراً لحظياً يسري عندما يتغير الفيض في الدائرة ، ان الفيض المتغير يحدث مجالاً كهربائياً لذلك فان القوة الدافعة الكهربائية الموجودة في الدائرة هي التي تسبب سريان التيار،وسمى فاراداي هذه الظاهرة باسم الحث الكهرومغناطيسي (electromagnetic induction) وقد جمعت نتائج فاراداي فيما تسمى بقاعدة الفيض (flux rule).

عندما يتغير الفيض المغناطيسي في دائرة ما تتولد فيها قوة دافعة كهربائية محتثة تتناسب قيمتها مع معدل تغير الفيض.

لذلك فاذا رمزنا للقوة الدافعة الكهربائية بالرمز $\mathcal{E}$ وكانت Φ هي الفيض فان :

$$|\mathcal{E}| \propto \frac{d\Phi}{dt} \tag{5.7}$$

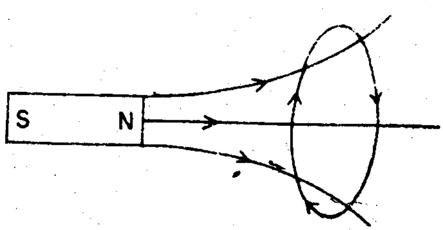
واتجاه القوة الدافعة المحتثة يمكن معرفته من قانون لنز (Len'z law) الذي ينص على ان :

«اتجاه القوة الدافعة الكهربائية المحتثة يكون بالشكل الذي يجعل فيه فيضها المغناطيسي المرافق للتيار معاكس للفيض المتغير الذي سبب القوة الدافعة الكهربائية المحتثة (أي سبب القوة الدافعة الكهربائية)،لذلك في الشكل (3-5) اذا تحرك المغناطيس باتجاه الاسهم اي باتجاه الاطار سيزداد الفيض المغناطيسي في الاطار وسيجري التيار المحتث بالاتجاه المبين في الشكل بحيث يكون فيضه (اي فيض التيار المحتث) معارضاً لزيادة الفيض المغناطيسي،وهذا القانون في الحقيقة هو حالة خاصة لمبدأ فيزياوي عام (مبدأ لاشاتيليه (Le chatelier's Principle) الذي ينص على ان «اي منظومة فيزياوية (physical system) تعارض اي تغير يحصل فيها نتيجة مؤثر خارجي » .

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.8}$$

(في نظام الوحدات العالمية (.S.I) وجد ان ثابت التناسب هو وحدة واحدة).

تسمى القوة الدافعة الكهربائية المحتثة عادة باسم القوة الدافعة الكهربائية المضادة او العكسية (.back e.m.f).

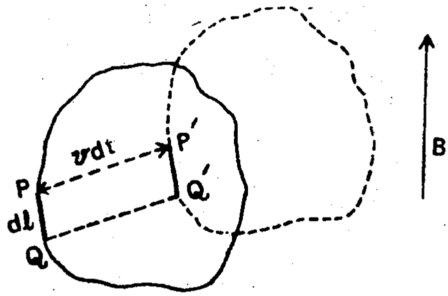


الشكل (3 . 5)

3-5 قانون الحث للدوائر المتحركة (Induction law for moving circuits)

نأخذ مثالاً للحث الكهرومغناطيسي دائرة ذات اي شكل اختياري تتحرك في مجال مغناطيسيB لايعتمد على الزمن بسرعة لايشترط ان تكون منتظمة مقدارهاV(شكل4-5)، سيتحرك عنصر الطول dl (PQ) في زمن قدره dt مسافة هي Vdt الى الموقع

P'Q'. فاذا كانت سرعة الكترونات التوصيل بالنسبة الى السلك هي U ، فان سرعتها بالنسبة الى المجال ستكون $\mathbf{v}+\mathbf{u}$. والقوة المؤثرة على كل الكترون تكون $e(\mathbf{v}+\mathbf{u})\times\mathbf{B}$. ومركبة هذه القوة بمحاذاة العنصر dl هي $(e(\mathbf{V}+\mathbf{u})\times\mathbf{B})\cdot\hat{e}_l$ حيث $\hat{e}_l$ هو وحدة المتجه باتجاه PQ. بما ان المتجه $\hat{e}_l$ موازي للسرعة U تكون $\mathbf{U}\times\mathbf{B}\cdot\hat{e}_l=0$



الشكل (4 . 5)

$$\therefore\quad \{e(\mathbf{v}+\mathbf{u})\times\mathbf{B}\}\cdot\hat{e}_l = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\hat{e}_l + e\mathbf{u}\times\mathbf{B}\cdot\hat{e}_l$$
$$= e\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\hat{e}_l \qquad (5.9)$$

وهذا يبين ان هناك مجالا محتثاً في السلك هو E ويساوي V x B ، وتكون مركبته بمحاذاة السلك $\mathbf{V}\times\mathbf{B}\cdot\hat{e}_l$ ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي لهذا المجال حول الدائرة.

$\therefore$ The induced e.m.f. $=\mathcal{E}$

$$= \oint(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\hat{e}_l dl. \qquad (5.10)$$

وعند تحريك الدائرة فان العنصر dl يمسح خلال الزمن dt المساحة $PP'Q'Q$ وتساوي $\mathbf{v}\,dt\times\hat{e}_l dl$، والفيض عبر هذا العنصر يساوي : $(\mathbf{v}\,dt\times\hat{e}_l\,dl)\cdot\mathbf{B}$. والفيض حول كل الشريط يكون :

$$d\Phi = \oint\mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\,dt\times\hat{e}_l\,dl)$$

i.e. $$\frac{d\Phi}{dt} = \oint\mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times\hat{e}_l\,dl)$$
$$= -\oint(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\hat{e}_l\,dl \qquad (5.11)$$

عند مقارنة المعادلتين (5–10) و (5–11) نحصل على :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

5–4 الصيغتين التكاملية والتفاضلية لقانون فاراداي

(Integral and differential form of Faraday's law)

ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي للمجال الكهربائي المحتث E حول الملف ا ي :

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_t dl$$

الفيض المغناطيسي خلال الملف يساوي :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS$$

حيث أن التكامل مأخوذ حول أي مساحة محصورة بالدائرة،لذلك يمكن كتابة المعادلة (5–3) بالشكل الآتي :

$$\oint \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_t dl = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS.$$

بما ان السطح لايغير من شكله او موقعه مع الزمن ، فيمكن كتابة المعادلة اعلاه بالشكل الاتي :

$$\oint \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_t dl = -\int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (5.12)$$

وهذه هي الصيغة التكاملية لقانون فاراداي.

باستخدام مبرهنة ستوك (Stoke's theorem)

$$\oint \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_t dl = \int_S \text{curl } \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS$$

$$\therefore \quad \int\left(\text{curl } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS = 0 \qquad (5.13)$$

حيث تم استبدال مشتقة الزمن الكلية (total time derivative بمشتقة جزئية (Partial derivative) لأن الذي يهمنا هنا هو تغير المجال E مع الزمن عند ثبوت موقع عنصر المساحة dS •

بما ان المعادلة (5-13) يجب ان تطبق على اي سطح اختياري.

$$\text{curl } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (5.14)$$

وهذه هي الصيغة التفاضلية لقانون فارادي للحث الكهرومغناطيسي نلاحظ من المعادلتين (5-14) و (1-30) يثبت ان للمجال الكهربائي جزءاً غير محفوظ (non - conservative part) نتيجة كثافة الشحنة الكهربائية.

يمكن ان نذكر هنا مبرهنة بدون برهان،مفيدة جداً في صياغة الكهرومغناطيسية بمصطلحات حساب المتجهات.

لاحظنا ان مصادر المجال الكهرومغناطيسي هي نوعان،الاول يكون فيه مجتمعاً مع منظومة كهربائية مستقرة تكون الطاقة فيها محفوظة خلال دورة العمليات (cyclic processes) في المنظومة،ويمكن وصف مثل هذه المصادر ذات الطاقة المحفوظة او النظام اللادوراني (irrotational system) بالمعادلة $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$، حيث $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ومثل هذا المجال ليس له لف (Curl) وذلك لأن :

$$\text{curl grad } \Phi = 0$$

والنوع الثاني من المصادر يكون مجتمعاً مع منظومة تتحول فيها الطاقة خلال دورة العمليات (مثلاً المجال المغناطيسي للملف اللولبي)،مثل هذا المجال يوصف بالمصادر ذات اللف (Curl Sources) وليس له تباعد (divergence) وبصورة عامة فان المجال الكهرومغناطيسي له كل انواع المصادر والمواصفات الكاملة لمثل هذا المجال المتجه يجب ان يتضمن كلا المصدرين، ومثل هذه المواصفات ليست ضرورية فحسب وانما هي كافية بحد ذاتها. يمكن ايجاد اي مجال متجه بطريقة واحدة اذا ماعرف تباعده (divergence) ومصادره ذات اللف (Curl Sources) ، وهذا هو مايعرف بمبرهنة هيلمهولتز (Helmholtz theorem)،بأخذ تباعد المعادلة (5-14) نجد أن :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

لذلك فان الحد $\nabla \cdot \mathbf{B}$ بالضرورة لايعتمد على الزمن عند كل نقطة في الفضاء،وهذا الشرط يمكن تحقيقه منطقياً اذا مافرضنا :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (5.15)$$

هذا هو B لولبي دائماً.

قانون فاراداي (14-5) لذلك له نتيجتان مهمتان :

(1) المجال الكهربائي E ليس دائماً مجالاً محافظاً عندما يكون المجال المغناطيسي متغيراً مع الزمن ، وفي الواقع فان الطاقة تتحول بين الشكل الكهربائي والشكل المغناطيسي في المجال المتغير زمنياً.

(2) لاتوجد اقطاب مغناطيسية حرة ، كل الاقطاب المغناطيسية تكون زوجية موجبة وسالبة.

قانون الحث لفاراداي يبين كيف ان المجالات الكهربائية والمغناطيسية مرتبطة بعلاقات متبادلة وتختفي طبيعتها المستقلة عندما نأخذ بنظر الاعتبار اعتمادها على الزمن،لذلك يكون من الملائم النظر الى كلا المجالين على انها مجال واحد - المجال الكهرومغناطيسي.

5-5 الحث الذاتي والحث المتبادل (Self inductance and Mutual Inductance) :

يتولد فيض مغناطيسي Φ خلال دائرة ما عندما يجري فيها تيار وهذا الفيض يظهر نتيجة مجال الدائرة المغناطيسي ويتناسب مع التيار I أي :

$$\Phi = LI \tag{5.16}$$

حيث L هو ثابت.

لنأخذ وضعية تكون فيها الدائرة ثابتة لكن المجال المغناطيسي وكذلك الفيض يتغيران مع الزمن ولنفرض مثلاً ان التيار يعتمد على الزمن سيكون الفيض عندها دالة للزمن $\Phi = \Phi(t)$.

(من المعادلة 16-5)

$$\therefore \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt} \quad \text{(by 5.16)}$$

$$\therefore \quad L = \frac{d\Phi}{dI} \tag{5.17}$$

الكمية L تسمى بالحث الذاتي،والمعادلة (8-5) يمكن كتابتها الآن بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \tag{5.18}$$

يعتمد الثابت L على الشكل الهندسي للدائرة ، فالسلك الملفوف على شكل ملف لولبي يكون له حث ذاتي اكبر بكثير مما لو كان غير ملفوفاً ويعتمد ايضاً على سماحية الوسط. ويعرف الحث الذاتي بأنه الفيض الكلي خلال الدائرة عندما تسري فيها وحدة تيار ، لذلك فان الدائرة يكون لها وحدة واحدة من الحث فيبر (Weber) ويسري فيها تياراً مقداره واحد أمبير. او تمتلك الدائرة وحدة واحدة من الحث الذاتي عندما تتولد فيها قوة دافعة كهربائية مقدارها واحد فولت من تيار يتباين بمعدل واحد أمبير لكل ثانية. وتسمى وحدة الحث الذاتي باسم هنري (Henry).

لو كان لدينا ملف يحمل تياراً مقداره I_1 وقرب منه ملف ثان لتولد في الملف الثاني فيض مغناطيسي Φ_2 نتيجة التيار الموجود في الملف الأول،وبما ان Φ_2 تتناسب خطياً مع I_1 .

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \tag{5.19}$$

حيث L_{21} مقدار ثابت،وسيكون هناك فيض في الدائرة الاولى نتيجة التيار I_2 في الدائرة الثانية.

$$\therefore \quad \Phi_1 = L_{12} I_2 \tag{5.20}$$

حيث L_{12} مقدار ثابت ايضاً،ماهي العلاقة بين هذين الثابتين؟ ان المعادلة (76–4) تعطينا الطاقة الكامنة للمنظومة وهي :

$$U_P = -\Phi_2 I_2 = -L_{21} I_1 I_2 = -\Phi_1 I_1 = -L_{12} I_2 I_1$$

$$\therefore \quad L_{21} = L_{12} \tag{5.21}$$

ان L_{21} يساوي L_{12} ويساوي M الذي يسمى الحث المتبادل (mutual inductance) بين الدائرتين ، والآن :

$$U_P = -\Phi_1 I_1 = -I_1 \int \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS$$

$$= -I_1 \int \nabla \times \mathbf{A}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = -I_1 \oint \mathbf{A}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{l1} dl_1$$

(حسب مبرهنة ستوك)

$$= -I_1 \int\left(\frac{\mu}{4\pi}\int \frac{I_2 \hat{\mathbf{e}}_{l_2} dl_2}{|\mathbf{r}|}\right)\cdot \hat{\mathbf{e}}_{l_2} dl_1$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \iint \frac{\hat{\mathbf{e}}_{l_1} dl_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{l_2} dl_2}{|\mathbf{r}|} = -L_{12} I_1 I_2$$

$$\therefore \qquad L_{12} = L_{21} = M = \frac{\mu}{4\pi}\iint \frac{\hat{\mathbf{e}}_{l_1} dl_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{l_2} dl_2}{|\mathbf{r}|} \tag{5.22}$$

وتسمى هـذه بصيغـة نيومـان (Neumann's formula) وواضح ان وحـدة M هي ايضـاً هنري.

مثـال (1-5) : يتكون ملف الاشعـال في السيـارة من ملفين معـزولين ملفـوفين بعضهما حول بعض ، عدد لفات الاول 16000 لفـة والثـاني 400 لفـة،وطول كل ملف هو 10 سم،ونصف قطر اللفــات هــو 3 سم،يسري في الملف الابتــدائي تيــار مقــداره 3 أمبير ويقطعه في حوالي 10^{-4} ثانية. احسب مقدار الفولتية المحتثة في الملف الثانوي؟

تحسب كثافة الفيض المغناطيسي في الملف اللولبي من المعادلة :

$$B = \mu_0 N_1 I_1$$

حيث N_1 هو عـدد اللفـات لكل وحـدة طول، I_1 هـو التيـار الـذي يسري في الملف. الفيض المغناطيسي في كل لفة من الملف العلوي (top coil) هو $\mu_0 N_1 I_1 \pi r^2$ والفيض الكلي هو :

$$\Phi_2 = \mu_0 N_1 N_2 l \pi r^2 I_1$$

حيث N_2 هو عـدد اللفـات لـوحـدة الطـول في الملف الثـاني، وتعطي القـوة الـدافعـة الكهربائية المحتثة من المعادلة الآتية :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\mu_0 N_1 N_2 l \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

$$= -M\frac{dI_1}{dt}$$

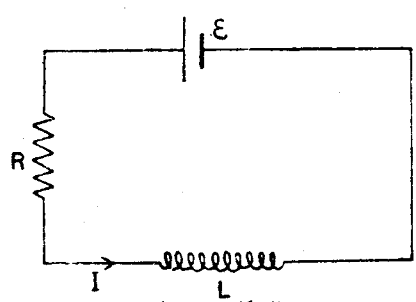
Now $\qquad \dfrac{dI_1}{dt} = 3 \times 10^4 \ \mathrm{As^{-1}}$

$$\therefore \quad \mathcal{E} = 4\pi \times 10^{-7} \times 16 \times 10^4 \times 4 \times 10^3 \times 10^{-1}\pi \times (0.03)^2 \times 3 \times 10^4 = 6814 \text{ volts.}$$

5-6 الطاقة في المجالات المغناطيسية (Energy in Magnetic Fields) :

الطاقة في المجال بالتعريف هي الشغل الكلي المنجز لتكوينها،لتكوين مجال مغناطيسي من تيار مستقر يتطلب فتح التيار اولاً،وهناك في الواقع فترة زمنية يستغرقها التيار والمجال ليصلا الى قيمها النهائية،وبما ان المجال في هذه الفترة يكون معتمداً على الزمن فان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تتولد وتؤدي لانجاز شغل اضافي من قبل مصدر التيار،وهذا الشغل يجب اخذه بنظر الاعتبار عند احتساب الطاقة.

(ا) الطاقة المغناطيسية المخزونة في مادة حاثة
:(Magnetic energy Stored in an inductor)



الشكل (5 . 5)

يوضح الشكل (5-5) دائرة بسيطة فيها مقاومة R،وملف حثي L ذو حث L و$\mathcal{E}$ هي القوة الدافعة الكهربائية للبطارية،ليكن I(t) هو التيار الذي يسري في الدائرة خلال زمن مقداره t ، بما ان مقدار هبوط الجهد عبر الملف يساوي $L\frac{dI}{dt}$ ،فان المقدار الصافي للقوة الدافعة الكهربائية هو :

$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$ ، حسب قانون أوم :

$$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = RI. \tag{5.23}$$

والآن نحسب كمية الشغل المطلوب انجازه من القوة الدافعة الكهربائية لنقل شحنة مقدارها dQ عبر الدائرة.

$$dW = \mathcal{E}dQ = \mathcal{E}Idt$$

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I = LI\frac{dI}{dt} + RI^2 \tag{5.24}$$

الشغل الكلي المنجز من البطارية خلال الفترة الزمنية (T) التي يتغير فيها التيار من O الى I_T يساوي :

$$W = \int_0^T \mathcal{E}Idt = L\int_0^T I\frac{dI}{dt}dt + R\int_0^T I^2dt$$

$$= \frac{1}{2}LI_T^2 + R\int_0^T I^2dt. \tag{5.25}$$

ان الحد الأول من الطرف الايمن يمثل الطاقة المخزونة في المحاثة (inductance) خلال الزمن T،والحد الثاني يمثل الطاقة التي تتبدد على شكل حرارة من المقاومة.

(ب) الطاقة المغناطيسية المخزونة في سلسلة من المحاثات.

:(Magnetic energy stored in a series of inductances)

نشتق الآن صيغة عامة اكثر تعبيراً عن الطاقة المخزونة في سلسلة من المحاثات. سنفرض أن جميع التيارات في كل الدوائر لها قيمة ابتدائية هي صفر،وستصل الى قيمها المتوازنة في جميع الدوائر في وقت واحد عندما t=T. بحيث نرى انه عند اللحظة (t) التي تقع ضمن الفترة $T \geqslant t \geqslant 0$ تكون قيم التيار في كل دائرة $I_K(t)$ والفيض خلالها $\Phi_k(t)$، تساوي الجزء (α) من القيم النهائية.

اي :

$$I_k(t) = \alpha I_k,\ \Phi_k(t) = \alpha\Phi_k$$

والقوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة K هي :

$$\mathcal{E}_k = \frac{d\Phi_k(t)}{dt}.$$

لذلك فان الشغل الكلي المنجز في الدائرة K يساوي :

$$W_k = \int_0^T \mathcal{E}_k I_k(t) dt = I_k \Phi_k \int_0^T \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt$$

$$= I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \tfrac{1}{2} I_k \Phi_k. \qquad (5.26)$$

وعند جمعها لكل الدوائر :

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k. \qquad (5.27)$$

وبما ان الفيض المغناطيسي يعتمد على كلا الحثين الذاتي والمتبادل،فانه يمكن كتابة المعادلة :

$$\Phi_k = L_k I_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} I_j \qquad (5.28)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_k L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\substack{j \\ j \neq k}} M_{kj} I_k I_j \qquad (5.29)$$

لذلك فان لزوج من الملفات

$$W = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

where $M = M_{12} = M_{21}$.

سنوضح الآن النتيجة في المعادلة (29–5) بصيغة عامة اكثر وبشكل قياسي.

لأي دائرة لدينا :

$$\Phi_k = \int_k \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint_k \operatorname{curl} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint_k \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl \qquad (5.30)$$

لذلك تتغير المعادلة (27–5) الى الصيغة الآتية :

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_k I_k \oint_k \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl.$$

ويمكن الانتقال من الحالة غير المترابطة الى حالة الاستمرارية في المعادلة اعلاه وذلك باستخدام العلاقة $I\hat{\mathbf{e}}_l dl = \mathbf{j} d\tau$ واخذ التكامل حول كل الفضاء لأن الاضافات تظهر فقط في المناطق التي تكون فيها $\mathbf{j}$ محددة،اي ان :

$$\sum_k \oint_k \rightarrow \int_V$$

$\therefore$
$$W=\frac{1}{2}\int_V (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\, d\tau \qquad (5.31)$$

Now
$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$$

$\therefore$
$$W=\frac{1}{2}\int_V \left\{\mathbf{A}\cdot(\nabla \times \mathbf{H})\right\} d\tau. \qquad (5.32)$$

Since,
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

يمكن كتابة المعادلة (5–32) بالشكل الآتي :

$$W=\frac{1}{2}\int_V \left\{\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\right\} d\tau - \frac{1}{2}\int \left\{\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\right\} d\tau. \qquad (5.33)$$

وباستخدام مبرهنة التباعد لتحويل التكامل الثاني، يمكن كتابة المعادلة (5–33) بالشكل الآتي :

$$W=\frac{1}{2}\int_V \left\{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right\} d\tau - \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{A}\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (5.34)$$

وبما ان التكامل الحجمي يجب ان يؤخذ حول كل الفضاء،فان التكامل السطحي يجب ان يؤخذ حول كرة في اللانهاية، لأن H وA تسقط سريعاً عند المسافات الطويلة $(H\sim r^{-3}, A\sim r^{-2})$ والتكامل السطحي يزول عندما $r \rightarrow \infty$. لذلك .

$$W=\frac{1}{2}\int_V (\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\, d\tau. \qquad (5.35)$$

وهذه المعادلة تشابه المعادلة (2–43) في الكهربائية المستقرة،وتبين امكانية اعتبار الطاقة المغناطيسية على انها منتشرة خلال المنطقة المشغولة بالمجال وبكثافة مقدارها $\frac{1}{2}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$. وبما ان $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$، فان الكثافة تساوي $\frac{1}{2}\mu H^2$ أو $\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$.

لاحظ ان هذه العلاقة تم الحصول عليها على فرض ان B تتناسب خطياً مع H. اي ان قيمة μ للوسط لاتعتمد على شدة المجال ، لذلك يجب تعديل هذه العلاقة لتلائم المواد اللاخطية (nonlinear materials) .

في بنائنا للعلاقات التي نستنتجها ونواصل بها سيرنا وقفنا على سقالة (Scaffolding) الدوائر. وعلى كل حال فان القوى الكهربائية التي تظهر للوجود في اثناء تغير الفيض المغناطيسي لاتعتمد على وجود سريان فعلي للتيار،حيث ان سريان التيار هو مؤثر وليس سبباً،ولهذا فان رفعنا هذه السقالة فان معادلة فاراداي فقط اي التي تبقى واقفة نتخيل وجد قوة دافعة كهربائية حول منحنى رياضي اعتباطي في الفراغ مساوٍ لتكامل المركبة الماسية لـ E حول المنحنى. لذلك فرض ماكسويل (Maxwell) امكانية تطبيق المعادلة على اي منحنى مغلق وقد بينت التجارب صحة هذا الافتراض.

5-7 معادلات ماكسويل (Maxwell's Equations):

حين بدأ ماكسويل عمله كانت المعادلات الآتية في مجال الكهربائية والمغناطيسية معروفة وهي :

1- قانون كاوس للكهربائية المستقرة.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{5.36}$$

2- النتيجة المناظرة للمجال المغناطيسي.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.37}$$

3- قانون فاراداي للحث.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.38}$$

4- قانون أمبير للقوة الدافعة المغناطيسية :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{5.39}$$

القوانين الثلاثة الأولى قوانين عامة تصح للمجالات الساكنة والمتحركة (Static and dynamic fields) بينما اشتقت المعادلة الرابعة من ملاحظات الحالة المستقرة (Steady state) ويجب تبيان مدى صحتها للحالات المتغيرة زمنياً (time varying fields) ، عند اخذ تباعد طرفي المعادلة (5-39) نحصل على :

$$\nabla\cdot(\nabla\times \mathbf{H})=\nabla\cdot\mathbf{j}=0 \qquad (5.40)$$

وهذه صحيحة لظاهرة الحالـة المستقرة (Steady state phenomena)،على كل حـال عندما يكون التيار متغيراً مع الزمن لاتتوافق النتيجة مع مبدأ حفظ الشحنة المنعكس في معادلة الاستمرارية.

$$\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \qquad (5.41)$$

وقد اعطى ماكسويل هذه الوضعية الحرجة حق قـدرهـا واقترح مخرجاً لـذلـك،حيث ادرك ان الصعوبة تظهر من التعريف الناقص لكثـافـة التيـار الكليـة الوارد في المعـادلـة (5–39) باستخدام قانون كاوس (5–36) يمكن كتابة (5–41) على الشكل الآتي :

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{D})=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

i.e.
$$\nabla\cdot\left(\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=0 \qquad (5.42)$$

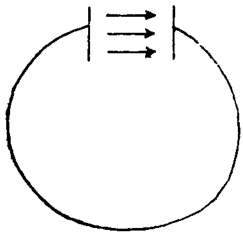
حيث استبدل ماكسويل المقدار J في قانون أمبير بالمقدار $\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ وبهذا التحسين يأخـذ قانون أمبير الشكل الآتي :

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (5.43)$$

ويصح القانون بهذه الصيغة لظاهرة الحالة المستقرة كما ويتوافق مع معادلـة الاستمراريـة (equation of continuity) للمجالات التي تعتمد على الزمن. ويسمى المقدار j عامة باسم كثـافـة تيـار التوصيل (Conduction current density) والمقـدار الثـاني $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ والـذي يظهر نتيجة الازاحة الكهربائية مـــع الزمـــن يســـمى باسم «كثافة تيار الازاحة» (displacement current density).

على مـاذا يـدل فعلاً او يتضمن تيـار الازاحـة؟ ان هـذا التيـار ليس لـه مغزى التيـار المعروف الـذي هو حركـة الشحنـات،ويمكن توضيحـه بصورة جليـة اذا مـاأخـذنـا دائرة بسيطة كالتي موضحة في الشكل (5–6) والتي تبين متسعة مشحونة ربط لوحـاهـا بسلـك موصل. التيار الذي يسري في هذا السلـك يسـاوي معـدل تغير الشحنـة على اللوحين اي أن:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{5.44}$$



الشكل (5 . 6)

حيث Qهي الشحنـة الموجودة على اللـوح الموجب للمتسعـة ، وترتبـط الشحنـة على اللوحين بالمجال في المتسعة بالعلاقة الاتية ؛

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \tag{5.45}$$

حيث Aتمثل مساحة اللوحين .

$$\therefore \qquad I = \frac{aQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} = A \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\frac{I}{A} = \frac{\partial D}{\partial t}. \tag{5.46}$$

والآن فان المقدار $\frac{I}{A}$ يعطينا كثافة التيار،لذلك فالكمية $\frac{\partial D}{\partial t}$ يمكن تأوليهـا على انهـا كثافة بعض التيار التي تناظر على سبيل المثال ـ التيـار الـذي يجب ان يسري في الفضـاء (او في الفراغ) عندما يتم ربط لوحي المتسعة المشحونين بسلك موصل،وبـذلـك فهو يكمل تيـار التوصيل. ويمكن اخـذ فكرة عن الحجم النسبي لكل من فرعي التيـار في الموصل،اذا اخذنا سلكاً نحاسياً فيه مجالاً كهربائياً E والذي يساوي $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad \therefore \quad |j|^2 = \sigma^2 |E_0|^2$$

and
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad \text{Hence,} \left|\frac{\partial D}{\partial t}\right|^2 = \omega^2 \epsilon_0^2 |E_0|^2$$

$$\therefore \left|\frac{\mathbf{j}}{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}\right| = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}.$$

وللنحاس $\sigma = 5.9 \times 10^7$

$$\therefore \quad \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \sim \frac{10^{19}}{\omega}.$$

وهكذا فان النسبة كبيرة جداً لكل الترددات (frequencies) لذلك لايعطي تيار الازاحة مغزى التيار الناتج من حركة الشحنات الحرة في دراسة الدوائر المستمرة (Continuous circuits) ولها نتائج بعيدة المدى في مجالات اخرى،وهي ناتجة بصورة رئيسة من الحد الاضافي لقانون أمبير الذي لم يكن يغطي تنوعاً وافراً في الظاهرة الكهرومغناطيسية الجديدة.

هناك اربع معادلات تكون فيها متجهات المجال E,D,B,H صحيحة وفي كل مكان وهذه المعادلات هي :

$$\text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

$$\text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (5.47)$$

وهذه هي المعادلات الاساسية للمجال الكهرومغناطيسي وتعرف باسم معادلات ماكسويل (Matwell's Equations) .

5-8 اضمحلال الشحنة الحرة (Decay of free charge):

يمكن استنباط احد الاستنتاجات المهمة المتعلقة باضمحلال الشحنة الحرة من معادلات ماكسويل،ويمكن كتابة المعادلة (5-47) على النحو الآتي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma\mathbf{E} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{5.48}$$

عند اخذ تباعد الطرفين وبافتراض σ و ϵ ثوابت، نحصل على :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

$$= \frac{\sigma\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ (من (i) في المعادلة 47–5)

وبتكامل المعادلة الاخيرة نحصل على :

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \tag{5.49}$$

حيث

$$\tau = \epsilon/\sigma \tag{5.50}$$

ويعرف هذا باسم زمن الاسترخاء (relaxation time) وهذه المعادلة توضح ان اي توزيع اصلي للشحنة يضمحل اسياً (exponentially) بمعدل لايعتمد على اي توزيع كهرومغناطيسي آخر قد يحدث.

5–9 جهود المجال الكهرومغناطيسي (Potentials of Electrostatic Field):

يمكن الحصول على وصف كامل للمجال الكهرومغناطيسي بحل معادلات ماكسويل. وهذه العملية تكون اسهل اذا ماوضعت هذه المعادلات بصيغ مناسبة، وسيكون من الافضل عادة خفض عدد المعادلات وذلك بادخال كميات جديدة تسمى الجهود الكهرومغناطيسية (electromagnetic potentials) وقد سبق ان تبنينا هذه التقنية في معالجتنا للمجال الساكن (Static field) وعبرنا عن الجهد الكهربائي المستقر بقيم عددية للجهد (Scalar potential) , ($\mathbf{E} = -\text{grad}\,\Phi$)، وعن المجال المغناطيسي بقيم متجهة للجهد (Vector potential), ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) سنتناول الآن جهود المجالات الكهرومغناطيسية عندما يكون هذان المجالان (الكهربائي والمغناطيسي) متغيرين مع الزمن. في الحالة المعتمدة على الزمن (time dependent) تكون المعادلة (ii) في (47–5) صحيحة ايضاً ويمكن تطبيقها.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.51}$$

لذلك يمكن التعبير عن B بصيغة الجهد المتجه، أي

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5.52}$$

وعند أخذ المعادلة التالية (iii) والتي لاتتضمن أي تيارات أو شحنات.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.53}$$

بما ان لف (Curl) تدرج دالة عددية يزول، فيمكن التعبير عن الكمية داخل القوس على انها تدرج دالة عددية هي Φ.

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi$$

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

وهكذا حللنا المعادلتين المتجانستين (ii) و (iii) في المعادلة (5-47) بالتعابير A و Φ، وعندما تعرف A و Q يمكن ايجاد B و E.

لاحظنا فيما مضى ان المعادلة (5-52) لاتعرف A تعريفاً كاملاً فاذا اضفنا تدرج اي دالة عددية اعتباطية الى الجهد المتجه او لنقل غيرنا A الى المقدار :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \tag{5.55}$$

فان المجال المغناطيسي لايتغير، ولكن، هل E لاتتغير ايضاً. انها ستتغير بالتأكيد مالم نأخذ بنظر الاعتبار بعض التحفظات حتى لاتؤثر اضافة $\nabla\psi$ على المجال الكهربائي يجب بالمقابل تحويل الجهد العددي Φ الى Φ' حيث :

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{5.56}$$

ويمكن تحقيق هذا بتعويض A' و Φ' في المعادلة (5-54) :

اي قانون فيزيائي يمكن التعبير عنه بتعابير الجهود الكهرومغناطيسية A و Φ لايتأثر بتحويلات من النوع المذكور في (5-55) و (5-56) وتسمى هذه التحويلات باسم

تحويلات مقياسية (gauge transformations) ومن الواضح ان المعادلات التي تتضمن مثل هذه الجهود يجب ان تكون ثوابت قياسية (أو لامتغيرات قياسية) (gauge invariant.

تبنينا في الكهربائية المستقرة الحالة $\nabla\cdot \mathbf{A}=0$ والتي باجتماعها مع المعادلة $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ تحديد A،اما لتحديد A في الكهرومغناطيسية فيجب علينا ان نغير اختيارنا وان نضع شرطاً اضافياً على A وبالشكل الذي لايؤثر على القوانين الفيزياوية. او بكلمات اخرى ان يتوافق والتحويلات التي في (55–5) و(56–5) حيث ان E و B لاتتأثران، ولكي ننفذ هذا يجب ان نحول انتباهنا الى المعادلتين غير المتجانستين المتبقيتين ونعني (i) و (iv) في المعادلة (47–5) بتعويض المعادلة (54–5) في المعادلة (i) نحصل على :

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\epsilon_0\mathbf{E}=\epsilon_0\nabla\cdot\left(-\nabla\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\rho$$

i.e.
$$-\nabla^2\Phi-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=\rho/\epsilon_0. \qquad (5.57)$$

يمكن كتابة المعادلة (iv) على النحو الآتي :

$$\nabla\times\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{j}$$

i.e.
$$\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}-\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mathbf{j}$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\mathbf{j}$$

i.e.
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})-\mu\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\mu\mathbf{j}$$

i.e.
$$-\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mu\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)+\mu\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\mu\mathbf{J} \qquad (5.58)$$

حيث استخدمنا المتطابقة :

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}.$$

مازال امامنا الخيار الخاص مفتوحاً بالشرط الذي نريد فرضه على A وقد اخترنا A و Φ بحيث أن :

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\mu\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{5.59}$$

وسنجد حلاً بهذا التعويض ان الحدين الوسطين في (58–5) سيحذفان وستختصر المعادلة الى :

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} \tag{5.60}$$

وتصبح المعادلة (57–5) حسب الشرط المعروض في (59–5) بالشكل الآتي :

$$-\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\nabla^2\Phi + \mu\epsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \rho/\epsilon_0,$$

or

$$\nabla^2\Phi - \mu\epsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0. \tag{5.61}$$

وهكذا نجد ان اختيار حالتنا هذه كان عادلاً حيث اثمر عن معادلتين مستقلتين ، واحدة لـ A (60–5) والثانية لـ ϕ (61–5) وترتبط A بالمتجه J وترتبط Φ بالكمية العددية ρ. والاكثر من ذلك ان كل من المعادلتين لهما نفس الصيغة او الشكل، اي ان الجهدين يتحققان في نفس المعادلات. وهكذا فان الحالة التي اخترناها تقدم تناظراً تاماً بين جهود المتجه والجهود العددية،فيما يخص الحالة المستقرة (Steady state) فان مشتقة الزمن تزول ونحصل على :

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j} \text{ and } \nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$$

الشرط المعروض في (59–5) يسمى شرط لورنتس المقياسي (Lorentz gauge condition) ، والمقياس (gauge) المستخدم في المغناطيسية المستقرة $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ يسمى مقياس كولومب (Coulomb gauge).

لاحظنا ان المجال الكهربائي E والمجال المغناطيسي B لايتغيران عند اجراء تحويلات مثل (55–5), (56–5) ويجب على الجهود المحولة بهذه الطريقة ان تحقق شرط (لورنتس) لذلك فان الدالة المقياسية (gauge function) ψ والتي تبقى اعتباطية يجب ايضاً ان تحقق شرطاً معيناً. بما ان الجهود الاصلية والمحمولة يجب ان تحقق شرط لورنتس لدينا :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{5.62}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \tag{5.63}$$

i.e. $$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\psi) + \mu\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$$

i.e. $$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

لذلك $$\nabla^2\psi - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{5.64}$$

وهكذا فان التحويلات المقياسية المحددة الآتية :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &\to \mathbf{A} + \nabla\psi \\ \Phi' &\to \Phi \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.65}$$

وحيث ψ تحقق المعادلة :

$$\nabla^2\psi - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

تحفظ (Preserve) شرط لورنتس .

5-10 المزيد حول شرط لورنتس المقياسي :(More about Lorentz gauge condition)

شرط لورنتس المقياسي ليس اعتباطياً تماماً كما يبدو للوهلة الاولى ، حيث يمكن ايجاد علاقة له في المباديء الاولية للنظرية الكهرومغناطيسية :

قانون كولومب، وقانون بايوت - سافارت ومبدأ حفظ الطاقة.

في اثناء اشتقاق قانون امبير الدائري (Ampere's Circuital Law) من قانون بايوت - سافارت لتوزيع التيار الثابت (Stationary current distribution) يظهر شرط كولومب المقياسي $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ بصورة طبيعية،والآن سنوسع هذه الاشتقاقات ليشمل الشروط شبه الثابتة. (quasi - stationary conditions).

يقودنا قانون بايوت ـ سافارت الى التعبير الآتي :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, d\tau \qquad (5.66)$$

حيث يشير الرمز السفلي الدليلي (Subscript) 1 و 2 الى مصدر واحداثيات المجال ، لذلك :

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\cdot \nabla_2\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right] d\tau \qquad (5.67)$$

حيث تعمل ∇_2 على r_2 فقط،

$$\nabla_2\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right] = -\nabla_1\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right]$$

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\cdot \nabla_1\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right] d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{V_1}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\}\nabla_1 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) d\tau_1 - \int_{V_1} \nabla_1 \cdot \left\{\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\} d\tau_1\right] \qquad (5.68)$$

باستخدام مبرهنة التباعد ، يمكن كتابة التكامل الثاني لتوزيع المصدر المحدد (bounded source distribution) كما يلي:

$$\int_{V_1} \nabla_1 \cdot \left\{\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\} d\tau_1 = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = 0$$

$$\therefore \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\} \nabla_1 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\, d\tau_1. \qquad (5.69)$$

وعلاقة حفظ الشحنة تعطينا :

أو

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_1)}{\delta t}\, d\tau_1. \qquad (5.70)$$

ولدينا من قانون كولومب :

$$\Phi(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} d\tau_1$$

$$\therefore \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} d\tau_1\right\}$$

$$= -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_2)}{\partial t} \tag{5.71}$$

اوبصورة اعم :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{5.72}$$

والذي هو شرط لورنتس القياسي :

الآن

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla_2 \times \{\nabla_2 \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2)\}$$

$$= \nabla_2 \{\nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2)\} - \nabla_2^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_2).$$

$$= -\nabla_2\left[\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_2)}{\partial t}\right] = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[-\epsilon_0\nabla_2 \Phi(\mathbf{r}_2)\right]$$

$$= \mu_0 \frac{\partial}{dt}\left[\epsilon_0\mathbf{E}\right] = \mu_0 \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.73}$$

$$\text{The second term} = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) \quad -\nabla_2^2\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\nabla_2^2\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\right\} d\tau$$

(حيث استخدمنا المعادلة (3–162)

$$\therefore \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left[\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right] \tag{5.74}$$

نلاحظ ان هذه المعالجة تقودنا ايضاً الى تيار الازاحة،

5–11 طاقة المجال وزخم المجال (Field Energy and Field Momentum) :

لنتذكر التعابير العامة لطاقات المجال للمغناطيسية المستقرة والمجال الكهربائي المستقر والتي هي :

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\, d\tau \quad \text{and} \quad W_M = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\, d\tau \tag{5.75}$$

سنحاول الآن ايجاد تعابير للطاقة الكهرومغناطيسية في الوضعيات المعتمدة على الزمن .(time - dependent situations)

ان القوة على شحنة متحركة مثل q تعطى حسب المعادلة الآتية :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5.76}$$

والمعدل الذي ينجز فيه الشغل على هذه الشحنة هو:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{5.77}$$

ولاينجز المجال المغناطيسي شغلاً عندما يكون عمودياً على سرعة الشحنة.
اذا وجد توزيع مستمر للشحنة فان المعدل الكلي للشغل المنجز في حجم معين هو :

$$\int \rho(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\, d\tau = \int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})d\tau. \tag{5.78}$$

وبالتعويض عن قيمة j من المعادلة (iv) في (5–47) نحصل على :

$$\int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})d\tau = \int\left[\mathbf{E}\cdot\left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\right]d\tau \tag{5.79}$$

Now $\quad \mathbf{E}\cdot(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla\cdot(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) + \mathbf{H}\cdot(\nabla \times \mathbf{E})$

$$= \nabla\cdot(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{[by (iii) of 5.47]}$$

$$\therefore \quad \int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, d\tau = \int\left[\nabla\cdot(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right] d\tau$$

$$= \int\left[\nabla\cdot(\mathbf{H} \times \mathbf{E})\right] d\tau - \int\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)d\tau \tag{5.80}$$

باستخدام مبرهنة التباعد لتحويل التكامل الاول نحصل على

$$\int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, d\tau = \int_S (\mathbf{H} \times \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS - \int_V\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)d\tau$$

حيث S هي الحدود السطحية للحجم V ، لذلك :

$$-\int_V\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) d\tau = \int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, d\tau + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS. \tag{5.81}$$

اذا فرضنا ان ϵ و μ ثوابت،يكون لدينا للاوساط الخطية (linear media):

$$\int_V \left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \tfrac{1}{2}[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}]\, d\tau$$

لذلك :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \tfrac{1}{2}[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}]\, d\tau = \int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, d\tau + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n dS \qquad (5.82)$$

بما ان المجال الكهرومغناطيسي يحتوي على كلا المجالين الكهربائي والمغناطيسي، فيكون منطقياً الافتراض ان الطاقات المعطاة في(5-57)تمثل الطاقة الكهرومغناطيسية الكلية، لذلك يمكن اعتبار $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}$ (E.D + B.H) على انها كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية (electromagnetic energy density) ولذلك ايضاً يمكن تأويل الطرف الايسر للمعادلة (8-25) على انه معدل نقصان الطاقة المخزونة في المجال الكهرومغناطيسي ويعطى الحد الاول من الطرف الايمن ، كما هو موضح اعلاه مقدار الشغل المنجز من قوى المجال على الشحنات الموجودة في الحجم ، ان وحدات المتجه [ExH] هي $\frac{\text{طاقة}}{\text{مساحة} \times \text{زمن}}$ وهكذا يمكن تأويل الحد الاخير على انه يمثل الطاقة التي تسري عبر الحدود في وحدة الزمن،والمتجه [ExH] الذي يعطينا معدل خروج الطاقة عبر وحدة مساحة في الحدود يسمى متجه بوينتنك (Poynting vector) ، ويرمز له بالحرف N.

يمكن كتابة المعادلة (5-82) بصيغة تفاضلية على الشكل الآتي :

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{N} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}. \qquad (5.83)$$

وفي الوسط الذي موصليته تساوي صفراً فان : $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = 0.$

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{N} = 0. \qquad (5.84)$$

وهذه المعادلة لها نفس صيغة معادلة الاستمرارية (5-41) (equation of continuity) حيث ان الكثافة الحجمية للكمية المحفوظة (Conserved quantity) هنا هي $\mathcal{E}_M$ وكثافة التيار (Current density) هي N : هذا التناظر يقودنا الى نفس الاستنتاجات التي توصلنا اليها اعلاه بخصوص فيض الطاقة الكهرومغناطيسية حسب متجه بوينتنك ،

N=ExH، وهكذا فان المعادلة (82–5) تمثل قانون حفظ الطاقة، وهي تبين ان مقدار النقص في الطاقة الكهرومغناطيسية لوحدة الزمن في حجم معين V يساوي مقدار الشغل المنجز من قوى المجال لوحدة الزمن زائداً الفيض الخارج لوحدة الزمن،وهذا مايعرف باسم مبرهنة بوينتنك (Poynting theorem) ، ونفس الحسابات تثبت ان المجال الكهرومغناطيسي يمتلك زخماً.

القوة على حيز يحتوي على شحنات وتيار هي :

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})d\tau. \qquad (5.85)$$

فاذا كان $P_{mech.}$ هو مجموع عزوم كل الجسيمات :

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})d\tau. \qquad (5.86)$$

ومن معادلة ماكسويل لدينا ،

$$\rho = \nabla\cdot\mathbf{D};\ \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \qquad \frac{dP_{mech}}{dt} = \int_V \left\{ (\nabla\cdot\mathbf{D})\mathbf{E} + \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} \right\} d\tau$$

$$= \int_V \left\{ (\nabla\cdot\mathbf{D})\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right\} d\tau$$

Since $\quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}$

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \int_V \left[(\nabla\cdot\mathbf{D})\mathbf{E} + \left(\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] d\tau$$

لأن $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ واضافة المقدار $(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{H}$ الى القوس قائم الحرف او حاصرة قائمة الزاويتين (square bracket) لايغير النتيجة :

$$\therefore \qquad \frac{dP_{mech}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B})d\tau$$

$$= \int_V \Big[(\nabla\cdot\mathbf{D})\mathbf{E} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{H} - \{\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})\}$$

$$- \Big\{ \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \Big\} \Big] d\tau \qquad \left(\because \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{dt}\right) \quad (5.87)$$

من الـواضـح، ان التكامـل في الحـد الثـاني من الطرف الايسر يمثـل الـزخم،وبمـا انـه لايشترك مـع كتـل الجسيمـات وانما يحتـوي فقـط على المجـالات ، نعرفـه بـاسم الـزخم الكهرومغنـــاطيسي. electromangentic momentum ، P_{field} المتجـــه $g= [DXB]$ يسمى كثـافـة الزخم الكهرومغنـاطيسي (electromagnetic momentum density) ، والطرف الايمن يمكن ان يحـول الى تكامــل سطحي ويعرف على انـه سريـان الـزخم (momentum flow) نستنتج من المعادلة (87–5) ان الزخم الكلي لنظـام مغلق يتكون من مجال وجسيمات زخم محفوظ.

يمكن ملاحظة الترابط بين متجه كثافة الزخم g ومتجه بوينتنك N ، وهكذا :

$$\mathbf{g} = [\mathbf{D} \times \mathbf{B}] = [\epsilon\mathbf{E} \times \mu\mathbf{H}] = \mu\epsilon[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \mu\epsilon\mathbf{N} \qquad (5.88)$$

تمارين الفصل الخامس

5-1 مجـال مغنـاطيسي فضـائي منتظم ($B=B_o \sin wt$) (Spatially uniform magnetic field)، واتجـاهـه يشكل زاوية مقـدارهـا Θ مـع المستـقيم العمـودي عـلى اطار دائـري (circular loop) . جد مقدار القوة الـدافعة الكهربـائيـة المحتثـة في الاطار؟

5-2 قرص دائري مستوٍ نصف قطره "a" يـدور حول محـوره العمـودي على مستـواه بسرعـة "f" دورة في الثـانيـة،وهنـاك مجـال مغنـاطيسي منتظم B مـوازٍ لمحـور الـدوران. برهن ان وجـود قـوة دافعـة كهربـائيـة بين محـور القرص وحـافتـه الخارجية (rim) قيمتها $\varepsilon = f B \pi a^2$ (قرص فارادادي) ؟

5-3 ملف لـولبي (solenoid) ملفـوف بـانتظـام طـولـه 300 mm وقطره 15 mm وعـدد لفاتـه 2500 لفـة،وضع في مجـال منتظم كثـافـة فيضـه 4T وتيـار قيمتـه 2A يمر في الملف. جد العزم المغناطيسي وعزم الدوران (torque) المؤثر عليه؟

5-4 الكترونـات في بيتـاترون (Betatron) تتحرك في مـدار دائري في غرفـة مفرغـة (Vacuum chamber) في مجـال مغنـاطيسي B ، تم تعجيلهـا بـزيـادة الفيض الرابـط للمـدار ، برهن على ان المجـال المغنـاطيسي في مـدار دائري مستقر يسـاوي نصف متوسط المجال المغناطيسي خلال فترة التعجيل.

5-5 أفرض ان شحنة تتحرك بسرعة منتظمة بمحـاذاة محور دائرة واحسب تيـار الازاحـة الذي يسري في الدائرة ثم احسب تيار التوصيل فيها وبرهن على انها متطابقان.

5-6 خـط نقـل (transmission line) يتكـون من زوج من اسـلاك متـوازيـة غير قـابلـة للنفـوذ (nonpermeable) نصف قطريها r_1 ، r_2 يسري تيـار في احـدهمـا ويعـود في الآخر ومـوزع بصـورة منتظمـة على المقطـع العرضي للسلـك. فـاذا فصل هـذان السلكان بمسافة t. جد الجهد المتجه للمنظومة.

5-7 مغناطيس صغير ذو عزم مغناطيسي يدور حول مركزه بسرعة زاوية مقدارهـا ω برهن على $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \omega \times \mathbf{m}$. ، ثم برهن على ان حركـة المغنـاطيس تـولـد مجـالاً كهربائياً E يحسب من المعادلة :

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{(\mathbf{r}.\mathbf{m})\,\omega - (\mathbf{r}.\omega)\,\mathbf{m}\right\}$$

5-8 كرة عـازلـة ثـابت عزلهـا E ونصف قطرهـا "a" مركزهـا في نقطـة الاصـل وتـدور بسرعـة زاويـة مقـدارهـا ω حول المحـور Z فـاذا سلـط مجـال كهربـائي منتظم E_0. باتجاه المحور X برهن على وجود مجال مغناطيسي مقداره :

$$\mathbf{H} = \frac{2}{3}\,\sigma\,\omega\,a \quad \text{for} \quad r < a,$$

$$= \frac{3(\mathbf{m}.\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mathbf{m}}{4\pi r^3} \quad \text{for} \quad r > a,$$

حيث σ ,$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^4 \sigma\omega$ و الشحنة المحتثة على سطح الكرة.

الفصل السادس

الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic waves

الفصل السادس

الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic waves

6-1 الامواج المستوية في الاوساط غيرْ الموصلة

: (Plane Waves in Non - conducting Media)

لاحظنا ان معادلات ماكسويل تعطينا كل المعلومات التي يمكن استخلاصها من النظرية القديمة للمجالات الكهربائية والمغناطيسية . سنبين في هذا الفصل ان المجالات المتولدة من شحنات متحركة يمكنها مغادرة مصدرها والتنقل في الفضاء على شكل موجات،وهذه هي احدى السمات المميزة المهمة لمعادلات ماكسويل.اذا فرضنا ان μ σ ϵ، توابت، فان لف المعادلة (Curl of equation) (iii) من (5–47) يعطينا :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}).$$

وباستخدام متطابقة متجهة معروفة جداً لتحويل الطرف الايسر وكذلك استخدام المعادلة (iv) من (5–47) لتحويل الطرف الايمن للمعادلة اعلاه نحصل على :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

i.e.

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla(\rho/\epsilon_0). \tag{6.1}$$

وفي المنطقة الخالية من الشحنات الحرة تكون ρ مساوية للصفر :

$$\therefore \qquad \nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.2}$$

بافتراض $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ يمكن مقارنة القيم النسبية للحدين الثاني والثالث من المعادلة (6–2) وهكذا نجد أن :

$$\frac{\left|\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right|}{\left|\mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right|} \simeq \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1}{\omega\tau} = \frac{T}{2\pi\tau} \qquad (6.3)$$

حيث استبدلنا ϵ/σ بزمن الاسترخاء (relaxation time) τ و(5–50) $\omega = \frac{2\pi}{T}$، حيث T هي فترة التذبذب (period of oscillation) فاذا كانت $\tau \ll T$ وهي حالة الوسط الموصل،الحد الثالث للمعادلة (2–6) يكون هو المتسلط او السائد (dominant) ويمكن كتابة المعادلة (2–6) كما يلي :

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad (6.4)$$

معادلة انتشار (diffusion equation).اما اذا كانت $\tau \gg T$ فان الحد الذي يحتوي على σ يمكن اهماله ويكون لدينا للوسط غير الموصل (non - conducting medium) المعادلة الآتية :

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (6.5)$$

ويمكن استخلاص معادلة مشابهة تماماً فيما يخص H وهي :

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \qquad (6.6)$$

and

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (6.7)$$

وهذه المعادلات هي من نوع معادلات الموجة المألوفة لنا. ومعادلة الموجة العامة هي:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (6.8)$$

حيث v هي سرعة الانتشار (velocity of propagation) وبمقارنة المعادلتين (5–6) و (7–6) مع المعادلة (8–6) فان السرعة في حالتنا هذه هي :

$$v = (\epsilon\mu)^{-1/2} \qquad (6.9)$$

وفي الفراغ

$$V = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} \tag{6.10}$$

ونستنتج ان التغيرات الزمنية للمجال الكهربائي او المغناطيسي تنتشر بنفس السرعة :

$$V = (\epsilon\mu)^{-1/2}.$$

يجب ملاحظة ان المعادلة (8–6) هي معادلة عددية لكن المعادلتين (5–6)و (7–6) هما معادلتان متجهتان اي ان هاتين المعادلتين ضمان لكل مركبة من مركبات HوE.

ابسط أنواع الموجات، والذي ينتج من حل المعادلتين (5–6) و (7–6) هو الموجة المستوية (plane wave) والبساطة النسبية لحل الموجة لمعادلات ماكسويل توضح بعض الخواص الفيزيائية الاساسية المهمة للمجال الكهرومغناطيسي دون اللجوء الى الرياضيات العالية او لان الموجة المستوية هي التقريب الجيد للموجات الفعلية في كثير من الحالات فاننا سندرس حل الموجة المستوية للمعادلات المذكورة اعلاه.

الموجة المستوية هي الموجة التي تكون سعتها ـ مركبة متجه المجال ـ ثابتة حول كل النقاط الواقعة في مستوي عمودي على اتجاه الانتشار. وهذا المستوي يكون جبهة الموجة (Wave - front) التي تتقدم بسرعة v بالاتجاه العمودي عليها (أي على الموجة)،تعتبر مركبات متجه المجال في المستوي دوال للمسافة العمودية بين المستوي ونقطة الاصل وكذلك دوال للزمن. وسنختار محور الاحداثيات بالشكل الذي يصبح فيه اتجاه الانتشار واقعاً على احد المحاور الرئيسية وليكن المحور السيني،وبما ان دالة الموجة في هذه الحالة لاتعتمد على z ، y ، فان معادلة الموجة تأخذ شكلاً احادي البعد (one dimentional form) مثل :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{6.11}$$

وهذه لها حل عام هو :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} \\ &= f(x - vt) + g(x + vt) \end{aligned} \tag{6.12}$$

حيث A و B كميات ثابتة (معقده عادة) و $k = \omega/v$ حيث v هي سرعة طور الموجة (phase velocity of the wave) تمثل المعادلة (6-12) انتقال الموجة الى اليمين والى اليسار بسرعة مقدارها v . ويمكننا افتراض صيغة مجال الموجة المستوية بالشكل الآتي :

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.13}$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(kx-\omega t)}. \tag{6.14}$$

قد يتساءل بعضهم عن مدى افتراض E و H في طور واحد كما فعلنا في المعادلتين اعلاه؟ في الحقيقة ان مدى احقية هذا الافتراض ستظهر في المناقشة الآتية :

اذا كان ممكناً سنجعل α هي الفرق في الطور (phase difference) بين E وH أي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(kx-\omega t+\alpha)}.$$

على المجالين E و H تحقيق معادلة ماكسويل :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t};\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

(لأن $\frac{\partial}{\partial y}$ ، $\frac{\partial}{\partial z}$ للمقدار E تساوي صفراً وذلك لأن E تنتقل باتجاه المحور X).

من المعادلة الثانية لدينا :

$$ikE_{0y}e^{i(kx-\omega t)} = i\omega\mu H_{0z}e^{i(kx-\omega t+\alpha)}.$$

وعند اخذ الاجزاء الحقيقية منها يصبح لدينا :

$$kE_{0y}\cos(kx-\omega t) = \omega\mu H_{0z}\cos(kx-\omega t+\alpha.)$$

وهذا صحيح لكل من tوx والقيمة الوحيدة لـ α التي تحقق هذه الحالة هي صفر،لذلك فان E و H في طور واحد. ونسبة السعة لـ H و E تعطى من المعادلة الآتية

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu\omega}{k} = Z_0 \tag{6.15}$$

النسبة Z_0 لها ابعاد الممانعة او المقاومة (impedance) وتسمى الممانعة او المقاومة الذاتية (intrinsic impedance) للوسط.

وهكذا فان E و H للموجة المستوية احادية اللون (monochromatic) يكونان دائماً في طور واحد ونسبة سعتها في أي لحظة وأي نقطة من المعادلة الآتية :

$$\frac{E}{H}=\frac{\mu\omega}{k}=\mu v. \qquad (6.16)$$

وللموجة المستوية في الفضاء الحر :

$$Z_0=\mu_0 v_0 = 376.7\Omega. \qquad (6.17)$$

في اثناء انتشار الموجة قد يغير المتجهان اتجاههما في المستوي y-z دون تغيير الشروط التي وضعناها لحد الآن :

ولانتشار الموجة في اي اتجاه اعتباطي لدينا :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (6.18)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)}. \qquad (6.19)$$

حيث E_0 و H_0 متجهان ثابتان مع الزمن و $K=\hat{e}_k|K|$ هو متجه الانتشار ، $\hat{e}_k$ هو متجه الوحدة باتجاه الانتشار. بما ان E و H حقيقيان،فاننا نهتم فقط بالاجزاء الحقيقية من (6–18) و(6–19).

ان E و H المستخلصان بهذه الطريقة يجب ان تحقق معادلات ماكسويل ايضاً. ويجب التنبيه بشدة هنا ان هذا ليس تلقائياً لان معادلات ماكسويل لاتحدد تماماً المجال الكهرومغناطيسي.

عند تعويض (6–18) في المعادلة (i) من (5–47) نحصل على :

$$\nabla\cdot\{\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)}\}=0$$

والتي تقودنا الى العلاقة الآتية :

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (6.20)$$

بالمثل عند التعويض (6–19) في (ii) للمعادلة (5–77) نحصل على :

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}=0 \qquad (6.21)$$

وهذا يبين ان كلاً من E و H عموديان على متجه الانتشار K. ومثل هذه الموجة تسمى موجة مستعرضة (transverse wave). والموجات المستوية الكهرومغناطيسية جميعها مستعرضة في طابع مميز.

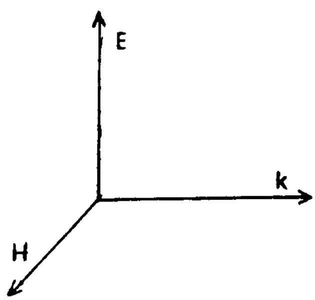
لنعوض الآن (18-6) في المعادلة (ii) من (47-5).

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = \nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \times \mathbf{E}_0$$

$$= i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \qquad (6.22)$$

وهكذا فان H عمودي على كل من K و E وبمعنى آخر ان E و H العموديين على اتجاه الانتشار متعامدان فيما بينهما ايضاً،والمتجه ExH يشير الى اتجاه الانتشار. والمتجهات K وH و E تكون مجموعة متعامدة يمينية (right hand orthogonal set) كما في الشكل (1-6).



شكل رقم (6.1)

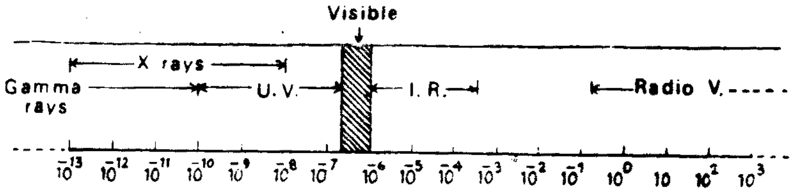
وتعطى سرعة الموجة الكهرومغناطيسية في الفضاء الحر من المعادلة الآتية :

$$v_0 = \frac{1}{(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}}.$$

وافضل قيمة لـ ϵ_0 التي حددها روزا (Rosa) وبورسي (Porsey) وتعني ϵ_0 = 8.854x10 − 12 وقيمة μ تساوي $4\pi \times 10^{-7}$ ، وعند تعويض هذه القيم في المعادلة اعلاه نحصل على :

$$v_0 = 2.99784 \times 10^8 \ \mathrm{ms}^{-1} \qquad (6.23)$$

وهذه هي نفس سرعة الضوء في الفضاء الحر. وهذا يقودنا الى الاستنتاج ان الضوء ببساطة عبارة عن شكل من الاشعاع الكهرومغناطيسي. الاشعاعات السينية (x–rays) وفوق البنفسجية (ultra violet) وتحت الحمراء (infra red) والاشعاعات الراديوية واشعاعات الموجات الدقيقة (microwave) كلها اشعاعات كهرومغناطيسية تختلف فقط في ترتيب قيم اطوالها الموجية، ويوضح الشكل (6–2) الطيف الكهرومغناطيسي.



شكل رقم (6.2)

لقد تم التحقيق المباشر للاشعة الكهرومغناطيسية التي تنبأ بها ماكسويل في تجارب هينريج هيرتز (Heinritch Hertz) الذي كان اول من اعلن وجود موجات تتولد من التفريغ الشراري المتذبذب (Oscillatory spark discharge) وبين انها تمتلك الكثير من خواص الضوء المألوفة مثل الانعكاس (reflection) والانكسار (refraction) والتداخل (interference) والاستقطاب (polarization).

عرفنا سرعة طور الموجة الكهرومغناطيسية في وسط معدني بأنها :

$$v = \frac{1}{(\epsilon\mu)^{1/2}} = \frac{1}{(\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r)^{1/2}} = \frac{v_0}{(\epsilon_r\mu_r)^{1/2}} \qquad (6.24)$$

وهي اقل من v_0 .

وسرعة موجة الضوء في وسط غير مفرق (non–dispersive medium) هي :

$$v = \frac{c}{n}$$

حيث n هو معامل انكسار الوسط (refractive index) وبمقارنة هذه العلاقة مع (6–24) نحصل على :

$$n = (\epsilon_r\mu_r)^{1/2} \qquad (6.25)$$

يجب ملاحظة كون هذه المعادلة صحيحة فقط عندما يتم ايجاد n, μ_r, ϵ_r عند نفس التردد.

6-2 الاستقطاب (Polarization):

لاحظنا في المعادلة (18–6) ان المتجه E ثابت مع الزمن. ومثل هذه الموجة يقال عنها انها مستقطبة خطياً (linearly polarized). ان مستوي المتجه الكهربائي E حالة المعادلة (13–6)هو مستوي y - z يأخذ على انه مستوي الاستقطاب معرفة طبيعة الاشعاعات الكهرومغناطيسية كانت النظرة السائدة اخذ مستوي المتجه المغناطيسي في البصريات على انه مستوي الاستقطاب يمكن اعتبار الموجة المستوية احادية اللون خطية الاستقطاب بأنها تطابق مكاني لحلين خطيين مستقلين لمعادلة الموجة،مثل :

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{e}}_y E_{0y} + \hat{\mathbf{e}}_z E_{0z}) e^{i(kx-\omega t)} \qquad (6.26)$$

حيث $\hat{e}_y, \hat{e}_z$ متجهات وحدة بمحاذاة المحورين z و y ويسميان متجهات الاستقطاب (Polarization vectors) والسعات E_{0y}, E_{0z} سعات معقدة (Complex amplitudes)، ويمكن التعبير عن اي كمية معقدة بأنها حاصل ضرب كمية حقيقية (real quantity) في عامل طور معقد (Complex phase factor) وهكذا.

$$E_{0y} = E_0^y e^{i\alpha}$$
$$E_{0z} = E_0^z e^{i\beta} \qquad (6.27)$$

حيث E_0^z و E_0^y هي السعات الحقيقية، ولذلك يكون الحلان المستقلان :

$$\mathbf{E}_y = \hat{\mathbf{e}}_y E_0^y e^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$

$$\mathbf{E}_z = \hat{\mathbf{e}}_z E_0^z e^{i(kx-\omega t+\beta)}. \qquad (6.28)$$

لذلك ،

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z = (\hat{\mathbf{e}}_y E_0^y e^{i\alpha} + \hat{\mathbf{e}}_z E_0^z e^{i\beta}) e^{i(kx-\omega t)} \qquad (6.29)$$

or

$$\mathbf{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_y E_0^y + \hat{\mathbf{e}}_z E_0^z e^{i(\beta-\alpha)}\} e^{i(kx-\omega t+\alpha)}. \qquad (6.30)$$

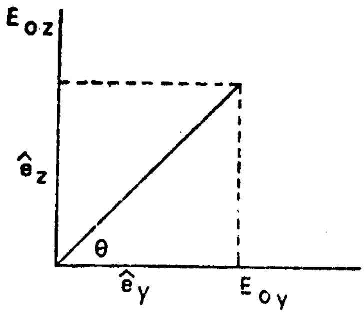
ولندرس الآن الحالات الخاصة الآتية :

(i) ان يكون لـ E_y و E_z نفس الطور أي $\alpha = \beta$ أو ان يكون بينهما فرق في الطور يساوي تكامل احد مضاعفات π, أي $\beta = \alpha \pm m\pi$, حيث m=0,1,2, ... الخ

فان :

$$\mathbf{E} = (\hat{e}_y E_0^y \pm \hat{e}_z E_0^z)\, e^{i(kx-\omega t+\alpha)} \tag{6.31}$$

هذه المعادلة تمثل موجة خطية الاستقطاب،ومحصلة متجه الاستقطاب تتذبذب بمحاذاة الخط الذي يكون الزاوية $\theta = \tan^{-1} \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$ ، وكما هو موضح في الشكل (6-3).



شكل رقم (6.3)

(ii) سعة كل من المتجهين متساوية أي $E_0^y = E_0^z = E_0$ ولكن طورهما يختلف بمقدار $\pi/2$.

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{e}_y \pm i\hat{e}_z)e^{i(kx-\omega t+\alpha)}. \tag{6.32}$$

مركبات المجال E (آخذين الاجزاء الحقيقية فقط) :

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t + \alpha)$$
$$E_z = \mp E_0 \sin(kx - \omega t + \alpha). \tag{6.33}$$

وهذا هو تقدم موجة بمحاذاة المحور X الذي يكون فيه المتجه E له طول ثابت هو E_0 وهو دالة للزمن حيث يغير باستمرار من اتجاهه فقط. لدينا من المعادلة (6-33) :

$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1. \tag{6.34}$$

لذلك فان المتجه يرسم دائرة بتردد ω. مثل هذه الموجة يقال عنها أنها مستقطبة دائرياً (circularly polarized) ويحدد اتجاه الدوران من اشارة E_z في المعادلة (6–33)، اذا كانت الاشارة موجبة يكون الدوران عكس اتجاه حركة عقرب الساعة على فرض ان المراقب يواجه الموجة القادمة، ويقال عن الموجة ان لها استقطاباً دائرياً ايسر (Left circular polarization) اولها حلزوني موجب (positive helicity)، اما اذا كانت الاشارة سالبة فان الدوران يكون باتجاه حركة عقرب الساعة وفي هذه الحالة تكون الموجة ذات استقطاب دائري ايمن (right circular polarization) اولها حلزوني سالب (negative helicity).

(iii) اذا كانت $E_0^y \neq E_0^z$ and $\beta = \alpha \pm \pi/2.$ تكون مركبات E هي :

$$E_y = E_0^y e^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$
$$E_z = E_0^z e^{i(kx-\omega t+\alpha\pm\pi/2)}.$$

وعند اخذ الاجزاء الحقيقية نجد أن :

$$E_y = E_0^y \cos(kx - \omega t + a)$$
$$E_z = \mp E_{0z} \sin(kx - \omega t + a)$$

$$\frac{E_y^2}{(E_0^y)^2} + \frac{E_z^2}{(E_0^z)^2} = 1 \qquad (6.35)$$

وترسم محصلة المتجه في هذه الحالة بيضوياً (ellipse) ويقال عن الموجة انها مستقطبة بيضوياً (elliptically polarized).

6–3 فيض الطاقة في الموجة المستوية (Energy flux in a plane wave)

بينا في الفصل السابق ان متجه بوينتنك N=ExH يمثل معدل اشعاع الطاقة عبر وحدة المساحة. وسنبين الآن كيفية احتساب متجه بوينتنك لموجه مستوية عبر فيها عن متجه المجال E وH بصيغة سعات معقدة.

يعطينا المتجه N=ExH المعدل اللحظي (instantaneous rate) لسريان الطاقه. بما ان المتجه E و H يتغير توافقياً (harmonically) مع الزمن ، يمكن ايجاد متوسط سريان الطاقة بأخذ N=ExH حول فترة زمنية كاملة.

أي

$$\langle \mathrm{N} \rangle = \langle R_e\mathbf{E} \times R_e\mathbf{H} \rangle \tag{6.36}$$

حيث تقف R_e للاجزاء الحقيقية فقط.

بما أن E و H كميات معقدة يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{-i\omega t}$$
$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2)e^{-i\omega t} \tag{6.37}$$

حيث E_1 , E_2 و H_1 , H_2 كلها حقيقية.

$$\therefore \quad R_e\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cos \omega t + \mathbf{E}_2 \sin \omega t$$
$$R_e\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \cos \omega t + \mathbf{H}_2 \sin \omega t$$
$$\therefore \quad R_e\mathbf{E} \times R_e\mathbf{H} = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cos^2 \omega t + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \sin^2 \omega t$$
$$+ \{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)\} \sin \omega t \cos \omega t$$

والآن حول فترة زمنية كاملة من التذبذب :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

and $$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$\therefore \quad \langle R_e\mathbf{E} \times R_e\mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2}\{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2)\} \tag{6.38}$$

وسنحسب الآن $R_e\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{-i\omega t} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)(\cos \omega t - i \sin \omega t)$$
$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2)e^{i\omega t} = (\mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$\therefore \quad R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cos^2 \omega t + (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cos \omega t \sin \omega t$$
$$+ (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \cos^2 \omega t - (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cos \omega t \sin \omega t$$
$$- (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cos \omega t \sin \omega t + (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \sin^2 \omega t$$
$$+ (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cos \omega t \sin \omega t + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \sin^2 \omega t$$
$$= (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \tag{6.39}$$

وهكذا

$$\langle R_e\mathbf{E} \times R_e\mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \tag{6.40}$$

لذلك

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*).$$

بما ان عوامل الزمن (time factors) تلغى تلقائياً في النتيجة، يمكن الحصول على المعدل الزمني للطاقة (time averaged energy) من متجهات المجال.

الآن (انظر 22-6)

Now $\qquad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}$ (see 6.22)

$$\therefore \qquad \mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*}{\omega\mu} \tag{6.41}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{\omega\mu}\{\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*)\}$$

$$= \frac{1}{\omega\mu}\{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\mathbf{k} - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{k})\mathbf{E}^*\}$$

$$= \frac{1}{\omega\mu}\left| E_0 \right|^2 \mathbf{k}.$$

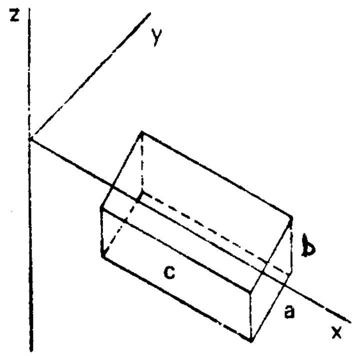
Hence.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\omega\mu}\mathbf{k} = \frac{|E_0|^2}{2}\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2}\hat{\mathbf{e}}_k \tag{6.42}$$

(لأن $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_k$ حيث $\hat{\mathbf{e}}_k$ هو وحدة المتجه في اتجاه الانتشار، $[k = \frac{\omega}{v} = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}.]$.

اذا كانت الموجة تتحرك باتجاه المحور X فيكون سريان الطاقة باتجاه X ايضاً وهو مساوٍ في جميع النقاط التي يكون المحور z بالنسبة لها متساوياً. الشكل(4-6) يوضح متوازي مستطيلات طوله «c» بمحاذاة المحور x وضلعيه الآخرين "a" و "b" كثافة الطاقة في اي مجال كهرومغناطيسي $\frac{1}{2}$(E.D +B.H) وهكذا فان الطاقة الكلية تساوي :

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\, d\tau \tag{6.43}$$



شكل رقم (6.4)

اذا فرضنا ان المجالين E و H يؤثران بمحاذاة المحورين y و z على التوالي، يمكن كتابة:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_y E_0 e^{i(kx-\omega t)} = \hat{\mathbf{e}}_y E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{e}}_z H_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\therefore \quad U = \frac{1}{2}\int_0^c \int_0^a \int_0^b [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)]\, dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^c [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)]\, dx.$$

اذا كانت T هي فترة التذبذب (period of oscillation) فان متوسط الطاقة في الصندوق المتوازي المستطيلات هو :

$$\langle U \rangle = \frac{ab}{2T}\int_0^T \int_0^c [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)]\, dx\, dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^c \left[\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2\right] dx$$

$$= \frac{abc}{4}[\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2] \tag{6.44}$$

لذلك فان المعدل الزمني لكثافة الطاقة (time averaged energy density) المجتمع مع الموجة هو

$$\langle U_d \rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*) = \frac{1}{4}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\epsilon |E_0|^2 + \mu \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{\omega\mu} \cdot \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}^*}{\omega\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\epsilon |E_0|^2 + \epsilon |E_0|^2\right\} = \frac{\epsilon}{2}|E_0|^2 \tag{6.45}$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_k |E_0|^2 = \langle U_d \rangle (\epsilon\mu)^{-1/2}\, \hat{\mathbf{e}}_k$$

$$= v \langle U_d \rangle \hat{\mathbf{e}}_k. \tag{6.46}$$

وهذا يبين ان المعدل الزمني لسريان الطاقة يكون باتجاه انتشار الموجة ويساوي سرعة طور الموجة مضروباً في متوسط كثافة الطاقة. لذلك فان الطاقة تسري بنفس سرعة الموجة نفسها.

6–4 الموجات المستوية في وسط موصل

:(Plane waves in a conducting medium)

بينا في البند (1–6) من هذا الفصل ان المجالين الكهربائي والمغناطيسي يحققان تطابق المعادلتين (2–6) و (6–6) في الوسط الخالي من الشحنات الحرة.

$$\nabla^2\mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{6.6}$$

كلتا المعادلتين تحتوي على حدود المضاءلة (Damping terms) تتناسب مع موصلية الوسط. سنحاول ايجاد حلول الموجة المستوية لمعادلات ماكسويل لوسط موصل. سنفرض ان متجهي المجال E و H يتغيران توافقياً مع الزمن:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{6.47}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{6.48}$$

بتعويض (6–47) في المعادلة (6–2) :

$$-k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon\mu\omega^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\sigma\mu\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

i.e. $$[k^2 - \epsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega]\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (6.49)$$

$\therefore$ $$k^2 = \epsilon\mu\omega^2\left[1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right] \qquad (6.50)$$

الحد الاول ذو علاقة بتيار الازاحة والحد الثاني بتيار التوصيل.

لكل موجة هناك علاقة دالية (functional relationship) بين عدد الموجات K وتردد الموجة .ω ونسمي هذه العلاقة علاقة التفريق(dispersion relation). للموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ علاقة تفريق هي :

$$k = \frac{\omega}{V}.$$

اما للوسط الموصل فهي العلاقة (6–50) اذا كانت σ تساوي صفراً (اي فضاء حر) $k^2 = \epsilon\mu\omega^2 = \frac{\omega^2}{V^2}$ ،

وهي العلاقة التي استنبطناها قبل قليل، وستوفر لنا هذه العلاقة معلومات قيمة حول انتشار الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط.

لاحظنا ان متجه الانتشار K يكون كمية معقدة في الوسط الموصل. ولجعله ملائماً للاستخدام سنعبر عنه كما يلي :

$$k = \alpha + i\beta \qquad (6.51)$$

وعند تربيع هذه العلاقة ومقارنتها مع المعادلة (6–50 نجد :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \epsilon\mu\omega^2 \qquad (6.52)$$

$$2\alpha\beta = \sigma\mu\omega$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[1 + \left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2\right\}^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (6.53)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\left[-1 + \left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2\right\}^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (6.54)$$

وسنأخذ الجذر التربيعي الموجب وذلك لكي يخضع الحل للشكل المناسب لـ K في الفضاء الحر.بما ا $K=\alpha+i\beta$ ، يمكن كتابة المعادلتين (47–6) و (48–6) كما يلي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r-\omega t)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r-\omega t)}$$

هاتان المعادلتان تؤثران عدم امكانية انتشار الموجة المستوية في وسط موصل دون توهن (attenuation) عند انتشار الموجة المستوية في وسط موصل تتولد تيارات في الوسط نتيجة مجال الموجة الكهربائي المتذبذب،ويجب انجاز شغل لسحب هذه التيارات وهناك جزء من الطاقة يفقد على شكل حرارة في الوسط،لذلك يحصل وهن في الموجة والكمية β تسمى معامل الامتصاص (absorption coefficient) وهي قياس لهذا الوهن.

6–5 الظاهرة السطحية (The Skin Effect) :

يظهر الحد $i\sigma\mu$ في المعادلة (49–6) من الحد المتضمن للمقدار $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ في المعادلة (2–6) ، اي من تيار التوصيل،ولكن يظهر الحد $\epsilon\mu\omega^2$ من الحد المتضمن للمقدار $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ في نفس المعادلة اي من تيار الازاحة، ويسيطر تيار التوصيل على تيار الازاحة في كل الاوساط الموصلة تقريباً،لذلك سيكون حذف الحد الاوسط في المعادلة (2–6) تقريباً مقبولاً جداً،وهكذا للوسط جيد التوصيل.

$$\nabla^2\mathbf{E} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (6.55)$$

والحل المتوهن (او الحل الذي يتضمن التوهن)(attenuated solution)لهذه المعادلة هو:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r-\omega t)}, \qquad (6.56)$$

ان المقدار $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$ يكون اكبر بكثير من الواحد للموصل الجيد اذا كان التردد ليس عالياً جداً.

من المعادلتين (53ـ6) و (54ـ6)

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \frac{1}{\delta}, \text{ where } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \qquad (6\cdot57)$$

$$\therefore \qquad E = E_0 e^{-r/\delta} e^{j\left(\frac{r}{\delta} - \omega t\right)} \qquad (6.58)$$

نجد من المعادلة (58-6) ان السعة تقل $\frac{1}{e}$ مرة من قيمتها عند السطح عندما تساوي $r = \delta$ ، لذلك فان الكمية δ, هي قياس للعمق الذي تخترقه الموجة الكهرومغناطيسية في موصل جيد قبل ان تقل قيمتها الى $\frac{1}{e}$ مرة من قيمتها عند السطح،وتسمى المسافه 'δ' بعمق السطح (Skin depth).

ونستنتج من العلاقة (57-6) ان العمق السطحي يقترب من الصفر اذا مااقتربت الموصلية من اللانهاية وهو صغير للموصلات الجيدة في التيارات عالية التردد وهكذا فان للنحاس $\sigma = 58 \times 10^6$ mhos/m هو مقلوب mho) Ohm) وفيما يلي مقدار العمق السطحي في ترددات مختلفة.

(Frequency) التردد	العمق السطحي (Skin depth)
60 Hz	8.5×10^{-3} m
1 M Hz	6.6×10^{-5} m
30 G Hz	3.8×10^{-7} m

•سيعطينا الجدول الآتي فكرة عن العمق السطحي في مواد مختلفة :

(Material) المادة	(Frequency) التردد	δ
(Silver)فضة	100 M Hz	10^{-7} m
(Aluminum) المنيوم	50 Hz	1.25×10^{-2} m
(Sea Water) ماء البحر	30 KHz	10^{-1} m

وهكذا يمكن صنع موصل جيد حتى من موصل رديء اذا ماطلي بطبقة رقيقة من الفضة او النحاس،ووهن الموجات المفاجيء يعني في الدوائر عالية التردد ان التيار يسري على اسطح الموصلات فقط. والعمق السطحي العالي نسبيا لماء البحر يوضح لماذا تصبح الاتصالات الراديوية للغواصات صعبة تحت عمق عدة امتار.

تمارين الفصل السادس

6-1 اذا علمت ان مركبات المجال الكهربائي في الفراغ عند الزمن t هي $E_y=0, E_x=0$ ، $E_z=\alpha \cos kx \cos \omega t$. والمجال المغناطيسي H=0 في t=0 . برهن ان مركبات المجال المغناطيسي عند الزمن t هي $H_y=0, H_x=0$ ، $H_z = -\alpha\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \sin kx \sin \omega t.$ ، وبرهن ايضاً انه لايوجد فيض رئيس في الطاقة في هذا السؤال .

6-2 موجتان مستويتان احاديتا اللون لهما نفس التردد خطيتا الاستقطاب ، متعامدتان، وتنتشران بنفس الاتجاه، ومستوي احدى الموجتين يتقدم على الاخرى بزاوية مقدارها ϕ . جد استقطاب الموجة الناتجة؟

6-3 برهن على انه : -

(i) اذا تحركت موجة مستوية احادية اللون خطية الاستقطاب في وسط غير موصل موحد الخواص في جميع الاتجاهات(isotropic non - conducting medium)، فان المعدل الزمني لكثافة طاقتها يتوزع بالتساوي بين المجالين المغناطيسي والكهربائي.

(ii) اذا تحركت هذه الموجة في وسط موصل فان متوسط الطاقة في المجال المغناطيسي يكون اكبر منه في المجال الكهربائي.

6-4 احسب سعة المجال المغناطيسي لشعاع الليزر (Laser beam) يبلغ قطره 10^{-3} متر في الفضاء الحر، اذا كانت طاقة الليزر هي واحد واط.

6-5 جد العمق السطحي الذي تبلغه موجة راديوية ذات تردد واطيء طولها الوجي $(3\times10^3 m)$ في ماء البحر،علماً ان الموصلية الكهربائية لماء البحر هي تقريباً $\sim 4\ (\Omega\ m)^{-1}$

6-6 تتأين جزيئات الغاز في طبقة الايونوسفير بالاشعة فوق البنفسجية من الشمس. جد السماحية النسبية لطبقة الايونوسفير لموجات ترددها ν اذا الغينا المجال المغناطيسي الناتج من الشحنات المتحركة وفرضنا ان كثافة الالكترونات الحرة هي n_o لوحدة الحجم.

6-7 اذا فرضنا ان قابلية توصيل وسماحية ونفوذية وسط ما لاتتغير مع التردد،فهل يتصرف وسط ذي σ =0.1mho μ_r=1 ϵ_r=40 كموصل او عازل عند التردد (ا) 50KHz(ب) 10GHz.

الفصل السابع

الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة

Electromagnetic waves in Bounded Media

الفصل السابع

الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة

Electromagnetic waves in Bounded Media

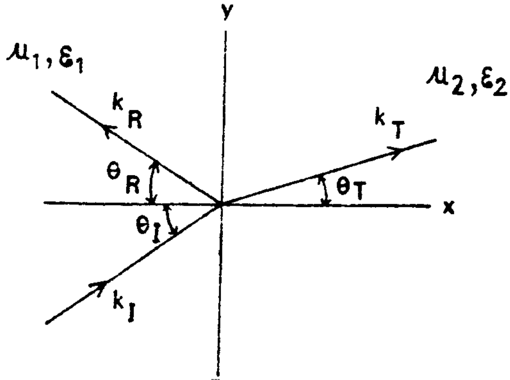
سندرس في هذا الفصل سلوك الموجات الكهرومغناطيسية في الحدود بين اوساط مختلفة. ففي منظومة لموجة مستوية منتظمة ساقطة ثبت ان اسهل الشروط الحدودية معالجة هي لتلك التي لها القدرة على ان تعكس موجة مستوية منتظمة اخرى. وهذا يحدث عندما تكون الحدود مستوياً لانهائي الامتداد (plane of infinite extent) وتميل الحدود المنحنية الى استطارة (Scatter) الموجة المستوية الساقطة عليها الى اتجاهات مختلفة في آن واحد. وعلى الرغم من ان مثل هذه المسائل يمكن حلها مبدئياً وذلك بتطابق مجموعة او سلسلة لانهائية من موجات مستوية منتظمة الا اننا سنحصر دراستنا بالحدود المستوية فقط.

عندما تسقط موجات مستوية على الحدود بين وسطين فان قسماً من طاقة السقوط تعبر الوسط في حين ينعكس البعض الآخر. ان انعكاس (reflection) وانكسار (refraction) الموجات الضوئية على السطح الفاصل بين وسطين مختلفين في معامل الانكسار يعتبر ظاهرة عادية ومألوفة ، وسنبين الآن كيف ان النظرية الكهرومغناطيسية تقدم لنا توضيحاً بسيطاً لهذه الظاهرة،وهذا سيبين ايضاً كيف ان البصريات (optics) تدخل ضمن اطار كهروديناميكية ماكسويل (Maxwell's electrody namics)

7-1 انعكاس وانكسار الموجات المستوية عند تداخل مستوي :

(Reflection and Refraction of Plane wave at a plane Interface)

نأخذ وسطين عازلين غير موصلين ($\sigma=0$) (two non - conducting dielectric media) نرمز لهما "1" و "2" محددة خواصها الثوابت μ_1, ϵ_1, μ_2, ϵ_2 ومفصولين بحد مستوي (المستوي $X=0$) (الشكل 1 – 7).



شكل رقم (7.1)

افرض ان موجة كهرومغناطيسية مستوية تستقطب بصورة مائلة على حد فاصل مستوي. سيكون هناك عادة موجة منعكسة (reflected wave) وموجة منتقلة (trans-mitted wave) وسوف نسأل الآن عن مقدار الطاقة المنعكس للموجة الساقطة ومقدار الطاقة المنتقلة.

يمكن التعبير عن مجالات الموجات الساقطة والمنعكسة والمنتقلة بالشكل الآتي :

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{0I} \exp\{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega_I t)\},\ \mathbf{H}_I = \frac{\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I}{\omega_I \mu_1} \tag{7.1}$$

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} \exp\{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t)\},\ \mathbf{H}_R = \frac{\mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_R}{\omega_R \mu_1} \tag{7.2}$$

and

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} \exp\{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t)\},\ \mathbf{H}_T = \frac{\mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T}{\omega_T \mu_2} \tag{7.3}$$

حيث ان الرموز السفلية الدليلية للموجات الساقطة والمنعكسة والمنتقلة هي T,R,I على التوالي، والكميات E_{0T}, E_{0R}, E_{0I} هما سعات عددية مستقلة عن الزمن التي قد تكون معقدة. ويمكن ايجاد العلاقة بالمجال الكلي للشروط الحدودية في المستوي X=O. يمكن ان تكون المركبات المماسية لـ E و H مستمرة عبر الحدود في جميع النقاط وكل الاوقات في حالة كون الاس (exponential) نفسها للمجالات الثلاثة وهذا ممكن اذا :

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T$$

اي ان التردد (frequency) لايتغير في الموجة المنعكسة والمنتقلة و :

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \tag{7.4}$$

وهذا يثبت ان جميع متجهات الانتشار (propagation vectors) متحدة المستوي (Coplanar) . اذا اخترنا r في مستوي الحدود (اي $\hat{e}_n . r = 0$) حيث ان $\hat{e}_n$ يمثل متجه وحدة عمودي على المستوي) وفي مستوي متجه الانتشار يتبع مايلي :

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T. \tag{7.5}$$

الآن متجهات الانتشار $\mathbf{k}_I$ $\mathbf{k}_R$ يقعان في نفس الوسط وكذلك لهما نفس القيمة.

$$\therefore \quad \theta_I = \theta_R \tag{7.6}$$

بما أن :

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T$$

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \frac{k_T}{k_I} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \qquad \left(\because \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}\right)$$

وللمواد غير المغناطيسية يمكن ان نفرض أن $\mu_2 = \mu_1$

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \text{ Snell's law} \tag{7.7}$$

قانون سنيل

حيث n_1 و n_2 يمثلان معاملي انكسار الوسطين 1 و 2 . وتعتبر المعادلتين (7-6) و (7-7) ابسط قوانين البصريات الهندسية التي نألفها. لنحاول الآن ايجاد العلاقة بين متجهات المجال المختلفة. طالما ان معادلات التباعدم = $\nabla \cdot \mathbf{D}$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ يمكن ايجادهما باستخدام عامل التباعد (divergence operator) في بقية معادلات ماكسويل التي تتضمن E و H نتيجة التحقق التلقائي للشروط الحدودية على D_n و B_n فيما اذا التقت شروط E_1 و H_1 ، والشروط هي :

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = \mathbf{E}_T \times \hat{\mathbf{e}}_n \tag{7.8}$$

$$(\mathbf{H}_I + \mathbf{H}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = \mathbf{H}_T \times \hat{\mathbf{e}}_n. \tag{7.9}$$

ويمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل الآتي :

$$(\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I + \mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = (\mathbf{k}_T \times E_T) \times \hat{\mathbf{e}}_n \quad (\because \quad \mu_1 = \mu_2) \qquad (7.10)$$

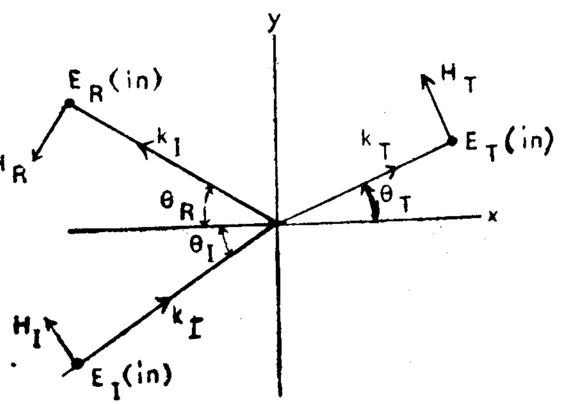
لنـــدرس الآن وضعين منفصلين (i) E مستقطبـــة عـموديـــاً على مستـوى السقـوط أي المستـوى المعرف بـ K و $\hat{e}_n$. (ii) E مستقطبـــة بشكل مـوازي لمستـوي السقـوط اعـــلاه بارتباط خطي ملائم.

(i) حالة كون E مستقطبة عمودياً على مستوي السقوط .

يوضح الشكل (2-7) متجهات المجال الخـاصـة بهـذه الوضعيـة، حيث تتجـه متجهـات المجال الكهربائي بعيداً عن الناظر. والشرط (Z8) و (10-7) يعطي :

$$E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \qquad (7.11)$$

$$k_I E_{0I} \cos\theta_I - k_I E_{0R} \cos\theta_R = k_T E_{0T} \cos\theta_T$$



شكل رقم (7.2)

$$\left(E_{0I} - E_{0R}\right) \cos\theta_I = \frac{k_T}{k_I} E_{0T} \cos\theta_T \qquad (7.12)$$

حيث E_{0I} ، E_{0R} و E_{0T} تمثل السعـات العـدديـة للـموجـات السـاقطـة والمنعكسـة والمنتقلة على التوالي، وبحل هاتين المعادلتين يكون لدينا :

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}}=\frac{\cos\theta_I-\frac{k_T}{k_I}\cos\theta_T}{\cos\theta_I+\frac{k_T}{k_I}\cos\theta_T}=\frac{\cos\theta_I-\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_T}{\cos\theta_I+\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_T}$$

$$=\frac{\cos\theta_I-\frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T}\cos\theta_T}{\cos\theta_I+\frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T}\cos\theta_T}$$ (حسب قانون سنيل) (7.7)

$$=\frac{\sin(\theta_T-\theta_I)}{\sin(\theta_T+\theta_I)} \tag{7.13}$$

and

$$\frac{E_{0T}}{E_{0I}}=\frac{2\cos\theta_I}{\cos\theta_I+\frac{k_T}{k_I}\cos\theta_T}=\frac{2\cos\theta_I\sin\theta_T}{\sin(\theta_I+\theta_T)} \tag{7.14}$$

وتعطينا المعادلة (7ـ13) النسبة بين سعة الموجة المنعكسة والساقطة. اذا كانت $n_2>n_1$، تكون النسبة سالبة مشيرة الى ان انعكاس الموجة احدث تغيراً في الطور مقداره π اي ان المتجه الكهربائي للموجة المنعكسة تتذبذب بمقدار 180° خارج طور الموجة الساقطة. النسبة $\frac{E_{0T}}{E_{0I}}$ موجبة دائماً.

يعرف معامل الانعكاس (reflection coefficient) R على انه «دفق الطاقة المنعكس من السطح البيني (interface) مقسوماً على الدفق الساقط عليه».

$$R_\perp=\frac{\hat{\mathbf{e}}_n\cdot\langle\mathbf{N}_R\rangle}{\hat{\mathbf{e}}_n\cdot\langle\mathbf{N}_I\rangle}=\frac{|\mathbf{E}_R\times\mathbf{H}_R^*|}{|\mathbf{E}_I\times\mathbf{H}_I^*|}=\frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} \tag{7.15}$$

حيث يشير الرمز السفلي الدليلي $\perp$ الى ان E مستقطبة عمودياً على مستوي السقوط، وتمثل N_I, N_R متجهات بوينتنك (Poynting vectors).

$$\therefore\qquad R_\perp=\frac{\sin^2(\theta_T-\theta_I)}{\sin^2(\theta_T+\theta_I)}. \tag{7.16}$$

ونفس الشيء فان معامل الانتقال (transmission coefficient) هو :

$$T_\perp=\frac{\hat{\mathbf{e}}_n\cdot\langle\mathbf{N}_T\rangle}{\hat{\mathbf{e}}_n\cdot\langle\mathbf{N}_I\rangle}=\frac{|E_{0T}|^2}{|E_{0I}|^2}\ \frac{n_2\cos\theta_T}{n_1\cos\theta_I}$$

$$=\frac{4\cos^2\theta_I\sin^2\theta_T}{\sin^2(\theta_I+\theta_T)}\ \frac{\sin\theta_I\cos\theta_T}{\sin\theta_T\cos\theta_I}$$

$$= \frac{4\cos\theta_I \cos\theta_T \sin\theta_I \sin\theta_T}{\sin^2(\theta_I - \theta_T)} = \frac{\sin 2\theta_I \sin 2\theta_T}{\sin^2(\theta_I + \theta_T)} \qquad (7.17)$$

$$R_\perp + T_\perp = 1. \qquad (7.18)$$

وللسقوط العمودي لدينا من (7ـ13) و (7ـ14) مايلي :

$$R_\perp = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2; \quad T_\perp = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2. \qquad (7.19)$$

(ii) حالة كون E في مستوى السقوط.

تعطينا الشروط الحدودية :

$$E_{0I}\cos\theta_I - E_{0R}\cos\theta_R = E_{0T}\cos\theta_T$$

i.e.

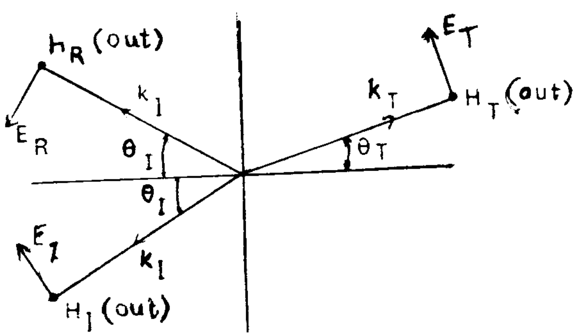
$$(E_{0I} - E_{0R})\cos\theta_I = E_{0T}\cos\theta_T \qquad (7.20)$$

and

$$k_I E_{0I} - k_I E_{0R} = k_T E_{0T}$$

i.e.

$$E_{0I} - E_{0R} - \frac{n_2}{n_1} E_{0T}. \qquad (7.21)$$



شكل رقم (7.3)

Solving

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{\cos\theta_I - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_T}{\cos\theta_I + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_T} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)} \qquad (7.22)$$

and

$$\frac{E_{0T}}{E_{0I}} = \frac{2\sin\theta_T\cos\theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T)\cos(\theta_I - \theta_T)}. \qquad (7.23)$$

وتسمى العلاقـات (7ـ13)،(7ـ4)،(7ـ15)،(7ـ22) بـاسم عـلاقـات فرينـل (Fresnel's relations).

تظهر المقارنة بين المعادلتين (7ـ13)، (7ـ22) ميزة مهمة بين حالتي استقطاب E.
اذا تركنا جانباً الحالة الاقل اهمية وهي عنـدمـا $n_2 = n_1$ $\Phi_2 = \Phi_1$، نجد من المعادلة (7ـ13) انـه عنـدمـا تقع قيمة زاويـة السقوط θ_I بين o و $\pi/2$. فـان $\frac{E_{0R}}{E_{0I}} \neq 0$
ولكن نجد في الحـالـة الثـانيـة أي عنـدمـا تستقطب E في مستوى السقوط، أن المعادلة (7ـ22) تعطينا :

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = 0 \qquad (7.24)$$

ومن ثم :

$$R_{\parallel} = 0 \ ,$$

عندما

$$\theta_I + \theta_T = \pi/2.$$

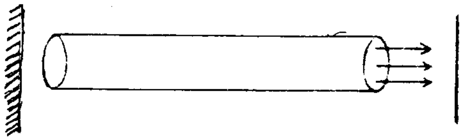
ومعنى هذا انـه اذا سقطت موجـة بزاويـة $\theta_I = \pi/2 - \theta_T$، فـانهـا ستعبر مستوي السطح البيني دون ان يحصل لها أي انعكاس، وتعرف هـذه الزاويـة بـاسم زاويـة بروستر (Brewster's angle) ويرمز لها θ_B ويمكن ايجاد قيمتها من قانون سنيل أي :

$$\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_T} = \frac{\sin\theta_B}{\sin(\pi/2 - \theta_B)} = \tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\therefore \qquad \theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (7.25)$$

اذا سقـط الضوء على سطـح بيني بـزاويـة بروستر فـانـه لايستقطب (أي يحتـوي على تراكب عدة مركبـات مع متجهـاتهـا الكهربـائيـة في اتجـاهـات عشوائيـة)، ومركبـات E المستقطبة عمودياً على مستوى السقوط سوف تنعكس. ومن ثم فان الموجـة المنعكسـة هي مستوية مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط. ولهذا السبب تسمى الزاويـة θ_B احيـانـاً باسم زاوية الاستقطاب (polarizing angle) وسنشرح الآن احـد الاستخـدامـات المهمـة لزاوية بروستر،في الليزر الغازي تستخدم عـادة المرايـا خـارج النوافـذ الزجـاجيـة وكما هو موضح في الشكل (7–4) في السقـوط العمـودي للضـوء ينتقـل حـوالي 90% من الضـوء الساقط اي هناك فقـدان في الشـدة مقـداره حوالي 8% في كل عبور ونظراً لوجود عـدد

كبير من العبور في الليزر اذن سيتبقى القليل على هذه المشكلة يتم ترتيب النوافذ حسب زاوية بروستر.



شكل رقم (7.4)

وبهذه الطريقة فان مركبة المجال الكهربائي المستقطبة بشكل موازي لمستوي السقوط ستنتقل بصورة كاملة ولاتعاني الامن فقدان ضئيل جداً غير مؤثر حتى بعد عدد كبير من العبورات لكن المركبة المستقطبة عمودياً على مستوي السقوط ينعكس جزء منها والجزء الآخر ينتقل في كل مرة تضرب الحزمة السطح وبعد عدد من العبوات تزال كلياً. وهكذا فان الحزمة الخارجة تكون خطية الاستقطاب بنسبة مائة في المائة (أو تكون خطية الاستقاطب كلية).

7-2 الانعكاس الداخلي الكلي (Total Internal Reflection) :

لندرس الآن حالة يسقط فيها اشعاع على سطح وسط معامل انكساره اقل من معامل انكسار الوسط الذي سقطت منه،اي $n_2 < n_1$ لدينا من قانون سنيل:

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I . \tag{7.26}$$

ماذا سيحدث لو ان θ_I تم تكبيرها تدريجياً وابتداءً من الصفر؟ من الواضح ان θ_T ستكبر ايضاً حتى تصل قيمتها الى $\pi/2$. ، وسنرمز لقيمة الزاوية θ_I عند هذه الحالة بالرمز θ_c من المعادلة (7-26) لدينا :

$$\sin \theta_C = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.27}$$

تسمى الزاوية θ_c بالزاوية الحرجة (critical angle) بما انه عندما $\theta_I = \theta_c$ تكون هناك موجة منعكسة فقط ولاتوجد موجة منتقلة.

ماذا سيحدث اذا زادت الزاوية θ_C اكثر؟ أي $\theta_I > \theta_C$ سنحاول ان نجد قيمة θ_T بدلالة θ_I ، θ_C .

$$\cos\theta_T = \sqrt{1-\sin^2\theta_T}$$

But $$\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I = \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_C} \quad \text{(from 7.26)}$$

$$\therefore \quad \cos\theta_T = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C}} \tag{7.28}$$

نجد ان قيمة θ_T تقل كلما زادت θ_I وتصبح عندما $\theta_I = \theta_C$ ، وعند قيم θ_I الاكبر من θ_C يصبح $\cos\theta_T$ رقماً خيالياً .

لنحسب الآن سعة المتجه الكهربائي المنعكس عندما $\theta_I = \theta_C$

$$\theta_I > \theta_C$$

$$\cos\theta_T = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C}} = iQ$$

$$Q = \sqrt{\frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C}-1} \tag{7-29}$$

في حالة كون E مستقطبة عمودياً على مستوي السقوط.

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{\cos\theta_I - \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_T}{\cos\theta_I + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_T} = \frac{\cos\theta_I - \frac{n_2}{n_1}iQ}{\cos\theta_I + \frac{n_2}{n_1}iQ}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{E_{0R}}{E_{0I}}\right|^2 = 1 \qquad \text{i.e.} \qquad |E_{0R}| = |E_{0I}|.$$

ونفس الشيء عندما تكون E مستقطبة بشكل موازي لمستوي السقوط.

$$\left|\frac{E_{0R}}{E_{0I}}\right|^2 = 1$$

$$|E_{0R}| = |E_{0I}|$$

وهكذا فان الموجة تنعكس انعكاساً تاماً ،وتعرف هذه الظاهرة باسم الانعكاس الداخلي الكلي (total internal reflection) .

يجب الاشـارة هنـا الى وجـود اختـلاف او تغير في الطـور في الانعكاس لـذلـك اذا ماالستقطبت الموجة الساقطة في مستوي يقع بين مستوي السقوط والمستوي العمودي عليه لاتكون المركبتان في طور واحد بعد الانعكاس والموجة ستستقطب استقطاباً نـاقصاً اي بشكل قطع ناقص (elliptically polarized) ،

نستنتج انه عندما تكون زاوية السقوط θ_I اكبر من (refractive wave) وكل الطاقـة تنعكس. ويمكن اثبات ذلك باحتساب متوسط معدل سريان الطاقة عبر الحدود.

معدل سريان الطاقة هو :

The rate of energy flow $= \langle N \rangle \cdot \hat{e}_n$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* \right) \cdot \hat{e}_n = \tfrac{1}{2} Re \left(\mathbf{E}_T \times \frac{\mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T^*}{\omega \mu} \right) . \hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \frac{1}{2\omega\mu} Re \left[\left(\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* \right) \mathbf{k}_T - (\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{k}_T) \, \mathbf{E}_I^* \right] . \hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \frac{1}{2\omega\mu} \; Re \left(\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* \right) \mathbf{k}_T \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \qquad (\because \quad \mathbf{E}_T \perp \mathbf{k}_T)$$

$$= \frac{1}{2\mu\omega} Re \, |E_{0T}|^2 \, \mathbf{k}_T \cos \theta_T = \frac{1}{2\omega\mu} \; Re \, iQ \, k_T \, |E_{0T}|^2. \qquad (7.30)$$

وبما ان هذه الصيغة خيالية تماماً فان مايحقق استنتاجنا هو $\langle N \rangle \cdot \hat{e}_n = 0$ عند هذه المرحلة اذا كانت $n_1 > n_2$ والموجة تسقط بزاوية اكبر من الزاويـة الحرجـة يجب ان لاتستنتج عند عدم وجود أي مجال في الجانب الآخر للحدود على الرغم من عـدم تدفق الطاقة (او سريان الطاقـة) عبر السطح الا انـه يوجـد مجـال في الجـانب الآخر من السطح كما سنثبت الآن في ادناه :

نأخذ معادلة الموجة المنكسرة.

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} \exp \{ i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t) \} \qquad (7.31)$$

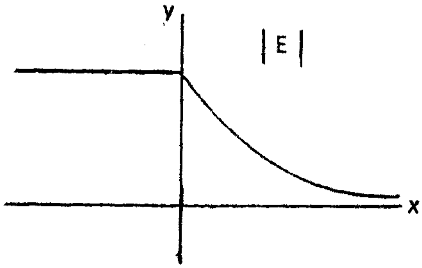
وتصبح هذه المعادلة حسب المحاور الاحداثية الموضحة في الشكل (1-7) بالصيغة الآتيـة

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} \exp \{ i(k_T x \cos \theta_T + k_T y \sin \theta_T - \omega t) \}$$
$$= \mathbf{E}_{0T} \exp \{ (-k_T x Q \exp \{ i(k_T y \sin \theta_T - \omega t) \}. \qquad (7.32)$$

هذا يثبت وجود المجال في الجانب البعيد من السطح في الوسط 2. الا انه يتوهن فجأة كما هو موضح في الشكل (5–7).

الى اي مدى تنفذ الموجة في الوسط؟ مسافة النفوذ او العمق السطحي يحسب من المعادلة الآتية :

$$x = \frac{1}{k_T Q} = \frac{1}{k_T}\left(\frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C} - 1\right)^{-1/2} \qquad (/.33)$$



شكل رقم (7.5)

سنأخذ على سبيل المثال مرور موجة من الزجاج الى الهواء. معامل انكسار الزجاج هو 1.5 ، لذلك فان الزاوية الحرجة للزجاج هي $\theta_C = \sin^{-1} 2/3$ اي تساوي تقريباً 42^o. فاذا سقط الضوء داخل الزجاج بزاوية اكبر من 42 (لنقل 45) فسوف يكون انعكاس داخلي كلي،و

$$x = \frac{1}{k_T}\left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} - 1\right)^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\pi} 2\sqrt{2} = 0.45\lambda.$$

وهكذا فان المجال يزول تقريباً بعد مسافة تساوي بعض الاطوال الموجية (او عدد من الطول الموجي). ماهو التفسير المجهري لهذا التوهن. ان الشحنات الجزيئية تتذبذب نتيجة مرور الموجة الساقطة مولدة مجالاً اشعاعياً (radiation field) ـ سنتعرض للمجال الاشعاعي في الفصل التاسع ـ الموجة المتقدمة (forward wave) في هذا المجال تتداخل تداخلاً هداماً مع الموجة الاصلية. ولاتظهر سوى انتقالاً طفيفاً.

وجدنا فيما سبق انه لايوجد انتقال للطاقة عبر الحدود. كيف تحسب اذن وجود المجال المضمحل في الجانب البعيد من الحدود؟ في الحقيقة ان الطاقة تعبر الى الوسط الثاني لان مركبة المجال فيه لها قيمة محددة،الا انه في اثناء الجزء الآخر من الدورة يصبح مجرى السريان عكسياً وتعود الطاقة الى الوسط الاول.

7-3 الانعكاس من سطح معدني (Reflection from the surface of a metal):

سنبين في هذا الجزء كيف ان مناقشات البند السابق يمكن توسيعها لتشمل السطح الحدودي لوسط موصل. بما ان حالة السقوط المائل هي الاكثر شمولاً ، لذا سنتحدد في الحالة البسيطة فقط وهي السقوط العمودي.

لدينا الموجة الساقطة والمنعكسة والمنتقلة كما يلي :

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{0I} \exp\{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r} - \omega t)\};\ \mathbf{H}_I = \frac{\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I}{\omega\mu_1} \tag{7.34}$$

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} \exp\{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r} - \omega t)\};\ \mathbf{H}_R = \frac{\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_R}{\omega\mu_1} \tag{7.35}$$

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} \exp\{i(\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r} - \omega t)\};\ \mathbf{H}_T = \frac{\mathbf{k}_T \times E_T}{\omega\mu_2} \tag{7.36}$$

بما ان الوسط الثاني وسط موصل لذا يحسب متجه الانتشار (Propagation vector) K_T من المعادلة الآتية :

$$k_T^2 = \epsilon_2\mu_2\omega^2\left[1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right] \quad \text{by (6.50)}$$

تتطلب الشروط الحدودية ان تكون :

$$E_{0I} - E_{0R} = E_{0T} \tag{7.37}$$

$$k_I(E_{0I} + E_{0R}) = k_T E_{0T} \tag{7.38}$$

بما أن K_T كمية معقدة لايمكن لـ E_{0R} و E_{0T} كليهما ان يكونا حقيقيين لذا يمكن ان نتوقع ازاحة في الطور اما صفر أو π في الموجة المنعكسة والمنتقلة .

بحل المعادلة (7-37)، (7-38) نحصل على :

$$E_{0R} = \frac{k_T - k_I}{k_T + k_I} E_{0I} \tag{7.39}$$

$$E_{0T} = \frac{2k_I}{k_T + k_I} E_{0I}.$$

وبالتعويض عن $k_I = \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}$ وعن K_T من المعادلة (7-50) نحصل على :

$$E_{0R} = \frac{\sqrt{\epsilon_2\mu_2\omega^2}\left(1+\frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} - \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2\omega^2}\left(1+\frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} + \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}\,E_{0I} \qquad (7.40)$$

and

$$E_{0T} = \frac{2\,\omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2\omega^2}\left(1+\frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}\,E_{0I}. \qquad (7.41)$$

سنبحث الآن حالة الموصل الكامل حيث $\sigma = \infty$. اذن :

$$E_{0R} = E_{0I} \quad \text{and} \quad E_{0T} \doteq 0$$

اذن فالانعكاس تام.

اذا لم يكن الموصل كاملاً بل موصل جيد جداً اي $\frac{\sigma}{\epsilon_2\omega} \gg 1$. التقريب الذي تبنيناه في الفصل السابق يعطينا:

$$k_T = \alpha + i\,\beta = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_2}{2}} = \frac{1+i}{\delta}$$

حيث استفدنا من تعريف العمق السطحي δ المعطى في المعادلة (6-57)

وبتعويض هذا في المعادلة (7-39) نحصل على :

$$E_{0R} = \frac{\frac{1+i}{\delta} - \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\frac{1+i}{\delta} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}\,E_{0I}$$

$$= \frac{\left\{\frac{1}{\delta} - \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\right\} + \frac{i}{\delta}}{\left\{\frac{1}{\delta} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\right\} + \frac{i}{\delta}}\,E_{0I}$$

لذلك يحسب معامل الانعكاس R من المعادلة الآتية :

$$R = \frac{|E_{0R}|^2}{|E_{0I}|^2} = \frac{\{1 - \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta\}^2 + 1}{\{1 + \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta\}^2 + 1}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_2\omega} \gg 1,\ \omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\,\delta << 1$$

and, hence.

$$R \simeq 1 - 2\,\omega\,(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta \tag{7.42}$$

$$= 1 - 2\sqrt{\frac{2\,\omega\,\epsilon_1\mu_1}{\sigma\mu_2}}. \tag{7.43}$$

اذا فرضنا ان الانفاذيات المغناطيسية (magnetic permeabilities) تساوي :

$$R = 1 - 2\sqrt{\frac{2\,\omega\epsilon_1}{\sigma}}. \tag{7.44}$$

يمكن ايجاد مقدار الطاقة المنتقلة للوسط الموصل باحتساب معامل الانتقال T الذي يعطي النسب بين الطاقة المنتقلة والطاقة الساقطة .

$$T = 1 - R = 2\sqrt{\frac{2\,\omega\epsilon_1}{\sigma}}. \tag{7.45}$$

لاجل الحصول على فكرة واضحة عن نسبة مقدار الطاقة المتنقلة في موصل جيد سنأخذ على سبيل المثال النحاس، ولدينا المعلومات الآتية :

(للنحاس) $= 6 \times 10^7\ (\text{Ohm m})^{-1},\ \nu = 10^{10}\ \text{sec}^{-1}$

$$T = 2\sqrt{\frac{2 \times 2\pi \times 10^{10} \times 8.85 \times 10^{-12}}{6 \times 10^7}} \simeq 3 \times 10^{-4}$$

وهذا المقدار صغير جداً اذا ماأريد قياسه مباشرة.

الطاقة الكلية في الوسط ⊥ هي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$$

Now $\mathbf{E}_I = \hat{\mathbf{e}}_n E_{0I}\ e^{i(k_I x - \omega t)}$

and $\mathbf{E}_R = -\hat{\mathbf{e}}_n E_{0I}\ e^{i(k_I x - \omega t)}$.

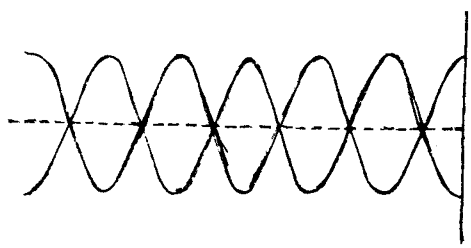
لاحظ ان السعة اخذت متساوية لكلا الموجتين وهذا يتبع الحقيقة التي تبين ان معامل انعكاس السطح المعدنى هو وحدة واحدة تقريباً.

$$E = \hat{e}_n E_{0I} e^{-i\omega T} \left\{ e^{ik_I x} - e^{-ik_I x} \right\}$$

او اذا اخذنا الاجزاء الحقيقية منه فان :

$$\mathbf{E} = 2\, \hat{\mathbf{e}}_n\, E_{0I} \sin \omega t \sin k_I x \qquad (7\text{-}46)$$

لذلك فان المجال في الوسط ⊥ يمكن تمثيله بالموجة المستقرة (أو الواقفة) (Standing wave)وسيتصرف المجال كما هو موضح في الشكل (7–6).



شكل رقم (7.6)

ـ تمارين الفصل السابع ـ

7-1 برهن على ان معامل انعكاس الضوء المار عبر الزجاج الى الهواء وبسقوط عمودي هو نفسه الضوء المار الى الزجاج من الهواء. وبرهن كذلك على ان تغير الطور في الحالتين مختلف.

7-2 موجة كهرومغناطيسية مستوية اسقطت عمودياً على الحد المستوي الفاصل بين عازلين معامل انكسارهما n_1 و n_2 اذا كانت العلاقة بين معاملي الانكسار هي $(n_2/n_1) = 3 + 2\sqrt{2}$، برهن على ان دفق الطاقة المنعكسة مساوي لدفق الطاقة المنتقلة.

7-3 جد الزاوية الحرجة وزاوية بروستر لموجة كهرومغناطيسية تمر عبر العوازل الآتية :

السماحية النسبية	المادة
5	كوارتز (Quartz)
9	زجاج (Glass)
81	ماء (Water)

7-4 سعة المجال الكهربائي في موجة مستوية احادية اللون في الفضاء الحر هي $10\ Vm^{-1}$. فاذا اسقطت عمودياً على سطح مستوٍ لوسط معامل انكساره 2 . جد سعة المجال الكهربائي داخل الوسط.

7-5 لوح عازل محدد بوجهين متوازيين.برهن على انه اذا اسقطت موجة كهرومغناطيسية على الوجه الاول بزاوية بروستر فان الموجة المنكسرة ستسقط على الوجه الثاني بنفس الزاوية ايضاً.

7-6 موجة كهرومغناطيسية مستوية في الفضاء الحر سقطت على الحد المستوي لعازل سميك مكونة زاوية مع المستقيم العمودي على الحد مقدارها 65.6^{o}. واستقطبت الموجة في مستوي السقوط. فاذا لم تكن هناك موجة منعكسة) فما هو مقدار السماحية النسبية للعازل؟

الفصل الثامن

دلائل الموجة (Wave Guides)

الفصل الثامن

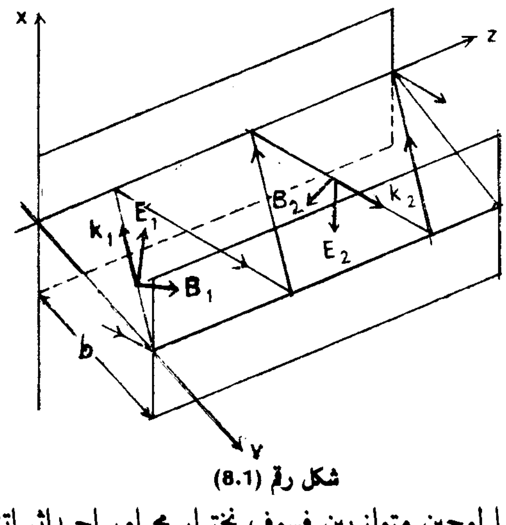
دلائل الموجة (Wave Guides)

في الفصل السابق بينا تأثير الحدود على انتشار موجة كهرومغناطيسية وسندرس الآن سلوك مثل هذه الموجات على ضوء حدود مختارة بطريقة تقود تلك الموجة بمحاذاة اتجاه معين. مثل هذه الانظمة تدعى دلائل الموجة. ان افضل طريقة لنقل الطاقة لمسافات قصيرة هي تلك التي تستخدم دلائل الموجة (wave guides) تطورت دلائل الموجات وشاع استخدامها في باديء الامر في الاتصالات الالكترونية العملية اما الآن فتعتبر ذات اهمية كبيرة في انظمة الاتصالات البصرية - الالكترونيات البصرية - (Optoelectronics).

8-1 انتشار الموجات بين المستويات الموصلة

(Propagation of Waves Between Conducting Planes) : -

سنناقش اولاً مسألة انتشار الموجات بين مستويين موصلين متوازيين والتي ستقودنا لحل مسألة دليل الموجة.



شكل رقم (8.1)

الشكل (8-1) يوضح لنا لوحين متوازيين فسوف نختار محاور احداثياتنا كما هو موضح في الشكل. اللوح الاول يقع في المستوي (Y = 0) ويقع اللوح الثاني في المستوي (Y = b) سوف نعتبر اللوحين مثاليين من حيث التوصيلية وممتدات الى اللانهاية وسنعتبر ايضاً ان الفضاء المحصور بين اللوحين هو فراغ أي : $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 0, \rho = 0.$

الآن اذا دخلت موجة في المنطقة بين اللوحين ، فان الجدران سوف تعكس الموجة ذهاباً وایاباً ونتيجة لذلك ستنتشر الموجة باتجاه موازي للوحين ، المجالات يجب ان تخضع لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر بين اللوحين ويجب ان تحقق شروطاً حدودية معينة في كل النقاط على الجدار . الشروط الحدودية التي يجب ان تتحقق هي :

(i) المركبة الماسية للمجال E يجب ان تكون صفراً في أي نقطة على الجدار.

(ii) المركبة العمودية للمجال المغناطيسي يجب أن تكون صفراً في أي نقطة على الجدار.

لاحظ أن المركبة العمودية لـ E يمكن أن لاتساوي صفراً مادام هناك احتمالية وجود شحنات على الطول وكذلك المركبة الماسية للمجال المغناطيسي يمكن ان لاتساوي صفراً ايضاً لوجود تيارات سطحية في الجدران الموصلة. ان الموجات الكهرومغناطيسية مستعرضة، حيث ان متجهات مجاليها الكهربائي E والمغناطيسي H مستعرضان لاتجاه انتشارها K فأنها تدعى بالموجات الكهرومغناطيسية المستعرضة ويرمز لها بالحروف TEM .

افرض أن موجة مستوية مستقطبة خطياً تتحرك بين اللوحين في اتجاه موصوف بمتجه الانتشار K وفي مستوٍ عمودي على المحور X ويصنع زاوية θ مع المحور y. اذا كان E باتجاه X فان B سيكون بالمستوي (Oyz) ، ($\because$ B⊥E) أي بعبارة اخرى $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_y B_y +$ $\hat{\mathbf{e}}_z B_z$، وله مركبة باتجاه الموجة، أي باتجاه z، لكن E لايملك مثل هذه المركبه. مثل هذه الموجة تدعى بالموجة الكهربائية المستعرضة (transverse electric wave) ويرمز لها موجة TE. واذا اخترنا B بحيث يكون بمحاذاة المحور X، فان E سيكون له مركبة طولية باتجاه Z مثل هذه الموجة تعرف بالموجة المغناطيسية المستعرضة (transverse magnetic wave) ، (موجة TM) . وانتشار الموجات ضمن منطقة موصلة ومغلقة يكون اما من انماط TE أو TM.

المجال الكهربائي في الموجة المستوية هو :

$$\mathbf{E}_I = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{8.1}$$

حيث

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = ky\cos\theta + kz\sin\theta \tag{8.2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E}_I = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I}\, e^{i(ky\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t)}. \tag{8.3}$$

والموجة ستنعكس على الجدار. للموجة المنعكسة يكون لدينا :

$$\mathbf{E}_R = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0R}\, e^{i(-ky\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t)} \tag{8.4}$$

المجال الكهربائي الكلي بين المستويين الموصلين هو :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I}\, e^{i(ky\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t)}$$
$$+ \hat{\mathbf{e}}_x E_{0R}\, e^{i(-ky\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t)}$$
$$= \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(kz\sin\theta - \omega t)} \left(E_{0I}\, e^{iky\cos\theta} + E_{0R}\, e^{-iky\cos\theta} \right). \tag{8.5}$$

في الحدود (أي عند $y = 0$, $E_t = 0$). هذا الشرط سيتحقق اذا كان $E_{0I} + E_{0R} = 0,$
أي $E_{0I} = -E_{0R}$

$$\therefore \quad \mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I}\, e^{i(kz\sin\theta - \omega t)} \left(e^{iky\cos\theta} - e^{-iky\cos\theta} \right) \tag{8.6}$$

$$= 2i\, \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin(ky\cos\theta)\, e^{i(kz\sin\theta - \omega t)}. \tag{8.7}$$

المجال سيتلاشى عندما $y=b$ ، وهذا ممكن اذا كان :

$$kb\cos\theta = n\pi \tag{8.8}$$

حيث n تأخذ اعداد صحيحة فقط. سيكون هناك عدة مجالات تبعاً لذلك اعتماداً على القيم المختلفة لـ (n). الموجات المختلفة المناظرة لقيم (n) المختلفة تدعى الانماط (modes) ، والآن بما ان $\cos\theta \leqslant 1$

$$\frac{n\pi}{kb} \leqslant 1. \tag{8.9}$$

هذا الشرط يحدد اعلى قيمة لـ (n) لتردد اشعاعي معين. اذا كان $\frac{\pi}{kb}$ أي $\frac{\lambda}{2b} > 1,$ فلن يكون هناك اي موجه من نوع(8–7)في المنطقة المأخوذة بنظر الاعتبار لذلك سيكون هناك طول موجة القطع (cut–off wave length) اذا تجاوزته الموجة فلن يكون باستطاعتها الانتشار.

كل شكل له طول موجة القطع λ_n يعطى بصيغة :

$$\lambda_n = \frac{2b}{n} \tag{8.10}$$

لذلك يعتمد طول موجة القطع على رقم الشكل وعلى المسافة التي تفصل بين اللوحين.

من (8-8) نحصل على :

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{k^2b^2}} \qquad (8.11)$$

بتعويض (8-8) , (11-8) بالمعادلة (7-8) نحصل على :

$$\mathbf{E} = 2i\hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{i\left\{kz\sqrt{1-\frac{n^2\pi^2}{k^2b^2}} - \omega t\right\}}$$

$$= 2i\hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z - \omega t)} \qquad (8.12)$$

حيث :

$$k_g = \left(k^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (8.13)$$

رقم الموجة Kg يعرف برقم موجة الدليل (guide wave number) ويمكن التعبير عنه بصيغة $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ حيث λ_g هو طول موجة الدليل (guide wave length)، كما هو واضح من المعادلة (112-8)، E لاتملك مركبة باتجاه Z. لذلك تكون الموجات كهربائية مستعرضة وتمثل بـ TE_n حيث n هو رقم النمط (mode number) يمكن ايجاد المجال المغناطيسي في موجات TE_n باستخدام العلاقة :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

سرعة الطور للموجة (112-8) هي :

$$v_p = \frac{\omega}{k_g} = c\frac{k}{k_g}$$

$$= c\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{k^2b^2}\right)^{-1/2} \qquad (8.14)$$

المعادلة (12-8) توضح ان سرعة الطور للموجة تتجاوز سرعة الضوء في الفضاء الحر. (لاحظ ان كون سرعة الطور اكبر من الضوء محتملة بسبب كونها تمثل سرعة عقد (nodes) فقط وليس طاقة). سرعة المجموعة يمكن اعطائها بالصيغة :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g}$$

طاقة مجموعة من الموجات تتحرك مع هذه السرعة. من العلاقة (13–8) نحصل على :

$$k_g^2 = k^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

بالتفاضل نسبة الى K_g نحصل على :

$$k_g = k\frac{dk}{dk_g} = \frac{k}{c}\,\frac{d\omega}{dk_g}$$

$$\therefore \quad v_g = c\frac{k_g}{k} \qquad (8.15)$$

والتي هي اقل من سرعة الضوء.

ان حاصل ضرب v_p و v_g هو :

$$v_p v_g = c^2. \qquad (8.16)$$

وبنفس الطريقة يمكن ان نحصل على مجموعة حلول اخرى يكون فيها المجال المغناطيسي مؤثراً بمحاذاة المحور x وليست له اي مركبة باتجاه الموجة. هذه هي الموجات المغناطيسية المستعرضة او موجات TM_n. انماط TM_n المختلفة وتمتلك اطوال موجات القطع بنفس مقدار اطوال موجات القطع لحالات TE_n المعطى بالمعادلة (10–8).

2–8 الموجات في دلائل ذات مقاطع عرضية اعتباطية

(Waves in Guides of Arbitrary Cross - section) : -

سنأخذ بنظر الاعتبار هنا انتشار الموجات داخل موصل مجوف له اي مقطع عرضي منتظم،ونفرض ان الجدران هي موصلا مثالية. سنستخرج الحل العام لمعادلة الموجة لكل من المجالين الكهربائي والمغناطيسي ضمن الدليل، وبحيث يحقق مطاليب معادلات ماكسويل وشروط حدودية مناسبة ايضاً.

معادلة الموجة للمجال الكهربائي هي :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0 \qquad (8.17)$$

تكون صيغة الحل المطلوب للموجة المستوية هي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)\, e^{i(k_g z - \omega t)}. \qquad (8.18)$$

كا يمكن كتابة معادلة مماثلة للمجال المغناطيسي :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_g^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_0(x, y) = 0 \tag{8.19}$$

ويعرف عامل لابلاسيان المستعرض ∇_T (transverse Laplacian operator) على انه :

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{8.20}$$

ومن هنا نستنتج ان المعادلة (8–19) يمكن كتابتها كالآتي :

$$(\nabla_T^2 + k_c^2)\, E_0(x, y) = 0 \tag{8.21}$$

حيث :

$$k_c^2 = -k_g^2 + \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{8.22}$$

من المناسب التعبير عن المجالين E و B بواسطة مركبات موازية (E_z, B_z) ومستعرضة (E_T, B_T) والمحور الموصل أي للمحور Z أي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_z + \mathbf{B}_T$$

حيث :

$$\mathbf{E}_z = \hat{\mathbf{e}}_z\, E_{0z}(x, y)\, e^{i(k_g z - \omega t)} \tag{8.23}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_{0T}\, e^{i(k_g z - \omega t)} \\ &= \{\hat{\mathbf{e}}_x\, E_{0x}(x, y) + \hat{\mathbf{e}}_y\, E_{0y}(x, y)\}\, e^{i(k_g z - \omega t)}\end{aligned} \tag{8.24}$$

ومعادلات مماثلة لكل من B_z و B_T.

المجالات يجب ان تحقق معادلات ماكسويل

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i.e. $\dfrac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{0y}}{\partial y} + ik_g E_{0z} = 0$ (8.25)

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ i.e. $\dfrac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \dfrac{\partial B_{0y}}{\partial y} + ik_g B_{0z} = 0$ (8.26)

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B}$

i.e.

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - ik_g E_{0y} = i\omega B_{0x} \tag{8.27}$$

$$ik_g E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = i\omega B_{0y} \tag{8.28}$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = i\omega B_{0z} \tag{8.29}$$

(iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\dfrac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$

i.e.

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - ik_g B_{0y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0x} \tag{8.30}$$

$$ik_g B_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0y} \tag{8.31}$$

$$\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0z}. \tag{8.32}$$

بحل المعادلتين (8–28) و (8–30) لـ E_{0x} نحصل على :

$$E_{0x} = \frac{i}{k_c^2}\left(k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right) \tag{8.33}$$

وبنفس الطريقة

$$E_{0y} = \frac{i}{k_c^2}\left(k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) \tag{8.34}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{E}_{0T} &= \hat{\mathbf{e}}_x E_{0x} + \hat{\mathbf{e}}_y E_{0y} \\ &= \frac{i}{k_c^2} k_g \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right) + \frac{i\omega}{k_c^2}\left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) \\ &= \frac{i}{k_c^2}\left[k_g \nabla_T E_{0z} - \omega \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_T B_{0z}\right] \end{aligned} \tag{8.35}$$

حيث

$$\nabla_T = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

نفس الهيكل من المعادلات يمكن الحصول عليه لكل من B_{0x} و B_{0y} وتبين هذه المعادلات كيف ان كل المركبات المستعرضة يمكن التعبير عنها او وضعها بصورة كاملة بواسطة استخدام المركبات الطويلة.

الآن لنفحص قابلية موجات TEM على الانتشار داخل موصل مجوف.

لموجات TEM يكون $E_{oz} = B_{oz} = 0$ ، لذلك ومن المعادلتين (8-25) و (8-26) نحصل على :

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} = 0 \qquad (8.36)$$

ومن المعادلتين (8-29) و (8-32).

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = 0; \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0}x}{\partial y} = 0 \qquad (8\cdot 37)$$

بأخذ المشتقات الجزئية لـ (8-36) و (8-37) بالنسبة لـ (x) و (y) على التوالي وجمعها بصورة مناسبة نصل الى النتيجة الآتية :

$$\nabla_T{}^2\, E_{0x} = 0 \;\; ; \;\; \nabla_T{}^2\, B_{0x} = 0. \qquad (8.38)$$

بما ان مركبات E تحقق معادلة لابلاس ، نتيجة كون سطح الدليل هو سطحاً متساوي الجهد، ومن هنا يتضح ان E داخل الموصل تساوي صفراً. لذلك لايمكن وجود نمط TEM ضمن دليل مجوف جدرانه ذات توصيلية مثالية. وهذه النتيجة صحيحة لسطح متصل بمفرده. لغرض وجود نمط TEM، فمن الضروري يوفر سطحين غير متصلين او اكثر على سبيل المثال الكيبل ذي الموصلين متحدي المحور ان نمط TEM هو النمط السائد.

لقد رأينا من المعادلتين (2.21) و (8.38) انه للموجات TEM ، $K_c=0$ ، أي ان $K_g=K$. وهذا يعني ان رقم الموجة هو حقيقي لكل الترددات ، بعبارة اخرى ، ليس هناك تردد قطع (Cut off frequency) لموجات TEM .

المجالين E و B يجب أن يحققا الشروط الحدودية .

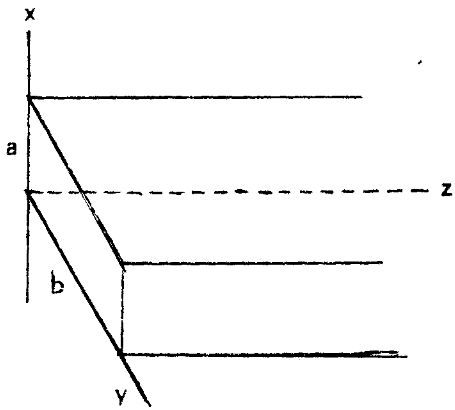
$$E_{\text{tangential}} = \hat{\mathbf{e}}_n \times \mathbf{E} = 0; \; \mathbf{B}_{\text{normal}} = \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (8.39)$$

هذه الشروط الحدودية مع معادلات الموجة لمتجهات المجالين E و B تقودنا لمسائل eigen - value . أي انه لتردد معين ω, ستكون هناك قيم معينة لـ K موافقة للشروط الحدودية ومعادلة الموجة.

8-3 دلائل الموجة ذات المقطع العرضي المتعامد

- : (Wave Guides of Rectangular crosss-section)

كمثال للنظرية التي تناولناها في الجزء السابق،سنأخذ دليلاً ذا مقطع عرضي متعامد مستعمل لغرض انتشار طاقة كهرومغناطيسية ذات ترددات واطئة (microwave frequencies) نفرض ان ابعاد المقطع العرضي هي (a) و (b) كما هو موضح في الشكل (8-2) .



شكل رقم (8.2)

سنأخذ بنظر الاعتبار موجات TE،ان لمثل هذه الموجات $E_{0z} = 0$ لذلك يحدد المجال بواسطة حل المعادلة :

$$(\nabla_T^2 + k_c^2)\, B_{0z} = 0 \qquad (8.40)$$

من (8-35) وجدنا أن B_{0x} والمعادلة (8-40) يجب ان تحقق الشرط :

$$\left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right|_{x=0,\, a} = 0 \text{ and } \left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right|_{y=0,\, b} = 0 \qquad (8.41)$$

وذلك بجعل $E_{tangential} = 0$

من السهل التأكد من ان الحل :

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (8.42)$$

حيث m و n اعداد صحيحة ، يحقق كل من (8-40) و (8-41) اذا كان :

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad (8.43)$$

اي ان :

$$\omega_{mn} = \pi c \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (8.44)$$

حيث ω_{mn} هي تردد القطع المناظر لارقام النمط m و n النمط المناظر سمي النمط TE_{mn}. اذا كانت (m=0) , (n=0)، فان الشكل مناظر لشكل TEM. ومن هنا نستنتج انه لاوجود لنمط TE_{oo}. اذا كان $a < b$، فان اوطأ تردد قطع يمكن الحصول عليه بوضع m=0 و n = 1 ،

$$\omega_{01} = \frac{\pi c}{b}.$$

هذا هو النمط الاساسي او السائد (principal dominant mode) ،

على العموم ، فان موجات TE_{mn} التي تردداتها اكبر من تردد القطع $(\omega > \omega_{mn})$ تنتشر بدون وهن (اضعاف) اذا اردنا النمط السائد فقط هو الذي ينتشر فان علينا اختيار ابعاد الدليل بدقة كبيرة.

مركبات المجال للشكل السائد TE_{01} هي :

$$E_{0x} = \frac{i\omega}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\frac{\pi}{b}$$

$$= -\frac{i\omega b}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad \text{(انظر 8-43)}$$

$$E_{0y} = 0, \qquad E_{0z} = 0$$

$$B_{0x} = 0, \qquad B_{0y} = \frac{ik_g}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} = -\frac{ik_g b}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (8.45)$$

هذه المجالات تناظر الموجات المنتشرة بالاتجاه Z،الذي هو اتجاه متجه بوينتنك-(Poynting vector).

الطاقة التي تسري خلال دليل الموجة تعطي كما يلي :

$$\langle \mathbf{N} \rangle_{01} = \frac{1}{2}\,\mathbf{Real}\ (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

$$= \frac{1}{2\mu} R_e\,(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)$$

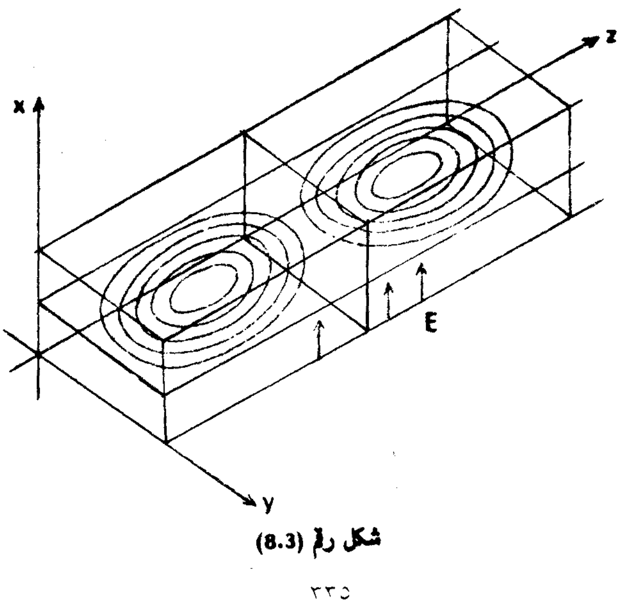
$$= \frac{1}{2\mu} R_e \left(-\,\hat{\mathbf{e}}_y\, E_{0x}\, B^*_{0z} + \hat{\mathbf{e}}_z\, E_{0x}\, B^*_{0y} \right).$$

من المعادلة (45–8) وجدنا أن $B_{0x}\overset{*}{B}_{0z}$ هو كمية خيالية بحتة.

$$\blacktriangle \quad \langle \mathbf{N} \rangle_{01} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{2\mu} \frac{\omega b^2}{\pi^2}\, B_0{}^2\, k_g \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right). \qquad (8.46)$$

القدرة الكلية يمكن ايجادها بأخذ تكامل هذه الصيغة من (y=0) الى (y=b).

المجال المغناطيسي الموصوف بهذه المعادلات موضح في الشكل (3–8) ، خطوط المجال رسمت في المستوى الموازي للمستوي (y–z) عند الزمن t=0. بما ان المجال لايعتمد على احداثيات x فان شكل نموذج المجال هو نفسه في اي مستوٍ موازٍ للمستوي (y–z).



شكل رقم (8.3)

مثال (1-8) : ـ اوجد ثلاثة انماط ذات طول موجي مقداره (3 cm) لموجات رادار التي يمكن انتشارها في دليل موجة ذي مقطع عرضي متعامد (b=2 cm , a=1 cm). اوجد ايضاً سرعة المجموعة للموجات.

تردد القطع هو :
$$\omega_{mn} = \pi c \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2}, \quad \omega_{mn} = 2\pi \nu_{mn}.$$

تردد الاشعاع المعطي هو 10^{10}Hz . ترددات القطع للانماط المختلفة هي :

$$\nu_{01} = \frac{c}{2} \quad \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = 7.5 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$\nu_{10} = \frac{c}{2}\ \frac{1}{10^{-2}} = 1.5 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\nu_{11} = 1.68 \times 10^{10} \text{Hz}.$$

اوطأ تردد قطع لنمط TM ، اي نمط TM_{11} هو :

$$\nu_{11} = 1.68 \times 10^{10} \text{ Hz}.$$

بما ان نمط TE_{01} لها تردد اوطأ من تردد الاشعاع. فانه النمط الوحيد الذي سيكون قابلاً للانتشار.

سرعة الطور للموجة هي :

$$\nu_p = \frac{\omega}{k_g}$$

$$k_g = \sqrt{k_c^2 - \omega^2/c^2} = 1.4 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{by } 8.22)$$

$$\nu_p = 4.5 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$\nu_p \nu_g = c^2 \qquad \therefore \quad \nu_g = 2 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

8-4 التجاويف الرنانة (Resonant Cavities) : -

الغرض من دلائل الموجة هو نقل الطاقة الكهرومغناطيسية من نقطة الى نقطة اخرى بصورة كفوءة. ومن ناحية اخرى فان الرنان (resonator) جهاز يقوم بخزن الطاقة ويكافيء عنصر دائرة رنينية (resonant circuit) في عمله. سنتناول في هذا الجزء من هذا الفصل ابسط حالات التجاويف الرنانة وهو التجويف المتعامد (rectangular cavity) والذي يكون تردده قابلاً للحساب بسهولة.

تصور صندوقاً مغلقاً يتكون عن طريق اوجه نهايته على دليل موجة مستطيل او متعامد الشكل. سنفرض ان هذه الاوجه مستوية وعمودية بسبب الانعكاس الذي يحصل في اوجه النهاية،فان الموجات داخل التجويف هي موجات مستقرة (واقفة) وليست متقدمة. ويمكن بسهولة التحقق من ان مركبات المجال الكهربائي هي :

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t} \\
E_y &= E_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-\omega t} \\
E_z &= E_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i\omega t}.
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

من اجل تحقيق الشروط الحدودية ، فانه من الضروري ان تأخذ (k_1 , K_2 , K_3) القيم الآتية :

$$
k_1 = \frac{l\pi}{a},\ k_2 = \frac{m\pi}{b},\ k_3 = \frac{n\pi}{c} \tag{8.48}
$$

حيث (a,b,c) تمثل ابعاد الصندوق و (l,m,n) هي اعداد صحيحة.

بتعويض اي من المركبات بمعادلة موجة مناسبة فان المجالات المعطاة بـ (8–47) تكون مقبولة ، اذا كان رقم موجة الفضاء الحر يحقق الشرط :

$$
k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right). \tag{8.49}
$$

لذلك هناك عدد غير منتهي من الترددات الرنينية،ومن هنا نلاحظ وجود اعداد غير منتهية لانماط الفجوة مناظرة لقيم (ℓm,n) المختلفة.

يمكن ايجاد مركبات المجال المغناطيسي من علاقة ماكسويل

$$
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
$$

اذا كان (n=1 , m=0 , l=0) فان المجال الكهربائي سوف يكون مستعرضاً لاتجاه الانتشار كما نلاحظ ذلك من خلال (8–47) , (8–48). هذا النمط عني كنمط TE_{011} ،بالاضافة لشكل TE_{lmn} فان هناك انماط اخرى ممكنة في الفجوة. هناك انماط TM_{lmn} التي يكون فيها المجال المغناطيسي مستعرضاً لاتجاه الانتشار لنفس الفجوة فان موجات TE_{lmn} وموجات TM_{lmn} تحدث بنفس التردد،ومن هنا فانه عند تردد رنيني معين تكون الموجة المستقرة في الفجوة هي مجموع الموجتين الرنينيتين ، نمط TE ونمط TM.

عندما نتعامل الآن مع نظرية اشعاع الجسم الاسود (black - body radiation) لن نجد اي صعوبة في فهم كيفية ظهور العامل 2 في كثافة دالة الحالات.

لقد رأينا سابقاً ان كل هيئة مجال محددة تمتلك الفجوات بعض الترددات الرنينية المتقطعة (discrete resonant frequencies) هذا يعني اننا لو اردنا ان نثير مشكلاً معيناً من التذبذب في الفجوة فلن يتم بناء الاسلوب الصحيح من المجالات مالم يكن تردد الاثارة مساوياً للتردد الرنيني. مع ذلك تحدث الاثارة الجيدة عملياً بنطاق ضيق من الترددات حول التردد الرنيني. وهذا نتيجة التردد الحاد (sharp frequency) الذي يحدث جزئياً بسبب المدر في الطاقة الذي يحصل على جدران الفجوة. ويعبر عن هذه الخسارة او المدر بكمية يرمز لها بالحرف P خاصة لكل فجوة،وتعرف كما يلي :

$$Q = \frac{\omega \times \text{energy stored in the cavity} \quad (\text{الطاقة المخزونة في الفجوة})}{\text{energy lost per cycle to the walls} \quad (\text{خسارة الطاقة في كل دورة على الجدران})} \tag{8.50}$$

ويمكن ايجاد مقدار الخسارة في القدرة في الفجوة بحساب المعدل الزمني لمتجه بوينتنك في الجدار عند السطح :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \tfrac{1}{2} R_e (E_{11} \times H_{11})$$

حيث E_{11} ، H_{11} تمثل المركبتان الماسيتان للمجالين الكهربائي والمغناطيسي.

تستخدم الفجوات عادة مقياساً للتردد،ونظراً لامكانية صناعة الفجوات الاسطوانية بدقة اعلى منها في الفجوات المتعامدة لذلك فهي تستخدم في قياس التردد بدقة عالية ، وتستخدم الفجوات ايضاً في التجارب التي تتطلب مجالات موجبة دقيقة عالية (high microwave fields)،على سبيل المثال رنين البرم الكهربائي (electric spin resonance) .

8-5 دلائل موجة العازل (Dielectric wave - guides)

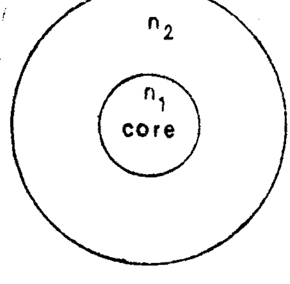
درسنا فيما سبق دلائل الموجة التي تكون جدرانها مثالية التوصيل ومجالاتها ضمن الدليل،وتركيبات دليلية اخرى ممكنة ايضاً. على سبيل المثال يمكن استخدام خط النقل متوازي السلك (parallel wire transmission line) لتوجيه الموجة الكهرومغناطيسية.

والقطعة العازلة هي ايضاً نظام آخر يمكن استخدامه دليلاً للموجة،ذو خصائص مشابهة لدلائل الموجة التي درسناها ولكن هناك اختلافات تظهر نتيجة اختلاف الشروط الحدودية المطلوب تحقيقها على السطح.

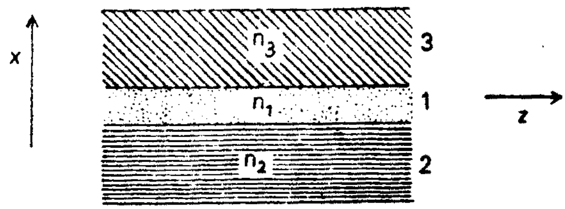
نالت دلائل موجة العازل اهمية كبيرة مع مجيء الليزر وخاصة في مجالات الاتصالات البصرية (Optical communication) حيث تعاني حزمة الليزر في اثناء انتقالها عبر الغلاف الجوي تشوهات عنيفة لذلك يستوجب قيادة الضوء بدليل لجعل الاتصالات البصرية اكثر كفاءة وهنا اثبتت الدلائل العازلة فائدتها العظمية.

تعتمد الدلائل العازلة على مبدأ الانعكاس الداخلي الكلي ، حيث تسقط الموجة المنتشرة في العازل على السطح البيني (interface) مع عازل آخر ذي معامل انكسار اقل بزاوية اكبر من الزاوية الحرجة.

إحدى الطرق البدائية لانتاج الدلائل العازلة كانت تستخدم مايسمى بعدسة الغاز (gas lens) ، وهي عبارة عن انبوب مملوء بغاز معين تحت تدرج حراري مناسب. وهذا التدرج الحراري يولد تدرجاً شعاعياً (radial gradient) في معامل الانكسار الذي يولد نوعاً ما دليلاً لقيادة الموجة باتجاه المحور. وكانت هذه الطريقة مركبة وغير فعالة. مما ادى الى حلول انابيب الضوء محلها. تصنع انابيب الضوء من الياف زجاجية (glass fibres) ذات معامل انكسار معين وتغلف بطبقة معامل انكسارها اوطأ بقليل من معامل انكسار الليف (الشكل 8.4) وهذا يؤدي الى انعكاس الضوء داخلياً على السطح البيني المغلف مما يحافظ على انتشار الشكل بمحاذاة محور الليف. فاذا كان قطر القلب اكبر بكثير من الطول الموجب للضوء فيمكن انتشار عدد كبير من الاشكال فيه. اما اذا اريد نقل شكل مفرد فيجب اختيار ابعاد القلب بدقة.



شكل رقم (8.4)



شكل رقم (8.5)

لندرس الآن كيفية استخدام قطعة او لوح عازل مستوٍ دليلاً للموجة.

نأخذ لوحاً عـازلاً مستويـاً (1) موضوع بين طبقتين (2) و (3) كما هو موضح في الشكل (5–8). حيث تشكل الطبقتان الخارجيتان الغلاف وتسميان الطبقة التحتيـة (substrate) (2) والطبقة الفوقيـة (3) (superstrate). بين هـاتين الطبقتين تقع الطبقـة العـازلـة التي هي عبارة عن لوح رفيع جداً لايزيد سمكه على طول الموجـة البعـديـة (optical wave length d) ويصنـع عـادة من فتـات اوكسيـد الخـارصين (sputtered zinc oxide) او زرنيخيـد الجـاليـوم (gallium arsenide) .... الـخ سنفرض ان الطبقـات لاتمتص الاشعاع الكهرومغناطيسي الساقط عليها بتاتاً او تمتصه بصورة ضعيفـة جـداً وان معامل انكسارها يخضع للشرط :

$$n_1 > n_2 \geqslant n_3 \tag{8.51}$$

الذي يتوافق وشرط الانعكاس الداخلي.

لنأخذ بنظر الاعتبار انتشـار نمـط TE بـاتجـاه Z. ان المجـال E سيكون مستعرضـاً لهـذا الاتجـاه. ولتكن مركبـاتـه هي $\{0, E_y e^{i(\beta z-\omega t)}, 0\}$ حيث B هـو ثـابت الانتشـار بـاتجـاه Z ويعطى من المعادلة الآتية:

$$\beta = k' \cos\theta = n_1 k \cos\theta \tag{8.52}$$

(اذا كانت λ_d هي الطول الموجي في العازل فان $k' = \frac{2\pi}{\lambda_d} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1$ معـادلـة الموجـة هي :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

بالاختصار

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (n^2k^2 - \beta^2)\, E_y = 0 \tag{8.53}$$

يجب تلاشي المجالات عندما $\underline{x} = \pm\infty$. وحل هذه المعادلة يكون :

$$\begin{aligned} E_y &= A e^{-\delta x} e^{i(\beta z-\omega t)} && \text{for } x > 0 \\ &= (B\cos Kx + C\sin Kx) e^{i(\beta z-\omega t)} && \text{for } 0 \geqslant x > -d \\ &= D e^{\gamma x} \cdot e^{i(\beta z-\omega t)} && \text{for } x \leqslant -d \end{aligned} \tag{8.54}$$

$$\delta^2 = \beta^2 - n_2^2k^2;\ K^2 = n_1^2k^2 - \beta^2;\ \gamma^2 = \beta^2 - n_3^2k^2,$$

كل واحدة من هؤلاء هي كية موجبة. من العلاقات الاولية نعرف ان :

$$\beta^2 > n_3^2 k^2 \quad \text{i.e.} \quad n_1^2 k^2 \cos^2\theta > n_3^2 k^2$$

$$n_1^2 \cos^2\theta > n_3^2$$

ومن العلاقة الثانية لدينا $n_1^2 \cos^2\theta > n_2^2$.

بذلك تتحقق شروط الانعكاس الداخلي بين الحدود.

باستخدام معادلات ماكسويل يمكننا ايجاد المركبة الماسية للمجال المغناطيسي H.

$$H_z = -\frac{i\delta}{\omega\mu_0}\left[Ae^{-\delta x} e^{i(\beta z-\omega t)} \right] \qquad \text{for } x \geqslant 0$$

$$= \frac{iK}{\omega\mu_0}\left[-A \sin Kx + C \cos Kx \right] e^{i(\beta z-\omega t)} \text{ for } 0 \geqslant x \geqslant -d$$

$$= \frac{i\gamma}{\omega\mu_0}\left[A \cos Kd - C \sin Kd \right] e^{\gamma(x+d)} e^{i(\beta z-\omega t)} \text{ for } \quad x \leqslant -d.$$

بما ان المركبـة الماسيـة لـ H يجب ان تحقق الشروط الحـدوديـة اي H_t يجب ان تكون مستمرة عبر السطح في (x=o), (x=-d) لدينا :

$$-\delta A = KC \tag{8.55}$$

$$K[A \sin Kd + C \cos Kd] = \gamma [A \cos Kd - C \sin Kd] \tag{8.56}$$

اي ان

$$\delta A + KC = 0$$

$$(KA + \gamma C) \sin Kd + (KC - \gamma A) \cos Kd = 0.$$

لتمتلـــك هـــذه حـــلاً معقـــولاً (non-trivial solution) لكل من AوC ، فـــان محـــددة النظام يجب ان تزول معطياً (determinant) :

$$\tan Kd = \frac{K(\gamma + \delta)}{K^2 - \gamma\delta} \tag{8.57}$$

عنـدمـا تحل هـذه المعـادلـة بطرق بيـانيـة (graphically) أو عـدديـة (numerically) ستعطي قيمة B^2 والتي بدورها تعطي قيمة الزاوية θ التي فيها تقترن الطاقة بالدليل.

اذا كان (γ=0) تنتج خسارة في الانعكاس الداخلي الكلي عند الحـدود السفلى مما يؤدي الى عدم امكانية توجيه النمط بعد ذلك.

تمارين الفصل الثامن

8-1 موجة ATM تنتقل بمحاذاة السطح البيني لعازلين سماحيتها ϵ_1 و ϵ_2 جد معادلة التشتت.

8-2 اوجد العلاقة بين المركبات المماسية لمجال كهربائي ومجال مغناطيسي بالقرب من موصل.

8-2 ماهو اكبر واقل سمك لدليل موجة ذي مقطع عرضي مربع ، اذا اريد نقل الموجات لنمط TE_{01} فقط؟

8-4 اسقطت موجة كهرومغناطيسية مستوية عمودياً على لوح من مادة عازلة سطحه الخلفي بتماس مع موصل مثالي اثبت ان $(\epsilon=\mu)$ للعازل اذا لم يكن هناك اي انعكاس على السطح الامامي.

8-5 اوجد عدد الرنينات الموجودة في فجوة مستطيلة ابعادها (d=4cm),(b=3 cm),(a=2cm) خلال مدى التردد $\nu = 9 \times 10^{9}$ Hz الى $= 10^{10}$ Hz

8-6 عين سمك القطع (cut - off thickness) لنمط TE الاساسية في دليل موجة من لوح عازل الذي يكون معامل انكسار الفلم هو $n_1 = 1.59$ ومعامل انكسار الطبقة السفلية $n_2 = 1.53$ وسمك الطبقة العلوية $k = 9.92$ rads/μm.

الفصل التاسع

«الاشعاع الكهرومغناطيسي»

(Electromagnetic Radiation)

الفصل التاسع

«الاشعاع الكهرومغناطيسي»

(Electromagnetic Radiation)

درسنا في الفصل السابق انتقال الموجات الكهرومغناطيسية والطاقة بواسطة دلائل الموجة،وسندرس في هذا الفصل التنقل العشوائي (غير الموجة) للموجات والطاقة في الفضاء الخالي. ومثبت ان اي توزيع لشحنات وتيارات متغيرة يمثل مصدراً للاشعاع الكهرومغناطيسي. كيف ينتج الضوء المرئي؟ فهو نتيجة الانتظام المفاجيء (rapid adjustment) في توزيع الشحنة والتيار داخل السحابة الالكترونية للذرات. لايمكن تفسير كيفية انبعاث الاشعة من الذرات الا بميكانيك الكم (quantum mechanics) بداية انهيار المفاهيم القديمة وفي الحقيقة بدأ واضحاً في نظرية الاشعاع. على كل حال ستقدم النظرية القديمة المستخدمة في هذا الفصل عوناً كبيراً في فهم نظرية الكم للاشعاع.

9-1 الجهود المعوقة (retarded Potentials) :

يمكن ايجاد العلاقة بين المجالات الاشعاعية ومصادره بسهولة اذا ماتم التعبير عن هذه المجالات بدلالة الجهد الكهرومغناطيسية A و Φ ،

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{9.1}$$

لاحظنا في الفصل الخامس كيف ان ادخال شرط لورنتس في معادلات ماكسويل انتج لنا المعادلتين غير المتجانستين الآتيتين لـ A و Φ .

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{9.3}$$

العامل في الطرف الايسر مشابه لذاك الخاص بمعادلة الموجة المتجانسة،لكن ظهرت الآن دلائل المصدر J و ρ في الطرف الايمن وكل هذه المعادلات مازالت بحاجة قائمة لايجاد تعابير لـ A و Φ بدلالة توزيع التيار والشحنة.

سنقوم اولاً ايجاد هذه الحلول بطريقة المشابهة مع الحلول المستخلصة لمسائل الحالة المستقرة في الفصلين الاول والخامس للكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة على التوالي،وحلول المعادلات :

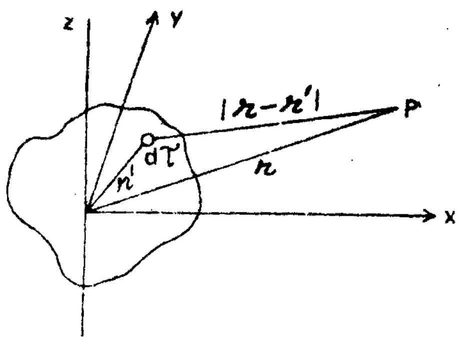
$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

كما وجدناه كان :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\tau$$

and

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\tau. \qquad (9.4)$$



شكل رقم (9.1)

في الشكل (1–9) $d\tau$ تمثل عنصر حجم صغير . ويجب حساب الجهود في نقطة P ومتجه موقعها هو r. ويمكن ذلك بتكامل ρ و j حول الحجم V باعتبارهما دوال لـ r' : التي تمثل متجه موقع عنصر الحجم.$d\tau$. التعابير في (4–9) تصح اذا كانت الشحنة ساكنة والتيارات مستقرة لنأخذ الآن حالة كون ρ متغيرة مع الزمن، ماذا يكون الجهد في نقطة P عند الزمن t؟ اذا تغير توزيع الشحنة في عنصر الحجم d مع الزمن، فالمجال المسجل في النقطة p عند الزمن t يجب أن يكون رأسياً في $d\tau$ قبل هذا الزمن اي t'. ذلك لأن المجال الكهربائي مجتمعاً مع هذه الشحنات ينتشر بسرعة محددة c لذلك فهو يحتاج الى وقت للانتقال من $d\tau$ الى p وهو $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{c}$ عليه فان الزيادة في الجهد نتيجة الشحنة في $d\tau$, عند النقطة p والزمن t لايعتمد على ماهية الشحنة في $d\tau$ عند الزمن t

وانما على ماكانت عليه عند الزمن $t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ ، هذا هو الوقت الذي يفترض ان ينتشر المجال الكهربائي خلاله من الشحنات في $d\tau$ واتجاه r ليصل الى النقطة p في الومن t.

اذا :

$$\Phi(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau \qquad (9.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau. \qquad (9.6)$$

وجدت هذه التعابير لـ A و Φ على ارضية فيزياوية، لكن هل هذه هي حلول المعادلتين غير المتجانستين (2–9) و (3–9) ؟ لنتحقق من ذلك ، سنعوض (5–9) و (2–9) ،

سنكتب المعادلة (5–9) بالشكل الآتي :

$$\Phi(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t-R'/c)}{R'}\, d\tau \qquad (9.7)$$

حيث أن R' تساوي $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$.

نظراً لصعوبة ايجاد الجهد عند $R'=0$. سنقسم حجم التكامل في المعادلة (7–9) الى قسمين : الحيز الاول ليكن كرة صغيرة نصف قطرها r_0 حول النقطة التي تحسب Φ عندها، والحيز الثاني هو ماتبقى من الفضاء. ويكون الجهد بهذا هو :

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2 \qquad (9.8)$$

$$\nabla^2\Phi=\nabla^2\Phi_1+\nabla^2\Phi_2$$

اذا اهمل المقدار $\frac{R'}{c}=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ في حيز الكرة الصغيرة عندها سيكون :

$$\nabla^2\Phi_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R'}\, d\tau$$

$$=\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R'}\right) d\tau.$$

في البند (3–9) اثبتنا أن :

$$\nabla^2\Phi_1 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R'}\right) d\tau = -\rho/\epsilon_0 \tag{9.9}$$

وهذا لايعتمد على r_0، لذلك يمكن جعل الكرة اصغر مايمكن بحيث تنكمش الى النقطة.

لنجد الآن $\nabla^2\Phi_2$. لاحظنا ان ∇^2 تعمل فقط على 'R في الاحداثيات القطبية الكروية.

$$\nabla^2\Phi_2 = \frac{1}{R'}\frac{\partial^2}{\partial R'^2}(R'\,\Phi_2) \tag{9.10}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{1}{R'}\frac{\partial^2}{\partial R'^2}\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{R'}{c}\right) d\tau. \tag{9.11}$$

والآن لاي دالة $f(t - R'/c)$ ؛

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{9.12}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{1}{R'c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{R'}{c}\right) d\tau.$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{R'}{c}\right)}{R'} d\tau'\right]$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{9.13}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\Phi = \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

$$\text{or} \quad \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وهكذا اثبتنا أن المعادلة (5–9) هي حل للمعادلة (2–9).

تسمى الجهود (5–9) و (6–9) بالجهود المعوقة (retarted potentials). لاحظ انه يجب حساب التكامليات (integrands) $\rho(r')$ و $j(r')$ عند زمن التعويق $t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ (retarted time) حيث ' r تمثل البعد القطبي بين الجسم ومداره الاهليجي (radius vector) في زمن التعويق. هذه المفاهيم مألوفة في

علم الفلك (Astronomy) فضوء النجم الذي نشاهده على الأرض في زمن معين يعطينا معلومات عن النجم في زمن اشعاعه لهذا الضوء أي الذي يستغرقه الضوء في قطع المسافة بين النجم والارض. لذلك يجب استخدام القيم الاولية لـ (J') و (ρ') عند حساب الجهود.

من السهولة ايجاد المجالين E و B عند معرفة الجهود. الا أن حساب A و Φ ليس بالسهولة التي تبدو بها. وتظهر الصعوبات نتيجة اختلاف ازمان التعويق باختلاف اجزاء المصدر. ويمكن ايجاد المجالات في حالات بسيطة معينة بادخال تقريبات محسوسة.

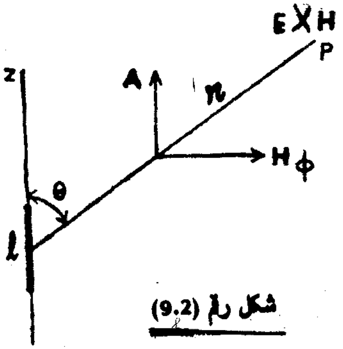
9-2 اشعاع من ثنائي قطب متذبذب (Radiation from an Oscillating Dipole)

لنسحب المجال الاشعاعي الناتج من ثنائي قطب كهربائي متذبذب ولهذا المجال عدة تطبيقات مهمة. حيث يمكن اعتبار منظومات اشعاعية عملية كثيرة على انها متكونة من عدد كبير من هذه الثنائيات لذلك تحتوي على الكثير من الخواص المفيدة في نظرية الكم للاشعاعات المنبعثة من الذرات والجزيئات والنويات. لنأخذ سلكاً قصيراً في نهايتيه كرتين صغيرتين. ونفرض شحنة تنتقل دورياً بين الكرتين. ويتغير الزمن توافقياً أي :

$$q = q_0 \exp(i\omega t) \tag{9.14}$$

حيث q_0 تمثل الشحنة المتذبذبة و w تمثل التردد الزاوي (angular frequency) للتذبذب . لنفرض أن الطول الموجي للموجة الناتجة اكبر مقارنة مع طول السلك (ℓ) ، أي :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} > l \quad \text{or} \quad \frac{2\pi}{\omega} = T \gg \frac{l}{c}.$$



شكل رقم (9.2)

وهـذا يعني ان الـزمن $\frac{L}{c}$ والـذي تستغرقـه الاشـارة لتنتشر على طـول السلـك من احدى نهايتيه الى الاخرى اقل بكثير جداً من الزمن الذي يتطلبه تغير تيار المصـدر تغيراً محسوساً . لذلك سنأخذ التيار I متساوياً في جميع النقاط على طول السلك . الآن :

$$I = \frac{dq}{dt} = i\omega q_0 \exp(i\omega t). \qquad (9.15)$$

الشحنة المتذبذبة بين الكرتين مكافئة لعزم ثنائي قطب متذبذب P .

$$|\mathbf{p}| = ql = q_0 l \exp(i\omega t) = p_0 \exp(i\omega t) = \frac{Il}{i\omega} \qquad (9.16)$$

حيث $p_0 = q_0 l.$

لنجد الآن (ا) كيف يتوزع مجال اشعاع الثنائي في الفضاء (ب) قدرة الاشعاع الكلية.

الثنـائي موضـح في الشكل (2–9) السلـك يمتـد بمحـاذاة المحـور ويقـع عليـه. وتنطبـق نقطة الاصل للاحـداثيـات على مركز السلـك. ان مـا يهمنـا هو قيم المجال في النقطـة P المحددة بمتجه الموقع r. لكي نجد المجـال اولاً ايجـاد الجهـد المعوق. ويعطي المجـال المتجـه A بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau.$$

التكامل حول كل الحجم الذي يشغله التيار. الآن :

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d\tau = I\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \hat{\mathbf{e}}\, d.$$

بالاضافة الى ذلك ولكون التيار باتجاه المحور z دائماً يمكن ان تحل z محل r' اذا ،

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I\left(z, t - \frac{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{e}}_z z|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{e}}_z z|} \hat{\mathbf{e}}_z dz. \qquad (9.17)$$

بما ان $l \gg r$ عليه يمكن اهمال $\hat{e}_z Z$ بالنسبة لـ r ، ويصبح مقام المعادلة السابقة r. ونبدل الزمن $t - \frac{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{e}}_z z|}{c}$ الذي يفترض ان تقاس عنده كثافة التيار في السلك بالزمن $(t - \frac{r}{c})$ وهكذا

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z, t - r/c)}{r} \hat{\mathbf{e}}_z \, dz$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_z l \frac{I(t - r/c)}{r} \qquad (9.18)$$

هذه المعادلة تثبت ان الجهد المتجه A في جميع النقاط موازٍ لـ l كما هو موضح في الشكل (9-2) ذلك لكون التيار متساوي في جميع النقاط على طول السلك،وعليه تكون مركبات الجهد المتجه هي :

$$A_x(\mathbf{r}, t) = 0; \qquad A_y(\mathbf{r}, t) = 0$$

and
$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 l}{4\pi r} i\omega q_0 \exp\{i\omega(t - r/c)\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega p_0 \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/c)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega \, p(t) e^{-ikr}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}(t) \frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.19)$$

ويمكن الحصول على الجهد العددي Φ بسهولة من شرط لورنتس،

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (9.20)$$

بما ان المركبة Z لـ A هي فقط لاتساوي صفراً.

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \cos\theta \quad \left(\because \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta\right)$$

i.e. $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dot{p}(t) \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

Hence, $$\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p(t) \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right). \qquad (9.21)$$

ويمكن صياغة المعادلة السابقة على النحو الآتي :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{z}{r^3}\, q\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{z}{cr^2}\, I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \qquad \text{(المسألة 9.1)} \qquad (9.22)$$

وهكذا وجدنا A و Φ والآن يمكن ايجاد E و B باستخدام المعادلة (1-9).
في الاحداثيات القطبية الكروية (التي تكون هي الملائمة اذا ماأخذنا طريقة تماثل المسألة بنظر الاعتبار) تكون المركبات كالآتي :

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi r}\, i\omega\, p_0 \cos\theta \exp\{i\omega(t-r/c)\} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{p} \cos\theta\, e^{-ikr} \qquad (9.23)$$

$$A_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r}\, i\omega\, p_0 \sin\theta \exp\{i\omega(t-r/c)\} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{p} \sin\theta\, e^{-ikr}$$

$$A_\phi = 0.$$

ان مركبات E و H هي :

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{ipk}{2\pi\epsilon_0 r}\cos\theta\left[1-\frac{i}{kr}\right]\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -\frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0}\sin\theta\left[1-\frac{i}{kr}\left(1-\frac{i}{kr}\right)\right]\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_\phi = 0 \qquad (9.24)$$

$$H_r = 0,\ H_\theta = 0,\ H_\phi = -\frac{cpk^2}{4\pi}\sin\theta\left[1-\frac{i}{kr}\right]\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.25)$$

العلاقات (24-9)، (25-9) تسمى علاقات هيرتز (Hertzs relations) لثنائي القطب المتذبذب.

يمكننا ان نتخيل ان الفضاء مقسوماً الى منطقتين :

1 ـ الحيز الــذي فيــه $|r| \ll \lambda$ ويسمى المنطقــة القريبــة (near zone) وسنجد ان المجال في هذه الحالة هو نفسه لثنائي القطب الكهربائي المستقر.

2 ـ الحيز الــذي فيــه $|r| \gg \lambda$، ويسمى منطقــة الاشعــاع (radiation zone)، يتغير المجال في هـذا الحيز كـ $1/r$. سوف لانأخذ بنظر الاعتبار الحيز الـذي فيه $kr \simeq 1$ لأنه معقد جداً.

لنختبر العلاقتين (24-9)، (25-9) الآن في المنطقة القريبة ومنطقة الاشعاع.

(i) **Near Zone:** $|r| \ll \lambda$, i.e. $kr \ll 1$

$$E_r \simeq \frac{p \cos\theta}{2\pi \epsilon_0 r^3},\ E_\theta \simeq \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},\ E_\phi = 0 \qquad (9.26)$$

$$H_r = 0,\ H_\theta = 0,\ H_\phi \simeq \frac{i\omega\, p \sin\theta}{4\pi r^2}.$$

هذه التعابير مكافئة لمجال ثنائي القطب الكهربائي المستقر. النسبة بين المجالين المغناطيسي في هذه المنطقة هي :

$$\frac{\omega\mu_0}{k}\frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{E}|} \simeq \frac{\omega\mu_0}{k}\epsilon_0\omega r = kr \ll 1$$

وهذا يبين ان المجال الكهربائي هو السائد والمتسلط في هذه المنطقة $kr \gg 1$ بـ

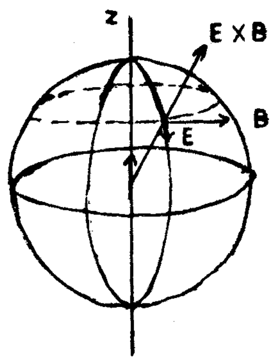
(ii) Radiation zone (منطقة الاشعاع)

$$E_r = 0,\ E_\theta = -\frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0}\sin\theta\ \frac{e^{-ikr}}{r},\ E_\phi = 0$$

$$H_r = 0,\ H_\theta = 0,\ H_\phi = -\frac{cpk^2}{4\pi}\sin\theta\,\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (9.27)$$

تم الحصول على هذه النتائج بالغاء او اهمال الحدود الحاوية على $1/r^2$ ورتبها الاعلى، نجد من (9.27) أن :

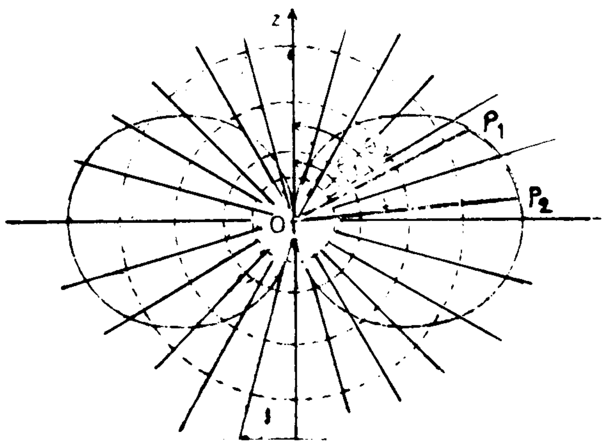
$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,H_\phi. \qquad (9.28)$$



شكل رقم (9.3)

يوضح الشكل (3-9) اتجاهات المجالات التي تكون متعامدة فيما بينها. في منطقة الاشعاع تكون $E_r = 0$ ، لذلك يكون توزيع المجال فيما بينها. في منطقة الاشعاع تكون $E_r = 0$ ، لذلك يكون توزيع المجال كروياً حيث يأخذ المجال الكهربائي شكل دوائر طولية ويأخذ المجال المغناطيسي شكل دوائر عرضية. وتكون قيمة المجال اعلى مايمكن عند خط الاستواء (equator) وصفراً عند الاقطاب نظراً لكون المجال المغناطيسي مستعرضاً في كل مكان،فان اشعاع ثنائي قطب كهربائي متذبذب عادة يكون TM. وعند المسافات الكبيرة $E_r \rightarrow 0$ يصبح المجال الكهربائي مستعرضاً ايضاً لذلك تكون الموجات TEM.

يمكن توضيح التوزيع الفضائي (spatial distribution) للمجالات في رسم بياني قطبي (polar diagram) ، الشكل (49-9) .



شكل رقم (9.4)

تعطى الخطوط المنحنية المجسمة الشدة النسبية لمجال الاشعاع في نقاط مختلفة من كرة مركزها في ثنائي القطب. والمجال بمحاذاة المحور يساوي صفراً (Θ=0). ويكون اعلى مايمكن في مستوِ خط الاستواء. المجال لايعتمد على الزاوية السمتية Φ (azimuthal angle).

النسبة بين المجال الكهربائي في P_1 ، P_2 والزاويتين القطبيتين Θ_1 و Θ_2 تعطى النسبة OP_1/OP_2

لنحسب الآن القـــدرة اللحظيـــة (instantaneous power) التي تعبر سطح كرة ليكن نصف قطرها r في منطقة الاشعاع.

المعدل الزمني لمتجه بوينتنك (time – average Poynting vector) (N) هو :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

باستخدام القيم المستخلصة من (9.27) لمنطقة الاشعاع :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \qquad (9.29)$$

قدرة الاشعاع الكلية هي :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{c p_0^2 k^4}{12\pi \epsilon_0} \\ &= \frac{c p_0^2}{12\pi \epsilon_0} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4. \qquad (9.30) \end{aligned}$$

وهكذا، فان القدرة المشعة تتناسب طردياً مع مربع سعة ثنائي القطب الكهربائي وعكسياً مع الطول الموجي في القوة الرابعة.

سنقدم الآن مفهوم او مصطلح مقاومة الاشعاع (radiation resistance)، نحن نعرف عند مرور تيار $I = I_0 e^{-i\omega t}$ في دائرة تحتوي على مقاومة R، فان متوسط معدل الهدر او الخسارة في الطاقة يحسب من :

Rate of energy dissipated(معدل هدر الطاقة) $= \frac{1}{2} R I_0^2$ .... (9–31)

يمكن كتابة التعبير (9.30) للقدرة المهدورة في حالة ثنائي القطب بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \frac{c p_0^2}{12\pi \epsilon_0} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 &= \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \\ &= \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{c^3} \qquad \text{(انظر 9.16)} \\ &= \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{l^2 4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{c} I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2. \qquad (9.32) \end{aligned}$$

عند مقارنة هذه مع (9.31) نجد لمقاومة الاشعاع :

$$R_r = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

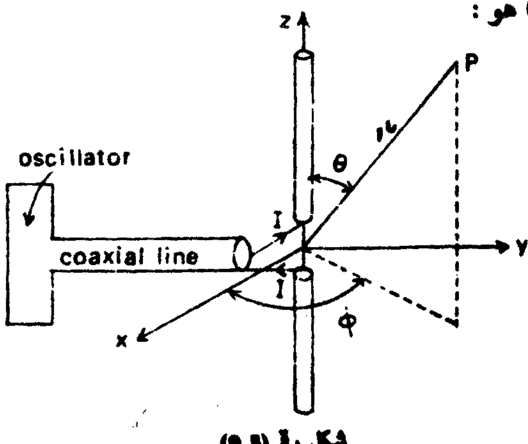
$$\doteq 789\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ohms} \qquad (9.33)$$

لاحظ ان هذا التعبير صحيح تحت شرط $\lambda > l$

9-3 الهوائي الخطي (Linear Antenna): -

المعادلة المشتقة في البند السابق تستخدم فقط في منظومات ذات ابعاد خطية اصغر بكثير من الطول الموجي. والهوائيات المستخدمة في البث الاذاعي او التلفزيوني ليست قصيرة عادة مقارنة مع طول موجة الاشعاع الذي تبثه. لذلك لايكون التيار في الهوائي ثابتاً ويجب اخذ تغير سمته في الحسبان.

الهوائي البسيط هو هوائي خطي مركزي السحب (Linear antenna centre driven) كما هو موضح في الشكل (9-5). المعدل الزمني متجه بوينتنك (time average poynting vector) (N) هو :



شكل رقم (9.5)

ويغذي التيار الى الهوائي عبر خط نقل على شكل سلك معدني ذي موصلين متحدي المحور - عادة سلك رفيع جداً - (coaxial cable transmission line)

ويفترض ان يوجه الهوائي بمحاذاة المحور Z وان يكون طوله l يثار (excited)

الموائي عبر فجوة صغيرة في النقطة الوسطية التي تتطابق مع نقطة الاصل. ويفترض ان تتغير كثافة التيار توافقياً في الزمن والفضاء (time and space) بمحاذاة الهوائي. الموجات الواقفة ترتب تحت شروط كون التيار صفراً في كل نهاية. ومن اجل تقريب جيد يمكن كتابة كثافة التيار بالشكل الآتي :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) \delta x \delta y. \qquad (9.34)$$

تضمن دالات دلتا (delta functions) سريان التيار باتجاه Z فقط. يمكن التكهن بسهولة ان هذا التعبير يحقق الشروط المطلوبة.

التيار في الفجوة (gap) ، اي الاشارة الداخلة (input signal) هي :

$$I(t) = I_0 \exp(i\omega t) \sin\frac{kl}{2}. \qquad (9.35)$$

الجهد المتجه في نقطة P التي يحدد موقعها المتجه r هو :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr', \quad \text{حيث} \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}{c}\right)} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|} dz. \qquad (9.36)$$

اذا كانت النقطة P بعيدة فيمكن ان نجعل المقام r ونعوض في البسط :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}| = r - z\cos\theta$$

حيث θ تمثل الزاوية التي يشكل r مع المحور z.

$$\therefore \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_z \frac{I_0}{r} \exp(i\omega t) e^{-ikr} \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) e^{ikz\cos\theta} dz.$$

بعد اخذ التكامل نحصل على :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \exp(i\omega t) \frac{e^{-ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin^2\theta} \right]. \quad (9.37)$$

يمكن حساب E و H من هذه المعادلة بسهولة يحسب معدل نسبة سريان القدرة من:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} R_e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_n}{2c\mu_0} |E_0|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\, \hat{\mathbf{e}}_n \frac{I_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \right]^2 \quad (9.38)$$

متوسط القدرة المشعة الى وحدة الزاوية الجسمة (unit solid angle) هو :

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{4\pi r^2 \langle \mathbf{N} \rangle}{4\pi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \right]^2 \quad (9.39)$$

لذلك يعتمد التوزيع الزاوي للقدرة المشعة على قيمة $\frac{kl}{2}$. فاذا اخذنا هوائي نصف موجة (half - wave antenna) .

$(l = \lambda/2)$, اي $kl = \pi$, فيكون لدينا :

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2. \quad (9.40)$$

ومتوسط القدرة الكلية (W) المشعة بهوائي نصف موجة هي بالمعادلة (9-38).

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta.$$

يمكن ايجاد هذا التكامل عددياً (numerically) ووجد ان قيمته هي :

$$\langle W \rangle \simeq 73 \frac{I_0^2}{2} \qquad (9.41)$$

وتكون مقاومة الاشعاع (radiation resistance) بهذا هي :

$$R_r \simeq 73\ \Omega.$$

عند مقارنة هذه القيمة المطابقة لثنائي القطب الكهربائي نجد ان هوائي نصف موجة اكثر كفاءة في الاشعاع.

اذا كان l مساوياً لرقم تكامل اطوال نصف موجة الذبذبات المسحوبة فان :

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin^2\theta} \right]$$

لقيم m الفردية .... (9.42)

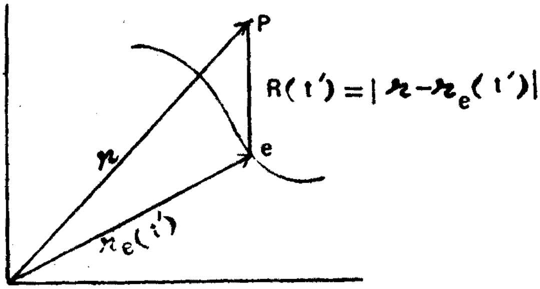
and

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin^2\theta} \right]$$

لقيم m الزوجية .... (9–43)

9–4 جهود لينارد ـ ويشرت (Lienard - Wiechert potentials)

لندرس استخدام الجهود المعوقة (5–9)،(6–9) في حساب الاشعاع من جسيم فردي الشحنة (single charged particle) مثل الالكترون في حركة عشوائية. نظراً لاعتماد حساب الجهود على موقع وسرعة الشحنة في زمن التعويق $\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ t لذا يجب ان يكون لدينا تفاصيل حركة الشحنة. يوضح الشكل (6–9) مسير (trajectory) الالكترون الموصوف بالمتجه الشعاعي او البعد القطبي بين الجسم ومداره الاهليجي $\mathbf{r}_e(t')$ (radius vector).



شكل رقم (9.6)

ان حساب الجهود حسب الصيغ (9-5)، (9-6) يتضمن تكامل زمن التعويق حول كل الحجم الذي يتضمن الشحنة. لكننا هنا لانعرف الشكل الهندسي لتوزيع الشحنة داخل الالكترون نفسه،وكل الذي نعرفه ان له شحنة معينة. واذا فرضنا ان حجمه صفر سنقع في مشاكل وصعوبات. لذلك سنفرض ان للالكترون نصف قطر معين ومع ذلك فاننا سنأخذ بنظر الاعتبار فقط الخصائص التي لاتعتمد على نصف القطر هذا، يمكن التعبير عن جهد الالكترون المعوق بصيغة دالة دلتا، وهكذا :

$$\Phi(r, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left\{t' - \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e t'|}{c}\right)\right\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|}\, dt'. \qquad (9.44)$$

اذا مااعتمدنا احدى خواص دالة دلتا ووضعنا هذا التكامل بصيغة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x')\,dx$، فان تكامله يساوي بسهولة $f(x')$. لذلك سندخل متغيراً جديداً هو t بحيث :

$$t'' = t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|}{c} \qquad (9.45)$$

$$dt'' = dt' + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\, dt' \qquad (9.46)$$

حيث اخذنا $dt = 0$ ، لأن المراقبة (او المشاهدة) حدثت في ثبت t. تكون احداثيات النقطة المثبتة p هي X_1 ، X_2 ، X_3 واحداثيات الالكترون هي $X_{e1}(t')$، $X_{e2}(t')$ $X_{e3}(t')$.

$$\text{Now} \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')| = \sqrt{\sum_i \left\{(x_i - x_{e_i}(t')\right\}^2}. \tag{9.47}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\Big|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\Big| = \frac{1}{c}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_{e_i}}\Big|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\Big|\frac{dx_{e_i}}{dt'} \tag{9.48}$$

بما ان مركبات ميل المقدار $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|$ هي $\frac{\partial}{\partial x_{e_i}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|$ ومركبات $\frac{dx_e}{dt'}$ هي $\frac{d\mathbf{r}_e}{dt}$ يمكن كتابة المعادلة الآتية :

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\Big|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\Big| = \frac{1}{c}\,\text{grad}_{re}\Big|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\Big|\cdot\frac{d\mathbf{r}_e}{dt'} \tag{9.49}$$

ويمكن ايجاد الميل بسهولة :

$$\text{grad}_{re}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')| = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|} = -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \tag{9.50}$$

حيث : $\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t)=\mathbf{R}$

نحن نعرف ان :

$\frac{d\mathbf{r}_e}{dt} = \mathbf{u}$ (سرعة الالكترون)

$$\therefore \quad \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\Big|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\Big| = -\frac{1}{c}\frac{\mathbf{R}}{R}\cdot\mathbf{u} = -\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \tag{9.51}$$

حيث $\beta = \frac{\mathbf{u}}{c}$ ، لذلك :

$$dt'' = dt'\left[1-\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}\right]$$

اي

$$dt' = \frac{|\mathbf{R}|}{|\mathbf{R}|-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}\,dt''. \tag{9.52}$$

اذاً يمكن التعبير عن الجهد (44–9) بالصيغة الآتية :

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t'')}{|\mathbf{R}(t')|}\,\frac{|\mathbf{R}(t')|}{|\mathbf{R}(t')|-\boldsymbol{\beta}(t')\cdot\mathbf{R}(t')}\,dt'' \tag{9.53}$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{R}(t')|-\boldsymbol{\beta}(t')\cdot\mathbf{R}(t')}\right]_{t''=0} \tag{9.54}$$

بما ان كون t=0 يعني ان $t' = t - R(t')/c$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}} \qquad (9.55)$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد الجهد المتجه وهو :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{u}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}\right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \qquad (9.56)$$

تسمى الجهود Φ (9–55) , A (9–56) جهود لينارد ـ ويشرت التي تعتمد على سرعة الالكترون ولكنها لاتعتمد على شكل توسيع الشحنة اي لاتعتمد على اي من تفاصيل الموديل الالكتروني (electronic model).

9–5 جهود شحنة في حركة منتظمة ـ صيغة لورنتس

(Potentials for a Charge in Uniform Motion - Lorentz Formula)

يمكن ايجاد مجالات شحنة متحركة من العلاقات الآتية :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

سيكون تقييم المجالات بصيغة الموقع المعوق (retarded position) للشحنة ولسرعتها. لأن العلاقة بين الموقع الحاضر (present position) للالكترون وموقعه المعوق ليست معروفة عامة،على كل حال في حال الحركة المنتظمة فيمكن التعبير عن المجالات بصيغة الموقع الحاضر للشحنة في الزمن t.

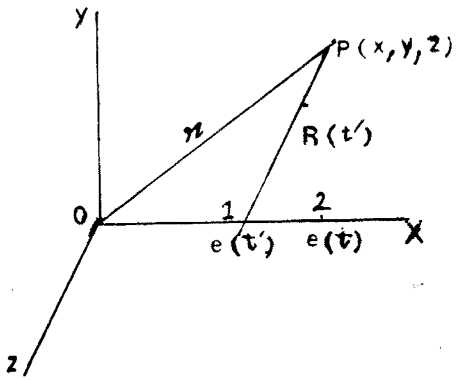
لنجد مجالات شحنة متحركة بسرعة منتظمة في خط مستقيم وذلك باستخدام جهود لينارد ـ ويشرت.

اذا كان المراقب او المشاهد في الاطار الثابت (rest frame) للشحنة،اي انه يتحرك مع الشحنة،فان الوضعية التي سيراها ستكون كهربائية مستقرة والجهد العددي بالنسبة له هو :

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

لكن ماهو الجهد اذا كان المراقب ثابتاً او الشحنة متحركة ؟ يمكن ايجاد تعبير لهذا الجهد باستخدام تحويلات النسبية (relativistics transformations) ، (كما سنرى في الفصل التالي) لكن النسبية اسسها الخاصة في الكهروداينمك (electrodynamics).

في هذا الجزء سنبين كيف تقودنا معادلات ماكسويل الى مايسمى تحويل لورنس (Lorentz transformation) وقد سبق ان بينا في البند السابق كيف نجد جهود الشحنة المتحركة من معادلات ماكسويل (Maxwell's equations). وبقي ان نوضح كيف تقود هذه الجهود الى تحويل لورنتس. وسوف نتبع الاسلوب الذي استخدمه لورنتس.



شكل رقم (9.7)

افرض ان شحنة e تتحرك بمحاذاة المحور x بسرعة $u\hat{e}_x$ ونريد حساب الجهد في نقطة P(x,y,z) عند الزمن t. في هذا الزمن ستكون الشحنة في النقطة (2) التي احداثيتها $x = ut$, $y = 0$, $z = 0$ ، على كل حال نحتاج الى موقعها (1) عند زمن التعويق $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ ، حيث R (t') تمثل المسافة بين النقطة p وموقع الشحنة عند الزمن t′، من هذه الصورة نجد :

$$R(t') = | \mathbf{r} - \hat{e}_x ut' |$$

حيث r تمثل متجه موقع النقطة p .

$$\therefore R(t') = \{(x-ut')^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}$$
$$t' = t - R(t')/c$$
$$R(t')^2 = c^2(t - t')^2 = (x - ut')^2 + y^2 + z^2$$

اي :

$$(c^2 - u^2)\, t'^2 - 2(c^2t - xu)\, t' - r^2 + c^2t^2 = 0$$

اذا :

$$,\ t' = \frac{(c^2t - xu) - \{(c^2t - xu)^2 + (c^2 - u^2)(r^2 - c^2t^2)\}^{1/2}}{(c^2 - u^2)}$$

اي :

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) t' = \left(t - \frac{xu}{c^2}\right) - \frac{1}{c}\left\{(x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{1/2}$$

$$\therefore \quad c(t - t') - \frac{u}{c}(x - ut')$$

$$= \left\{(x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{1/2} \qquad (9.57)$$

الآن :

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R} = \frac{u}{c} R \cos\theta = \frac{u}{c}(x - ut').$$

اذا

$$R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R} = c(t - t') - \frac{u}{c}(x - ut')$$

$$= \left\{(x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{1/2}. \qquad (9.58)$$

لذلك يكون جهد لينارد ـ ويشرت هو :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left\{(x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{1/2}}$$

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left\{\frac{(x - ut)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + y^2 + z^2\right\}^{1/2}} \qquad (9.59)$$

والجهد المتجه A يكون :

$$A(\mathbf{r}, t) \frac{\mu}{4\pi} \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \left\{\frac{(x - ut)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + y^2 + z^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (9.60)$$

اذ كانت u=0 ، سنحصل على الصيغة الكهربائية المستقرة للجهد. وهـذا مقترح بـأن في نظم الاحداثيات المتحركة،يجب تحويل الاحداثيات الى :

$$x \to \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y \to y \qquad (9.61)$$

$$z \to z$$

هذه هي تحويلات لورنتس (Lorentz transformatios)

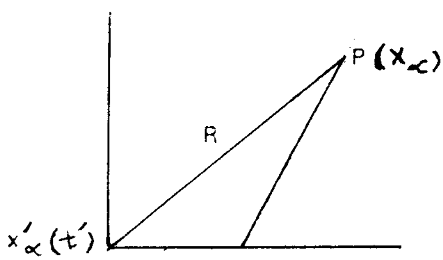
9-6 مجالات شحنة معجلة (Fields of an accelerated charge):

لنعد الآن الى الحالة العامة ونقصد عندما تكون الشحنة في حركة عشوائية والتعبير عن المجالات منها.

لتكن احـــداثيـــات نقطـــة المراقبـــة P هي $X_\alpha = X_1\, X_2 , X_3$، الشكل (9-8) ، واحـداثيـات الشحنـة عنـد الـزمن t هي $X_\alpha(t') = X_1(t') , X_2(t') . X_3(t')$ ، وتنتشر عند هذا الزمن اشارة منها بسرعة C والمنبعثة اصلاً عند X'_α لتصل الى X'_α عنـد الزمن t.

$$R^2 = \Sigma\,(x_\alpha - x'_\alpha)^2.$$

افرض اضافة لذلك ان $X'_\alpha(t)'$ معلوم.



شكل رقم (9.8)

يمكن ايجاد المجالات من العلاقات الآتية :

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \nabla \times A.$$

ونحسب الجهود من :

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}]} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{S} \qquad (9.62)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} e\left[\frac{\mathbf{u}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}\right] = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{u}}{c^2 S}$$

حيث $S = (R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})$.

ان مركبات ∇ هي مشتقات جزئية (partial derivatives) عند زمن ثابت t وليست عند زمن ثابت t'، بما ان تغير الزمن بالنسبة الى t' معلوم فيجب تحويل الصيغ $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x_\alpha}$ x_α ∇ الى تعابير بصيغة $\left.\frac{\partial}{\partial t'}\right|_{x_\alpha}$ لاحتساب الجالات وهذا ضروري لانه لايمكن عامة التعبير عن الجهد في حالة الشحنة المعجلة بصيغة الموقع الحاضر فقط. لدينا من الشكل (9-8).

$$R[x_\alpha, x'_\alpha(t')] = [\Sigma(x_\alpha - x'_\alpha)^2]^{1/2}$$
$$= c\,(t - t'). \qquad (9.63)$$

بما ان x'_α معطاة بدلالة t' فان R هي دالة لـ X_α و t'.

$$R\,[x_\alpha, x'_\alpha(t')] = f\,(x_\alpha, t') = c\,(t - t'). \qquad (9.64)$$

الآن : (9.65)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right).$$

وكذلك : (9.66)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

لكن (هل يمكنك اثبات ذلك؟)

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R}$$

اذا

$$c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

أو (9.67)

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} = \frac{R}{S}$$

لذلك (9.68)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{S}\frac{\partial}{\partial t'}.$$

لنحول الآن العامل ∇ . بما ان R هي دالة لـ x_α و t' ، يمكننا كتابة :

$$\nabla R = \nabla_1 R + \frac{\partial R}{\partial t'} \nabla t' = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R} \nabla t' \tag{9.69}$$

حيث ∇ تتضمن التفاضل بالنسبة لـ x_α عند زمن تعويق ثابت t'. لدينا كذلك من (9–64).

$$\nabla R = - c\nabla t'$$

$$- c \nabla t' = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R} \nabla t'$$

$$\nabla t' = - \frac{\mathbf{R}}{Sc} \tag{9.70}$$

عند تعويض هذه في (69–6) نجد ان امكانية كتابة معادلة عامة لـ ∇ هي :

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{R}{Sc} \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{9.71}$$

وهكذا وجدنا التحويل المطلوب للعامل $\frac{\partial}{\partial t}$ (68–9) و ∇ (71–9). الآن نحسب E و B.

$$\mathbf{E} = - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{S}\right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}}{Sc^2}\right)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S^2}\nabla_1 S - \frac{\mathbf{R}}{S^3 c}\frac{\partial S}{\partial t'} - \frac{R}{S^2c^2} \dot{\mathbf{u}} + \frac{R\mathbf{u}}{c^2S^3}\frac{\partial S}{\partial t'}\right] \tag{9.72}$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}}{s^2R} - \frac{\mathbf{u}}{cS^2} + \frac{\mathbf{R}}{S^3c}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R}\right) - \frac{R}{S^3c}\frac{u^2}{c} + \frac{R}{S^3c}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c}\right)\right]$$

$$- \frac{R\dot{\mathbf{u}}}{S^2c^2} - \frac{R}{S^3c^2}\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R}\right) + \frac{R}{S^3c^3}\mathbf{u}u^2 - \frac{R}{c^2S^3}\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c}\right) \tag{9.73}$$

$$\left(\because \quad \nabla_1 S = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{u}}{c}\right).$$

باعادة جمع وترتيب الحدود نحصل على :

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{S^3}\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2S^3}\left\{\mathbf{R} \times \left(\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{u}}\right)\right\}\right]. \tag{9.74}$$

وبنفس الطريقة :

$$\mathbf{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{R}}{S^3}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{1}{cS^3}\frac{\mathbf{R}}{R} \times \left\{\mathbf{R} \times \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{u}}\right\}\right]. \tag{9.75}$$

تقود المعادلتان السابقتان الى النتيجة :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rv}. \tag{9.76}$$

لذلك فان المجال المغناطيسي B عمودي دائماً على R و E. اذا تفحصت العلاقة (9–74) جيداً فستجد ان المجال E مؤلف من مركبتين،المركبة الاولى هي المعطاة بالحد الاول وهي دالة للسرعة u،لكن الثانية هي دالة التعجيل، لذلك يمكننا كتابة :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a \tag{9.77}$$

حيث E_v تمثل مجال السرعة وE_a مجال التعجيل. اضافة لذلك نجد ان $\mathbf{E}_v \propto (1/R^2)$ لكن $\mathbf{E}_a \propto (1/R)$. اذا احتسبنا متجه بوينتنك لهذه المجالات فسنجد ان الزيادة الحاصلة فيه نتيجة هاتين المركبتين هي :

$$\mathbf{N}_v \propto \frac{1}{R^4}$$

$$\mathbf{N}_a \propto \frac{1}{R^2}. \tag{9.78}$$

لايجاد الطاقة المشعة من الجسيم،يجب تكامل مركبة N العمودية على سطح كرة نصف قطرها R. لأن عنصر المساحة يتضمن R^2 والتكامل الذي يحتوي N_v يتغير كـ $(1/R^2)$ لكن الذي يحتوي N_a يبقى محدداً، لذلك للقيم (R) العالية المنتجة من N_v تميل الى الصفر بينما تلك الناتجة من N_a هي محددةن لذلك نستنتج انه اذا تحرك جسيم بسرعة منتظمة فلا يستطيع ان يشع طاقة وانما الطاقة يمكن ان تشع فقط من الشحنات المعجلة. وتترتب على هذا نتائج واستخدامات مهمة.

قد يسأل احد هنا،مادامت الشحنات المعجلة تشع،وللتعجيل حالتان سلبية وايجابية،فهل هناك اشعاع في الحالة السلبية اي عند التباطؤ؟ في الحقيقة هناك اشعاع

فعلى سبيل المثال اذا قذفت قطعة معدنية بحزمة من الالكترونات فانها ستتوقف ويولد هذا التوقف اشعاعاً ويسمى (Bremsstrahlüng) اي اشعاع الايقاف (Braking radiation).

9-7) الاشعاع الناتج من جسيم مشحون معجل في سرعة بطيئة (Radiation from an Accelerated charged particle at low velocity) : -

اذا كانت سرعة الجسيم بطيئة جداً بحيث يمكن الغاء المقدار $\frac{u}{c}$ عندها $S \simeq R$ والمجالات المستحصلة من (9-74) , (9-75) تصبح :

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^3} \{\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}})\} \tag{9.79}$$

$$\mathbf{B}_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^3 R^2} (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{R}). \tag{9.80}$$

ومتجه بونيتنك الذي يضيف للاشعاع(او يزيد من الاشعاع) هو :

$$\mathbf{N}_a = \mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a = \mathbf{E}_a \times \frac{\mathbf{B}_a}{\mu_0} = \mathbf{E}_a \times \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}_a}{R}\right).$$

بما ان $\mathbf{E}_a$ عمودية على R.

$$\mathbf{N}_a = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \, \hat{\mathbf{e}}_n = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \, E_a^2 \, \hat{\mathbf{e}}_n \tag{9.81}$$

الآن

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^3} \{\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}})\}$$

$$= \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^3} \{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \dot{\mathbf{u}}\}$$

$$= \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^3} \{R \dot{u} \cos\theta \, \mathbf{R} - R^2 \dot{\mathbf{u}}\}$$

حيث θ تمثل الزاوية المحصورة بين R و U.

لذلك.

$$\mathbf{N}_a = \frac{1}{\mu_0 c}\,\frac{e^2}{16\pi^2\,\epsilon_0^2\,c^4\,R^6}\,\{R\dot{\mathbf{u}}\cos\theta\,\mathbf{R} - R^2\dot{\mathbf{u}}\}^2\,\hat{\mathbf{e}}_n$$

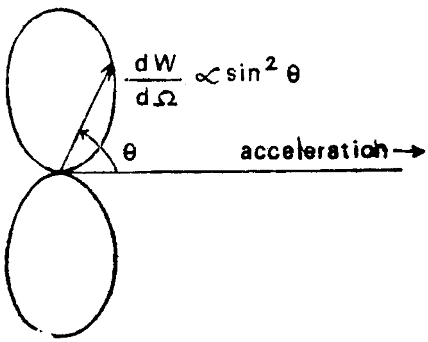
$$= \frac{e^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3\,R^6}\,\{R^4\,(\dot{u})^2\cos^2\theta + R^4(\dot{u})^2 - 2\,R^4(\dot{u})^2\cos^2\theta\}\,\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3\,R^2}\,(1-\cos^2\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_n = \frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3\,R^2}\,\sin^2\theta\,\hat{\mathbf{e}}_n. \tag{9.82}$$

يعطينا متجه بوينتنك مقدار سريان الطاقة لوحدة المساحة ولوحدة الزمن. ويمكن ايجاد القدرة المشعة على وحدة زاوية مجسمة بالضرب في R^2 التي تمثل المساحة على وحدة زاوية مجسمة.

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3}\,\sin^2\theta \tag{9.83}$$

لذلك فان التوزيع الزاوي للطاقة هو مجرد عبارة عن توزيع $\sin^2\theta$ (الشكل 9-9).



شكل رقم (9.9)

لايجاد مقدار الطاقة المشعة الكلية يجب اجراء التكامل حول كل كرة.

$$W = \frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3\,R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\,R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\,c^3}\;2\pi\,\frac{4}{3} = \frac{e^2(\dot{u})^2}{6\pi\,\epsilon_0\,c^3}. \tag{9.84}$$

وتعرف هذه باسم صيغة لارمر (Larmor formula) •

8-9 الاشعاع عندما تكون سرعة وتعجيل الجسيمات في خط واحد

-: (Radiation when the velocity and Acceleration of the Particles and colinear :

تكون مجالات الاشعاع في هذه الحالة :

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{4\pi\,\epsilon_0\, c^2\, S^3}\{\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{u}})\} \tag{9.85}$$

$$\mathbf{B}_a = \frac{eR}{4\pi\,\epsilon_0\, c^3\, S^3}(\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{R}) \tag{9.86}$$

$$\therefore \qquad E_a^{\,2} = \frac{e^2\, R^4\,(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0^{\,2}\, c^4\, S^6}\sin^2\theta \tag{9.87}$$

and

$$\mathbf{N}_a = \frac{1}{\mu_0 c}E_a^{\,2}\,\hat{\mathbf{e}}_n = \frac{e^2\, R^4\,(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\, c^3\, S^6}\sin^2\theta\,\hat{\mathbf{e}}_n. \tag{9.88}$$

كية الطاقة المشعة في وحدة زاوية مجسمة في θ ومقاساً خلال الفترة dt هي :

$$(\theta) = \frac{e^2\, R^6\,(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\, c^3\, S^6}\sin^2\theta\, dt. \tag{9.89}$$

وكية الطاقة سبقت بالاشارة السالبة لان هذه الطاقة هي التي يفقدها الالكترون في الفترة الزمنية dt dt′ خلال انبعاث الاشارة.

والطاقة المفقودة في وحدة الزمن وفي وحدة زاوية مجسمة هي :

$$\frac{dW}{d\Omega} = -\frac{dW\ (\theta)}{dt'} = \frac{e^2\, R^6\,(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\, c^3\, S^6}\sin^2\theta\frac{dt}{dt'} \tag{9.90}$$

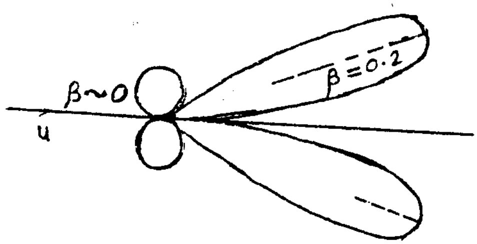
$$= \frac{e^2\, R^6\,(\dot{u})^2}{16\pi^2\,\epsilon_0\, c^3\, S^6}\sin^2\theta\,\frac{S}{R}$$

حيث استخدمنا العلاقة (97-9) في الحصول على هذه النتيجة .

$$\therefore \quad \frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 R^6 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^6} \sin^2\theta = \frac{e^2 R^5 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^5 \left(1 - \frac{\beta \cdot R}{R}\right)^5} \sin^2 \theta$$

$$= \frac{e^2 (\dot{u})^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5}. \qquad (9.91)$$

تعطينا هذه العلاقة التوزيع الزاوي للطاقة المشعة . اذا كانت $\beta \ll 1$ اي $u \ll c$ ، فسنستبعد صيغتنا (83–9) وللسرع البطيئة. على كل حال اذا كان U→C اي $\beta \to 1$, ستزداد الطاقة المشعة نحو الامام،شكل (10–9) ، لكن ليس الى الامام تماماً،اي للزاوية Θ=0.



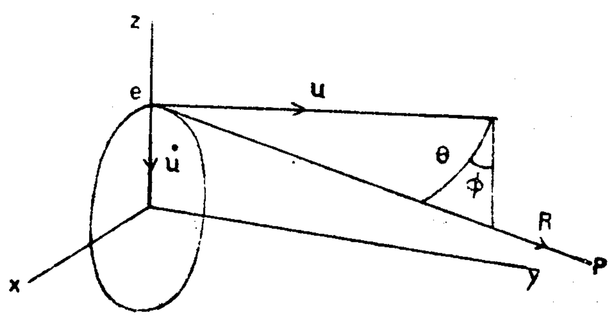
شكل رقم (9.10)

9-9 اشعاع صادر من جسيم مشحون يتحرك في مدار دائري

- : (Radiation from a Charged Particle Moving in a Circular Orbit)

سندرس الآن حالة مهمة تتحرك فيها الشحنة في دائرة نصف قطرها ρ وبتردد زاوي مقداره ω ،

$$\therefore \quad u = \rho\omega, \dot{u} = \rho\omega^2$$



شكل رقم (9.11)

يوضح الشكل (11–9) مـدار الجسم الـذي يقع في المستوي yz، واتجاه التعجيل $\dot{u}$ نحو المركز، لهذا فهو عمودي على السرعة u.

لتكن θ هي الزاوية بين R , U و ϕ هي الزاوية السمتية (azimuthal angle)

لذا

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{R} = uR\cos\theta \tag{9.92}$$

$$\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{R} = \dot{u}R\sin\theta\cos\phi. \tag{9.93}$$

ويعطى مجال الاشعاع بالعلاقة الآتية :

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^3}\left[\mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{u}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{u}}\right\}\right]$$

ومتجه بوينتنك :

$$\mathbf{N}_a = \frac{1}{\mu_0 c}E_a^2\,\hat{\mathbf{e}}_n$$

Now $\left[\mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{u}}\right]^2 = \left[\left(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right) - \left\{\mathbf{R}\cdot\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right)\right\}\dot{\mathbf{u}}\right]^2$

$$= \left(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)^2\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right)^2 + \left\{R^2\dot{\mathbf{u}} - \frac{R}{c}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}\right)\dot{\mathbf{u}}\right\}^2$$

$$- 2\left(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c}\right)\left\{R^2\dot{\mathbf{u}} - \frac{R}{c}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}\right)\dot{\mathbf{u}}\right\}$$

$$= -\left(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{R}\right)^2 R^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + (\dot{u})^2R^4\left(1 - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{Rc}\right)^2$$

$$= -(\dot{u})^2R^4\sin^2\theta\cos^2\phi + (\dot{u})^2R^4\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta\cos^2\phi$$

$$+ (\dot{u})^2R^4 - \frac{2\dot{u}^2R^4u\cos\theta}{c} + \frac{(\dot{u})^2R^4u^2\cos^2\theta}{c^2}$$

$$= (\dot{u})^2R^4\left[\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right]. \tag{9.94}$$

حيث استخدمنا العلاقتين (92–9) و (93–9)

$$\therefore\quad \mathbf{N}_a = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2c^4S^6}(\dot{u})^2R^4\left[\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)^2\right.$$

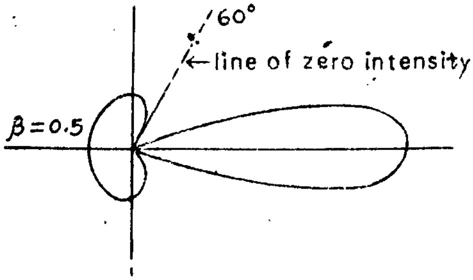
$$\left. - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right]\hat{\mathbf{e}}_n. \tag{9.95}$$

ويعطى التوزيع الزاوي للطاقة المشعة بالعلاقة الآتية :

$$-\frac{dW(\theta)}{dt'}\,d\Omega=\left(\mathrm{N}_a\cdot\hat{\mathrm{e}}_n\right)\;R^2\frac{dt}{dt'}\,d\Omega$$

$$=\frac{e^2(\dot{u})^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3}\frac{\left[\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right]}{\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right)^5}\,d\Omega \qquad (9.95)$$

حيث استخدمنا (67-4) وعوضنا عن S كما في (91-9) يوضح الشكل (12-9) النوذج الاشعاعي او النوذج الاشعاع (radiation pattern) في المستوي $\phi=0$ ولقيمة معلومة لـ β. عند قيم u الكبيرة يشتد الاشعاع في المقدمة ويصبح شعاعاً حاداً (sharp ray) كلما اقتربت لها من C.



شكل رقم (9.12)

تكامل المعادلة (96-9) يعطي النسبة الكلية للاشعاع.

$$-\frac{dW(\theta)}{dt'}=\frac{e^2(\dot{u})^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\frac{1}{\left[1-\frac{u^2}{c^2}\right]^2} \qquad (9.97)$$

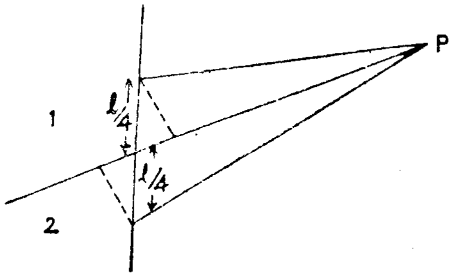
10-9 اشعاع رباعي القطب الكهربائي (Electric Quadrupole Radiation) :-

---

تصور ان اثنين من ثنائي قطب كهربائي سعة كل منهم P، ويقعان على خط مستقيم واحد ، ويتذبذبان بطورين متعاكسين او خارج الطور بحيث ان محصلة عزم ثنائي القطب لها هي صفر. مع ذلك فان المنظومة هذه تمتلك عزم رباعي قطب وهكذا سيبعث اشعاع رباعي القطب.

يمكن اشتقاق علاقة مجال رباعي القطب بسهولة وذلك لتراكب مجالي ثنائي القطب. يوضح الشكل (13-9) رباعي القطب.

المجال الناتج من ثنائي القطب واحد في نقطة الاصل عند النقطة P في منطقة الاشعاع هو :



شكل رقم (9.13)

$$E_\theta = -\frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0}\sin\theta\frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{k^2p_0}{4\pi\epsilon_0 r}e^{i\omega t'}\sin\theta \qquad (9.98)$$

يقع الثنائيان على مسافة $\ell/4$ و $\ell/4$ من نقطة الاصل وثنائي القطب (1) اقرب للنقطة P من نقطة الاصل بمسافة هي تقريباً $(\ell/4)\cos\theta$ ، لكن ثنائي القطب (2) ابعد بنفس المسافة. لذلك وان طوري ثنائي القطب بالنسبة الى نقطة الاصل يكونان :

$$\left(\frac{kl}{4}\right)\cos\theta \text{ and } -\left(\frac{kl}{4}\right)\cos\theta - \pi.$$

ويظهر عامل الطور $-\pi$ (Phase factor) لأن ثنائي القطب يتذبذبان في طورين متعاكسين. عليه تكون مركبة مجال رباعي القطب :

$$E_\theta = -\frac{k^2p_0}{4\pi\epsilon_0 r}\sin\theta\, e^{i\left(\omega t' - \frac{kl}{4}\cos\theta\right)} - \frac{k^2p_0}{4\pi\epsilon_0 r}\sin\theta\, e^{i\left\{\omega t' - \left(-\frac{kl}{4}\cos\theta - \pi\right)\right\}}$$

$$= -\frac{k^2p_0\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\left\{e^{-i\frac{kl}{4}\cos\theta} - e^{i\frac{kl}{4}\cos\theta}\right\}e^{i\omega t'}$$

$$= \frac{k^2p_0\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\,2i\sin\left(\frac{kl}{4}\cos\theta\right)e^{i\omega t'}. \qquad (9.99)$$

باستخدام العلاقة نحصل على :

$$H_\phi = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_\theta$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} R_e\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, |E_0|^2\, \hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{k^4 p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \sin^2\left(\frac{kl}{4}\cos\theta\right)\cdot 4$$

and $$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \hat{\mathbf{e}}_n r^2$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_0} k^4 p_0^2 \sin^2\theta}{8\sqrt{\mu_0}\, \pi^2 \epsilon_0^2} \sin^2\left(\frac{kl}{4}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{kl}{4}\cos\theta\right). \qquad (9.100)$$

اذا $l = \lambda$, i.e. $kl = 2\pi$

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right). \qquad (9.101)$$

عزم رباعي القطب هو Q ويساوي $2P_0 l$

$$\therefore \left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3\, 4\, l^2} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\omega^6 Q^2}{128\, \pi^4 \epsilon_0 c^5} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right). \qquad (9.102)$$

فرضنا في معالجتنا اعلاه ان $l = \lambda$، الان سنفرض ان l صغير جداً ويقترب من الصفر $l \longrightarrow 0$، ستزداد P_0 لتبقى Q ثابتة. وسينقلها الثنائيان الى رباعي نصف نقطي (Point quadrupole) متركز في نقطة الاصل. بما ان Kl صغير جداً يمكن كتابة العلاقة (9–99) بالشكل الآتي :

$$E_\theta' = 2i\, \frac{k^2 p_0}{4\pi \epsilon_0 r} \sin\theta\, \frac{kl}{4} \cos\theta\, e^{i\omega t'} \qquad (9.103)$$

لذلك ،

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{k^6 p_0^2 l^2 c}{128\pi^2 \epsilon_0} \sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{\omega^6 p_0^2 l^2}{128\pi^2 \epsilon_0 c^5} \sin^2\theta \cos^2\theta. \qquad (9.104)$$

واضح جداً ان اعلى قدرة مشعة هي عند الزاوية $\theta = 45°$.

- تمارين الفصل التاسع -

9_1 برهن أن كيف العلاقة (9_22) مشتقة من العلاقة (9_21).

9_2 جد علاقة تعبر عن المجال الناتج من شحنة تتحرك بسرعة منتظمة.

9_3 استنبط علاقة تعبر عن المجالين الكهربائي والمغناطيسي الناتجين من أطار تيار صغير في نقاط بعيدة جداً عن الاطار ثم برهن على امكانية استخدام التكافو الامبيري (Ampere's equivalance) بين الثنائي المغناطيسي والاطارات التيارية في حساب مجالات الاشعاع.

9_4 برهن على أن قشرة كروية مشحونة بانتظام تحت تذبذب شعاعي تماماً سوف لاتشع.

9_5 جسيم كتلته m يتحرك في مدار دائري نصف قطره (a) تحت قوى كولومب. جد شدة اشعاع الجسيم ثم عبر عنه بصيغ طاقة الجسيم .

9_6 مذبذب رباعي قطب خطي (linear quadrupole oscillator) متكون من الشحنات $-e, 2e, -e$، تقع الشحنة الموجبة 2e في نقطة الاصل، وتقع احدى الشحنتين السالبتين في $Z_1 = a\cos \frac{1}{2} \omega t$ والاخرى في $Z_2 = -a\cos \omega t$. جد المجالات في المسافات البعيدة وكذلك متوسط المعدل الذي تشع به الطاقة.

«الفصل العاشر»

الكهربائية الحركية النسبية

Relativistic Electrodynamics

«الفصل العاشر»

الكهربائية الحركية النسبية

Relativistic Electrodynamics

العالم الذي يحيط بنا له واقعية موضوعية، فهو لايتغير بتغير وجهة نظرنا او مزاجنا في اثناء وصفهن احد اهداف الفيزياء هو صياغة قوانين مستقلة تماماً عن المراقب او الانظمة المرجعية، ويجب ان تكون القوانين صحيحة لكل المراقبين، سنتفحص قانون نيوتن الاول من وجهة النظر هذه وهو ينص على أن :

«الجسم الساكن يبقى ساكناً والمتحرك يبقى متحركاً بسرعة وبخط مستقيم مالم تؤثر عليه قوة خارجية».

أن القانون يفترض مسبقاً وجود مراقب له وسائل معينة لقياس الموقع والزمن. اذا كان هناك مراقبان الاول (A) في اطار مرجعي معين وجد ان للجسم حركة منتظمة دون تأثير اي قوة عليه، اما المراقب الثاني (B) الذي يتحرك بتعجيل بالنسبة للمراقب (A) فسيجد ان حركة الجسم ليست منتظمة لذلك نستنتج أن قانون نيوتن الاول ليس صحيحاً على الرغم من أن قانون نيوتن الاول ليس صحيحاً لكل الانظمة او الاطر المرجعية لكنه صحيح لبعض الانظمة المرجعية ذات الامتياز المعين، وتعرف هذه الانظمة باسم الانظمة المرجعية ذات القصور الذاتي (inertial frame of reference). الاطر القاصرة هي تلك التي تكون فيها قوانين القصور الذاتي ـ قانون نيوتن الاول ـ صحيحة، ويمكن ان نسمي منظومة مرجعية(reference system) يتحرك فيها جسم دون تأثير قوة خارجية عليه ويستمر بسرعة ثابتة بانها منظومة قاصرة (inertial system) واذا تحركت منظومة اخرى بسرعة منتظمة بالنسبة للمنظومة القاصرة تعتبر هي ايضاً منظومة قاصرة. لحل الاطر التي تتحرك بسرع ثابتة بالنسبة لبعضها تعتبر اطر قاصرة (inertial frames) .

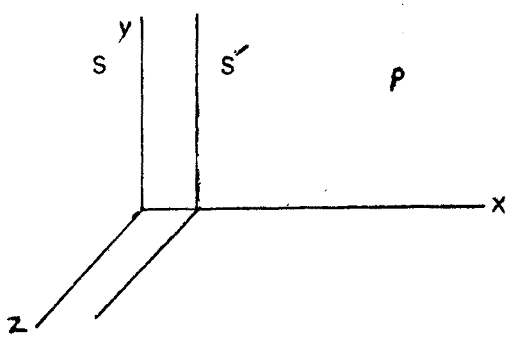
10-1 تحويل كاليليان (Galilean Transformation) :

لدينا في الفيزياء يسمى مبدأ النسبيـة (Principle of relativity) التي تعتبر بموجبـه كل قوانين الطبيعة متشابهة في كل الانظمة المرجعيـة القـاصرة. وهـذا يعني ان المعـادلات التي تعبر عن قوانين الطبيعة تبقى محتفظة بصيغتها في الانظمة القاصرة المختلفـة، أي انها لاتتغير طبقاً لتحويل الاحداثيات والزمن من منظومة الى اخرى. وقـد اثبتت التجـارب مصداقية هذا المبدأ.

لنأخـذ اطـارين قـاصرين S و S' ذوي محاور متوازيـة (الشكل 10-1). افرض أن S يتحرك بمحاذاة المحور X بسرعة منتظمـة هي v نسبـة الى S. سيتم تحـديـد وقوع أي حدث في نقطة P من المراقب في S بـالاحـداثيـات الفضـائيـة X,y,z (Space coordinates) والزمن t. ونفس الحـدث سيـوصف من قبـل المراقب في S بـالاحـداثيـات (X', y', Z', t').

أن تحويل احداثيات نقطة من نظام الى آخر هو على النحو الآتي :

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t. \qquad (10.1)$$



الشكل (10-1)

والعلاقة الاخيرة هي نتيجة احـد معتقـدات الفيزيـاء القـديمـة التي تؤمن بـأن الزمن مطلق. وهذا مستقل عن الاطار المرجعي.

يسمى التحويل في (10-1) بتحويل كاليليان (Galilean transformation)

أن حواسنا الاعتيادية تقودنا الى الايمـان بـأن الاطوال والفترات الزمنيـة هي نفسها لكل المراقبين القـاصرين (inertial observers) الذين يراقبون الحدث . وهذا يعني

انه اذا ماكان هنـاك قضيبـان متسـاويـان في الطول عنـد الثبـات فلا يوجـد مبرر لتغير اطـوالهـا اذا تحركا بسرع نسبية ونفس الشيء اذا ماتم ضبـط تـزامن سـاعتين في حـالـة الاستقرار فهل ستتوافق قراءتاهما للزمن اذا ماتحركنا حركة نسبيـة وهكـذا، ليكن X_B و X_A يمثلان نهايتي القضيب استنـاداً الى قيـاس المراقب في S لاحـظ أن قيـاس النهـايتين يؤخذ في نفس الوقت. لذا يكون طول القضيب هو :

$$dl = x_B - x_A.$$

وسيقيس المراقب في S' الذي يتحرك القضيب بالنسبة له بسرعة v، النهايتين وهمـا X'_B و X'_A ويكون الطول بالنسبة له هو :

$$dl' = x'_B - x'_A.$$

بموجب افتراضاتنا التي نتوقعها فـان $dl' = dl$ لنرى الآن هل تبقى هـذه التوقعـات صحيحة اذا ما طبقنا تحويل كاليليان للاحداثيات :

$$\begin{aligned} dl' &= x'_B - x'_A \\ &= (x_B - vt) - (x_A - vt) \\ &= (x_B - x_A) = dl. \end{aligned} \tag{10.2}$$

لذا نجد أن قياسات الفواصل الفضائيـة (space – interval measurements) هي مطلقة أي انها نفسها لجميع المراقبين القاصرين طبقاً لتحويل كاليليان.

من (10.1) لدينا :

لذلك :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \; (\because \quad t' = t)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z'}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

وهكـذا نجـد انـه على الرغم من تغير سرعتها فـان تعجيلها متطـابـق معـادلـة نيـوتن للحركة في النظامين هي :

$$\mathbf{F}_i = m\,\ddot{\mathbf{x}}_i = m\,\ddot{\mathbf{x}}_i' = \mathbf{F}_i' \qquad (i = 1, 2, 3). \text{ حيث } \qquad (10.3)$$

لذلـك فـان قوانين الميكانيـك القـديمـة لاتتغير تحت تحويل كاليليان. لنفحص الآن سلوك قوانين الكهرومغناطيسية تحت تحويل كاليليان. نعرف أن معادلة الموجة العددية الآتية هي نتيجة معادلة ماكسويل :

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (10.4)$$

لدينا من تحويل كاليليان :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{v}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}$$

$$\textbf{and} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2},\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2},\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

بالتعويض في (10ـ4) نحصل على :

$$\nabla'^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} + \frac{2}{v}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'} = 0 \qquad (10.5)$$

وهكذا نجد أن معادلة الوجة لم تحتفظ بهيئتها عند التعويض في (10ـ1) لذلك يختلف الحـال في الكهرومغنـاطيسيـة عنـه في الميكانيـك، ولاتحتفـظ الكهربـائيـة الحركيـة بنفس المبـاديء مـع افتراض الثبـات الكاليليـاني وهـذا يمكن رؤيتـه اذا مـاتـذكرنـا ان المـوجـة الكهرومغناطيسية المستنبطة من معادلة ماكسويل تنتشر بسرعة ثـابتـة C، لكن السرعـة التي سيقيمهـا المراقب في الاطـار المتحرك S′ ستكـون أمـا $c + v$ أو $c - v$ اعتماداً على اتجاه حركته النسبية. لذلـك فـان سرعـة الموجـة الكهرومغنـاطيسيـة ليست ثـابتـة تحت تحويل كاليليان. وعليـه سيتغير شكل معـادلات مـاكسويل عنـد التحويل من نظـام الى اخر. هذه الوضعية تجعلنا امام ثلاثة احتمالات علينا ان نختار احداها :

(1) النظرية الكهرومغناطيسية الصحيحة مثلها مثل ميكانيك نيوتن يجب أن لاتتغير تحت تحويل كاليليان، وبما انها ليست كذلك اذن معادلات ماكسويل التي تشكل اساساً للنظرية الكهروديناميكية ليست صحيحة ويجب تحويرها.

(2) يمكن استخدام تحويل كاليليان على الميكانيك، لكن هناك اطاراً قاصراً فريداً مفضلاً تصبح فيه معادلات ماكسويل وعند استخدام اطر مرجعية اخرى يجب تعديل هذه المعادلات بما يلائم هذه الاطر.

(3) معادلات ماكسويل هي صحيحة وهناك تحويل آخر لاتتغير فيه قوانين الكهروداينمك والميكانيك ايضاً. وهو بالتأكيد ليس تحويل كاليليان، وهذا يعني ضمناً أن قوانين نيوتن ليست صحيحة اذا كان الاحتمال الاول هو الصحيح وجب علينا اداء تجارب تثبت وجود انحراف عن نظرية ماكسويل للكهروداينمك، الا انه على العكس من ذلك فقد اثبتت التجارب نجاح نظرية ماكسويل وبشكل مدهش

اما اذا قبلنا البديل الثاني، فيجب ان نعثر على الاطار الممتاز تجريبياً، وهو في الحقيقة اطار الاثير القديم الذي بموجبه يعتبر الفضاء مملوءاً بوسط يسمى الاثير ويفترض ان تنتشر فيه الموجات بسرعة ثابتة "C" وتصح فيه ايضاً معادلات ماكسويل، والمراقب الممتاز هو ذلك الثابت بالنسبة للاثير.

أن اشهر التجارب التي حاولت اثبات الاطار المطلق - اطار الاثير - كانت تجارب مايكلسون - مورلي (Michelson – Morley experiments). وما وجدته هذه التجارب يبدو على كل حال انه بحكم اطار الاثير، الا انهم لم يجدوا اي دليل على وجود اطار قاصر فريد

على الرغم من النتائج السلبية لتجارب مايكلسون - مورلي لم يرغب العلماء في التخلي عن فكرة اطار الاثير، ولتتوافق نظرية الاثير مع نتائج تجارب مايكلسون - مورلي افترضوا ان الاثير ينجرف (dragged) مع الاجسام المتحركة. هذا الافتراض يعطي تلقائياً نتائج غير صحيحة لتجاربنا للقياس بالتداخل. مع ذلك فان تجارب فيزاو (Fizeau) 1853 واكثر حداثة منها تلك المبنية على تأثير ماسباور (Mössbauer effect)

التي قام بها شامبني (champeney)، اسحق (Isaak) وخان Khan (1963)وتجارب مماثلة نفذها جاسيا (Jaseja)، وجاران (Jaran)، وموازي (Murray) وتاونس (Townes) 1964 باستخدام ميزر الامونيا (ammoina maser) لم تعطي أي نتائج مبرهنة على عدم قابلية اكتشاف (أو عدم امكانية وجود) حركة نسبة الى اطار مرجعي مطلق معين.

10–2 فرضيات النظرية النسبية الخاصة (Postulates of Special Theory of Relativity)

وجدنا أن قوانين الكهروداينمك صحيحة ولاتحتاج الى تحوير،وكذلك وجدنا ان فرضية الاثير غير مستحبة (untenable). وهكذا اختار اينشتاين (Einstein) البديل الثالث. احدى النتائج المهمة لتجارب مايكلسون - مورلي هي ان للضوء سرعة ثابتة في جميع الاتجاهات اي انه موحد الخواص ولاتعتمد سرعته على حركة المراقب. فرض اينشتاين ان سرعة الضوء ثابتة في جميع المنظومات القاصرة. ولاتعتمد على المصدر او على المراقب. بما ان مبدأ كاليليان يتطلب اعتماد سرعة الضوء على المصدر والمراقب،استنتج اينشتاين حتمية ابدال تحويل كاليليان وتعديل قوانين الميكانيك التي تتوافق معه. وبنى نظريته النسبية الخاصة على فكرتين اساسيتين وهما تكافؤ الاطر القاصرة وثبات سرعة الضوء والفرضيات هي :

(1) القوانين الفيزياوية هي نفسها في جميع المنظومات القاصرة،اي ان جميع الاطر القاصرة متكافئة. بعبارة اخرى يستحيل التقاط الاطار القاصر الممتاز بأي وسيلة من وسائل القياس الفيزياوية وكذلك يستحيل ايجاد حالة الحركة المطلقة (absolute motion) وانما يمكننا التحدث عن حركة نسبية.

(2) سرعة الضوء لها نفس القيمة في جميع الانظمة القاصرة. من الضروري دراسة وتقييم الفرضية الثانية هذه. عندما جسيم يتأثر تبادلياً مع جسيم آخر،يعبر عن هذا التأثير المتبادل في الميكانيك بطاقته الكامنة. لذلك فان هذا التأثير المتبادل يعتمد على

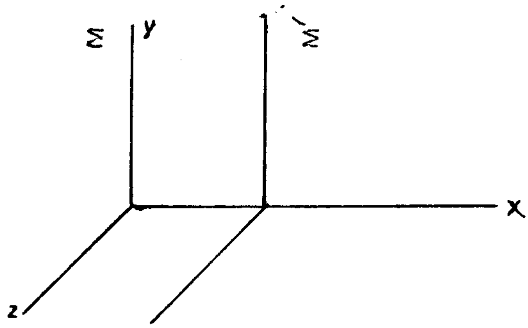
موقع الجسيم. واي تغير فيه يؤثر حالاً على الجسيم الآخر وهذا يعني ان اشارة التأثير المتبادل تنتشر لحظياً من جسيم لآخر وبعبارة اخرى يفترض سرعة انتشار الاشارة ان تكون لانهائية او غير محددة وتعتمد نسبية كاليليان على هذا الافتراض. في الواقع اي تغير يحدث في جسيم معين يظهر نفسه في الجسيم الاخر بعد انفلات او مرور فترة زمنية معينة. وتنتشر اشارة التأثير المتبادل بسرعة معينة ايضاً من جسيم الى آخر. وهذه سرعة محددة وهي السرعة القصوى للتأثير المتبادل،واضح انه يمكن ان توجد اي حركة بسرعة اعلى من هذه في الطبيعة ويتطلب مبدأ النسبية ان تكون هذه السرعة سرعة الضوء ـ نفسها في جميع الاطر القاصرة.

في الحقيقة لم يتم اثبات الفرضية الثانية عند عرضها،الا انه قد تم التحقيق منه بصورة قاطعة في سنوات لاحقة. على سبيل المثال سرعة الاشعاع الصادر من اضمحلال π- meson كما قاسها كل من فارلي (Farley)، بايلي (Bailey) ، وبيكاسو (Picasso) كانت $(2.9974 \pm 0.0003) \times 10^8$ متر / ثانية بالرغم من ان الميزونات mesons كانت تتحرك بسرعة اعلى من 0.99975 C (اي من سرعة الضوء). بالرغم من بساطة هذه الفرضية الا ان الفيزياويين اجبروا على اعادة النظر في افكارهم عن الفضاء والزمن.

10-3 تحويل لورنتس (Lorentz Transformation): -

ينصب اهتمامنا الآن على ايجاد معادلة للتحويل بين منظومتين قاصرتين تحل محل تحويل كاليليان وتحتفظ بسرعة الضوء ثابتة في اثناء التحويل. وعلينا بعد ذلك التحقق من احتفاظ القوانين الفيزياوية بهيئتها تحت هذا التحويل الجديد. والقوانين التي تتغير تحت هذا التحويل الجديد. والقوانين التي تتغير تحت هذا التحويل يجب تحويرها. ويسمى التحويل الذي سنحصل عليه تحويل لورنتس وقد اشرنا اليه في الجزء (5-9) وسنرى الآن كيفية اشتقاق معادلات هذا التحويل من فرضيات اينشتاين مباشرة .

سنأخذ منظومتين قاصرتين Σ و Σ' كما في الشكل (2-10).



شكل (10.2)

تتحرك المنظومة Σ' بسرعة ثابتة v نسبة الى Σ وباتجاه المحور x. ويجب طبقاً لاينشتاين التخلي عن فكرة الزمن المطلق التي ورثها تحويل كاليليان لاينشتاين فالزمن معنى نسبي ويجب معاملته كالفضاء تماماً. في Σ-time t=0 يتطابق اصل المنظومتين Σ ، Σ' وينطبق المحور X' على المحور X. والنقاط الثابتة بالنسبة للمنظومة Σ تكون متحركة بسرعة v نسبة الى Σ. . ويمكن التعبير عن التحويل الاكثر شمولاً بين منظومتي الاحداثيات على النحو الآتي:

$$x' = a(x - vt),\ y' = Cy,\ z' = Dz,$$
$$t' = Ex + Ft \tag{10.6}$$

حيث علينا ايجاد الكميات $a, C, D, E,$ ايضاً. لنفترض ان موجة كروية كهرومغناطيسية تترك نقطة اصل Σ. عند الزمن t=0 بما ان سرعة انتشار الموجة هي نفسها في جميع الاتجاهات وفي كل اطار،يمكن وصف تقدم الموجة في الاطارين بالمعادلات الآتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{10.7}$$

and

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{10.8}$$

لذلك

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \tag{10.9}$$

اذا فرضنا ان X=0 , z=0 عند الزمن t=0 ، سنحصل من المعادلتين ,(10-9) (10-6) على مايلي :

$$y^2 = y'^2 \qquad \therefore \quad C = 1$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان D=1

وبالتعويض في (10-8) من (10-6) نحصل على :

$$a^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(Ex + Ft)^2$$

أي :

$$(a^2 - c^2E^2)x^2 - 2(a^2v + c^2EF)xt + (a^2v^2 - c^2F^2)t^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

وهذا يجب ان يطابق (10-7)

$$\therefore \quad a^2 - c^2E^2 = 1,\ a^2v^2 - c^2F^2 = -c^2,\ a^2v + c^2EF = 0. \qquad (10.10)$$

ولحل هذه المعادلات سنحذف a^2 اولاً وسنحصل على :

$$F(F + vE) = 1$$

$$c^2E(F + vE) = -v$$

وبحذف E نحصل على :

$$F^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \therefore \quad F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$.

اذا

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\ E = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

لذلك فان معادلات التحويل (10-6) هي :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t - vt)$$

$$y' = y \qquad (10.11)$$

$$z' = z$$

و

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

حيث

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

هذه هي معادلات تحويل لورنتس. لاحظ عندما تكون قيم المقدار v/C فانها تقترب من معادلات تحويل كاليليان ومعادلات التحويل العكسي المناظرة لها هي :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y' \qquad (10.12)$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx^1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

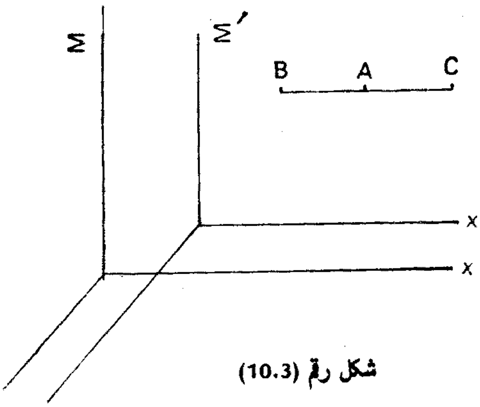
اما معادلات تحويل سرعة جسم متحرك فيكن ايجادها باخذ مشتقة (11–10) بالنسبة لـ t , t.

10–4 بعض النتائج المترتبة على تحويل لورنتس
(some consequences of Lorentz Tranformation)

سندرس الان ثلاث نتائج مهمة لتحويل لورنتس. وتأخذ اهميتها بالتحديد في المجالين الكهربائي والمغناطيسي.

1ـ مبدأ او فكرة التزامن (The concept of simultaneity):ـ

اذا وقع حدثان في زمن واحد من وجهة نظرمراقب في منظومة مرجعية لايتحتم ان تكون متزامنة ايضا من وجهة نظر مراقب في منظومة اخرى. خذ منظومتان Σ و Σ' تتحرك فيها الان بسرعة v له بالنسبة للاسبق، كما في الشكل (3–10).



شكل رقم (10.3)

اذا انطلقت اشارة من النقطة A في Σ' باتجاهين متعاكسين وموازيين للمحور x فانها ستصل النقطتين B و C اللتين تبعدان بمسافة متساوية من A في نفس الوقت اي متزامنة. على كل حال بالنسبة لمراقب في Σ, بما ان نقطة B تقترب منه ونقطة C تتراجع، فان الاشارتان سوف لاتصل في وقت واحد وانما باوقات مختلفة اي ان الاحداث لم تعد متزامنة.

2 - تقلص فيزجيرالد (Fitz Gerald contraction) :-

تصور قضيبا صلداً نهايتيه، مثبتين في الاطار Σ' عند النقطتين $(X'_2, 0, 0)$, $(X'_1, 0, 0)$ وعند الزمن t بالذات شوهدت نهايتيه في الاطار Σ, عند X_2 , X_1 من (10–11) لدينا :

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ان طول القضيب المتحرك اذا ماقيس في Σ عند الزمن نفسه t هو المسافة بين نهايتيه ، اي :

$$x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2}$$

أو

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2} \qquad (10.13)$$

وهكذا فان القضيب تقلص بمقدار العامل $\sqrt{1-\beta^2}$، ويسمى هذا تقلص فيزجيرالد (Fitz Gerald Contrction) وهكذا فان كل جسم يبدو اطول عندما يكون ساكناً بالنسبة للمراقب وعندما يتحرك الجسم يظهر تقلصاً باتجاه الحركة مقدار العامل $\sqrt{1-\beta^2}$، بما ان $z' = z$, $y' = y$, فان ابعاد الجسم العمودية على اتجاه الحركة لاتظهر تغيراً.

(3) تمدد الزمن (Time dilation) : -

افرض ان ساعة مثبتة بالنقطة X' في الاطار Σ' تقيس الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ بين حدثين وقعا في النقطة x عند الزمن t_1 و t_2 وبالنسبة لمراقب في Σ, فان الحدثين وقعا عند الزمن t_1 و t_2 من (10–12) ،

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10.14)$$

المراقب في Σ سيعتبر مقدار الفترة الزمنية الفاصلة بين الحدثين هي $t_2 - t_1$ والتي هي اكبر من تلك التي تقيسها الساعة في Σ'. وهذا يعني او يثبت ان الساعة المتحركة تظهر كأنها تسير سيراً ابطأ.

10-5 الشحنات والمجالات كما تراقب في اطارات مختلفة (Charges and fields as observed in different frames)

(1) الشحنة (Charge) : نعرف ان الشحنة الكهربائية مطلقة الحفظ. البروتونات والالكترونات في حركة دائمة في الذرة ومع ذلك تحتفظ الذرة بتعادلها الكهربائي اذ تلغى او تمحى تماماً الشحنات السالبة والموجبة. وهذا يعني ان الشحنة في كل جسيم اولي (elementary particle) هي ±e اذا كان او لم يكن الجسيم متحركاً بالنسبة للمراقب. الشحنة في الجسيم الاولي ومن ثم الشحنة الكلية التي يحملها جسم كبير نسبياً هي غير متغيرة بالنسبة للورنتس.

٢- كثافة الشحنة (Charge density) : عرفنا ان الشحنة غير متغيرة تحت او عند لورنتس فهل كثافة الشحنة هي كذلك ايضاً.

للاجابة عن هذا السؤال افرض ان مجموعة من الشحنات الموجبة موضوعة على خط معين وتنفصل بينها مسافات متساوية وشحنة كل منها هي +e . اذا ازيحت هذه الشحنات مسافة وحدة طول واحدة في الاطار Σ حيث الشحنات ساكنة فيه. فان كثافة الشحنة الخطية كما يراها مراقب Σ هي Ne كولومب/ متر. اذا كانت N هي عدد الشحنات في وحدة الطول. مراقب آخر Σ' يتحرك بسرعة v

بموازاة الشحنات لايرى ان الشحنات تغطي وحدة الطول،حيث تنحصر الشحنات في مسافة $\sqrt{1-\beta^2}$ بسبب تقلص فيزجيرالد،لذا فان كثافة الشحنة الخطية بالنسبة لهذا المراقب هي $\frac{N_e}{\sqrt{1-\beta^2}}$ كولومب / متر .

٣ـ القوى الكهربائية والمغناطيسية (Electric and Magnetic Forces)

لندرس الآن القوى التي يسلطها المجالان الكهربائي والمغناطيسي كما يراها مراقبون في Σ و Σ' افرض ان سلكاً مستقيماً طويلاً في الاطار Σ تجري فيه الالكترونات الحرة بسرعة انجراف مقدارها v باتجاه المحور X. لتكن n هي عدد الالكترونات لوحدة الطول. وهذا مساوٍ لعدد الايونات الموجبة لوحدة الطول. ونفرض ان شحنة q تتحرك بسرعة v بموازاة السلك. ستسلط على هذه الشحنة قوة هي F وتساوي q (VxB) في الاطار Σ . حيث B تمثل المجال المغناطيسي الناتج من التيار في السلك.

الآن افرض ان مراقباً آخر في الاطار Σ' يتحرك بسرعة v باتجاه المحور x . بالنسبة لهذا المراقب ستكون الشحنة q ساكنة . ولذلك سوف لايكون هناك اي قوة مغناطيسية أي $F=0$ لكن جميع الانظمة القاصرة متكافئة لذلك يجب أن يتوافق هذا المراقب مع المراقب في Σ' في وجود قوة على q حتى وان لم تكن قوة مغناطيسية كيف سيبرر هذه القوة ؟ للمراقب في Σ ، كثافة الشحنة الخطية السالبة هي $\lambda^- = -ne$ وكثافة الشحنة الخطية الموجبة هي $\lambda^+ = ne.$ والكثافة الكلية هي :

$$\lambda = \lambda^- + \lambda^+ = 0. \quad (10.15)$$

وتعطى كثافة التيار بالسلك من العلاقة :

$$J_x^- = -nev = \lambda^- v \text{ and } j_x^+ = 0$$
$$j_x = j_x^+ + j_x^- = \lambda^- v. \quad (10.16)$$

ويولد هذا التيار مجالاً مغناطيسياً B هو :

$$B = -\frac{\mu_0 nev}{2\pi r}$$

وهذا ينتج قوة F تؤثر على الشحنة وتساوي :

$$|\mathbf{F}| = |q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = -\frac{\mu_0 nev^2 q}{2\pi r}. \qquad (10.17)$$

لنرى الآن كيف تقيم القوة من المراقب في Σ'. ان الشحنات الموجبة التي هي ساكنة بالنسبة للمراقب في Σ, تعتبر متحركة وبسرعة v وبالاتجاه المعاكس بالنسبة للمراقب Σ'. وبأخذ تقلص فيزجيرالد بنظر الاعتبار فان وحدة الطول في Σ تساوي $\sqrt{1-\beta^2}$ في Σ' ، وكثافة الشحنة الخطية للايونات الموجبة هي $\lambda^+ = \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}}$. من جهة اخرى تعتبر الالكترونات ساكنة في الاطار Σ' ومزاحة مسافة $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ فيه (لاحظ ان هذه المسافة هي وحدة طول واحدة في الاطار Σ.) لذلك فان كثافة الشحنة الخطية هي : $\lambda'^- = -ne\sqrt{1-\beta^2}$. لذلك كثافة الشحنة الكلية في Σ' هي :

$$\lambda' = \lambda'^- + \lambda'^+ = -ne\sqrt{1-\beta^2} + \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^2 \quad (10.18)$$

وهي موجبة وليست صفراً كما ظهرت للمراقب في Σ. ولم يعد السلك متعادلاً كهربائياً. وبالنسبة له هناك مجال كهربائي مستقر حول السلك يساوي :

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{ne\beta^2}{2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1-\beta^2}}.$$

وعليه تتعرض الشحنة q لقوة تساوي :

$$|\mathbf{F}'| = |q\mathbf{E}'| = \frac{qne\beta^2}{2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 nev^2 q}{2\pi r\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{|\mathbf{F}|}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\because \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\right). \qquad (10.19)$$

لاحظ ان القوة التي كانت مغناطيسية كلية للمراقب في Σ ظهرت انها كهربائية مستقرة بالنسبة للمراقب في Σ'. لذلك فان المراقبان لايتفقان حول اصل القوة ومقدارها ايضاً على الرغم من اننا فرضنا ان مجموعة الشحنات المكونة للتيار والشحنة

الاختبارية يتحركان بنفس السرعة في مثالنا الا ان هذه المقارنة عامة ويمكن استخدامها لجميع التيارات. قد يسأل احد هنا : ان المقارنة السابقة بينت وجود كثافة صافية للشحنة الموجبة في Σ' في حين كان مقدار الكثافة الصافية في Σ صفراً، اذاً ماذا حول ثبات الشحنة ؟ الا يعني هذا ان مقدار الشحنة الكلي في Σ' تختلف عنه في Σ ؟ انها ليست كذلك فالدائرة كاملة هي متعادلة كهربائياً لأن جزءاً من السلك سيكون موجب الشحنة والآخر سالب الشحنة لأن اتجاه حركة الالكترونات تختلف في اجزاء التيار المختلفة.

10-6 تحويل لورنتس كتحويل تعامدي

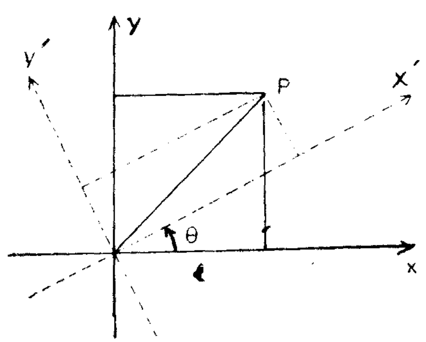
(The Lorentz Transformation as an Orthogonal Transformation)

افرض ان اطاراً مرجعياً يدور حول المحور Z بزاوية معينة هي θ. فان احداثيات النقطة P في الاطار الدائر لن تكون كتلك التي في الاطار الاصلي (original frame) والاحداثيات في الاطار الدائر ستكون كما في الشكل (4–10)

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta \qquad (10.20)$$

$$z' = z.$$



شكل رقم (10.4)

هذه هي الاحداثيات الخطية للاحداثيات الاصلية. اذا كانت النقطة P محدودة بمتجه الموقع r الذي طوله في الاطار الاصلي هو $|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

من السهل التحقق من المعادلة (10-20) أن :

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \qquad (10.21)$$

ان التحويل (10-20) لايغير طول المتجه. ومثل هذا التحويل يسمى التحويل التعامدي (orthogonal transformation).

ويسمى تحويل الاحداثيات خطياً اذا امكن التعبير عن الاحداثيات الجديدة بصيغة الجمع الخطي للاحداثيات القديمة . لذلك فان :

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

i.e.

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \qquad (10.22)$$

هي تحويل خطي (linear transformation)، ويمكن كتابتها على هيئة مصفوفة (matrix) على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (10.23)$$

اذا كان هذا التحويل تعامدياً عندها :

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_k x_k^2$$

i.e.

$$\sum_j \sum_k \sum_i a_{ij}\, a_{ik}\, x_j\, x_k = \sum_k x_k^2. \qquad (10.24)$$

وهذا ممكن اذا :

$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$$

لكي يكون التحويل تعامدياً فان عناصر مصفوفة التحويل هي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اي ان الشرط

$$\Sigma a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \qquad (10.25)$$

وجدنا ان الدالة الرباعية (quadratic function) $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ لها نفس القيمة في مختلف الاطر القاصرة المرتبطة بواسطة تحويل لورنتس. فتحويل لورنتس مثل التحويل الدوراني (rotational transformation) هو علاقة خطية ، منظومات الاحداثيات المختلفة. ولكنه يجمع الزمن مع الاحداثيات الفضائية. فاذا وقع حدث معين في زمن ومكان محددين في الاطار Σ يوصف باحداثياتنا X, y, Z, t كما في المتجهات ثلاثية الابعاد فيمكن اعتبار $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ على انه مربع طول المتجه الاربعة S (four vector) . والاحداثيات الاربعة هي $x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_4$ حيث :

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \text{ and } x_4 = ict. \qquad (10.26)$$

هذا الفضاء اللااقليدي الرباعي الابعاد (non–Euclidean four dimentional space) ادخله منكوفسكي (Minkowski) ويسمى ايضاً فضاء منكوفسكي (Minkowski Space) ويعطى مربع الطول بالعلاقة :

$$\begin{aligned} s^2 &= x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \end{aligned} \qquad (10.27)$$

حيث استخدمنا في كتابة هذه المعادلة طريقة عرف المجموع (summation convention وحينما يظهر الرمز او الملحق اللاتيني (Greek suffix) مرتين في حد واحد فيفترض ان يجمع الحد من 1 الى 4.

بموجب الملاحظات الجديدة تصبح معادلات تحويل لورنتس كالآتي

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\ x'_2 = x_2;\ x'_3 = x_3; \tag{10.28}$$

$$x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

ومعادلات التحويل العكسي هي :

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\ x_2 = x'_2\,;\ x_3 = x'_3\,; \tag{10.29}$$

$$x_4 = \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

وموصوفة تحويل لورنتس هي :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقيق بسهولة انها تحقق الشرط 25–10) ، لذا فان تحويل لورنتس هو تحويل تعامدي.

10–7 الصيغ المتغايرة للكهروداينمك : (Covariant Formulation of Electrodynamics)

يعتبر تغاير (Covariance) المعادلات صيغة رياضية تتبع خضوع القوانين الفيزياوية التي تعبر عنها هذه المعادلات لمبدأ النسبية. وتسمى المعادلات التي لاتتغير بالتحويل اللامتغيرة (invariant) قد تتغير حدود هذه المعادلات ولكنها تتحول طبقاً لقوانين التحويل المطبقة وتسمى هنا الحدود متغيرة او متغايرة (covariant).

وجدنا فيا سبق في الجزء (5–9) ان معادلات مـاكسويل هي متغيرة بـالنسبـة لتحويل لورنتس. مغزى هذا ان معادلات ماكسويل تسترد صيغتهـا في اي اطـار مرجعي قـاصر. لذا فان مبدأ النسبية نافذة تلقائياً لذلك قد يتردد احد بالاستنتاج ان النظريـة النسبيـة لاتقدم اي شيء مهم للكهروداينمك. وهذا ابعـد من ان يكون صحيحـاً. فلم يتم اكتشـاف علاقة قريبة بين الكميات الفيزياوية الابعد تقارب نسبي للظاهرة الكهرومغناطيسية.

لاجل التحقق من السلوك النسبي لمعادلات مـاكسويل يجب كتـابتهـا بصيغـة ربـاعيـة الابعـاد وان نعرف الخواص التحويليـة لعواملهـا التفـاضليـة،بـاستخـدام قواعـد التفـاضل الجزئي نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \tag{10.31}$$

حيث استخدمنا (10–29) بمقارنة هذه العلاقة مع (10–28) نجـد ان قـانون التحويل هو نفسه المستخدم في تحويل الاحداثي X_1 وتبين المعـادلات المنـاظرة للمركبـات الاخرى $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ، $\frac{\partial}{\partial x_3}$ ، ـــ $\frac{\partial}{\partial x_4}$ ،، انها جميعـاً تتحول طبقـاً لتحويل لورنتس، نستنتج من ذلـك ان $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ هي متجه رابع (four - vector)،وحاصل الضرب العددي لهذا المتجه هو

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2. \tag{10.32}$$

يجدر تذكيرك هنا بأن هذا العامل هو الذي يظهـــر في معادلة الموجة للموجات التي تتحرك بسرعة C ، ويجب ان يكون واضحاً ايضاً انـه لامتغير. ويسمى هـذا النموذج الرباعي الابعاد للعامل باسم عامل دي المبرتيان (d'Almbertian operator) ويشـار لـه بالرمز $\square^2$. ويمكن صياغة معادلة الموجة الآن على النحو الآتي :

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \square^2\psi = 0. \tag{10.33}$$

النص الرياضي لحفظ الشحنة بداخل ضمن معادلة الاستمرارية (equation of continuity).

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (10.34)$$

لنرى كيف يمكن كتابة هذه المعادلة بصيغة لامتغيرة بحيث تكون لها نفس الصيغة في جميع الاطر القاصرة.

في النظرية النسبية ليست كثافة الشحنة وكثافة التيار كل قائم بذاته وبصورة واضحة لأن توزيع الشحنة الساكن في اطار مرجعي معين يبدو توزيعاً تيارياً في اطار متحرك، لذلك ادخلنا المتجه الرابع $\mathcal{J}_\mu$ والذي يساوي $(\mathbf{j}, ic\rho)$ والمتكون من كثافة التيار j وكثافة الشحنة ρ، ومركباته هي $\mathcal{J}_1 = j_1$، $\mathcal{J}_2 = j_2$، $\mathcal{J}_3 = j_3$ و $\mathcal{J}_4 = ic\rho$ والثلاثة الاولى هي الاجزاء الفضائية الشبه لـ $\mathcal{J}_\mu$، وهكذا لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}_\mu}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (10.35)\end{aligned}$$

اذا كانت الكلمة Div تمثل عامل التباطؤ الرباعي الابعاد يمكن كتابة معادلة الاستمرارية بالصيغة الرباعية الابعاد على النحو الآتي :

$$\operatorname{Div} \mathcal{J} = 0. \qquad (10.36)$$

واذا كان تعريف جهد المتجه الرابع A (four vector Potential) هو

$$\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) \equiv \left(A_1, A_2, A_3, \frac{i\Phi}{c}\right) = \left(\mathbf{A}, \frac{i\Phi}{c}\right). \qquad (10.37)$$

وشرط لورنتس هو :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

الآن :

$$\text{Div}\,\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial x_4}$$

$$= \text{div A} + \frac{\partial\left(\frac{i\Phi}{c}\right)}{\partial(ict)}$$

$$= \text{div A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \tag{10.38}$$

لاحظ ان شرط لورنتس هو الآخر لامتغير ويمكن كتابته بالصيغة الرباعية الابعاد على النحو الآتي :

$$\text{Div}\,\mathcal{A} = 0. \text{ i.e. } \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{10.39}$$

ونعرف أن في الفضاء الحر تحقق الجهود A و Φ المعادلتان

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{10.40}$$

and

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10.41}$$

باستخدام A , g كما عرفناهما سابقاً يمكن كتابة هاتين المعادلتين بشكل معادلة متجه رابع مفرده :

$$\Box^2 \mathcal{A} = -\mu_0 \mathcal{J} \tag{10.42}$$

الجزء الفضائي من هذه المعادلة يعطي (10–40) والمركبة الرابعة تعطي (10–41).

توضح هذه المناقشة امكانية كتابة معادلات ماكسويل بصيغة لورنتس اللامتغيرة دون أي تعديل وانها تتوافق مع فرضية ثبات (consistencv) سرعة الضوء.

10–8 ممتدات المجـال الكهرومغناطيسي (The Electromagnetic Field Tensor) :

لنختبر الآن اذا كانت قوة لورنتس F = q (E+vXB) هي ايضاً لامتغيرة لورنتس. ولاجل هذا ، يجب التحقيق في تحويل المجالين E و B . ان المتجهين E و B ليسا متجهات رابعة ولكن يمكن انجاز تحويل المجالين بالتعبير عنهما بصيغة الجهود. وسنرى

كيف يمكن استخدام المركبات الستة E_1 ، E_2, E_3, B_1, B_2, B_3 في تعريف الممتدة (tensor) من الرتبة الثانية يسمى ممتدة المجال الكهرومغناطيسية (electromagentic field tensor) . في فضاء عدد ابعاده n من الرتبة m مجموعة من كميات n^m التي تتحول كالآتي

$$T'_{abcd\ldots} = \sum_{i,j,k,l\ldots} \lambda_{ai}\lambda_{bj}\lambda_{ck}\lambda_{dl}\ldots T_{ijkl}\ldots$$

نظراً لاننا معنيون بالفضاء الرباعي الابعاد والممتدة (Tensor) من الرتبة الثانية الذي يتحول كالآتي :

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} T_{kl} \qquad (10.43)$$

ونعرف أن :

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \text{ etc.}$$

وبما ان :

$$\mathcal{A}_\mu = \left(A_1, A_2, A_3, A_4 = \frac{i\Phi}{c}\right) \text{ and } x_4 = ict,$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالشكل الاتي :

$$E_1 = ci\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

وبنفس الطريقة ،

$$E_2 = ci\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right); E_3 = ci\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) \qquad (10.44)$$

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

ونعرف مجموعة كميات كالآتي :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (10.45)$$

لأجل ان تصبح ،

$$E_1 = ci\, F_{14};\ E_2 = ci\, F_{24};\ E_3 = ci\, F_{34}$$

$$B_1 = F_{23};\ B_2 = F_{31};\ B_3 = F_{12}. \qquad (10.46)$$

ويمكن الآن كتابة المتدة (F) tensor بصيغة عناصره $F_{\mu\nu}$ كالآتي

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{Bmatrix} \quad (10.47)$$

واضح ان ممتد tensor ضد متناظر (anti - symmetric) أي أن :

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

لنر الآن كيف يستخدم المتدة (tensor) في التعبير عن معادلات ماكسويل :

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (10.48)$$

اذا عينــا القيم 3,2,1 لـ λ, μ, ν بهــذا الترتيب او بــأي ترتيب آخر ، تقلصت المعادلة (10–48) الى :

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0$$

اي :

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$$

أو :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

التي هي احـدى معـادلات مـاكسويـل،اذا خصصنـا القيمـة 4 لأحـد الادلـة أي $\lambda = 2, \mu = 3, \nu = 4,$ سنحصل من المعادلة (10–48) على :

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0$$

أي :

$$\frac{\partial B_1}{\partial (ict)} + \frac{1}{ic}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{ic}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0$$

أو :

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0$$

أو :

$$(\mathrm{curl}\ \mathbf{E})_1 + \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0$$

التي هي مركبة X للمقدار $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$

وهكذا نجد أن المعادلة (48–10) تمثل ايضاً معادلة ماكسويل المتجانسة الاخرى.

ويمكن الحصول على معادلتي ماكسويل غير المتجانستين الاخريين بسهولة من المعادلة:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu. \qquad (10.49)$$

على سبيل المثال اذا كانت $\mu = 1$، تأخذ المعادلة (49–10) الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \mu_0 j_1$$

أي :

$$0 + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{1}{ic}\frac{\partial E_1}{\partial (ict)} = \mu_0 j_1$$

أو :

$$(\text{curl } \mathbf{B})_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \mu_0 j_1,$$

وبصورة عامة :

$$\text{curl } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

اذا كانت $\mu = 4$، لدينا من (49–10)

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \mu_0 j_4$$

أي :

$$-\frac{1}{ic}\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{1}{ic}\frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{1}{ic}\frac{\partial E_3}{\partial x_3} + 0 = \mu_0 j_4$$

أو :

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

وهكذا قدمنا معادلات ماكسويل الاربع في معادلتين تتضمنان عمليات على مركبات ممتدة المجال (field tensor)

9–10 تحويل المجالات (Transformation of the fields) :

سننجز الآن تحويل المجالات ، وسنقيم E_x في الاطار Σ' بصيغة E و B في الاطار Σ .

$$E_x' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A_x'}{\partial t'}$$

بما أن ،

$$\mathcal{A}_\mu \equiv \left(A_1, A_2, A_3, \frac{i\Phi}{c}\right)$$

و ،

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial (ict)}\right)$$

$$E_x' = ci\, F_{14}' = ci \left\{\frac{\partial A_4'}{\partial x_1'} - \frac{\partial A_1'}{\partial x_4'}\right\}$$

بما ان $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$، A_μ هو متغير لورنتس.

$$A_4' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (A_4 - i\beta A_1) = \gamma (A_4 - i\beta A_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$A_1' = \gamma (A_1 + i\beta A_4); \quad \frac{\partial}{\partial x_1'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4}\right).$$

$$\therefore \quad E_x' = ci \left[\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4}\right)\{\gamma (A_4 - i\beta A_1)\}\right.$$

$$\left. - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\{\gamma (A_1 + i\beta A_4)\}\right]$$

$$= ci\gamma^2 \left[\frac{\partial A_4}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \beta^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} + i\beta \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - \beta^2 \frac{\partial A_4}{\partial x_1}\right]$$

$$= ci\gamma^2 (1-\beta^2) \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) = ci \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) = E_x.$$

ويمكن حساب المركبات الاخرى بنفس الطريقة ، وهكذا لدينا :

$$E_x' = E_x; \qquad B_x' = B_x;$$

$$E_y' = \gamma (E_y - c\beta B_z); \quad B_y' = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right) \qquad (10.50)$$

$$E_z' = \gamma (E_z + c\beta B_y); \quad B_z' = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right).$$

وهكذا حورت المركبات المستعرضة لـ E و B، لكن مركبات اتجاه الحركة لم تتأثر. ووجدنا ان المجالين الكهربائي والمغناطيسي هما نسبيان ايضاً. فقد يوجد المجال E أو B في اطار ما ويكونان صفراً في اطار آخر.

10-10 المجال الناتج من شحنة نقطية في حركة منتظمة

: (Field due to a Point Charge in Uniform Motion)

بينا في الجزء (9-6) كيف يمكن الحصول على تعبير للمجال الكهربائي لشحنة متحركة باستخدام جهود لينارد - ويشرت.

لنر الآن الى اي تعبير سنصل من النظرية النسبية.

افرض ان الشحنة واقفة في النظومة Σ. سيكون المجال المغناطيسي فيها B = 0 والمجال الكهربائي يعطى من :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \qquad (10.51)$$

ماذا سيكون المجال بالنسبة لمراقب في Σ' ؟ سنفرض أن الشحنة في نقطة اصل المنظومة Σ ، ويحسب المجال في اللحظة t=0 ، وهذا يعني تطابق نقطتي الاصل من (10-50)

$$E_1' = E_1;\ E_2' = \gamma E_2;\ E_3' = \gamma E_3$$

$$(\because\ B_2 = B_3 = 0 \quad \text{(في الاطار الساكن } \Sigma\text{)}) \qquad (10.52)$$

وترتبط الاحداثيات عند الزمن t=0 حسب تحويل لورنتس بالعلاقة الآتية

$$x_1 = \gamma x_1';\ x_2 = x_2',\ x_3 = x_3'.$$

لذا فان المسافة r من نقطة الاصل الى نقطة المراقبة P هي :

$$r = \sqrt{x_\mu x_\mu} = \sqrt{\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \qquad (10.53)$$

لذلك فان مركبات المجال الكهربائي في Σ'، هي :

$$E_1' = E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_1}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x_1'}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

$$E_2' = \gamma E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x_2}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x_2'}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

$$E_3' = \gamma E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x_3}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma x_3'}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

وبصورة عامة ،

$$\mathbf{E}' = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}'}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}. \qquad (10.54)$$

الآن :

$$x_1' = r' \cos\theta$$

حيث تمثل θ الزاوية التي يصنعها r مع المحور X.

و

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = r'^2$$

$$x_2'^2 + x_3'^2 = r'^2 \sin^2\theta$$

لذا

$$\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \gamma^2 r'^2 \cos^2\theta + r'^2 \sin^2\theta$$

$$= r'^2\gamma^2\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}\right)$$

$$= r'^2\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2\theta) \qquad (10.55)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}'(1-\beta^2)}{r'^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \qquad (10.56)$$

وهكذا مكافيء للتعبير المستخلص في البند (6–9) وهذا توضيح آخر لحقيقة كو[ن] معادلات ماكسويل صحيحة في النسبية.

نجد من المعادلة (10–56) ان المجال الكهربائي لم يعد كروي التناظر . اذا كانت $\theta = 0$ أي بمحاذاة خط الحركة فيكون المجال :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}(1-\beta^2) \qquad (10.57)$$

وهـذا يعني ان مجـال كـولـومب قـل بمقـدار العـامـل $(1-\beta^2)$. اذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$، اي عـمـودي على خط الحركة.

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10.58)$$

وهذا يعني ان المجال ارتفع بمقدار العامل $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

10–11 صياغة لاكرانجيان لحركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي

(Lagrangian Formulation of the Motion of a Charged Particle in an Electromagnetic Field)

يمكن تطبيق طريقـة لاكرانجيـان للميكانيـك القـديم (التقليـدي) على حركـة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي اذا ماتم تنقيح دالة لاكرانجيان بصورة مناسبة. سنوضح اولاً الطريقة لحالة لانسبية ثم نعطي التقريب النسبي الاكثر عموماً لها .

يمكن التعبير عن لاكرانجيان بـاسلوب تقليـدي في المجـال الكهربـائي السـاكن على انـه الفرق بين الطاقتين الحركية والساكنة.

$$L = T - U = \frac{1}{2} mv^2 - q\Phi$$

واذا وجـد مجـال مغنـاطيسي وجب تحوير لاكرانجيـان بصـورة مـلائمة . واعتماد المجـال المغنـاطيسي على سرعـة الشحنـات المتحركـة ولأن L دالـة عـدديـة يكون الحد الـواجب اضافته لتعديل L هو حاصل الضرب العددي للمقـدارين $\mathbf{v}$ والجهـد المتجـه A الـذي يصف المجال. وسنفرض ان لاكرانجيان يكون :

$$L = \frac{1}{2} mv^2 + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - q\Phi \qquad (10.59)$$

لنستخلص معادلة الحركة ، لدينا من (10–59)

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + qA_i \; (i = 1, 2, 3,) \qquad (10.60)$$

أو بالمتجهات ،

$$\sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial L}{\partial v_i} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \qquad (10.61)$$

حيث P تمثل الزخم الخطي (Linear momentum) وتساوي $m\mathbf{v}$ وتسمى $\mathbf{p}+q\mathbf{A}$ بالزخم العام. ولدينا ايضاً.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=q\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})-q\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \tag{10.62}$$

او بالمتجهات :

$$\sum_i\hat{\mathbf{e}}_i\frac{\partial L}{\partial x_i}=q\sum_i\hat{\mathbf{e}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})-q\sum_i\hat{\mathbf{e}}_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$
$$=q\,\text{grad}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})-q\,\text{grad}\,\Phi. \tag{10.63}$$

وباستخدام المتطابقة :

$$\text{grad}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})=(\mathbf{v}\cdot\text{grad})\,\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\text{grad})\,\mathbf{v}+\mathbf{A}\times\text{curl}\,\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\text{curl}\,\mathbf{A}$$

يصبح لدينا اذا كانت $\vec{\mathbf{v}}$ ثابتة :

$$\sum_i\hat{\mathbf{e}}_i\frac{\partial L}{\partial x_i}=q\,(\mathbf{v}\cdot\text{grad})\,\mathbf{A}+q\,\mathbf{v}\times\text{curl}\,\mathbf{A}-q\,\text{grad}\,\Phi \tag{10.64}$$

ومعادلة لاكرانجيان للحركة هي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

لذلك لدينا من (10-61) و (10-64)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}+q\mathbf{A})=\frac{d\mathbf{p}}{dt}+q\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$
$$=q\,(\mathbf{v}\cdot\text{grad})\,\mathbf{A}+q\mathbf{v}\times\text{curl}\,\mathbf{A}-q\,\text{grad}\,\Phi. \tag{10.65}$$

مشتقة A بالنسبة للزمن.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$
$$=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\left(\sum_i v_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\mathbf{A}$$
$$=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\text{grad})\,\mathbf{A}$$

المعادلة (10.65) تصبح كالآتي :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q\mathbf{V} \times \text{curl } \mathbf{A} - q \text{ grad } \Phi$$

$$\mathbf{F} = q\left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + q\,\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{A}$$

$$= q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{A}$$

$$= q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{10.66}$$

هذه هي معادلة لورنتس للقوة.

ونفرض ان يكون لاكرانجيان لجسيم نسبي في مجال كهرومغناطيسي هو :

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - q\Phi \tag{10.67}$$

حيث m_0 تمثل كتلة لجسيم مقيسة في اطار مرجعي يكون فيه الجسيم ساكناً. في فضاء منكوفسكي (Minkowski space) ، متجه موقع النقطة هو :

$$\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, ict) \tag{10.68}$$

وتفاضل $\mathcal{X}$ هو متجه رابع ايضاً.

$$d\mathcal{X} = (dx_1, dx_2, dx_3, icdt) \tag{10.69}$$

نعرف ان عنصر الطول رباعي - الابعاد هو لامتغير تحت تحويل لورنتس.

$$ds = \sqrt{dx_\mu\, dx_\mu} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\,dt^2}. \tag{10.70}$$

سندخل الآن الكمية $d\tau$ التي هي

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\,dt^2)}$$

$$= \frac{i}{c}\sqrt{dx_\mu\, dx_\mu}. \tag{10.71}$$

ويمكننا كتابة $d\tau$ بالشكل الآتي ايضاً.

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right\}}$$

$$= dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \tag{10.72}$$

واضح ان هذه الكمية هي لامتغيرة وتسمى عنصر الزمن المناسب (Proper time) في فضاء منكوفسكي متجه :

$$\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$= \left(\gamma\frac{dx_1}{dt}, \gamma\frac{dx_2}{dt}, \gamma\frac{dx_3}{dt}, ic\gamma\right)$$

$$= (\gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3, ic\gamma) \tag{10.73}$$

وهو سرعة متجه ربع (four - vector velocity) .

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{A}, \frac{i\Phi}{c}\right)$$

يمكن صياغة لاكرانجيان (10–67) بالشكل الآتي

$$L = -\frac{m_0c^2}{\gamma} + \frac{q\mathcal{V}\cdot\mathcal{A}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(-m_0c^2 + q\mathcal{V}_\mu\mathcal{A}_\mu) \tag{10.74}$$

يمكن استخلاص معادلة الحركة باستخدام هذا اللاكرانجيان في مبدأ الفعل الادنى **(Principle of least action)** .

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

or

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau = 0 \tag{10.75}$$

i.e.

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}[-m_0c^2 + q\mathcal{V}_\mu\mathcal{A}_\mu]\,d\tau$$

$$= \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}[-m_0c^2\,d\tau + q\mathcal{A}_\mu\,dx_\mu] = 0\left(\because\ \mathcal{V}_\mu = \frac{d\mathcal{X}_\mu}{d\tau}\right). \tag{10.76}$$

باداء التغير ،

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} [- m_0 c^2 \delta (d\tau) + q \mathcal{A}_\mu \delta (dx_\mu) + q \delta \mathcal{A}_\nu \, dx_\nu] = 0 \qquad (10.77)$$

الآن :

$$\delta (d\tau) = \frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} \delta(dx_\mu) = \frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} d (\delta x_\mu)$$

$$d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{dx_\mu \, dx_\mu} \qquad \text{(10–71 انظر)}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} = \frac{i}{c} \frac{dx_\mu}{\sqrt{dx_\mu \, dx_\mu}} = - \frac{1}{c^2} \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$\delta (d\tau) = - \frac{1}{c^2} \frac{dx_\mu}{d\tau} d (\delta x_\mu) = - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\mu \, d(\delta x_\mu). \qquad (10.78)$$

ايضاً

$$\delta \mathcal{A}_\nu = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \qquad (10.79)$$

اذن يمكن كتابة المعادلة (10–77) على النحو الآتي :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu \} \, d(\delta x_\mu) + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \, dx_\nu \right] = 0 \qquad (10.80)$$

تكامل الحد الأول يعطينا :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu \} \, d (\delta x_\mu) = \Big[\{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu \} \delta x_\mu \Big]_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu \} \delta x_\mu \, dx_\nu$$

$$= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu\} \delta x_\mu \, dx_\nu .$$

الحد الاول سيزول لان تغير الاحداثيات يجب ان يزول عند نقطة النهاية لذلك تصبح المعادلة (10–80) :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[- \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu \} + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu \, dx_\nu = 0$$

أي :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\nu} - q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu \, dx_\nu = 0$$

أو :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} - q \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu} \right) \right] \delta x_\mu \, dx_\nu = 0$$

وباستخدام (45–10) :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} - qF_{\mu\nu} \right] \delta x_\mu \, dx_\nu = 0. \tag{10.81}$$

الآن :

$$\mathcal{U}_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \text{ and } \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu = d\,\mathcal{U}_\mu = \frac{d\,\mathcal{U}_\mu}{d\tau}\, d\tau$$

لذلك تتبدل (10.81) الى :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{d\mathcal{U}_\mu}{d\tau} - qF_{\mu\nu}\mathcal{U}_\nu \right] \delta x_\mu \, d\tau = 0 \tag{10.82}$$

مادام δx_μ تغيراً اعتباطياً لهذا ينتج.

$$m_0 \frac{d\mathcal{U}_\mu}{d\tau} - qF_{\mu\nu}\, \mathcal{U}_\nu = 0 \tag{10.83}$$

وهذه هي المعادلة المتغيرة المطلوبة للحركة. ويمكن ايجاد الجزء الفضائي منها باعطاء القيم 3,2,1 ، وهكذا

$$m_0 \frac{d\mathcal{U}_1}{d\tau} = qF_{1\nu}\mathcal{U}_\nu = qF_{11}\mathcal{U}_1 + qF_{12}\mathcal{U}_{2} + qF_{13}\mathcal{U}_3 + qF_{14}\mathcal{U}_4$$

$$= \gamma q v_2 B_3 - \gamma q v_3 B_2 + q\gamma E_1$$ (باستخدام (46–10)، (73–10)

أي :

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\,\mathcal{U}_1) = \gamma q\,[E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2].$$

والمعادلة العامة متجهياً هي :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = q\,[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \tag{10.84}$$

حيث استخدمنا الرمز $\mathcal{P}$ ليمثل $m_0\gamma\mathbf{v}$ ، الذي هو الزخم.

$$\mathcal{P} = m_0\gamma\mathbf{v} = m\mathbf{v}. \tag{10.85}$$

بالاستفادة من المركبات الثلاثة الاولى للمعادلة (83–10) وجدنا ان معادلة الحركة تسترد صيغتها كما في (66–10) لنأخذ الآن المركبة الرابعة.

$$m_0 \frac{d\mathcal{U}_4}{d\tau} = qF_{41}\mathcal{U}_1 + qF_{42}\mathcal{U}_2 + qF_{43}\mathcal{U}_3 + qF_{44}\mathcal{U}_4$$

$$= -\frac{\gamma q}{ic} E_1 v_1 - \frac{\gamma q}{ic} E_2 v_2 - \frac{\gamma q}{ic} E_3 v_3$$

$$\therefore \quad \gamma \frac{d}{dt}(m_0 i\gamma c) = -\frac{\gamma q}{ic}\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

أي :

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \qquad (10.86)$$

ماهي العبرة الفيزياوية لهذه المعادلة؟ الطرف الايمن يعطينا معدل انجاز الشغل على الجسيم من قبل المجال الكهربائي والذي يساوي في الحقيقة معدل تغير الطاقة الحركية T مع الزمن. اذا

$$q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2)$$

and $$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dT}{dt}\,dt = \Big[m_0\gamma c^2\Big]_{t_1}^{t_2}.$$

اذا كان الجسيم ساكناً حينما $t=t_1$، تكون قيمة γ عند هذا الزمن 1 .

$$\therefore \quad T = m_0\gamma c^2 - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2 \qquad (10.87)$$

حيث $m = m_0\gamma.$

تسمى الكمية m_0C^2 طاقة السكون (rest energy) وتحسب الطاقة الكلية W من :

$$W = mc^2 = T + m_0c^2. \qquad (10.88)$$

ويعبر عن الطاقة الكلية احياناً بدلالة الزخم P.

$$W = m_0\gamma c^2 \qquad \therefore \quad \frac{W^2}{c^2} = m_0^2\gamma^2c^2$$

$$\mathcal{P}^2 = m_0^2\gamma^2v^2$$ الآن (أنظر 85–10)

$$\frac{W^2}{c^2} = \mathcal{P}^2 + m_0^2\gamma^2(c^2 - v^2)$$

أو

$$W = [m_0^2c^4 + \mathcal{P}^2c^2]^{1/2}. \qquad (10.89)$$

12-10 اشعاع من الجسيمات النسبية
:(Radiation from Relativistic Particles)

بينا في الفصل السابق ان الشحنات المعجلة فقط هي التي تولد اشعاعاً،ويحسب الاشعاع بصيغة لارمر (Larmor formula)

$$-W = \frac{e^2|\dot{\mathbf{v}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \qquad (10.90)$$

اذا كانت سرعة حركة الشحنات اصغر جداً من C ، فان الصيغة صحيحة تماماً في الاطار الساكن بالنسبة للشحنات. وسنتحقق من الصيغة الآن فيما يخص الجسيمات التي تتحرك بسرع تقارن بسرعة الضوء.نعرف الآن :

$$\mathcal{U} = (\gamma\mathbf{v}, i\gamma c).$$

من هذه العلاقة وبالتفاضل بالنسبة ل τ، نحصل على تعجيل متجه ـ رابع ـ (four - vector accelration)

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \left\{\gamma^2\dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma^4\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})}{c^2}, \frac{\gamma^4 i\,(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})}{c}\right\} \qquad (10.91)$$

حيث $\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\gamma d\tau = dt.$

ويمكن تعميم نتيجة (9–10) للطاقات النسبية باستبدال $\dot{\mathbf{v}}$ بتعجيل المتجه الرابع الآن،

$$\left(\frac{d\mathcal{U}}{d\tau}\right)^2 = \left[\gamma^4\,(\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \frac{2\gamma^6(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} + \frac{\gamma^8\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^4} - \frac{\gamma^8(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right]$$

$$= \left[\gamma^4\,(\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \frac{2\gamma^6(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} - \frac{\gamma^6(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2}\right]$$

$$= \gamma^4\left[(\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\gamma^2(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right] \qquad (10.92)$$

$$-W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\left[\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)}\right] \qquad (10.93)$$

والحالات الخاصة التي يمكننا اخذها بنظر الاعتبار هي :

1) عندما $\mathbf{v}$ و $\dot{\mathbf{v}}$ تقعان على خط مستقيم واحد :

$$-W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3(1-\beta^2)^2}\left[|\dot{\mathbf{v}}|^2 + \frac{v^2|\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^2(1-\beta^2)}\right]$$

$$= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1-\beta^2)^3} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^3}. \qquad (10.94)$$

2) عندما $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$

$$-W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^2} \qquad (10.95)$$

تمارين الفصل العاشر

10-1 برهن ان تحويلات لورنسيان ناجحان بنفس الاتجاه مكافئان لتحويل لورنتس مفرد سرعته :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

10-2 سفينة فضائية غادرت الارض نحو الفضاء وتسير بسرعة 0.8c لدى وصولها الى مسافة 8 سنوات ضوئية عن الارض ارسلت اشارة راديوية الى الارض.
(ا) ماهو مقدار الفترة الزمنية على السفينة بين وقت وقت المغادرة ووقت ارسال الاشارة ؟ (ب) ماهي الفترة الزمنية المقضية على الارض حين ارسال الاشارة؟.

10-3 سفينتان فضائيتان تسيران باتجاهين متعاكسين وسرعة واحدة هي 0.7c كما يقيسها مراقب في الارض ماهي سرعة احدى السفينتين كما يقيسها مراقب في السفينة الاخرى؟

10-4 اثبت ان حاصل ضرب E.B هو مقدار لامتغير لتحويل لورنتس؟

10-5 اذا كان المجالان الكهربائي والمغناطيسي متعامدين بعضهما على بعض في الاطار المرجعي Σ . ماذا يجب ان تكون سرعة الاطار Σ' بالنسبة للاطار Σ لكي يجد المراقب فيه (ا) وجود المجال الكهربائي فقط؟ (ب) المجال المغناطيسي فقط.

10-6 الشحنة q ساكنة في الاطار Σ . جد بتطبيق تحويل لورنتس الجهدين A و Φ في الاطار Σ' الذي يتحرك بسرعة v . ومن ثم جد E وB.

10-7 شعاع كوني فيه بروتون يتحرك عمودياً على مجال مغناطيسي قيمته $10^{-5}T$ مقترباً من الأرض. اذا كانت طاقة البروتون هي $10^{15}eV$. ماهي قيمة المجال الكهربائي في الاطار الذي يكون فيه البروتون ساكناً.

10-8 الشحنة q موزعة بانتظام على سطح قشرة كروية نصف قطرها (a). اذا تحركت الكرة بسرعة v . بمحاذاة المحور x احسب الطاقة الكهربائية الكلية والطاقة المغناطيسية الكلية في الفضاء خارج الكرة مباشرة. اثبت عند $c > v$ ان الناتج يتقلص الى القيمة الساكنة $\frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 a}$ ــ

10-9 جد مسار جسيم مشحون يتحرك في مجال منتظم E،ناقش حالة جسيم بطيء.

10-10 تردد اهتزاز مذبذب هو ω_0 . كم سيكون التردد اذا ماوضع المذبذب في مجال مغناطيسي؟

«الفصل الحادي عشر»

الاستطارة والتفريق

Scattering and Dispersion

«الفصل الحادي عشر»

الاستطارة والتفريق

Scattering and Dispersion

11-1 استطارة الاشعاع (Scattering of Radiation) : -

وجدنا في الفصل التاسع تعابير لمجالات الاشعاع بدلالة عزم ثنائي القطب P(t). ومع اننا لم نحدد سبب اعتمادية P(t) على الزمن،اعتبر وجود موجة كهرومغناطيسية ساقطة على منظومة من الجسيمات المشحونة. وبسبب التأثير المتبادل مابين الموجة والشحنات،فان الاخيرة تكتسب الحركة بصورة دورية بمرور الزمن. وهكذا سيكون هناك تعجيلات،وبسبب ذلك سوف تشع المنظومة ويمكن اننا ان نعتبر العملية برمتها كأنها تحدث بخطوتين : يتم امتصاص الطاقة ثانية الى الفضاء. نصف هذه العملية على انها استطارة الاشعاع الاصلي الساقط بواسطة الجسيمات المشحونة.

لنعتبر اولاً موجة مستوية احادية اللون خطية الاستقطاب تسقط على جسم يحمل الشحنة "q" تعطى الموجة من :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}. \qquad (11.1)$$

سيسلط المجال الكهربائي قوة على الشحنة q تعطى من :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (11.2)$$

سنفرض ان السرعة التي امتلكها الجسم نتيجة هذا التأثير المتبادل هو اصغر بكثير من c $(v \ll c)$. لذلك ستكون معالجتنا لانسبية ويمكن الغاء الحد الثاني من تعبير لورنتس للقوة.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (11.3)$$

وهكذا لدينا :

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} = q\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \omega_0 t)}. \tag{11.4}$$

الآن :

$$\mathbf{p}(t) = q\mathbf{r}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{q^2}{m}\mathbf{E}(t). \tag{11.5}$$

والمعدل الزمني للقدرة المشعة لوحدة زاوية مجسمة هو :

$$\left\langle\frac{dW}{d\Omega}\right\rangle = \frac{q^2\langle\dot{u}\rangle^2}{16\,\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta$$

$$= \frac{\langle\ddot{p}^2\rangle\sin^2\theta}{16\,\pi^2\epsilon_0 c^3}$$

$$= \frac{q^4 E_0^2\sin^2\theta}{16\,\pi^2 m^2\epsilon_0 c^3}. \tag{11.6}$$

ونعرف المقطع العرضي للاستطارة التفاضلية (differential scattering cross section) على انه :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{الطاقة المستطارة على وحدة زاوية مجسمة على وحدة الزمن}}{\text{الطاقة الساقطة على وحدة المساحة على وحدة الزمن}}$$

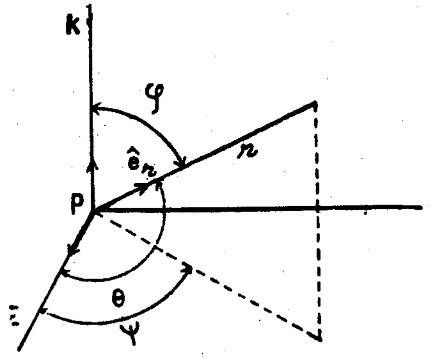
لذا

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left\langle\frac{dW}{d\Omega}\right\rangle}{\langle\text{incident flux}\rangle}$$

$$= \frac{\left\langle\frac{dW}{d\Omega}\right\rangle}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,E_0^2} \qquad \text{(انظر 9.81)}$$

$$= \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2\sin^2\theta \tag{11.7}$$

الزاوية θ هي الزاوية المحصورة بين عزم ثنائي القطب المحتث p واتجاه الشعاع الخارج،اي انها الزاوية بين المجال الكهربائي E ومتجه الوحدة $\hat{e}_r$.ويوضح الشكل (1-11) هذه الزاوية.



شكل رقم (11.1)

لنأخذ الآن حالة عامة اكثر افرض ان الضوء الساقط غير مستقطب ماذا سيكون التوزيع الزاوي للضوء المستطار؟

لايجاد ذلك يجب ان نأخذ متوسط حول كافة الاتجاهات السمتية الممكنة للمجال E،أي تأخذ متوسط الزاوية ψ في الشكل (1-11) ۰

$$\cos\theta = \cos\psi \sin\varphi$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\psi \sin^2\varphi$$

يجب علينا ان نأخذ متوسط حول ψ. ليكن $\overline{\sin^2\theta}$ هو متوسط $\sin^2\theta$ حول كل الزوايا ψ ۰

$$\therefore \quad \overline{\sin^2\theta} = 1 - \overline{\cos^2\psi}\sin^2\varphi$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\varphi).$$

لذلك في حالة الاشعاع غير المستقطب.

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\text{unpolarized}} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \overline{\sin^2\theta} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{1+\cos^2\varphi}{2}. \qquad (11.8)$$

يمكن ان نرى من الشكل ان الزاوية φ هي الزاوية بين اتجاه الاشعاع الساقط واتجاه الاشعاع المستطار لذا تسمى زاوية الاستطارة (Scattering angle) .
يمكن ايجاد المقطع العرضي الكلي بأخذ التكامل حول كل الزاوية الجسمة.

$$\langle\sigma\rangle_{\text{unpolarized}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \int \frac{1+\cos^2\varphi}{2} \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$
$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2. \qquad (11.9)$$

وتسمى الاستطارة هذه ذات الموجة الكهرومغناطيسية المستوية غير المستقطبة نتيجة جسيم مشحون حر باستطارة تومسن (Thomson scattering).
اذا كان الجسيم المشحون الكتروناً $q = e$.
و :

$$\langle\sigma\rangle = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \qquad (11.10)$$

حيث $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ ويسمى نصف قطر الالكترون التقليدي (Classical electron radius). التوزيع القديم لشحنة قيمتها الكلية e يجب ان يكون نصف قطره من هذا الترتيب اذا كانت طاقته الذاتية (self - energy) مساوية لكتلة الكترونة يساوي المقطع العرضي لاستعارة تومسن لاستعارة الكترون حر

$$\sigma_T = 0.665 \times 10^{-28}\ m^2$$

11.2 خمود الاشعاع (Radiation Damping) :

ناقشنا فيما مضى مسائل الكهروداينمك التي اخذنا بنظر الاعتبار فيها اما الاشعاع الكهرومغناطيسي الناتج من شحنات معجلة او تأثير مجال كهرومغناطيسي خارجي على حركة الجسيم . وناقشنا هاتين الحقيقتين بصورة مستقلة وبدون ترابط . على كل حال عندما تتعجل شحنات نتيجة المجال الكهرومغناطيسي الموضوعة فيه ، يتولد الاشعاع الكهرومغناطيسي وهذا بدوره مرتبط بالتأثير المترتب على حركة الجسيم لذلك ومن اجل معالجة صحيحة يجب اخذ هذا التأثير بالحسبان .

ويسمى ردّ فعل الاشعاع على حركة الجسم ردّ فعل الاشعاع (radiation reaction) أو خمود الاشعاع (radiation damping) .

لنرى الآن كيفية ادخال تأثيرات مفاعلية الاشعاع في معادلة حركة الجسم المشحون . معادلة نيوتن للحركة لجسم كتلته m وشحنته e مسلط عليه قوة خارجية محفوظة F_e هي :

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_e. \tag{11.11}$$

اهملنا في كتابة هذه المعادلة انبعاث الاشعاع. ومادام الجسم يتعجل فانه سيبعث اشعاعاً ولادخال رد فعل المجال الاشعاعي على الجسم يجب تحوير المعادلة (11-11) باضافة قوة رد الفعل F_r.

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_r \tag{11.12}$$

لكن ماذا تساوي هذه القوة؟ الطاقة المشعة لوحدة الزمن من الشحنة e المتحركة بسرعة v, التي هي اقل بكثير من C وتحت تعجيل $a = \dot{v}$ ، كما هي معطاة في (9-84) هي:

$$W = \frac{e^2(\dot{\mathbf{v}})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{11.13}$$

لأجل حفظ الطاقة يجب ان يكون الشغل الذي تنجزه القوة F_r على الجسم في فترة زمنية قل t_1 الى t_2 ، مساوياً لسالب الطاقة المشعة في هذه الفترة ، اي :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}\, dt = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}\, dt. \tag{11.14}$$

ويمكن تكامل الطرف الايمن بالاجزاء ونحصل على :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}\, dt = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left[\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int^{t_2} \mathbf{v}\cdot\ddot{\mathbf{v}}\, dt.$$

اذا كانت الحركة دورية او كانت الفترة الزمنية قصيرة عندها فستكون حالة المنظومة عند t_2 هي نفسها تقريباً عند t_1 وبالامكان اهمال الحدود التي تم تكاملها وهكذا يمكننا كتابة العلاقة التقريبية الآتية :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{F}_r-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}\right)\cdot\mathbf{v}\,dt\simeq 0 \qquad (11.15)$$

التي ترينا مايلي :

$$\mathbf{F}_r=\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}=m\tau\ddot{\mathbf{v}} \qquad (11.16)$$

حيث جعلنا $\tau=\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$ لملائمتها، لذلك يمكن كتابة المعادلة المحورة(12-11)

(11.17)

$$m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_e+m\tau\ddot{\mathbf{v}}$$

$$m(\dot{\mathbf{v}}-\tau\ddot{\mathbf{v}})=\mathbf{F}_e. \qquad (11.18)$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة ابراهام - لورنتس للحركة

(Abraham - Lorentz equation of motion)

الآن اذا كانت القوة F_e قوة خطية معيدة (linear restoring force) من النوع $F_e=-m\gamma r$ (لا تختلف عن r المستخدمة في الفصل السابق) ، يمكن كتابة المعادلة (18-11) بالصيغة الآتية :

$$m\ddot{\mathbf{r}}-m\tau\dddot{\mathbf{r}}+m\gamma\mathbf{r}=0. \qquad (11.19)$$

اذا كان حد خمود الاشعاع صغيراً،فتختصر المعادلة الى :

$$m\ddot{\mathbf{r}}+m\gamma\mathbf{r}=0 \qquad (11.20)$$

وحلها هو :

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0 e^{-i\gamma^{1/2}t}=\mathbf{r}_0\,e^{-i\omega_0 t} \qquad (11.21)$$

حيث وضعنا $\omega_0^2=\gamma$. ، لذلك لدينا.

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=-i\omega_0\mathbf{r}(t)$$

and $$\dddot{\mathbf{r}}(t)=i\omega_0^3\mathbf{r}(t)=-\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}(t) \qquad (11.22)$$

وباستخدام هذه العلاقة التقريبية،يمكن كتابة المعادلة (11–9) على النحو الآتي :

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\tau\omega_0^2\dot{\mathbf{r}} + m\gamma\mathbf{r} = 0$$

$$m[\ddot{\mathbf{r}} + l\dot{\mathbf{r}} + \gamma\mathbf{r}] = 0 \tag{11.23}$$

حيث

$$l = \tau\omega_0^2 = \frac{e^2\gamma}{6\pi\epsilon_0 mc^3}. \tag{11.24}$$

31–1 التفريق في الغازات المخففة (Dispersion in Dilute Gases)

سندرس الآن انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الغازات المخففة التي تهمل فيها المفاعلات المتبادلة بين الجسيمات الاولية المتكونة منها. عند مرور الموجة خلال الغاز ستزاح الالكترونات من اماكنها المتوازنة وتصبح الجزيئات مستقطبة. سنهمل الفرق بين المجال الكهربائي المسلط والمجال الموضعي (local field) لأن كثافة الغاز قليلة. ونفرض ان الالكترون مرتبطة بقوة خطية معيدة والخمود كما وضحنا في البند السابق يتناسب مع السرعة.

معادلة الحركة لالكترون (α) هي :

$$m[\ddot{\mathbf{r}}_\alpha + l_\alpha\dot{\mathbf{r}}_\alpha + \gamma_\alpha\mathbf{r}_\alpha] = e\mathbf{E} \tag{11.25}$$

حيث l_α تقيس قوة الخمود. ويمكن كتابة هذه المعادلة على النحو الآتي .

$$\ddot{\mathbf{r}}_\alpha + l_\alpha\dot{\mathbf{r}}_\alpha + \gamma_\alpha\mathbf{r}_\alpha = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \tag{11.26}$$

ان حل الحالة المستقرة لهذه المعادلة هو :

$$\mathbf{r}_\alpha(t) = \frac{\left(\frac{e}{m}\right)\mathbf{E}_0}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - il_\alpha\omega} \exp(-i\omega t) \tag{11.27}$$

وعزم ثنائي القطب الناتج من ازاحة الالكترون هو :

$$\mathbf{p}_\alpha = e\mathbf{r}_\alpha(t) = \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right)\mathbf{E}}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - il_\alpha\omega} \tag{11.28}$$

افرض وجود N من الالكترونات في وحدة الحجم في الغاز وجزءاً منها f_α له خاصية تردد الرنين ω_α. عندها يكون مجموع عزم ثنائي القطب الكلي لوحدة الحجم هو :

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha N f_\alpha p_\alpha = \mathbf{E} \sum_\alpha \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right) N f_\alpha}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - i l_\alpha \omega} \tag{11.29}$$

حيث f_α تعرف بشدات المذبذب (oscillator strengths) وتخضع لقاعدة الجمع $\Sigma f_\alpha = 1$.

بما ان $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ (انظر 21-2) فان المتأثرية الكهربائية النوعية X تعطى من:

$$\chi = \sum_\alpha \frac{\left(\frac{e^2}{m\epsilon_0}\right) N f_\alpha}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - i l_\alpha \omega} \tag{11.30}$$

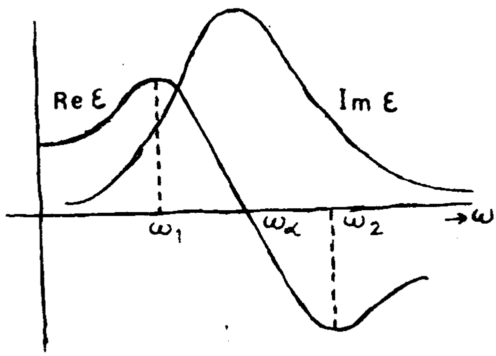
وثابت العزل ϵ يعطى من :

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \sum_\alpha \frac{\left(\frac{e^2}{m\epsilon_0}\right) N f_\alpha}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - i l_\alpha \omega} \tag{11.31}$$

ونعرف ان معامل الانكسار n يساوي $\sqrt{\epsilon}$.

$$n^2 = \epsilon = 1 + \sum_\alpha \frac{\left(\frac{e^2}{m\epsilon_0}\right) N f_\alpha}{(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - i l_\alpha \omega}. \tag{11.32}$$

المعادلة (11-32) هي علاقة التفريق (dispersion relation) للغاز المخفف. ثوابت الخمود l_α صغيرة عموماً لذلك n^2 (أو ϵ) رقم حقيقي تقريباً لمعظم الترددات، للقيم $\omega < \omega_\alpha$ تكون جميع حدود الجمع (11-32) موجبة و ϵ اكبر من واحد، وللقيم $\omega > \omega_\alpha$، تصبح او تزداد الحدود السالبة اكثر فاكثر في الجمع في النهاية ϵ تصبح اقل من الوحدة الواحدة. وبجوار ω_α، يكون السلوك غريباً حيث تختفي الاجزاء الحقيقية ويصبح الحد خيالياً وكبيراً. ويوضح الشكل (11-2) تغير الاجزاء n^2 الحقيقية والخيالية



شكل رقم (11.2)

ويسمى التفريق طبيعي (normal) اذا كانت $\frac{dn}{d\omega} > 1$ اما اذا كانت $1 > \frac{dn}{d\omega}$ ينعكس ترتيب الالوان الموشورية (prismatic colours) ويسمى التفريق غير الطبيعي (anomalous) ونرى من الشكل (11–2) ان التفريق غير الطبيعي يحدث بين الترددين ω_1 ، ω_2 في الحيزالذي فيه $1 > \frac{dn}{d\omega}$ ويكون طبيعياً عدا ذلك في كافة المواقع الاخرى.

اذا كان $I_m\epsilon > 0$ فسيكون هناك التفريق في الطاقة من الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط. لذلك،في المناطق التي تكون فيها $I_m\epsilon$ كبيرة تسمى مناطق الامتصاص الرنيني (resonant absorption) اما اذا كان $I_m\epsilon < 0$, فان الموجة ستكسب طاقة من الوسط مؤدياً الى تضخم (amplification) الموجة كما في حالتي الميزر (masers) والليزر (Lasers).

41-1 التفريق في المواد السائلة والصلبة(Dispersion in Liquids and Solids) :

اذا لم يكن الوسط مخففاً لايتساوى المجال الموقعي والمجال الخارجي.ويجب ابدال متجه المجال الكهربائي E في (11–29) بالمتجه :

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

وهكذا لدينا :

$$\mathbf{P}=\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right)\sum_{\alpha}\frac{Nf_\alpha\left(\frac{e^2}{m}\right)}{(\omega_\alpha{}^2-\omega^2)-il_\alpha\omega} \tag{11.33}$$

$$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\epsilon\mathbf{E},$$

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}}=\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}3\epsilon_0$$

$$\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}=\sum_{\alpha}\frac{Nf_\alpha\left(\frac{e^2}{m}\right)}{3\epsilon_0\{(\omega_\alpha{}^2-\omega^2)-il_\alpha\omega\}} \tag{11.34}$$

أو :

$$\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}-1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}+2}=\frac{n^2-1}{n^2+2}=\sum\frac{Nf_\alpha\left(\frac{e^2}{m}\right)}{3\epsilon_0\{(\omega_\alpha{}^2-\omega^2)-il_\alpha\omega\}} \tag{11.35}$$

لاحظ ان جميع الحدود في الطرف الايمن لاتعتمد على الكثافة عند N التي تمثل عدد الالكترونات لوحدة الحجم حيث تتناسب مع عدد الذرات لوحدة الحجم اي تتناسب مع الكثافة. لذا ولتردد معلوم،لدنيا :

$$\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}-1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}+2}\ \frac{1}{\rho}=A\,\Big|\ (\text{ثابت})\,. \tag{11.36}$$

وهذه مشابهة لمعادلة كلاسيوس ـ موسوتي (2-72) اذا ماكتبت بصيغة n^2 أي :

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\rho}=A \tag{11.37}$$

وتسمى صيغة لورنتس ـ لورنس (Lorentz Lorenz formula) وتسمى الكمية A الانكسارية الذرية او الانكسار النوعي الذري (atomic refractivity) للوسط اذا كانت المادة جزيئية،ووزنها الجزيئي W،يمكن كتابة الصيغة على النحو الآتي :

(حيث N_a هو عدد افوكادرو $N=\frac{\rho N_a}{W}$ $\quad \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{W}{\rho}=A_m$. وتسمى الكمية A_m بالانكسارية الجزيئية او الانكسار النوعي الجزيئي (molecular refractivity) .

11-5 وسط حاوي على الكترونات حرة (Media Containing Free Electrons) :

اذا احتوىالوسط على الكترونات حرة ، فستكون حركتها عشوائية ولايسري فيها تيار. وعند تسليط المجال تكتسب الالكترونات مركبة سرعة اضافية وينتج تيارا. تتصادم الالكترونات مع ذرات المادة وتستطار مسببة الخمود. والذي يعتمد بوضوح على سرعة الالكترونات يمكن كتابة معادلة حركة الالكترون بالشكل الآتي :

$$m\dot{v}_\alpha + ml_\alpha v_\alpha = eE_0 \exp(-i\omega t) \qquad (11.38)$$

حيث افترضنا ان المجال يتغير توافقياً مع الزمن. ويمكنك التحقق من ان حل هذه المعادلة هو :

$$v_\alpha = \frac{eE_0 \exp(-i\omega t)}{m(l_\alpha - i\omega)} \qquad (11.39)$$

لذلك فان كثافة التيار j تساوي :

$$j = \sum_\alpha e v_\alpha = Nev = \frac{Ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m(l - i\omega)} \qquad (11.40)$$

حيث افترضنا وجود N من الالكترونات لوحدة الحجم تتحرك بالسرعة العامة V.

$$j = \sigma E$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(l - i\omega)} \qquad (11.41)$$

لنجد الآن ثابت الخمود I (damping constant) للنحاس باستخدام هذه الصيغة. للنحاس $N \simeq 8\times 10^{28}$ atom/m^3 وفي درجات الحرارة الطبيعية توصيلية الترددات الواطئة σ تساوي تقريباً $\sigma \simeq 6\times 10^7$ mho m^{-1} ، لذلك :

$$l = \frac{Ne^2}{m\sigma} = \frac{8\times 10^{28} \times 1.6\times 1.6\times 10^{-38}}{9\times 10^{-31}\times 6\times 10^7}$$

$$= 3\times 10^{13}\ s^{-1}$$

لذلك عند الترددات 10^{11} أو اقل تكون موصلية المعادن حقيقية ولاتعتمد على التردد، وعند الترددات تحت الحمراء ومافوق تكون الموصلية حقيقية وتتباين مع التردد طبقاً للصيغة (11-41).

«تمارين الفصل الحادي عشر»

11-١ جد المقطع العرضي التفاضلي لاستطارة موجة مستقطبة على شكل قطع ناقص.

11-2 ضع تعبيراً للمقطع العرضي التفاضلي لاستطارة موجة مستقطبة على شكل قطع ناقص ترددها ω بمتذبذب كتلته m وشحنته e وتردد طبيعي ω_0 (natural frequency).

11-3 عندما تسقط موجة كهرومغناطيسية مستوية خطية الاستقطاب على ذرة ما. يتعرض الالكترون المرتبط توافقياً بالذرة الى خمود يتناسب خطياً مع سرعته. احسب المقطع العرضي التفاضلي والمجموع الكلي للمقاطع العرضية. كيف يختلف التوزيع الزاوي للشعاع المستطار عن استطارة تومسن؟

11-4 ثنائي قطب عزمه P يتذبذب بتردد ω موضوع في نقطة أصل منظومة احداثيات. وضع جسيم إستقطابيته B في النقطة الموصوفة بالمتجه الشعاعي $|r|$ ($r \perp P$) حيث $|r|$ اصغر بكثير من طول موجة الاشعاع λ . جد اشعاع موجة المنظومة الكهرومغناطيسية؟

- الفصل الثاني عشر -

«فيزياء البلازما»

Plasma physics

- الفصل الثاني عشر -

«فيـــــزياء البـــــلازما»

Plasma physics

اذا رفعنا حرارة غاز ما فوق حد معين ازدادت الطاقة الحركيـة للـذرات الى الحد الذي يؤدي تصادمها بعضها مع بعض الى انفلاتها الى الكترونات وايونـات موجبة الشحنة،وبصورة عامة يمكن افتراض ان البلازمـا هي خليـط من ثلاث مكـونـات : الكترونـات حرة وايـونـات مـوجبـة وذرات متعـادلـة (او جزيئات)،تتبع مفاعلة هذه الجسيمات فيا بينها،الميكانيك البسيـط او لنقل قوى كولومب الكهربائية المستقرة لذلك فـان طبيعـة المنظمـة مثل هـذه المنظومـة يختلف كلياً عن ذلـك الموجود في الحـالتين السـائلـة والصلبـة المنظمتين بفعـل القـوى بين البلـورات(intercrystalline forces) او قـوى التماسـك (cohesive forces) قصيرة المدى.

البـلازمـا او الحـالـة الرابعـة هي الحـالـة الاكثر شيـوعـاً للمـادة في الكـون فـالايـونـوسفير (ionosphere) هـو غـلاف من البـلازمـا يحيـط بـالجـو الارضي،ومـا يسمى بـالحـزام الاشعـاعي خـارج الايـونـوسفير عبـارة عن مكـون البلازما. ويمكن اعتبار الشمس والنجوم كمصابيح من البلازمـا الحـارة. لـذلـك تعتبر دراسـة البـلازمـا ذات أهمية كبيرة وعلى الفيزيـائيين فهم آليـة العمليـات المختلفة التي تحدث من البلازما.

12-18 شبه - تعادليةالبلازما (Qusai– neutrality of a plasma)

إحدى خصائص البـلازمـا المعروفـة هي شبـه تعـادليتهـا (طبقـاً لشوتكي Schottky) والذي يحقق شبه التعادل هـذا هو القوى الكهربـائيـة التي تربـط القوى المتعاكسة اي ميلها الى موازنة الشحنات الفضائيـة الموجبـة أو السـالبـة في عنصر حجمي بنيـوي،فـأي فصـل للشحنـات نتيجـة زحـزحـة الالكترونـات

بالنسبة الى الايونات يزيد من المجال الكهربائي الذي يقوم عادة حالة التعادل مع ذلك قد ينكسر شبه التعادل في حجم صغير من البلازما عندما يكون المجال الكهربائي المتولد من زيادة في الجسيمات ذات نفس الشحنة ضعيفاً وغير قادر على تحريك الجسيمات ، لكن كثافات الشحنة فضائية تنظم نفسها بحيث يكون الجزء الرئيس من البلازما محمياً من المجال . يوصف شبه التعادل في درجة حرارة وتركيز معينين ببارا ميتر خصائصي خطي (Characteristic linear parameter) هو δ . ففي حجم ذي قياس خطي هو x ، اذا كانت $x \gg \delta$ فمعنى هذا أن تركيز الشحنات المتعاكسة متساوٍ في هذا الحجم وحالة التعادل تكون قائمة اما اذا كانت $x \ll \delta,$ معنى هذا ان فصل الشحنات ليس له تأثير على حركة الجسيمات وتكون حالة التعادل معزولة . ويظهر المجال الكهربائي على مسافة δ .

يمكن تخمين الطول الخصائصي (characteristic length) بالطريقة الآتية افرض ان الشحنات مفصولة إتماماً في عنصر حجمي ذي القياس الطولي δ فتكون الطاقة الكامنة للجسيم المشحون في هذا الحجم من درجة طاقة الحركة الحرارية للجسيمات اي KT حيث T تمثل درجة حرارة البلازما. المجال الكهربائي في الحجم يحقق معادلة بواسون (Poisson equation).

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{12.1}$$

حيث ρ تمثل كثافة الشحنة، اذا كانت الابعاد الخطية للحجم من درجة δ وتركيز الجسيمات المشحونة هو N_0، يصبح لدينا :

$$\text{div}\,\mathbf{E} \simeq \frac{E}{\delta} \simeq \frac{N_0 e}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} \simeq \frac{N_0 e \delta}{\epsilon_0}. \tag{12.2}$$

لذا يكون جهد البلازما في حجم الشحنات المفصولة هو :

$$V = E\delta \simeq \frac{N_0 e \delta^2}{\epsilon_0} \tag{12.3}$$

الطاقة الكامنة للجسيم هي :

$$U = eV \simeq \frac{N_0 e^2 \delta^2}{\epsilon_0} \simeq kT. \qquad (12.4)$$

وهذه تعطينا :

$$\delta \simeq \left(\frac{\epsilon_0 kT}{N_0 e^2}\right)^{1/2}. \qquad (12.5)$$

ويمكن اشتقاق البارامیتر δ من تحليل المجال الكهربائي الذي يظهر في البلازما. افرض ان شحنة اختبارية 'q' ادخلناها الى البلازما. ستحاول الالكترونات الاقتراب من هذه الشحنة وستحاول الايونات الموجبة الابتعاد عنها. وفي حالة التوازن الاحصائي (statistical equilibrium) يمكن حساب التوزيع الفضائي للالكترونات والايونات الموجبة المجاورة للشحنة من صيغة بولتزمان (Boltzmann formula $N \propto \exp\left(-\frac{U}{kt}\right)$ حيث U هي الطاقة الكامنة وهكذا تكون كثافة الالكترون هي :

$$N_e = N_0 \exp\left(e\,\frac{U - U_0}{kT}\right) \qquad (12.6)$$

وكثافة الايون الموجب هي :

$$N_i = N_0 \exp\left(-\,e\,\frac{U - U_0}{kT}\right) \qquad (12.7)$$

حيث U هو الجهد الموضعي (local potential)، و U_0 تمثل جهد البلازما و N_0 تمثل الكثافة الالكترونية وكذلك كثافة الايون الموجب عندما $U = U_0$. ويجب ان يحقق الجهد U معادلة بواسون.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\,\frac{N_i e - N_e e}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{2N_0 e}{\epsilon_0}\sinh\left(e\,\frac{U - U_0}{kT}\right) \qquad (12.8)$$

وهذه معادلة لاخطية (non-linear equation) ومع ذلك اذا كانت $kT > eU$ فيمكن ايجاد حل تقريبي بوضع :

$$\sinh\left(\frac{eU}{kT}\right) \simeq \frac{eU}{kT}$$

المعادلة (12.8) تتقلص الى :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=\frac{2N_0e^2}{\epsilon_0kT}(U-U_0) \tag{12.9}$$

وحلها هو :

$$U=U_0+\frac{q}{4\pi\epsilon_0r}\exp\left(-\frac{r}{\delta}\right) \tag{12.10}$$

وتمثل r البعد عن الشحنة q و :

$$\delta=\left(\frac{\epsilon_0kT}{2N_0e^2}\right)^{1/2}. \tag{12.11}$$

كان ديباي (Debye) أول من ادخل فكرة الطول الخصائصي في دراسته للاليكتروليتات القوية (Strong electrolyte) ثم ادخل بعد ذلك في فيزياء البلازما ويعرف البارامیتر δ باسم طول ديباي (Debye length) ويشير الى اقصر مسافة تتحرك فيها الالكترونات عشوائياً في البلازما عارضاً مجال كولومب للجسيم الرفيع.

عرف لانكمور (Langmuir) الذي كان رائد علم البلازما على انها غاز متأين يكون فيه طول ديباي صغيراً مقارنة بقياس الحجم الذي يشغله الغاز.

12-2 سلوك البلازما في المجال المغناطيسي
(Plasma Behaviour in Magnetic Field)

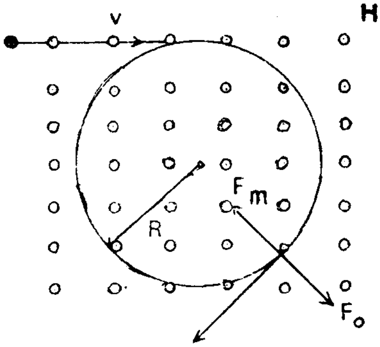
بما ان الجسيمات المشحونة موجودة دائماً في البلازما والبلازما متعرضة غالباً لتأثيرات المجالين الكهربائي والمغناطيسي فسيكون من المفيد اولاً تفحص مفاعلة هذه الجسيمات مع هذين المجالين . ان تسليط مجال كهربائي ثابت ليس له اي جدوى لانه يكون طبقة او غطاءً رفيعاً يغلف كما بينا الجزء الرئيس من البلازما. مع ذلك او لأن المجال المغناطيسي الثابت يظهر بعض التأثيرات المهمة التي سندرسها في هذا الجزء. لنناقش الحالات الآتية :

1) الحالة الاولى : الجسيمات المشحونة في مجال مغناطيسي متجانس (E=0).

افرض ان خطوط قوى المجال المغناطيسي تتجه عمودياً خارج الورقة. وينطلق جسيم كتلته m وشحنته q بسرعة v داخل المجال المغناطيسي وعمودياً

على خطوط القوة كما هو موضح في الشكل (1-12) ان قوة لورنتس F التي تساوي $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ المسلطة على الجسيم عمودية دائماً على V وعلى B ايضاً ، لذلك نجعل الجسيم يسير في مسار دائري في مستوي الورقة ، ويجب ان تكون القوة F في اي لحظة بتوازن مع القوة المركزية (Centrifugal force) لذلك :

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \qquad (12.12)$$



شكل رقم (12.1)

حيث R تمثل نصف قطر المدار وتسمى نصف قطر لارمر للمدار (Larmor radius) ، ومن هذا نجد التردد الزاوي (angular frequency) .

$$\omega_c - \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}. \qquad (12.13)$$

ويسمى تردد سيكلترون (cyclotron frequency) ، وهو لايعتمد على السرعة v ،ويوفر الآلية الفيزيائية لتصميم السيكلترونات واطئة الطاقة.

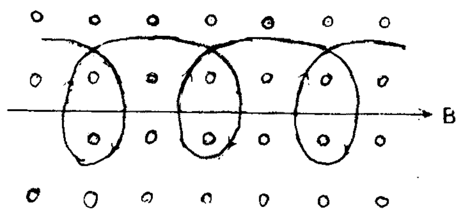
اذا اطلقنا الجسيم داخل المجال المغناطيسي بزاوية اخرى لاعمودياً بالنسبة لخطوط قوة المجال ، سنحلل السرعة v الى مركبتين ، الاولى موازية للمجال $v_{\parallel}$ والثانية عمودية عليه $v_{\perp}$ في مستوٍ عمودي على B بما أن $v_{\parallel}$ لاتتأثر بالمجال ، فيمكن كتابة المعادلة (12-12) بالشكل الآتي :

$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}$$

أي :

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}. \qquad (12.14)$$

وسيكون المنحني الناتج حلزونياً (spiral) كما هو موضح في الشكل (12-2) لان المسار الدائري الذي نصف قطره R سيتحرك على خط القوة وبسرعة منتظمة $v_\parallel$. لذلك يتحرك الجسيم حلزونياً (gyrating) حول خط القوة كأنما الجسيم مقفول (locked) عليه خط المجال.



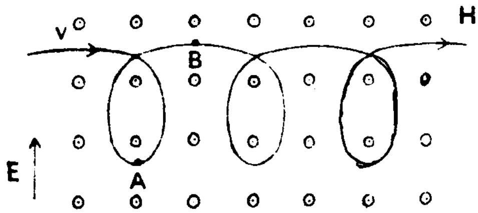
شكل رقم (12.2)

2 - الحالة الثانية : الجسيمات المشحونة في المجالين المتقاطعين الكهربائي والمغناطيسي:-

افرض ان مجال كهربائي متجانس وضع على المجال المغناطيسي المتجانس B ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$) يوضح الشكل (12-3) المسار (trajectory). تعمل الان ثلاث قوى على كل نقطة في المسار. القوة المغناطيسية $F_m = qvB$ والقوة المركزية $F_c = \frac{mv^2}{R}$ ، والقوة الكهربائية $F_e = qE$ ففي نقطة A مثلا تعمل القوتان الكهربائية والمغناطيسية بنفس الهدف او الاتجاه لذلك يكون انحناء المسار اكثر حدة. وفي النقطة تتوازن القوتان نوعا ما ويصبح نصف قطر الانحناء اكبر. والمدار الناتج هو كما لو كانت الجسيمات تدور بانتظام حول مركز يسير بسرعة انجراف (drift velocity) v_D ، التي يمكن ايجاد تعبير لها لو كتبنا :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}' \qquad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}). \end{aligned} \qquad (12.16)$$



شكل رقم (12.3)

اذا اخترنا :

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \qquad (12.17)$$

فان الحدين الاولين من الطرف الايمن للمعادلة (12-16) يلغي بعضهما بعضاً ، ويمكن حساب القوة من :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}.$$

وهي التي درسناها في الحالة الاولى :

3ـ الحالة الثالثة : الجسيمات المشحونة في مجال مغناطيسي غير متجانس : ـ

يعبر عن المجال المغناطيسي غير المنتظم بكثافة خطوط القوة (الشكل 12-4) ، فاينما يكون المجال اكبر تكون خطوط القوى اكثر تكثفاً فضائياً ويكون انحناء المسار اكثر وضوحاً والعكس بالعكس. ونتيجة تباين انصاف اقطار الانحناء آت خلال حركة الجسيم تحت على انجراف الجسيم.

الحركة الحلزونية للجسيمات المشحونة لها خاصية مهمة ومفيدة جداً وهي العزم المغناطيسي μ الذي يعرف بأنه :

التيار الناتج من حركة الجسيم الحلزونية X المساحة التي يحتويها التيار = μ

$$= \frac{qv_\perp}{2\pi R}\,\pi R^2 = \frac{qv_\perp R}{2}$$

$$= \pi R^2 B\left(\frac{q^2}{2\pi m}\right) = \left(\frac{q^2}{2\pi m}\right)\Phi \qquad (12.18)$$

$(\because\ B = \frac{mv_\perp}{qR}$ and flux $\Phi = \pi R^2 B)$.

وهكذا فان العزم المغناطيسي يتناسب مع الفيض .Φ ويمكننـا اثبـات ان μ اذا ماتغيرت B. ببطء ان كان التغير فضائيا او زمنياً.

حسب قانون فاراداي (Faraday's Law) ، تحسب القوة الـدافعـة الكهربـائيـة المحتثة $\mathcal{E}$ حول مسار مغلق من :

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}. \tag{12.19}$$

عندما تكون الشحنة صغيرة في المجال،فان الشغل المنجز على جسيم شحنتـه q في مـدار واحـد هو $q\mathcal{E}$ وهـذا يجب ان يسـاوي $\frac{dW}{dt}$. مضروبـاً في الـزمن الـذي يستغرقـه الجسيم في السير حول مـدار واحـد. و W هو الشغـل المنجـز ، وهذا يعني ان :

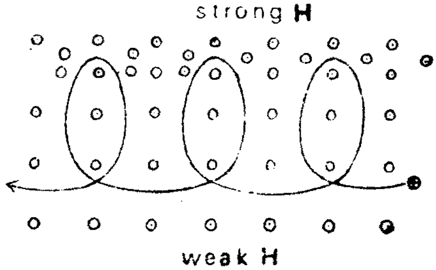
$$q\mathcal{E} = \frac{2\pi R}{v}\frac{dW}{dt} = \frac{2\pi R}{v}\frac{dW}{dB}\frac{dB}{dt} = q\pi R^2\frac{dB}{dt} \quad \text{(12.19) انظر} \tag{12.20}$$

$$\therefore \quad \frac{dW}{dB} = \frac{qRv}{2} = \mu \tag{12.21}$$

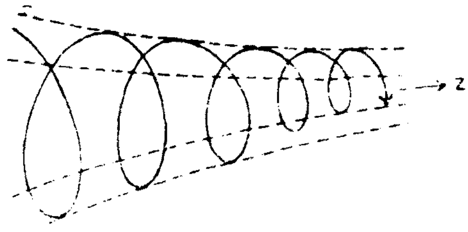
$$\text{Now} \quad W = \frac{1}{2}mv^2 = \mu B \quad \text{(12.18) الان من} \tag{12.22}$$

$$\therefore \quad \frac{dW}{dB} = B\frac{d\mu}{dB} + \mu \tag{12.23}$$

اذا قارنا هذه بالمعـادلـة (12-21) فنجـد ان $\frac{d\mu}{dB} = 0,$ أي ان μ لاتعتمد على B. لذلك يمكن معالجة تأثيرات تباين هذا المجـال بملاحظـة الامور المترتبـة على متطلبـات ثبـات μ. ولكي تثبت μ يجب ان يبقى الـدفـق داخـل مـدار الجسيم ثابتاً، وهكذا في المجال المغنـاطيسي الـذي يتغير ببـطء مع الموقع، فكلمـا اقتربت خطوط المجال ينضغط مدار الجسيم بالشكل الذي بقيت فيه Φ ثابتـة ، لذلك يبدو كأنما الجسيم يتحرك بمحاذاة سطح انبوب الدفق (الشكل 5-12)



شكل رقم (12.4)



شكل رقم (12.5)

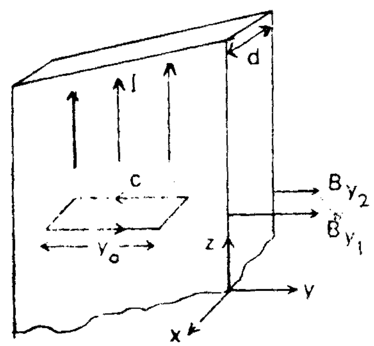
12-3 البلازما كمائع موصل ـ المغناطيسية الهيدروديناميكية :

: (Plasma as a Conducting Fluid Magnetohy drodynamics)

يمكن مبدئياً معرفة خواص البلازما بدراسة التأثيرات الفردية لجميع الجسيمات والمفاعلات التي تحدث فيما بينها،لكن هذه العملية صعبة من الناحية العملية ونحتاج الى المزيد للوصول الى تقريب عيني لسلوك البلازما.

تعتبر البلازما في المعجالة البنيوية على انها مقسمة الى حجوم صغيرة كل منها كبير مقارنة بمتوسط الفضاء ان للجسيمات الفردية التي تحتوي عليه وهي صغيرة ايضاً مقارنة بأي مسافة يمكن ان تتغير فيها الخواص البنيوية تغيراً محسوساً. ويجتمع مع هذا الحجم متوسط قيم السرعة، المجال المغناطيسي،الكثافة ودرجة الحرارة ، والضغط ، والموصلية ... الخ التي تتناسب مع هذا الحجم ، ويستنتج سلوك البلازما بصيغة تفاعلات هذه الحجوم.

وتستخدم هذه التقنية بصورة رئيسية في دراسة الكهرومغناطيسية وظاهرة حركية السوائل (الهيدروداينمك) ، وسنعالج في هذا الجزء والاجزاء اللاحقة مائع موصل (البلازما بالتحديد) باخضاعها لقوانين الكهرومغناطيسية والهيدروداينمك في آن واحد وتسمى هذه المعالجة،المغناطيسية الهيدروداينمك في ان واحد وتسمى هذه المعالجة، المغناطيسية الهيدروديناميكية من منظار ايجاد المعادلات الهيدروديناميكية التي تخضع لها البلازما باعتبارها مائعاً (تقليدياً) ، ستحسب اولاً الشروط التي على المجال المغناطيسي B تحقيقها في صفيحة تيارية لانهائية الطول ذات سمك صغير جداً 'd' ويوضح الشكل (12-6) صفيحة تحمل تياراً مقداره I باتجاه المحور Z. ويمكن بسهولة ملاحظة ان المجال المغناطيسي B المجتمع معه باتجاه المحور Y. تصور ان الدائرة C المستطيلة الشكل طول ضلعها y_0 ويقع على وجه اللوح والضلع الثاني يقع على الوجه الآخر. حسب قانون أمبير :



شكل رقم (12.6)

$$\oint \mathbf{B}\cdot dl = B_{y_1} y_0 - B_{y_2} y_0 = \mu_0 I = \mu_0 j y_0 d \qquad (12.24)$$

(لأن عرض الدائرة صغير جداً)

حيث j amp m^{-2} تمثل كثافة التيار و B_{y1} ، B_{y2} تمثلان قيمتي B على وجهي اللوح. لذا

$$B_{y_1} - B_{y_2} = \mu_0 jd = \mu_0 j_s \qquad (12.25)$$

حيث $j_s = jd$ تسمى كثافة التيار السطحية.

في الفصل الاول اثبتنا ان المجال الكهربائي المستقر E يتغير عبر طبقة الشحنة بالمقدار:

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad (12.26)$$

يمكن معرفة القوة لوحدة المساحة في اللوح التياري بايجاد التكامل :

$$\mathbf{F} = \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dx = -\hat{\mathbf{e}}_x \int_{-d/2}^{d/2} j B_y dx$$

(لأن j باتجاه المحور Z)

$$= -\hat{\mathbf{e}}_x j \left[\int_{-d/2}^{0} B_{y_2} dx + \int_{0}^{d/2} B_{y_1} dx \right]$$

$$= -\hat{\mathbf{e}}_x j \frac{d}{2} (B_{y_1} + B_{y_2})$$

$$= -\hat{\mathbf{e}}_x (B_{y_1} + B_{y_2}) \frac{(B_{y_1} - B_{y_2})}{2\mu_0} \quad \text{(من 12-25)}$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{2\mu_0} (B_{y_2}^2 - B_{y_1}^2). \qquad (12.27)$$

اذا كان مصدر التيار هو اللوح نفسه فقط ون $B_{y1} = B_{y2}$ تعطينا $F = 0$

نأخذ الآن وضعية اخرى توجد فيها مصادر اخرى للتيار ، و $B_{y1} > B_{y2}$ فان القوة الآن تعمل باتجاه المحور X. وكا في سكونية السوائل (hydrostatics) يمكن اعتبار الجهد التي فيها المجال المغناطيسي اعلى بأنها منطقة الضغط الاعلى وكتابة التعبير الآتي للقوة :

$$\mathbf{F} = (\mathcal{P}_2{}^M - \mathcal{P}_1{}^M)\, \hat{\mathbf{e}}_x \qquad (12.28)$$

حيث $\mathcal{P}^M$ تمثل الضغط المغناطيسي ويحسب من :

$$\mathcal{P}^M = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (12.29)$$

كان فاراداي أول من ادخل مصطلح الضغط المغناطيسي هذا. تصور انابيب القوة على انها خويطات مطاطية (elastic filaments) متعرض لشد باتجاه المجال ومضغوط بالاتجاه المعاكس. ثم ترجم ماكسويل هذه الفكرة رياضياً بعد ذلك بصيغة ممتدة الاجهاد (Stress tensor) ويشكل هذا الاسلوب في معاملة المجالات المغناطيسية مجتمعاً مع هيدروديناميكية الموائع الموصلة (غازية او سائلة) اساس الهيدروداينمك المغناطيسي (magnetohy drodynamics).

لندرس الآن سلوك المائع الموصل في مجال كهرومغناطيسي. اذا كانت j هي كثافة التيار في المائع و $\mathcal{P}$ هو ضغط المائع فان القوة المسلطة على وحدة حجم من المائع هي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \mathcal{P} \tag{12.30}$$

وتعرف هذه المعادلة عامة بأنها معادلة اساسية في الهيدروداينمك المغناطيسي.
باستخدام العلاقة $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, يمكن كتابة (12-30) على النحو الآتي :

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \mathcal{P}$$

$$= -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{B} - \nabla \mathcal{P}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{B} - \nabla\left(\mathcal{P} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right). \tag{12.31}$$

وهذه تتوافق بطريقة ما مع المقترح (12-29) اعلاه حيث اعتبرنا - $\frac{B^2}{2\mu_0}$ - الضغط المغناطيسي. لاحظ ان $\frac{B^2}{2\mu_0}$ تحسب فقط للجزء الذي يتأثر بالقوة $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ والمتبقي يأتي من الحد $\frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}$ ، قد تتساءل لماذا لم يظهر هذا الحد في المعادلة (12-28) ، والسبب هو في مثال اللوح التياري،ليست B اتجاهية (unidirectional) و (div B=0) يضمن عدم تغير B بمحاذاة اتجاه المجال وبما ان التغير الفضائي يحدث فقط بزاوية قائمة مع B فان $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} = 0$.
وفي حالة التوازن F = 0 لذلك اذا اضمحل الحد الاول كما في حالة اللوح التياري.

$$\mathcal{P} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{ثابت} \tag{12.32}$$

وهو شرط التوازن الساكن (Static equitibrium).

12-4 حصر مغناطيسي تأثير الحشر (بمرور تيار كهربائي قوي)
(Magnetic Confinement - Pinch Effect)

وجدنا من (12-30) انه مادام شرط التوازن هو F = 0. فأن :

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \qquad (12.33)$$

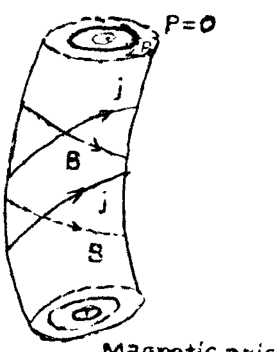
ويعطينا حاصل ضرب B و j العددي :

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathcal{P} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0 \qquad (12.34)$$

و

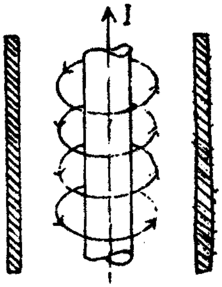
$$\mathbf{j} \cdot \nabla \mathcal{P} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0. \qquad (12.35)$$

توضح هذه المعادلات ان B و j كلاهما يقعان على السطوح ثابتة الضغط. فاذا حدث وكانت هذه السطوح مغلقة ونظراً لعدم تمكن خطوط B وخطوط j المرور عبرها (طبقاً للمعادلتين (34-12) و (35-12) تبدو وكأنها مكونة من التفاف خطوط B وخطوط j كما هو موضح في الشكل (7-12) في هذه السطوح متساوية الضغط الجوي. (isobaric) يزداد الضغط من الخارج باتجاه المحور وتشير القوة j X B الى المحور كذلك. وتعرف هذه بالحصر المغناطيسي (magnetic confinement)



شكل رقم (12.7)

وسيوضح المثال البسيط الآتي كيف يمكن ان يؤثر المجال المغناطيسي على الحالة الحركية للبلازما. افرض ان اسطوانة من البلازما يسري تيار في محورها. الشكل (8-12) سيرافق هذا العمود الخطوط السمتية للمجال B وقوة j X B متجه نحو المحور ستحاول ضغط البلازما. تتقلص البلازما تحت فعل هذه القوة الى ان تعوض القوة الكهروديناميكية الضاغطة بالضغط الحركي المتزايد = p NKT. تعرف هذه الظاهرة باسم ظاهرة تأثير الحشر (pinch effect).

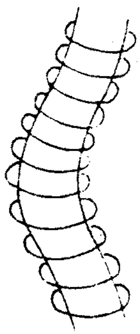


شكل رقم (12.8)

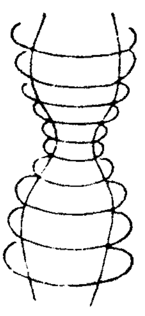
12-5عدم الاستقرارية (Instabilities) : -

تبين التجارب انه لايوجد حشر متوازن مستقر (Stable equilibrium pinch) اي ان اي انحراف بسيط عن حالة التوازن يحاول ان يزداد مؤدياً الى عدم تكامل (disintegration) مشكلاً البلازما. عدم استقرارية البلازما مهمة في نطاق واسع من الوضعيات الفيزيائية التي تلعب البلازما دوراً فيها.

يبين الشكل (9 ـ 12) مايسمى عدم الاستقرارية الملتوية (Kink instability) التي تحدث عندما ينحني الحشر الخطي (linear pinch) نتيجة بعض الاضطرابات (perturbation) حيث تتوهن خطوط القوة المغناطيسية، اي ان المجال يضعف خارج المنحني ويتكثف او يشتد المجال داخلها، والمجال الاقوى يولد ضغطاً مغناطيسياً اكبر في الانحناء الذي يزيد من الانحناء الى ان ينكسر الحشر الخطي.



شكل رقم (12.9)

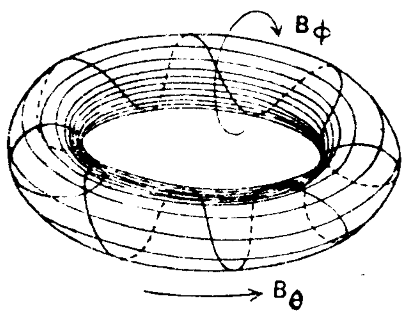


شكل رقم (12.10)

مـــايسمى عـــدم الاستقراريـــة السجقيـــة (sausage instability) مـوضـــح في الشكل (10 ـ 12) ويحـدث هــذا النوع من عـدم الاستقراريـة عنـدمـا ينحشر عمـود البلازما بالصدفة.

بمـا أن المجـال B يتنـاسب عكسيـاً مـع r لـذا يـزداد الضغـط $\frac{B^2}{2\mu_0}$ في المنطقـة المحصـورة اي في العنـق والـــذي يـزيـــد من شـــدة الحشر أي ان ينقطـع عمـود البـلازمـا. هنـاك انـواع اخرى من عـدم الاستقراريـة الحركيـة جـزء منهـا يحـدث بالصدفة او بتحريف اصطناعي لتوزيع الجسيمات عن التوزيع الماكسويلي.

لأجـل التغلب على مشكلـة عـــدم الاستقراريـــة عرضت عـــدة تصـــاميم لاحتـــواء البـــلازمـــا. واحـــدى هـــذه التصـــاميم هي مـــايسمى تـــوكامـــاك (tokamak) وهي منظـومـــة متنـــاظرة محـوريـــاً،الشكل (11 – 12) ،والــذي يقـوم المجـال المغنـاطيسي للتيـار الــذي يسري بمحـاذاة محـورهـا بحفـظ البـلازمـا وليست مجـال مغنـاطيسي كبير جداً بموازاة التيار يقوم بايقاف أو صنع (Suppresses) عدم الاستقرارية.



شكل رقم (12.11)

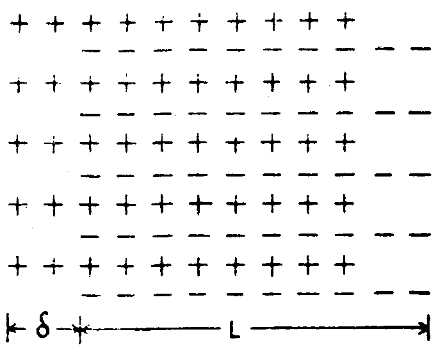
12-6 موجات البلازما (Plasma Waves) : -

يمكن ان تنشأ أو تنتشر تـذبـذبـات وموجـات عـديـدة وبمـدى واسع جـداً من الترددات في البلازما وسنتناول اثنين منها باختصار:

1) تذبذبات الكترون البلازما (Plasma - electron oscillations)

يتـــذبـــذب الالكترون بتردد عـــالي عنـــدمـــا تتزحرج الالكترونـــات بـــالنسبـــة للايـــونـــات. يمثـــل الشكل (12-12) البـــلازمـــا وقـــد انـــزاحت فيهـــا الالكترونـــات مجموعة بـالنسبـــة لـلايـونـات الموجبـــة بمســافـــة δ التي تعتبر صغيرة مقـــارنـــة بسمـــك البـلازمـــا الـــذي هـــو L. تثير ازاحـــة الالكترونـــات اضطراب البـــلازمـــا المتعـــادلـــة. ويحسب المجـــال الكهربـــائي E المتـــولـــد في البـــلازمـــا نتيجـــة ازاحـــة الشحنـــات من المعادلة الآتية :

$$E = \frac{Ne\delta}{\epsilon_0} \qquad (12.36)$$



الشكل (12.12)

$$LmN \frac{d^2\delta}{dT^2} + \frac{Ne^2L\delta}{\epsilon_0} = 0 \qquad (12.37)$$

ولهذه المعادلة حل هو :

$$\delta = A \exp\left\{i\left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2} t\right\} = A \exp\,(i\omega_p t) \qquad (12.38)$$

حيث :

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = \left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (12.39)$$

$$\therefore \qquad \nu_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (12.40)$$

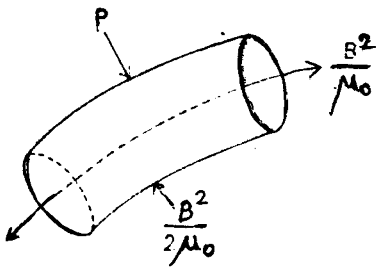
وهو تردد الذبذبةالمسمى عادة تردد البلازما (plasma frequency).

يمكن لهذه الذبذبات الانتشار في البلازما مثل الموجات الكهربائية المستقرة الطولية (longitudinal electrostatic waves). ويمكن ان تتولد موجات ذات تردد اقل بكثير نتيجة الذبذبة الطولية للايونات وتسمى صوت الايون (ion sound) الا اننا سوف لانناقشها هنا.

2ـ الهيدرومغناطيسية أو موجات آلفن

- : (Hydromagnetic or Alfve'n waves)

يمكن اثبات ان اجهاد المجال المغناطيسي مكافيء لضغط مغناطيسي متماثل الخواص (isotropic magnetic pressure) $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ولشد (tension) $\frac{B^2}{\mu_0}$ على طول خطوط المجال المغناطيسي كما هو موضح في الشكل (2.13) او يزداد الشد كلما سحب (stretching) الانبوب وهذه الوضعية مماثلة لوضعية الخيط المطاطي المسحوب او المتوتر. ونعرف انه عند ضرب الخيط تنشأ موجات مستعرضة تنتشر على طول الخيط. افلا يمكن اذن خلق موجات مستعرضة تنتشر على طول خطوط المجال المغناطيسي بضرب انبوب القوة؟ كان اول من ميز وجود هذا النوع من الموجات هو هانس آلفن (Hannes Alfve'n) سنة 1942. واثبتت التجارب الدقيقة الجرات في البلازما فيما بعد وجود مثل هذه الموجات التي تسمى الآن موجات آلفن (Alfve'n waves).



الشكل (12.13)

تعطى سرعة الموجة في حالة الخيوط بصيغة الشد T وكثافة الكتلة الخيطية للخيط ρ وعلى النحو الآتي :

$$v = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \tag{12.41}$$

وبمناظرتها مع موجات البلازما الهيدرومغناطيسية نستبدل T بالشد المغناطيسي $\frac{B^2}{\mu_0}$ وتصبح ρ كثافة كتلة البلازما. وهكذا تكون لدينا سرعة الطور للموجات الكهرومغناطيسية وهي :

$$v_A = \frac{B}{(\mu_0\rho)^{1/2}} \tag{12.42}$$

وتسمى السرعة v_A عادة سرعة آلفن (Alfve'n velocity) .

«تمارين الفصل الثاني عشر»

12ـ1 تيار يسري محورياً في انبوب اسطواني من البلازما يتلاشى ضغط البلازما عند $r = r_0$ و $P = N(r)kT$ اثبت أن :

$$2\,NkT = \frac{\pi}{2\mu_0}\left(rB\right)^2_{r=r_0}$$

حيث :

$$N = \int_0^{r_0} n(r)\; 2\pi r\,dr$$

12ـ2 باستخدام نتيجة السؤال السابق، برهن على ان علاقة بنيت (Bennett's relation) الآتية للحشر الخطي هي :

$$I^2 = \frac{16\pi}{\mu_0}\,NkT.$$

12ـ3 تحتوي الهالة الشمسية (Solar Corona) على الهيدروجين المتأين وبكثافة 10^{12} particles/m^3 تقريباً. اذا فرضنا أن المجال في الهالة B = 1000 gauss احسب سرعة طور (phase Velocity) موجات آلفن.

الملاحق

الملحق (A)

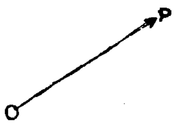
المتجات (Vectors)

يعتبر تحليل المتجهات آلية رياضية قوية لتداول العمليات الفيزياوية الواقعية بسولة وبصورة آنية ولها مزايا اخرى عديدة. تصبح معادلات الكهروداينمك اكثر اختصاراً اذا ماكتبت بالكميات المتجه ويصبح المحتوى الفيزيائي اكثر وضوحاً.

A-1 مفهوم المتجه (The Concept of a Vector) : -

نتناول في الفيزياء كميات متعددة الانواع، والنوعان الاكثر اهمية هما الاول الذي يوصف او يتحدد برقم مفرد. والمثال النموذجي لهذا النوع هو : الكتلة، ودرجة الحرارة، والكثافة، ... الخ. وهذه يمكن تحديدها باعطاء قيمتها فقط. والنوع الثاني هو الذي لايتحدد تماماً برقم مفرد. خذ مثلاً جسيم يتحرك من النقطة o الى النقطة P التي تبعد مسافة 'r' سم عن O. هذا النص لايعطي الموقع المضبوط لنقطة P لانه يمكن ان تكون النقطة P في أي نقطة من سطح كرة نصف قطرها r. ولتحديد موقع P بالضبط (أي اعطاء قيم تحدد موقعاً واحداً فقط لـ P ولايمكن لأي موقع آخر أن يأخذ نفس القيم) يجب ان نقتفي اثر طريق الجسيم وتقرير اتجاه الازاحة. مثل هذه الكميات التي تتطلب بالاضافة الى قيمتها اتجاهها ايضاً لوصفها تسمى المتجهات (Vectors). ومن المألوف تمثيل المتجهات بالاحرف الثخينة السوداء (bold-face) بينما الكميات العددية تمثل بالاحرف المائلة (italics). ويرمز للازاحة OP بالحرف او بالرمز r الذي يعطي قيمة واتجاه الازاحة في آن واحد.

افرض الآن ان النقطة O التي فيها الجسم تقع في البداية في نقطة اصل منظومة احداثية سيعطى موقع النقطة P في هذه المنظومة بثلاثة ارقام، الاحداثيات Z ، y ، X. لذلك الرقم r ليس رقماً مفرداً بل يمثل مجموعة من ثلاثة ارقام تؤخذ كلها او مجتمعة. والارقام الثلاثة هي Z ، y ، X وتسمى مركبات المتجه r في منظومة احداثيات اخرى لها نفس نقطة الاصل o ، فان احداثيات النقطة p ومن ثم مركبات r ستكون مختلفة ، قل Z', y', X' لكن r مازالت تمثل الازاحة. بعبارة اخرى المتجه r لايعتمد على منظومة الاحداثيات المستخدمة ماتغيرت منظومة الاحداثيات لايفرض علينا تغيير رموز معادلاتنا اذا ماكتبناها بالكيات او المصطلحات المتجه. تؤدي وجهة النظر هذه من تقليل الرموز المستخدمة والتي تعتبر هذه ميزة اخرى من مزايا استخدام تقنية المتجهات. يمكن تمثيل المتجه بالسهم في الرسم (الشكل A1) حيث يعطي طول واتجاه السهم مقدار واتجاه المتجه. والمتجه الذي قيمته وحدة واحدة يسمى وحدة المتجه (unit vector) ، ويرمز لوحدة المتجه باتجاه r بالرمز $\hat{e}_r$.



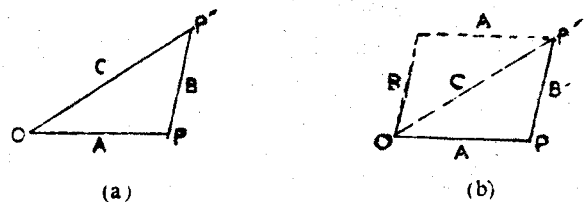
شكل رقم (A.1)

A-2 جبر المتجهات (Vector algebra) : -

تخضع العمليات الرياضية للكميات العددية لقواعد الجبر الاعتيادية. الا انه ولكون المتجهات كميات متجهة لايمكن جمعها او طرحها بالطرق الاعتيادية لذا علينا صياغة قواعد ملائمة لربط المتجهات بطرق مختلفة.

1) جمع وطرح المتجهات (Addition and subtraction of Vectors) : -

يمكن دمج ازاحتين لنقطة بازاحة مفردة مكافئة لها باتباع وسيلة بسيطة. افرض ان الازاحة OP المثلة بالمتجه A تتبعها ازاحة ثانية PP' متمثلة بالمتجه B (الشكل A-2A) ، يمكن الحصول على الموقع النهائي للنقطة اذا مازيحت اتجاهياً على طول op'. سنمثل هذه الازاحة بالمتجه C والتي نسميها مجموع A و B اي $C = A + B$.



شكل رقم (A.2)

يمكن تمثيل المتجه الناتج باسلوب كفوء تماماً باستخدام متوازي الاضلاع،ضلعاه هما A و B (الشكل A–2B) ان قطر متوازي الاضلاع يعطينا المتجه C.ان اضافة المتجهات ابدالية ، أي ان :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \qquad \text{(A1)}$$

لذلك فان قانون اضافة المتجهات هو قانون متوازي الاضلاع للاضافة والذي ينص على ان مجموع المتجهين A و B يساوي في المقدار والاتجاه قطر متوازي الاضلاع المشكل بالاضلاع التي تمثل المتجهين A و B.

يمكننا الآن تعريف المتجه تعريفاً ادق،المتجه كمية فيزيائية لها مقدار واتجاه وتخضع لقانون متوازي الاضلاع في الاضافة.

ويمكن الحصول على مجموع متجهين لهما نفس الاتجاه بجمع قيمتها ويبقى الاتجاه نفسه. المتجه mA (حيث m عبارة عن رقم مجرد) له نفس اتجاه المتجه A ولكنه اكبر منه بـ m من المرات. هذه تقودنا الى طريقة مهمة في تمثيل المتجهات ، فاذا كانت A قيمة المتجه A و $\hat{e}_A$ تمثل وحدة المتجه باتجاه A. عندها يمكن كتابة :

$$\mathbf{A} = A\hat{e}_A \qquad \text{(A2)}$$

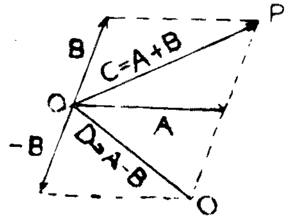
واكثر من ذلك ، اذا كانت A_z, A_y, A_x، هي مركبات المتجه A على طول الاحداثيات و $\hat{e}_z, \hat{e}_y, \hat{e}_x$ هما وحدات المتجه باتجاه المحاور عندها يمكن تمثيل المتجه A بالشكل الآتي :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z \qquad \text{(A3)}$$

يمكن الحصول على الفرق بين المتجهين A و B باضافة المتجه B - الى A أي :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (A4)$$

حيث B - هو المتجه الذي له نفس قيمة المتجه D الا انه معاكس له في الاتجاه. لذا وللحصول على الفرق بالرسم اعكس اتجاه B واعمل متوازي الاضلاع ، كما في السابق ، في الشكل (A-3) يعطينا OP مجموع المتجهين C=A+B و OQ الفرق بينهما D=A-B.



شكل رقم (A.3)

2) جداء المتجهات (Product of vectors) : -

تمر علينا في الفيزياء عادة مجموعات اتجاهية لها خواص الضرب وقد يكون حاصل جداء متجهين كمية عددية او متجهة حسب تعريف الجداء.

(A) الجداء العددي او الجداء النقطي لمتجهين (A.B) :
(Scalar product or dot product of two vectors A.B) :

يعرف حاصل الجداء العددي او النقطي لمتجهين بأنه الرقم الذي يساوي حاصل جداء قيمتيهما مضروباً في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما ، وهكذا.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta . \qquad (A5)$$

واضح ان الجداء العددي هو حاصل جداء قيمة احد المتجهين ومسقط (projection) الآخر عليه.

ويمكن التحقق بسهولة من ان الجداء العددي له خواص الارقام الاعتيادية الآتية :

(i) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (A6)

(ii) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \ldots) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} +$ (A7)

يمكن ملاحظة ان حاصل الجداء العددي يتلاشى حتى اذا لم يكن اي واحد من العوامل صفراً اذا كانت الزاوية المحصورة بينهما هي 90^{o} ، وهكذا :

$$\hat{\mathbf{e}}_x\cdot\hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_y\cdot\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z\cdot\hat{\mathbf{e}}_x = 0 \tag{A8}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x\cdot\hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y\cdot\hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z\cdot\hat{\mathbf{e}}_z = 1 \tag{A9}$$

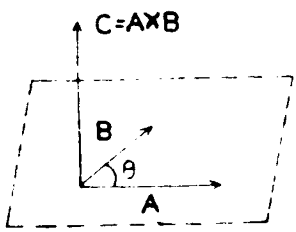
ويمكن التحقق ايضاً اذا كان $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_z\hat{\mathbf{e}}_z$ و $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{e}}_x + B_y\hat{\mathbf{e}}_y$ $+ B_z\hat{\mathbf{e}}_z$ ، فان :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 \tag{A10}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{A11}$$

(B) الجداء الاتجاهي (Vector productor cross - product AXB) : -

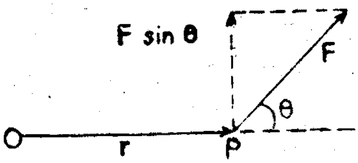
يعرف الجداء الاتجاهي C للمتجهين A و B بأن المتجه الذي تساوي قيمته حاصل جداء قيمتي المتجهين A و B مضروباً في جيب الزاوية المحصورة بينهما واتجاهها عمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين بحيث تشكل المتجهات A , B , C منظومة اليد اليمنى (right - handed system) ، الشكل (A - 4).



شكل رقم (A.4)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_c. \tag{A12}$$

يمكن بناءاً على اعتبارات الشكل الهندسي اثبات ان قيمة الجداء الاتجاهي لمتجهين تساوي مساحة متوازي الاضلاع الذي يشكل المتجهات ضلعاه. من هذا نرى انه بالامكان تمثيل المساحة بالمتجهات. المساحة تمثل بمتجه عمودي على المساحة والتي قيمتها تساوي المساحة. ويرتبط معناه بالمعنى الذي يصف الشكل الهندسي للمساحة.



شكل رقم (A.5)

سنأخذ مثالاً للجداء الاتجاهي العزم الناتج من القوة F العاملة في نقطة حول النقطة O لتكن الزاوية المحصورة بين متجه الموقع $OP = r$ والقوة F هي الزاوية θ (الشكل A-5). لذا تكون قيمة العزم هي $N = r F \sin\theta$ يولد هذا العزم دوراناً،لذا يعتبر كمية اتجاهية،ويمكن ايجاد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = rF \sin\theta \, \hat{\mathbf{e}}_n \qquad \text{(A13)}$$

يمكن التحقق بسهولة من خواص الجداء الاتجاهي الآتية :

(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ (A14)

(b) $A \times (B + C + D +) = A \times B + A \times C +$ (A15)

(c) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ (A16)

(d) $\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_z = 0$ (A17)

(e) $\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z;\ \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_x;\ \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y$ (A18)

(f)
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A}_y\mathbf{B}_z - \mathbf{B}_y\mathbf{A}_z)\hat{\mathbf{e}}_x + (\mathbf{A}_z\mathbf{B}_x - \mathbf{A}_x\mathbf{B}_z)\hat{\mathbf{e}}_y + (\mathbf{A}_x\mathbf{B}_y - \mathbf{A}_y\mathbf{B}_x)\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(A19)}$$

(C) الجداء المتعدد (Multiple products) : -

بمساعدة الجداء النقطي (الجداء العددي) والجداء الاتجاهي لمتجهين يمكن بناء جداء متعدد يشمل متجهات عديدة. وسنتناول هنا نوعين من الجداء الثلاثي (triple products) ذي الاهمية الخاصة .

(1) الجداء الثلاثي العددي (Scalar triple product) (A. (BXC : -

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_z\hat{\mathbf{e}}_z)\cdot\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

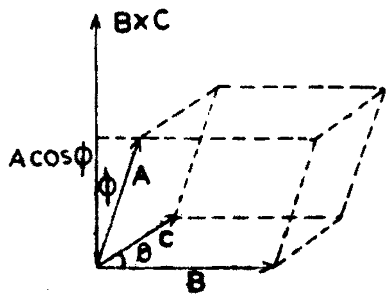
$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad \text{(A20)}$$

خذ متوازي اضلاع مرسوماً بحيث تشكل المتجهات C,B,A اطرافه (الشكل A–6). وجدنا ان حاصل ضرب BXC عمودي على القاعدة. وقيمته تساوي مساحة القاعدة،لذلك فان :

A. (BXC) = (BXC مسقط A على) × (مساحة متوازي الاضلاع)

(A–21) (قاعدة متوازي السطوح) × (ارتفاع متوازي السطوح)= حجم متوازي السطوح



شكل رقم (A.6)

وبأخذ اوجه المتوازي المتعددة بالتناوب نجد أن :

$$A\cdot(B \times C) = B\cdot(C \times A) = C\cdot(A \times B)$$

= Volume of the parallelopiped (حجم متوازي السطوح)

(A–22)

وهذا يثبت اذا ماحدث تغير دوري (Cyclic change) في سلسلة (sequence) C,B,A فان الجداء الثلاثي العددي يبقى نفسه. لهذا فان القوس في هذا الضرب زائد على الحاجة او قديم المعنى،لأن الجداء A.BXC يعني دائماً جداء A مع BXC لأن (A.B) X C عديم المعنى والعلاقة :

$$A\cdot B \times C = A \times B\cdot C \qquad (A23)$$

تثبت انه بالامكان ابدال اشارة الجداء (Cross) والنقطة (dot) حسب الرغبة بشرط ايفاء الترتيب الدوري (cyclic order) للمتجهات كما هو. لذلك يمكن للسهولة اسقاط اشارة الضرب والنقطة وتمثيل الضرب بالرمز (ABC). واذا كان (ABC) = 0 وليس احد المتجهات صفراً نستنتج ان المتجهات جميعها متحدة المستوى (Coplanar).

(2) الجداء الثلاثي الاتجاهي (Ax (BXC) (Vector triple product)

في هذا الجداء يكون المتجه BXC عمودياً على المستوي الحاوي على المتجهين B و C ولنفس السبب نجد ان المتجه AX(BXC) عمودي على المستوي الذي يحوي المتجهين BXC و A ، أي ان المتجه AX(BXC) سيقع في المستوي الحاوي على المتجهين B و C ويكون بالاضافة الى ذلك عمودياً على A.

والعلاقة الآتية الاكثر استخداماً يمكن اثباتها هندسياً (geometrically) او تحليلياً (analytically).

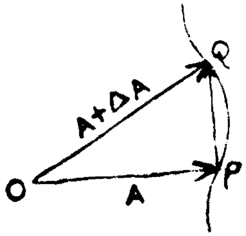
$$A \times (B \times C) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B) \qquad (A24)$$

A–3 تفاضل وتكامل المتجهات (Vector calculus) : -

سندرس الآن عمليتي تفاضل وتكامل المتجهات ، لأن هذين المفهومين ضروريان جداً في تعريف العوامل المفيدة في تحليل المتجهات.

(1) تفاضل متجه بالنسبة لكمية عددية

- : (Differentiation of a vector with respect to a scalar)



شكل رقم (A.7)

افرض ان المتجه A هو دالة مستمرة (Continuous function) لمتغير عددي مستمر u، اي ان $A=A(u)$ اذا ماتغير U يتغير A ايضاً ويتولد منحني في اثر مخطات A المتغيرة باستمرار (الشكل A–7). واذا تغير U الى $U + \Delta U$، فان المتجه A سيتغير بمقدار $\Delta A=A(u+ \Delta u) - A(u)$ ولتمثل OP و OQ المتجهين A و $A + \Delta A$ على التوالي. حسب قانون اضافة المتجهات، تمثل PQ مقدار الزيادة ΔA في المتجه A وكما في الدوال العددية فاننا نعرف المشتقة $\frac{dA}{du}$ على انها :

$$\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta u} = \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u} \qquad (A25)$$

المشتقة $\frac{dA}{du}$: هي متجه اتجاهه هو الاتجاه المحدد (limiting direction) او غاية ΔA عندما $\Delta u \to 0$ اي ان اتجاه المشتقة يقع على طول مماس المنحني في نقطة A عندما $\Delta u \to 0$.

ان قواعد تفاضل الضرب تناظر كذلك تلك الخاصة بالدوال العددية الاعتيادية عدا ان ترتيب المتجهات يجب ان لايتغير في الحالات التي تحتوي على ضرب اتجاهي وهكذا :

$$\frac{d(A \cdot B)}{du} = \frac{dA}{du} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{du} \qquad (A26)$$

$$\frac{d(A \times B)}{du} = \frac{dA}{du} \times B + A \times \frac{dB}{du} \qquad (A27)$$

اذا كانت A = B ، تعطينا المعادلة (A–26) مايلي :

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})}{du} = \frac{d}{du}(A^2), \text{ i.e. } 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = 2A\frac{dA}{du}$$

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = A\frac{dA}{du} \qquad \text{(A28)}$$

اذا كانت قيمة المتجه A ثابتة فان $\frac{dA}{du} = 0$ ومن ثم $\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = 0$ وبما ان لا A ولا $\frac{d\mathbf{A}}{du}$ يزولان فهذا يعني ان مشتقة متجه ذا طول ثابت عمودية على المتجه.

(2) تكامل المتجهات (Integration of vectors) :-

يمكن استخدام الطريقة المعتادة لتكامل الكميات العددية في تكامل المتجهات وبصورة عامة يحول التكامل الاتجاهي الي تكامل عددي ومن ثم يتم ايجاد قيمته بالطرق المعتادة.

A ـ التكاملات الخطية (Line integrals) :-

التكاملات الخطية التي تقابلها في الفيزياء عادة يكون من النوع الآتي :

$$\int_C \phi d\mathbf{r},\ \int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r},\ \int_C \mathbf{V}\times d\mathbf{r}$$

حيث Ø (x, y, z) و V (x, y, z) تمثل دوال نقطية عددية ومتجهة على التوالي ، وتمثل C المنحني الذي يجري فيه التكامل.

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{e}}_x + dy\hat{\mathbf{e}}_y + dz\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\int_C \phi d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x\int \phi dx + \hat{\mathbf{e}}_y\int \phi dy + \hat{\mathbf{e}}_z\int \phi dz, \qquad \text{(A29)}$$

$$\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} = \int_C V_x dx + \int_C V_y dy + \int_C V_z dz \qquad \text{(A30)}$$

$$\int_C \mathbf{V}\times d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x\int_C (V_y dz - V_z dy) + \hat{\mathbf{e}}_y\int_C (V_z dx - V_x dz) + \hat{\mathbf{e}}_z\int_C (V_x dy - V_y dx). \qquad \text{(A31)}$$

يمكن ايجاد تكاملات الطرف الايمن بالطرق المألوفة

B ـ التكاملات السطحية (Surface integrals) : -

ان مايهمنا من انواع التكاملات السطحية في الفيزياء هي الانواع الآتية :

$$\int_S \phi d\sigma, \int_S \mathbf{V}\cdot d\sigma, \int_S \mathbf{V} \times d\sigma$$

حيث $d\sigma$ تمثل عنصر المساحة والذي يمكن كما بينا سابقاً تمثيله باعتباره متجهاً كما في التكاملات الخطية،تكتب هذه التكاملات بشكلها العددي ثم يجري التكامل.

C التكاملات الحجمية (Volume integrals) : -

احتساب هذا التكامل بسيط لان العنصر الحجمي $d\tau$ كية عددية.

$$\int_\tau \mathbf{V} d\tau = \hat{\mathbf{e}}_x \int_\tau V_x d\tau + \hat{\mathbf{e}}_y \int_\tau V_y d\tau + \hat{\mathbf{e}}_z \int_\tau V_z d\tau \qquad \text{(A32)}$$

وهذه يمكن تكاملها بسهولة.

(3) المجالات العددية والمتجهة (Scalar and vector fields) : -

اذا كان لكية ما (Q) حجم معين او محدد في كل نقطة داخل حيز من الفضاء عندها يسمى هذا الحيز مجال Q ، اذا كانت Q كية عددية يكون المجال عددياً واذا كانت Q كية متجهة يكون المجال متجهاً ولنأخذ مثلاً حيز الفضاء حول جسم مسخن فان كل نقطة من الحيز تناظرها درجة حرارة معينة،للمجال المتجه خذ الحيز الذي يحيط شحنة كهربائية مثالاً فكل نقطة من الحيز يناظرها مجال ذو قيمة واتجاه محددين.

(4) انحدار كية عددية (Gradient of a scalar) : -

في دراسة المجال العددي يكون من الضروري معرفة معدل تغير الدالة النقطية العددية كلما تحركنا من نقطة في المجال الى النقطة المجاورة. لتكن $\phi(\mathbf{r})$ دالة نقطية عددية في النقطة الموصوفة بمتجه الموقع $\mathbf{r}$.

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z).$$

يعتمد تغير قيمة هذه الدالة الذي يناظر ازاحة مقدارها dr على اتجاه هـذه الازاحـة. ان التغير في (x,y,z) Ø المنـــاظر للحركـــة من نقطـــة (x,y,z) الى نقطـــة , (Z+dZ , y+dy X+dX) يحسب من التفاضل الكلي $d\phi$.

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) dz \qquad \text{(A33)}$$

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{e}}_x + dy\hat{\mathbf{e}}_y + dz\hat{\mathbf{e}}_z$$

يمكن التعبير عن الطرف الايمن للمعادلة (A–33) على انه حاصل ضرب عددي لمتجهين.

$$d\phi = \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) (\hat{\mathbf{e}}_x dx + \hat{\mathbf{e}}_y dy + \hat{\mathbf{e}}_z dz).$$

يسمى المتجه في القوس الاول بميل الكمية العددية ϕ ويكتب grad ϕ ،

$$\text{grad}\ \phi = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \text{(A34)}$$

$$\therefore \quad d\phi = (\text{grad}\ \phi)\cdot d\mathbf{r}. \qquad \text{(A35)}$$

اذا عرفنا عامل تفاضل متجه (vector differenthial operator) بالصيغة الآتية :

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(A36)}$$

فيمكن كتابة :

$$\text{grad}\ \phi = \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi = \nabla\phi. \qquad \text{(A37)}$$

تجدر الاشارة هنا الى ان عـامل تفـاضل متجـه ∇ (ويقرأ ديل del) ليس متجهـاً بالمعنى الهندسي كما ليس له اي قيمة عددية ، بالاحرى هو عـامل متجـه يمكنـه العمل على كلتا الدالتين النقطيتين العددية والمتجهة ، وهكذا فان ميل او انحـدار مجـال عـددي يولـد مجالاً متجهاً .

يمكن معرفة المغزى او الاهمية الفيزيائية للانحدار بالطريقة الآتيـة : في المجـال العـددي لـ ϕ ، يمكننا ربط جميع النقاط التي لها قيمة ϕ في الحيز ، هـذه النقـاط ستقع على سطح ما. يوضح الشكل (A–8) سطحين يقرب بعضهما من بعض متنـاظرين للقيم ϕ و $\phi+d\phi$ للدالة العددية ، فـاذا كانت الازاحـة كلهـا داخل السطح لاتتغير قيـمة ϕ ، وهكـذا اذا كانت الازاحة $d\,r_0$ (AB) تقع على احد السطحين ، يكون لدينا :

$$d\phi = (\text{grad}\,\phi)\cdot d\mathbf{r}_0 = 0$$

وهذا يعني ان المتجه grad ϕ عمودي على السطح.

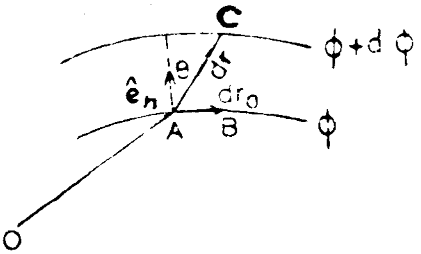
$$\therefore \quad \text{grad}\,\phi = |\text{grad}\,\phi|\,\hat{\mathbf{e}}_n.$$

لنأخذ الآن الازاحة (Ac)dr،لدينا :

$$d\phi = (\text{grad}\,\phi)\cdot d\mathbf{r} = |\text{grad}\,\phi|\,\hat{\mathbf{e}}_n\cdot d\mathbf{r} = |\text{grad}\,\phi|\,dr\cos\theta \qquad \text{(A38)}$$

حيث θ تمثل الزاوية بين dr و $\hat{e}_n$.

$$\therefore \quad \frac{d\phi}{d\mathbf{r}} = |\text{grad}\,\phi|\cos\theta. \qquad \text{(A39)}$$



شكل رقم (A.8)

يعطي الطرف الايسر معدل تغير ϕ مع المسافة ، اذا كانت $\theta = 0,$ تأخذ $d\phi$ قيمتها العظمى،لذا فان اقصى معدل لتغير ϕ يعطى من المعادلة :

$$\frac{d\phi}{dn} = |\text{grad}\,\phi|. \qquad \text{(A40)}$$

وهكذا فان قيمة انحدار ϕ مساوية لنسبة التغير الفضائي (maximum space rate) لتغير ϕ واتجاهه بالاتجاه الذي يحدث فيه اقصى معدل فضائي للتغير ، اي عمودي على السطح.

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{e}}_n\frac{\partial\phi}{\partial n}. \qquad \text{(A41)}$$

من الواضح ان المعدل الفضائي لتغير ϕ بمحاذاة AC وكما معطى في المعادلة (A-39) هو مركبة الانحدار بهذا الاتجاه ويسمى المشتقة الاتجاهية (directional derivative) في ذلك الاتجاه.

5) تباعد المتجه (Divergence of a vector) : -

اتضح مما سبق انه يمكن معاملة ∇ شكلياً على انها متجه. لنجد الآن الضرب العددي لهذا العامل مع المتجه A.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x A_x + \hat{\mathbf{e}}_y A_y + {}_z A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad \text{(A42)}$$

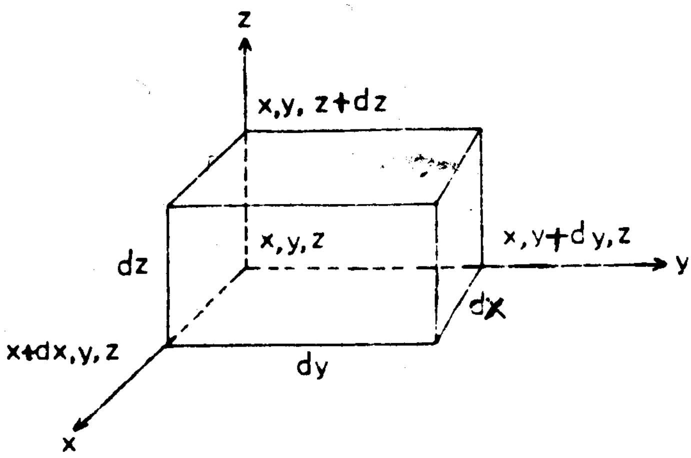
واضح ان هذه كمية عددية ، وهكذا فان الضرب العددي لـ ∇ مع المتجه A يعطي كمية عددية تسمى تباعد (divergence) A ويمثل بالرمز div A .

يمكن توضيح المغزى الفيزيائي للتباعد بتناول مثال نوعي ، يمثل المتجه V قيمة واتجاه حجم مائع ما والذي يمر في ثانية واحدة عبر عنصر المساحة العمودي على V. ان كمية المائع التي ستمر عبر عنصر المساحة $d\sigma$ في ثانية واحدة هو $v_x d\sigma$ حيث V_x ميل مركبة V العمودية على $d\sigma$.،يمكن التعبير عن هذه الكمية على النحو $\mathbf{v} \cdot d\sigma = v_x d\sigma$ وتسمى دفق (flux) المتجه V خلال المساحة $d\sigma$. افرض ان عنصر حجمي على شكل متوازي اضلاع متعامد اضلاعه dz,dy,dx (الشكل A–9) عند X تدخل الكمية dXdydz في العنصر الحجمي من الوجه dydz ، عند X+dx ، فان الكمية $dydz\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$ تسري خارجاً من الوجه المقابل،ومقدار السريان الصافي نحو الخارج باتجاه المحور X هو :

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx - v_x\right) dydz = \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz$$

وبنفس الطريقة فان مقدار الزيادة الناتجة من زوجي الاسطح المتقابلة الاخرى هي :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} dxdydz \text{ and } \frac{\partial v_z}{\partial z} dxdydz.$$



شكل رقم (A.9)

لذلك فان الفيض الكلي خلال عنصر الحجم هو :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

وهكذا فان تباعد المتجه V في أي نقطة من المجال هو مقدار الفيض الصافي الخارج من V لوحدة الزمن لوحدة الحجم عند النقطة.

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}. \qquad \text{(A43)}$$

يمكن التعبير عن تباعد متجه بصيغ مختلفة. افرض ان عنصر حجم صغير $d\tau$، ضمن سطح اعتباطي مغلق،ليكن $d\sigma$ عنصر من السطح واتجاهه يكون بالشكل الذي يتجه المستقيم العمودي عليه نحو الخارج. الكمية التي تسري ضمن هذا العنصر هي $\mathbf{v}\cdot d\sigma$ أو $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n d\sigma$. والدفق عبر السطح كله هو $\int\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n d\sigma$. وهذا يجب ان يساوي $\nabla\cdot\mathbf{v}d\tau$.

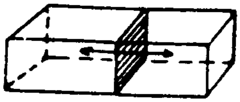
$$\therefore\quad \nabla\cdot\mathbf{v}d\tau = \int\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n d\sigma$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \lim_{d\tau\to 0}\frac{\int\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n d\sigma}{d\tau} \qquad \text{(A44)}$$

اذا كانت ∇V موجبة فهذا يعني وجود مقدار سريان صافي خارج من العنصر وهذا معناه وجود المصدر داخل العنصر. اما اذا كانت القيمة سالبة فهذا يعني وجود مستودع (Sink) في العنصر الحجمي. اما اذا كانت صفراً ($\nabla . V=0$) فهذا يعني ان مقدار السريان الخارج مساوٍ او متوازن مع الداخل،والمتجه الذي يحقق هذا الشرط يسمى متجه حلزوني (Solenoidal vector) مثل ذلك الحث المغناطيسي B هو حلزوني لأن $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0.$.

6) مبرهنة التباعد (Divergence Theorem) : -

افرض ان حجماً محدداً τ محاطاً بسطح مغلق. وليكن هذا الحجم مقسم الى عناصر حجمية $d\tau_i$. عند (الشكل A-10) الفيض الخارج من كل واحد من هذه العناصر هو :



شكل رقم (A.10)

$$\nabla . \mathbf{v} d\tau_i = \int \mathbf{v}\cdot d\sigma. \qquad \text{(A45)}$$

لنجمع كلا طرفي المعادلة اعلاه لجميع العناصر يصبح الطرف الايسر $\int \nabla\cdot\mathbf{v} d\tau_i$. عند اخذ الجمع للطرف الايمن نجد أن السريان الخارج من احد العناصر عبر السطح هو السريان الداخل الى العنصر المجاور،لذا يلغي بعضها بعضاً ، ويكون مقدار السريان الخارج الكلي لجميع العناصر هو نفسه السريان الخارج عبر السطح المغلق المحيط بالحجم

$$\therefore \int_{\tau} \nabla\cdot v \, d\tau_i = \int_{\sigma} v\cdot d\sigma \qquad \text{(A46)}$$

وهذا يعني ان التكامل السطحي للمتجه V اما مأخوذ حول السطح المغلق مساوي للتكامل الحجمي التباعد المتجه المأخوذ حول الحجم الذي يضمه السطح المغلق τ هذا هو مايعرف بمبرهنة التباعد.

7) لف المتجه (Curl of a vector) : -

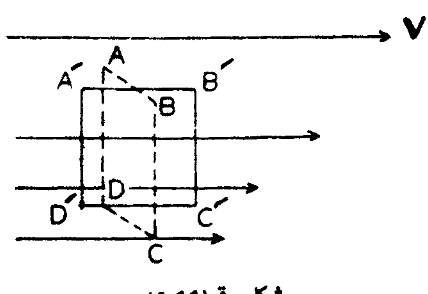
لاحظنا ان تباعد المتجه يولد مجالاً عددياً. سنتناول الآن عاملاً تفاضلياً يقود مجال متجه الى مجال متجه آخر. لنأخذ الضرب الاتجاهي لـ ∇ مع المتجه A.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\hat{e}_x A_x + \hat{e}_y A_y + \hat{e}_z A_z\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \quad \text{(A47)}$$

لأجل فهم معنى اللف (Curl) نأخذ حيزاً صغيراً في مجال متجه،افرض ان المتجه المعطى V له نفس الاتجاه في جميع النقاط لكن قيمته مختلفة في النقاط المختلفة. (الشكل A–11) تخيل ممراً متعامداً ABC D في هذا الحيز،اذا كان مستوى التعامد عمودياً على اتجاه V. التكامل الخطي $\oint \mathbf{V}.d\mathbf{l}$ بمحاذاة ممر هو صفر لأن v في كل مكان عمودي على dl. من جهة اخرى اذا كان مستوى التعامد موازي للمجال $V(A'B'C'D')$لن يكون التكامل الخطي صفراً لأن الاضافة من الوجه $A'B'$ مختلفة عن الاضافة من الوجه $C'D'$ لأن قيمة المتجه V مختلفة على طول هذين الضلعين،والاضافة من الضلعين الآخرين هي صفر. اما بالنسبة للاتجاهات الوسطية للتعامد فلن تكون قيمة التكامل الخطي صفراً الا ان قيمته تعتمد على اتجاهه بالنسبة للمجال. وسيأخذ اقصى قيمة في اتجاه معين بهذه المساحة، والقيمة القصوى للتكامل الخطي مقسومة على المساحة تسمى لف المتجه V. واتجاه اللف يعطي V العمودي الموجب على المساحة عندما تكون في موقع القيمة القصوى للتكامل الخطي.



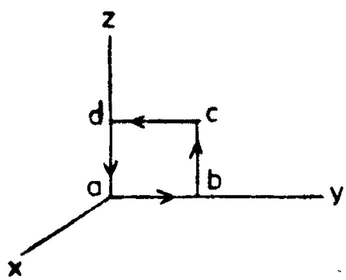
شكل رقم (A.11)

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \lim_{d\sigma \to 0} \frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}}{d\sigma} \qquad \text{(A48)}$$

سنستخلص الآن تعبيراً للف V بصيغة المركبات الديكارتية، ونبرهن على انه نفسه المعطى في المعادلة (A–47) ويتم هذا باحتساب التكامل الخطي حول مساحة متناهية في الصفر في كل مستويات الاحداثيات كل تكامل خطي سيمثل مركبة للف باتجاه المحور المناظر. تصور المساحة المتعامدة abed في الشكل (A–12) ، في مستوي المحورين Z,y لدينا المستوي الذي اضلاعه هي dz,dy مركبات v في a هي v_x, v_y, v_z. لذلك سيكون التكامل الخطي بمحاذاة ab هو $v_y dy$. ، وبمحاذاة cd هو $-\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\right) dy$ وستكون قيمة التكامل الخطي بمحاذاة da هي $v_z dz$ وتلك بمحاذاة bc هي $\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy\right) dz$. لذا سيكون التكامل الخطي حول الخطوط الخارجية (Contour) abcda هو :

$$v_y\, dy - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\right) dy - v_z\, dz + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy\right) dz$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy\, dz.$$



شكل رقم (A. 12)

هذا التكامل هو اقصى مايكن لان المسارات da,cd,bc,ab اخذت اما موازية او مختلفة التوازي للمتجه. والتكامل الخطي على وحدة المساحة هو متجه بمحاذاة العمودي الموجب على المساحة.

$$\therefore \quad \text{curl}_x\, \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

وباسلوب مشابه يمكن ايجاد :

$$\text{curl}_y\, \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\text{curl}_z\, \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

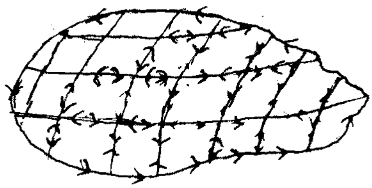
$$\therefore \quad \text{curl}\, \mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{e}}_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{e}}_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= \nabla \times \mathbf{v}$$

8) مبرهنة ستوك (Stoke's Theorem) : -

تصور قطعة سطح محددة بمنحني (الشكل A–13) تخيل ان السطح مقسم الى عناصر متناهية في الصغر وحدود كل عنصر معترضة بنفس اعتراض المنحني الخارجي. لدينا لكل عنصر :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\sigma$$



شكل رقم (A.13)

وعند اخذ الجمع تلغى الاضافات الناتجة من خطوط التقسيم الداخلية. لأن كل قطعة تعترض مرتين وباتجاهات متعاكسة. لذا يصبح الطرف الايسر عبارة عن تكامل حول المنحني المحدود فقط. وهكذا يكون لدينا :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\sigma (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\sigma \qquad \text{(A49)}$$

وهذه تعرف باسم مبرهنة ستوك (Stoke's Theorem) وتنص على ان التكامل الخطي لمتجه ما (V) المأخوذ حول منحنى مغلق C يساوي التكامل السطحي للف V مأخوذ حول اي سطح σ يأخذ من C حدوداً له.

9) تكامل دالة عددية من الخط الى السطح

- : (Line to surface integral of scalar function)

حسب مبرهنة ستوك :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \qquad \text{(A50)}$$

لتكن $\mathbf{A} = \phi\mathbf{B}$ حيث ϕ دالة عددية نقطية و $\mathbf{B}$ متجه ثابت في الفضاء اي $\nabla \times \mathbf{B} = 0.$

$$\therefore \quad \int_S (\nabla \times \phi\mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = \oint_C \phi\mathbf{B} . d\mathbf{l} \qquad \text{(A51)}$$

الآن

$$\nabla \times (\phi\mathbf{B}) = \phi \, (\nabla \times \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \times \nabla\phi)$$

$$\therefore \quad \int_S [\phi \, (\nabla \times \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \times \nabla\phi)] \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint_C \phi\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

أي

$$\oint_C \phi\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_S (\mathbf{B} \times \nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = 0$$

أو

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \phi d\mathbf{l} + \int_S \mathbf{B} \cdot \nabla\phi \times \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = 0$$

من ثم

$$\mathbf{B} \cdot \left[\oint_C \phi d\mathbf{l} + \int_S \nabla\phi \times \hat{\mathbf{e}}_n \, dS \right] = 0 \qquad \text{(A52)}$$

ما دام $\mathbf{B}$ يمثل أي متجه عشوائي فإن :

$$\oint_C \phi d\mathbf{l} = -\int_S \nabla\phi \times \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = \int \hat{\mathbf{e}}_n \times \nabla\phi \, dS \qquad \text{(A53)}$$

10) المجالات في منظومات احداثيات مختلفة

- : (Fields in different coordinate systems)

من الضروري عادة كتابة معادلات بصيغة احداثيات تلائم مسألة معينة بالذات. فيما يلي صيغ المجالات الناتجة من العمل مع عوامل تفاضلية في احداثيات ديكارتية قطبية كروية والقطبية الاسطوانية.

(A) تباعد V (Divergence of V) : -

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(A54)}$$ (ديكارتية cartesian)

(القطبية الكروية Spherical polar)
$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} V_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \quad \text{(A55)}$$

(القطبية الاسطوانية Cylinderical polar)
$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(A56)}$$

(B) مركبات الحدار ψ (The components of grad Q) : -

ديكارتية (cartesian) :

$$\text{grad}_x\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x};\ \text{grad}_y\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y};\ \text{grad}_z\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{(A57)}$$:

القطبية الكروية (Spherical polar) :

$$\text{grad}_r\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r};\ \text{grad}_\theta\, \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta};$$:

$$\text{grad}_\phi\, \psi = \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad \text{(A58)}$$

القطبية الاسطوانية (Cylinderical polar) :

$$\text{grad}_r\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r};\ \text{grad}_\phi\, \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi};\ \text{grad}_z\, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{(A59)}$$

(C) مركبات لف V (The components of curl V) : -

ديكارتية (Cartesian) : -

$$\text{curl}_x\, \mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z};\ \text{curl}_y\, \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x};$$:

$$\text{curl}_z\, \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad \text{(A60)}$$

القطبية الكروية (Spherical polar) :

$$\text{curl}_r\ \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r} V_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \phi};$$

$$\text{curl}_\theta\ \mathbf{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\phi$$

$$\text{curl}_\phi\ \mathbf{V} = \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \qquad \text{(A61)}$$

القطبية الاسطوانية (cylinderical polar) :

$$\text{curl}_r\ \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}$$

$$\text{curl}_\phi\ \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$\text{curl}_z\ \mathbf{V} = \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} \qquad \text{(A62)}$$

(D) عامل لابسيان (Laplacian Operator) :-

تتضمن بعض معادلات الكهروداينمك عوامل تفاضلية من الدرجة الثانية تسمى لابلاسيان (Laplacian) وهو عامل عددي تعريفه $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$.

ديكارتية (Cartesian) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(A63)}$$

القطبية الكروية (Spherical Polar) : ـ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \qquad \text{(A64)}$$

القطبية الاسطوانية (Cylindericl polar) : -

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(A65)}$$

11) مبرهنة كرين (Green's Theorem) : -

باستخدام العلاقات الاساسية للتكامل الخطي ومبرهنة التباعد ومبرهنة ستوك، يمكن استخلاص عدد من الصيغ لتحويل التكاملات، اثنان خاصة الاهمية وتسميان مبرهنة كرين.

ليكن تعريف المتجه V هو $\mathbf{v} = \phi\nabla\psi$ حيث ϕ و ψ دوال عددية. ثم حسب مبرهنة التباعد ،

$$\int(\phi\nabla\psi)\cdot d\sigma = \int\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\,d\tau = \int(\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi)\,d\tau \qquad \text{(A66)}$$

هذه هي الصيغة الاولى لمبرهنة كرين.

باستبدال ϕ و ψ لدينا.

$$\int(\psi\nabla\phi)\cdot d\sigma = \int(\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \psi\nabla^2\phi)\,d\tau \qquad \text{(A67)}$$

وبطرح (A–67) من (A–66) نحصل على :

$$\int(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\sigma = \int(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,d\tau \qquad \text{(A68)}$$

وهذه هي الصيغة الثانية لمبرهنة كرين.

A–4 بعض علاقات المتجهات المفيدة (Some useful vector relations) : –

(1) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\mathbf{A}$ (A69)

(2) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$ (A70)

(3) $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\nabla\phi$ (A71)

(4) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ (472)

(5) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ (A73)

(6) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$ (A74)

(الملحق B)

تحويلات الكميات من النظام الكاوسي الى النظام العالمي

الكمية		كاوسيان	النظام العالمي
Charge	شحنة	q	$\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^{1/2}} q(\rho, I, j, P)$
(Charge density, current, current density, polarization)	التيار كثافة الشحنة الاستقطاب كثافة التيار	(ρ, I, j, P)	
Potential	الجهد	Φ	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\ \Phi\ (E)$
(electric field)	المجال الكهربائي	(E)	
Vector potential	الجهد المتجه	A	$\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right)^{1/2} A\ (B)$
(Magnetic flux density)	كثافة الفيض المغناطيسي	(B)	
Magnetization	المغنطة	M	$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{1/2} M$
Electric displacement	الازاحة الكهربائية	D	$\left(\frac{4\pi}{\epsilon_0}\right)^{1/2} D$
Magnetic field	المجال المغناطيسي	H	$(4\pi\mu_0)^{1/2} H$
Dielectric constant	ثابت العازل	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeability	النفوذية	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Electrical conductivity	الموصلية الكهربائية	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Capacitance	السعة	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$

(الملحق C)

تحويلات الوحدات الكهربائية والمغناطيسية

الرمز	الكمية	النظام العالمي	كاوسيان
$q(e)$	**Charge** الشحنة	1 coulomb	3×10^{9} statcoul
ρ	**Charge density** كثافة الشحنة	1 coul/m^3	3×10^{3} statcoul/cm^3
I	**Current** التيار	1 amp	3×10^{9} statamp
$\mathbf{J}$	**Current density** كثافة التيار	1 amp/m^2	3×10^{5} statamp/cm^2
$\Phi(v)$	**Potential** الجهد	1 volt	(1/300) statvolt
$\mathbf{E}$	**Electric field** المجال الكهربائي	1 volt/m	$(1/3)\times10^{-4}$ statvolt/cm
$\mathbf{D}$	**Electric displacement** الازاحة الكهربائية	1 coul/m^2	$12\pi\times10^{5}$ statvolt/cm
$\mathbf{A}$	**Vector potential** الجهد المتجه	1 weber/m	$(1/3)\times10^{-10}$ gauss cm
$\mathbf{B}$	**Magnetic flux density** كثافة الفيض المغناطيسي	1 weber/m^2 (tesla)	10^{4} gauss
$\mathbf{H}$	**Magnetisation field** المجال المغناطيسي	1 amp/m	$4\pi\times10^{-3}$ oersted
$\mathbf{M}$	**Magnetisation** المغنطة	1 amp/m	$(1/4\pi)\times10^{4}$ gauss
$\mathbf{P}$	**Polarization** الاستقطاب	1 coul/m^2	3×10^{5} statvolt/cm
ϵ	**Dielectric permittivity** سماحية العازل	1 farad/m	$36\pi10^{9}$ statfarad/cm
μ	**Permeability** النفوذية	1 henry/m	$(1/4\pi)\times10^{7}$ gauss/oersted
σ	**Electrical conductivity** الموصلية الكهربائية	1 mho/m	9×10^{9}/sec
C	**Capacity** السعة	1 farad	9×10^{11} statfarad

(الملحق D)

الثوابت الفيزياوية

Electron charge	شحنة الالكترون	1.602×10^{-19} coul
Electron mass	كتلة الالكترون	9.109×10^{-31} kg
Proton mass	كتلة البروسون	1.673×10^{-27} kg
Vacuum permittivity	سماحية الفراغ	8.854×10^{-12} farad/m
Vacuum permeability	نفاذية الفراغ	1.257×10^{-6} henry/m
velocity of light	سرعة الضـوء	2.998×10^{8} m/sec
Classical electron radius	نصف قطر الالكترون الكلاسيكي (التقليدي)	2.818×10^{-15} m
Electron volt,	الكترون فولت	1.602×10^{-19} joule
Boltzmann constant	ثابت بولتزمان	1.381×10^{-23} j/°K
Planck's constant	ثابت بلانك	6.626×10^{-34} J sec
Bohr's radius	نصف قطر بور	5.292×10^{-11} m
Avogadro's number	عدد افوكادرو	6.023×10^{23}/mole

أجوبة تمارين الكتاب

الفصل الاول Chapter 1

1.2 $\quad mg \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}l} = \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\right) \dfrac{\sqrt{l^2 - a^2/2}}{l}$.

This gives 'a'; $\quad m = m'$.

1.3 $\quad 3.45 \times 10^{-14}$ metres.

1.4 $\quad Q_m = 603 \times 10^{10}\, C$; $\quad Q_e = 517 \times 10^{12}\, C$.

1.6 $\quad$ (a) $2\pi\rho_0 a^3$; $\quad$ (b) $\dfrac{8\pi}{15}\rho_0 a^3$

1.7 $\quad 1.1 \times 10^{-18}\, C$; Positive.

1.10 $\quad 3.23 \times 10^{15}\, V$.

1.11 $\quad W = 750$ MeV; Energy released $= 280$ MeV.

1.14 $\quad T = \dfrac{2\pi}{Q}\sqrt{2\pi\epsilon_0 m a^3}$.

الفصل الثاني Chapter 2

2.1 $\quad \frac{1}{2}\left(V + \dfrac{qd}{\epsilon_0 A}\right)$

2.2 $\quad \dfrac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)}(V_2 - V_1)^2$

2.4 $\quad$ Capacitance per unit area $= \dfrac{\epsilon_1 \epsilon_2}{d(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$

2.5 $\quad \mathbf{E}_{(inside)} = -\dfrac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$

$\mathbf{E}_{(outside)} = \dfrac{R^3(\mathbf{P}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{\epsilon_0 r^5} - \dfrac{R^3\,\mathbf{P}}{3\,\epsilon_0 r^6}$

2.8 $\quad V = \dfrac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r}$; $\sigma_1 = \dfrac{q\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}$; $\sigma_2 = \dfrac{q\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}$.

2.9 $\quad q^2 = \dfrac{8\pi\,\epsilon_0 a^2\, Mg\,(1 + \epsilon_r)^2}{\epsilon_r - 1}$

2.10 $\quad p = 4.84 \times 10^{-30}$ cm; $r = 0.18$ nm

2.12 $\quad \dfrac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln b/a}\chi = \pi(b^2 - a^2)h\rho g$

Chapter 3 الفصل الثالث

3.4 $V_i = \sum_l \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}}(2l+1)^{-1}[P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)]\, r^l P_l(\cos\theta)$

$V_0 = \sum_l \frac{\sigma R^{l+2}}{2\epsilon_0}(2l+1)^{-1}[P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)]\, r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$

3.5 $V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(r^2 - \frac{a^5}{r^3}\right)\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$

3.6 $F = \frac{9}{4}\epsilon_0 \pi a^2 E_0^2$

3.7 $V = -E_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$

3.9 $V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

3.10 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4}\right)$

where $q' = \frac{qa}{b}$

3.15 $V_{(\text{inside})} = \frac{qr^n \sin n\theta}{2\epsilon_0\, n\, a^{n-1}}, \; V_{(\text{outside})} = \frac{qa^{n+1}\sin n\theta}{2\epsilon_0\, n\, r^n}$

Chapter 4 الفصل الرابع

4.1 $Q = \frac{I_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t_0})$

4.2 $9 \times 10^{-5}\ \text{ms}^{-1}$.

4.4 $F = -\frac{3}{2}\frac{\pi\mu_0 a^4 I^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}$

4.6 $B = 10^{-4}$ volts sec/m^2.

4.7 (i) $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$; (ii) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (iii) $B = 0$

4.8 $I = \frac{3}{2}\pi J_0 a^2$; $B_{(\text{inside})} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left[1 + \frac{r^2}{2a^2}\right]$

$B_{(\text{outside})} = \frac{3\mu_0 J_0 a^2}{4r}$

4.12 $H = \frac{Ic}{2\pi(a^2 - b^2)}\,\hat{\mathbf{e}}_r$

Chapter 5 الفصل الخامس

5.1 $\pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t \cos \theta$

5.3 3.532 Nm.

5.6 $A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_1}$

Chapter 6 الفصل السادس

6.2 The head of the resultant electric field vector describes an ellipse, the semi-axes of which are:

$$a = \sqrt{E_{01}^2 \cos^2 \alpha + E_{02}^2 \cos^2 (\alpha - \phi)}$$

$$b = \sqrt{E_{01}^2 \sin^2 \alpha + E_{02}^2 \sin^2 (\alpha - \phi)}$$

where

$$\tan 2\alpha = \frac{E_{02}^2 \sin 2\phi}{E_{01}^2 + E_{02}^2 \cos 2\phi}$$

6.4 10^{-4}.

6.5 0.796 m.

6.6 $\epsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2 \epsilon_0}$

Chapter 7 الفصل السابع

7.4 6.6 V m^{-1}

7.6 2.3

Chapter 8 الفصل الثامن

8.1 $k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 | \epsilon_2 |}{c^2 (| \epsilon_2 | - \epsilon_1)}$

8.2 For an ideal conductor $\mathbf{E}_T = \sqrt{\frac{\mu\mu_0 \omega}{\sigma_l}} \left[\mathbf{H}_T \times \hat{\mathbf{e}}_n\right]$

8.3 The minimum value of $a = \lambda/2$

The maximum value of $a = \lambda/\sqrt{2}$

8.5 Three

Chapter 9 الفصل التاسع

9.2 $$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(1-\beta^2)(\hat{\mathbf{e}}_n - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\hat{\mathbf{e}}_n\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]$$

9.6 $\frac{128\pi\,\epsilon_0\,|\mathbf{E}|^4}{3m^2c^3e^2}$ where E is the particle energy

Chapter 10 الفصل العاشر

10.7 3.2×10^9 V/m

10.9 The path of the particle is given by

$$x = \frac{1}{e|\mathbf{E}|}\left[E_{01}{}^2 + (ce|\mathbf{E}|t)^2\right]^{1/2} + x_0$$

$$y = \frac{p_0 c}{e|\mathbf{E}|}\ln\left[t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{E_{01}}{ce|\mathbf{E}|}\right)^2}\right] + y_0$$

where

$$E_{01} = c(m^2c^2 + p_0{}^2)^{1/2}$$

For a slow particle $x = \frac{e|\mathbf{E}|}{2m}t^2 + x_0$; $y = \frac{p_0}{m}t$

10.10 $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}$$

For weak field

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}$$

Chapter 11 الفصل الحادي عشر

11.2 $$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{A}\times\hat{\mathbf{e}}_n]^2 + [\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{e}}_n]^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2](A^2+B^2)}\,\omega^4 d\Omega$$

where $\hat{\mathbf{e}}_n$ is the unit vector in the direction of scatter and $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t$; $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$

11.4 The radiation intensity J is given by:

$$J = \frac{p^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(1 - \frac{\beta}{4\pi r^3}\right)^2$$

تعريب المصطلحات العلمية الواردة في الكتاب وفقاً للحروف الهجائية

– A –

Attraction	تجاذب
Algebraic sum	المجموع الجبري
Atomic number	عدد ذري
Atomic Structure	تركيب ذري
Artificial dielectric	عازل اصطناعي
Avogadro number	عدد أفوكادرو
Atomic Spacing	فاصل ذري
Azimuthal Symmetry	تناظر سمتي
Associated Legendre functions	دوال ليكندر المرافقة
Azimuthal variation	تغير سمتي
Associated Legendre Polynomials	متعددة الحدود ليكندر المرافقة
Ampere's law	قانون أمبير
Ampere's circuital law	قانون أمبير الدائري
Attenuation	توّهن
Astronomy	علم الفلك
Angular frequency	تردد زاوي
Azimuthal angle	زاوية سمتية
Ampere's equivalence	تكافؤ أمبيري
Amonia maser	ميزر الامونيا
Absolute motion	حركة مطلقة
Anti-symmetry	ضد تناظر
Anamalous	غير طبيعي
Atomic refractivity	الانكسارية الذرية أو الانكسار النوعي الذري
Alfve'n waves	موجات آلفن

- B -

bound charges	شحنات مقيدة
boundary conditions	شروط الحدود الفاصلة
Boltzmann factor	عامل بولتزمان
Bessel's function	دالة بيسل
Back electromotive force	قوة دافعة كهربائية مضادة أو عكسية
Bounded Source distribution	توزيع المصدر المحدد
Betatron	بيتاترون
Braking radiation	اشعاع الايقاف
Bennett's relation	علاقة بنيت
Bold – face	الاحرف الثخينة السوداء

- C -

Charge density	كثافة الشحنة
Conservative force	القوة المحافظة
Curl of the vector field	لف المجال المتجه
Couple	مزدوج
Conductors	موصلات
Capacitors	متسعات
Centre of gravity	مركز ثقل
Carbon tetrachloride	رابع كلوريد الكاربون
Crystal	بلورة
Converge	يتقارب
Continuous function	دالة مستمرة
Current density	كثافة التيار

Continuity	استمرارية
Circular loops	اطارات دائرية
Coil	ملف
Current loop	اطار تيار
Curl sources	مصادر ذات اللف
Conduction current density	كثافة تيار التوصيل
Continuous circuits	دوائر مستمرة
Coulomb gauge	مقياس كولوم
Complex amplitudes	سعات معقدة
Complex phase factor	عامل طور معقد
Circularly polarized	مستقطبة دائرياً
Critical angle	الزاوية الحرجة
Cut-off wavelength	طول موجة القطع
Cut-off frequency	تردد القطع
Centre driven linear antenna	هوائي خطي مركزي السحب
Concept of Simultaneity	فكرة التزامن
Covariant	متغايرة
Consistency	ثبات
Classical electron radius	نصف قطر الالكترون
Cohesive forces	قوى التماسك
Characteristic linear parameter	بارامیتر خصائصي خطي
Characteristic length	الطول الخصائصي
Centrifugal force	القوة المركزية
Cyclotron frequency	تردد السيلكترون
Cyclic change	تغير دوري

- D -

Dirac delta function	دالة دلتالديراك
Divergence theorem	مبرهنة التباعد
Dipole , moment	عزم ثنائي قطب
Dipole potential	جهد ثنائي قطب
Dielectrics	عوازل
Dielectric constant	ثابت العزل
Depolarizing field	مجال ازالة الاستقطاب
Deformation polarizability	قابلية الاستقطاب التشويهية
Discharge	تفريغ
Differential operator	عامل تفاضلي
Dirichlet condition	شرط ديرخلت
Differential equation	معادلة تفاضلية
Diamagnetic substances	مواد دايامغناطيسية أو مواد قليلة الانفاذية المغناطيسية
Domain	منطقة نفوذ
Demagnetizing field	مجال مزيل للتمغنط
Displacement current density	كثافة تيار اللاازاحة
Decay of free charge	اضمحلال الشحنة الحرة
Dominant	متسلط او سائد

Hocus–focus	هراء في هراء
Hollow	تجويف
Helmholtz theorem	مبرهنة هيلمهولتز
Henry	هنري
High microwave fields	مجالات موجية دقيقة عالية
Henz's relations	علاقات هيتز
Half – wave antenna	هوائي نصف موجة
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Damping terms	حدود المضاءلة
Dispersion relation	علاقة التفريق
Divergence operator	عامل التباعد
Discrete resonant frequency	تردد رنيني متقطع
Dielectric wave–guides	دلائل موجة العازل
Determinant	محددة
Dragged	ينجرف
D'Almbertian operator	عامل دي المبرتيان
Differential scattering	استطارة تفاضلية
Damping constant	ثابت خمود
Debye length	طول ديباي
Drift velocity	سرعة الانجراف
Disintegration	عدم تكامل

Energy	طاقة
Electrostatics	كهربائية مستقرة
Electrodynamics	كهربائية حركية
Electromagnetics	كهرومغناطيسية
Electric flux	الفيض المغناطيسي
Equipotential surface	سطح متساوي الجهد
Electric dipole	ثنائي قطب كهربائي
Electric double layers	الطبقات المزدوجة الكهربائية
Electric quadr up~'a	رباعي قطب كهربائي
Electric current	تيار كهربائي
Equipotential region	منطقة متساوية الجهد
Electric displacement	ازاحة كهربائية
Electric susceptibility	المتأثرية الكهربائية
Electret	اجسام عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية
Ether	الاثير
Earnshaw's theorem	مبرهنة ايرنشو
Extremum value	قيمة قصوى
Edge effect	تأثير الحافة
Electrical eonductivity	الموصلية الكهربائية
electromagnetic induction	حث كهرومغناطيسي
Electromotive force	قوة دافعة كهربائية
Electromagnetic momentum	الزخم الكهرومغناطيسي
Electromagnetic waves	موجات كهرومغناطيسية
Ellipse	بيضوي

Elliptically polarized	مستقطبة بيضوياً
Electric Spin resonance	رنين البرم الكهربائي
Equator	خط الاستواء
Electric quadrupole radiation	شعاع رباعي القطب الكهربائي
Elementary particle	جسيم أولي
Elastic filaments	خويطات مطاطية

– F –

Force	قوة
Field	مجال
Fictious charges	شحنات صورية او كاذبة
Fleld stresses	اجهادات المجال
Formal solution	حل اصولي
Frame of reference	مناط الاسناد
Ferromagnetic substances	مواد فيرومغناطيسية أو مواد عالية الانفاذية المغناطيسية
Frequency	تردد
Field momentum	زخم المجال
Functional relationship	علاقة دالية
Fresnel's relations	علاقات فرنيل
Forward wave	موجة متقدمة
Fitz Gerald contraction	تقلص فيزجيرالد
Field tensor	ممتدة المجال
Faraday's Law	قانون فاراداي

– G –

Gaussian surface	السطح الكاوسي
Gravitational	تثاقلي
Gradient of potential	تدرج الجهد
Gaseous polar dielectrics	عوازل غازية قطبية
Green's theorem	مبرهنة كرين
Generating function	دالة مولدة
Gaussian System	نظام كاوسيان
Gauge transformations	تحويلات قياسية
Gauge function	ثوابت قياسية او لامتغيرات قياسية
Guide wave number	رقم موجة الدليل
Gas lens	عدسة الغاز
Glass fibres	الياف زجاجية
Gallium aresenide	زرنيخيد الجاليوم
Galilean transformation	تحويل كاليليان
Greek suffix	الرمز او الملحق اللاتيني
Gyrating	حلزونياً

Intensity	شدة
Irrotational field	مجال لادوراني
Insulators	عوازل
Infinite radius	نصف قطر لانهائي
Interaction	تفاعل تبادلي
Integrand	الكمية المطلوب تكاملها ، تكاملية
Indicial equation	معادلة أسية
Interchanging	تبادل
Inverse operator	عامل عكسي
Inverese points	نقاط معكوسة
Inductance	محاثة
Impedance	معاوقة او ممانعة
Intrinsic impedance	معاوقة او ممانعة ذاتية
Infra-red	تحت الحمراء
Interference	تداخل
Instantaneous rate	المعدل اللحظي
Interface	السطح البيني
Instantaneous power	القدرة اللحظية
Inertial system	منظومة قاصرة
Inertial observers	مراقبين قاصرين
Invariant	اللامتغيرة
Intercrystalline	القوى بين البلورات
Ionosphere	الايونوسفير
Ion Sound	صوت الايون
Italics	الحروف المائلة

- K -

Kinetic energy	طاقة حركية
Kink ir stability	عدم الاستقرارية الملتوية

- L -

Linear charge density	كثافة الشحنة الخطية
Line integral	تكامل خطي
Linear quadrupole	رباعي قطب خطي
Lattice Structure	تركيب تشابكي
Local field	مجال موضعي
Linear dielectric	عازل خطي
Linear superposition	تراكب خطي
Lenz' Law	قانون لنز
Le chatelier's principle	مبدأ لاشاتيلية
Lorentz gauge condition	شرط لورنتس المقياسي
Left circular polarization	استقطاب دائري ايسر
Laser beam	شعاع الليزر
Linear antenna	هوائي خطي
Lienard – Wiechert potential	جهد لينارد ـ ويشرت
Larmor formula	صيغة لارمر
Linear transformation	تحويل خطي
Linear momentum	زخم خطي
Linear restoring force	قوة خطية معيدة
Local potential	جهد موضعي
Linear pinch	حشر خطي

Magnetic field	مجال مغناطيسي
Mica	مايكا
Macroscopic polarization	استقطاب عيني
Microscopic dipole moment	عـــــزم ثنـــــــائي قطب مجهري
Macroscopic size	حجم عيني
Molecular weight	وزن جزيئي
Molecular density	كثافة جزيئية
Maclaurains theorem	مبرهنة ماكلورين
Multipole expansion	تمدد متعدد الاقطاب
Maclaurin series	سلسلة ماكلورين
Monopole potential	جهد احادي القطب
Magnetostatics	المغناطيسية المستقرة
Magnetic effects	تأثيرات مغناطيسية
Magnetic flux density	كثافة الفيض المغناطيسي
Magnetic scalar potential	جهـــد كميـــة مغنـــاطيـــيـــة غير متجـــه
Magnetic shell	غلاف مغناطيسي
Magnetic polarization	استقطاب مغناطيسي
Mutual coupling forces	قوى التقارن التبادلية
Magnetization	تمغنط
Magnetic field vector	متجه المجال المغناطيسي
Magnetic field intensity	شدة المجال المغناطيسي
Motional electromotive force	القوة الدافعة الكهربائية الحركية
Maxwell's equations	معادلات ماكسويل

Momentum flow	سريان الزخم
Monochromatic	احادي اللون
Microwave	موجة دقيقة
Modes	انماط
Michelson–Morley experiment	تجربة مايكلسون - مورلي
Mössbauer effect	تأثير موسباور
Molecular refractivity	الانكسارية الجزيئية أو الانكسار النوعي الجزيئي
Magneto hydromagnetic	المغناطيسية الهيدروديناميكية
Magnetic confienment	حصر مغناطيسي
Maximum space rate	اقصى معدل فضائي

– N –

Non–polar molecule	جزيئة لاقطبية
Non–polar liquid	سائل لاقطبي
Normalized surface harmonics	توافقيات سطحية معيارية
Neumann function	دالة نيومان
Non–linear materials	مواد لاخطية
Non–permeable	غير قابل للنفوذ
Non–dispersive medium	وسط غير مفرق
Negative helicity	حلزوني سالب
Nodes	عقد
Non–trivial solution	حل معقول
Near zone	منطقة قريبة
Natural frequency	تردد طبيعي

- O -

Orientational polarizability	قابلية الاستقطاب التوجيهية
Ohm's law	قانون أوم
Ohmic	اومية
Ohmic materials	مواد لاأومية
Orbital motion	حركة مدارية
Oscillatory spark discharge	تفريغ شراري متذبذب
Optoelectronics	الالكترونيات البصرية
Optical communication	اتصالات بصرية
Optical wave-guide	دليل موجة بصرية
Orthogonal transformation	التحويل المتعامد
Original frame	الاطار الاصلي
Oscillator strength	شدة المذبذب

- P -

Permittivity	سماحية
Particle	جسيم
Principle	مبدأ
Point charge	شحنة نقطية
Potential	جهد
Porcelain	بورسلين
Polarization	استقطاب
Polarized atom	ذرة مستقطبة
Polar molecule	جزيئة قطبية

Polarization density	كثافة الاستقطاب
Polarization charges	شحنات الاستقطاب
Pressure	ضغط
Pindermotive force	قوة الحركة الخارقة
Partial derivative	مشتقة جزئية
Prescribed potential	الجهد الموصوف
Pole strength	قوة القطب
Permeability	نفاذية
Poisson's equation	معادلة بواسون
Physical system	منظومة فيزياوية
Paramagnetic substances	مواد بارامغناطيسية او مواد ذات انفاذية مغناطيسية تزيد على واحد
Poynting vector	متجه بونيتنك
Poynting theorem	مبرهنة بوينتنك
Period of oscillation	فترة التذبذب
Plane wave	موجة مستوية
Phase difference	فرق في الطور
Positive helicity	حلزوني موجب
Plane of infinite extent	مستو لانهائي الامتداد
Propagation vectors	متجهات الانتشار
Polarizing angle	زاوية الاستقطاب
Polar diagram	رسم بياني قطبي
Point quadrupole	رباعي قطب نقطي
Principle of relativity	مبدأ النسبية
Principle of least action	مبدأ الفعل الادنى
Prismatic colours	الالوان الموشورية

Plasma physics	فيزياء البلازما
Pinch effect	تأثير الحشر
Perturbation	تشويش، اقلاق، اضطراب
Plasma waves	موجات البلازما
Phase velocity	سرعة الطور

- Q -

Quasi – stationary conditions	شروط شبه ثابتة
Quadratic function	دالة رباعية

- R -

Repulsion	تنافر
Relative permittivity	السماحية النسبية
Radial line	خط شعاعي
Random thermal motion	حركة حرارية عشوائية
Rodrigue's theorem	مبرهنة رودريك
Ratio test	اختبار نسبي
Resistance	مقاومة
Rest mass	كتلة مستقرة
Relativisticaly invariant	غير متغيرة نسبياً
Radius Vector	متجه نصف قطري
Rectangular loop	أطار مستقطب
Radial Component	مركبة نصف قطرية
Relaxation time	زمن الاسترخاء
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار

Refractive index	معامل الانكسار
Real quantity	كمية حقيقية
Right Circular polarization	استقطاب دائري أيمن
Reflection coefficient	معامل الانعكاس
Refractive	موجة متكسرة
Radiation field	مجال اشعاعي
Resonator	الرنان
Resonant Circuit	دائرة رنينية
Rectangular cavity	التجويف المتعامد
Radial gradient	تدرج شعاعي
Retarded Potentials	جهود معوقة
Retarded time	زمن التعويق
Radiation zone	منطقة اشعاع
Radiation resistance	مقاومة الاشعاع
Rate of energy dissipated	معدل خسارة الطاقة
Radius vector	متجه نصف قطري، البعد القطبي
Retarded position	موقع التعويق
Rest frame	الاطار الثابت
Relativistic transformations	التحويلات النسبية
Radiation pattern	نموذج الاشعاع
Reference system	نظام مرجعي
Rotational transformation	تحويل دوراني
Rest energy	طاقة السكون
Radiation damping	خمود الاشعاع
Radiation reaction	رد فعل الاشعاع
Resonant absorption	امتصاص رنيني

- S -

Scattering	استطارة
Superposition	تراكب
Scalar	غير متجه
Surface charge density	كثافة الشحنة السطحية
Single – valued function	دالة ذات قيمة واحدة
Semicirular	شبه دائري
Sulphur	كبريت
Semiconductors	أشباه الموصلات
Stable equilibrum	توازن مستقر
Statistical mechanics	الميكانيك الاحصائي
Spherical harmonic	توافق كروي
Steady current	تيار مستقر
Stoke's theorem	مبرهنة ستوك
Steady state	حالة مستقرة
Small current loops	اطارات التيار الصغيرة
Small meshes	شبيكات صغيرة
Spin	برم
Surface current	تيار سطحي
Stationary charges	شحنات ثابتة
Cyclic processes	العمليات الدورية
Scaffolding	سقالة
Stationary current distribution	توزيع التيار الثابت
Subscript	الرمز السفلي الدليلي
Solenoid	ملف لولبي

Skin effect	ظاهرة سطحية
Skin depth	عمق السطح
Snell's law	قانون سنيل
Standing wave	موجة واقفة او موجة مستقرة
Sharp frequency	التردد الحاد
Substrate	طبقة تحتية
Superstrate	طبقة فوقية
Sputtered zinc oxide	فتات أوكسيد الخارصين
Spatial distribution	التوزيع الفضائي
Sharp ray	شعاع حاد
Space Coordinates	احداثيات فضائية
Space–interval measurements	قياسات الفواصل الفضائية
Summation convention	عرف المجموع
Scattering angle	زاوية الاستطارة
Self – energy	طاقة ذاتية
Stress – tensor	ممتدة الاجهاد
Stable equilibrium pinch	حشر متوازن مستقر
Sausage instability	عدم الاستقرارية السجقية
Stretching	سحب

-T-

Tensor	ممتدة
Thermal agitation	تهيج حراري
Tension	شد
Total derivative	مشتقة كلية
Transient current	تيار عابر
Transmision line	خط نقل
Transverse wave	موجة مستعرضة
Time factors	عوامل الزمن
Time averaged energy	المعدل الزمني للطاقة
Time averaged energy density	المعدل الزمني لكثافة الطاقة
Transmision coefficient	معامل الانتقال
Transverse Laplacian operator	عامل لابلاسيان المستعرض
Time–average Poynting vector	المعدل الزمني لمتجه بونيتنك
Thomson Scattering	استطارة تومسون

-U-

Unit vector	وحدة المتجه
Unpolarized atom	ذرة غير مستقطبة
Uniqueness theorem	مبرهنة التوحد
Untenable	غير مستحبة

- V -

Vector	متجه
Volume charge density	كثافة الشحنة الحجمية
Vector function	دالة اتجاهية
Vector potential	جهد متجه
Vector point function	دالة نقطية متجه
Vacuum chamber	غرفة مفرغة
Velocity of propagation	سرعة الانتشار
Vector differential operator	عامل تفاضل متجه

- W -

Weber	ڤيبر
Wave - front	جبهة الموجة
Wave guides	دلائل الموجة

Bibliography

المراجـــع

(1) Andrews, C.L., Optics of the Electromagnetic Spectrum. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1960).

(2) Argence, E. and Kahan, T., Theory of Waveguides and Cavity Resonators, Blackie, London (1967).

(3) Band, Introduction to Mathematical Physics, East press (1964)

(4) Bates, L.F., Modern Magnetism, 4th Ed. Cambridge University Press, (1961).

(5) Becker, R. and Sauter, F., Electromagnetic Fields and Interactions, Vol. Blaisdell, New York, (1964).

(6) Bergmann, P.G., Introduction to the Theory of Relativity,Asia Publishing House, (1960).

(7) Bleaney, B.I and Bleaney, B. Electricity and Magnetism 3 rd . Ed. Oxford University press , (1978)

(8) Born, M. and wolf, E, principles of Optics, 4th Ed pergamon, New York, (1970)

(9) Boyd, T.J. M. and Sanderson, J.J., Plasma Dynamics, Nelson, London and Barnes and Noble, New York (1969)

(10) Brailsford, F., physical principles of Magnetism, Van Nostrand London (1966)

(11) Carter,G.W., The Electromagnetic Fields in its Engineering Aspects, 2nd Ed., Longmans, Green,London (1967).

(12) Chambers Ll. G., An Introduction to Mathematics of Electricity and Magnetism, Chapman and Hall, London (1973).

(13) Chirgwin B.H., Plumpton, C, and Kilmister, C.W Elementary Electromagnetic Theory in 3 volumes. Pergamon Press, Oxford, (1972).

(14) Clemmow, P.C., The plane wave Spectrum Repersentation of Electromagnetic Fields, Pergamon, Oxford (1966).

(15)Clemmow, P.C. and Dougherty, J.P. Electrodynamics of particles and Plasmas, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1969).

(16) Collin, R.E., Field Theory of Guided waves, Mc Graw-Hill, New York, (1966).

(17) Corson, D.R., and Lorrain, P., Introduction to Electromagnetic Fields and Waves, Freeman, San Francisco, (1962).

(18) Coulson, C.A. and Boyd, T.J.M., Electricity, 2nd Ed., Longman Group Limited, London, (1979).

(19) Cullwick, E.G, The Fundamentals of Electromagnetism, 3 rd Ed Cambridge University Press, (1966).

(20) de Groot, S.R., The Maxwell Equations, North – Holland, Amsterdam (1969).

(21) Ecker, G., Theory of Fully Ionized Plasmas, Academic, New York, (1972).

(22) Fano, R.M., Chu, L.J. and Adler, R.B., Electromagnetic Fields, Energy and Forces. Wiley, New York, (1960).

(23) Ferrari, R.L., An Introduction to Electromagnetic Fields, Van Nostrand, Reinhold Company (1975).

(24) Feynman, R.P. The Electromagnetic Field, Lectures on Physics, Vol.II, Addison-Wesley, (1964).

(25) French, A.P., Special Relativity Norton, New York, (1968).

(26) Fröhlich, H. Theory of Dielectrics, Clarendon Press (1958).

(27) Grant I.S and Phillips, W.R., Electromagnetism, John Wiley & Sons Ltd. (1978).

(28) Hallen, E., Electromagnetic Theory, Chapman – Hall, London (1962).

(29) Harrington, R.F., Time Harmonic Electromagnetic Fields, Mc Graw – Hill, New York, (1961).

(30) Heitler, W., Quantum Theory of Radiation, 3rd Ed. Oxford University Press, (1954).

(31) Hammond, P., Applied Electromagnetism, Pergamon Press (1971).

(32) Holt, E.H. and Haskell, R.E. Foundations of Plasma Dynamics, Macmillan, New York, (1965).

(33) Hsu F.H., Am.J. Phys. 40, 492, (1972).

(34) Hughes, W.F. and Young F.J., The Electrodynamics of Fluids, Wiley, New York (1966).

(35) Jackson, J.D., Classical Electrodynamics, 2nd Ed., Wiley Eastern Limited, (1978).

36) Jeans, J.H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 5th Ed., Cambridge Univ. press (1948).

(37) Jeffreys, H. and Jeffreys, B.S., Methods of Mathematical Physics 3rd. Ed, Cambridge University press (1956).

(38) Johnson, C.C., Field and wave Electrodynamics, Mc Graw – Hill, New York, (1965).

(39) Jordan E.C., and Balmain K.G., Electromagnetic Wave and Radiating Systems, 2nd Ed., Prentice – Hall, Englewood Cliffs (1968).

(40) Kilmister, C.W., Special Theory of Relativity, Pergamon, Oxford,(1970).

(41) Kittel, C., Introduction to Soild Sate Physics, 4th Ed. Wiley, New York (1971).

(42) Kraus, J.D. and Carver, K.R., Electromagnetics 2nd Ed., Mc Graw-Hill, (1973).

(43) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., The Classical Theory of Fields, 4th Ed. pergamon Press, (1975).

(44) Laud, B.B., Introduction to Statistical Mechanics, Macmillan, India, (1981).

(45) Linhart, J.G., Plasma physics, North Holland Amsterdam (1960).

(46) Marion, J.B. classical Electromagnetic Radiation , Academic press, New York, (1968).

(47) Moller, C., The Theory of Relativity 2nd Ed. Clarendon Press, Oxford (1972).

(48) Panofsky, W.K.H. and Phillips, M. Classical Electricity and Magnetism,2nd Ed. Addison Wesley, Reading, Mass (1962).

(49)penfield,P. and Haus, H.A., Electrodynamics of Moving Media, M.I.T. Press, (1967).

(50)poporie B.D., Introductory Engineering Electrodynamics, Addison – Wesley, Reading, Mass. (1971).

(51) Pugh, E.M.and Pugh E. W., Principles of Electricity and Magnetism, Addison – Wesley, Reading, Mass. (1960).

(52) Ramo, S.,Whinnery, J.R. and Van Duzer, T., Fields and waves in Communication Electronics, Wiley New York (1965)،

(53) Reitz J.R. and Milford, F.J, Foundations of Electromagnetic Theory 2nd Ed. Addision – Wesley (1967).

(54) Robinson, F.N.H., Macroscopic Electromagnetism, Pergamon, Oxford, (1973).

(55) Rosenfeld , L. Theory of Electrons, Dover (1966) ·

(56) Sastry, G.P., Am. J. Phys.,38, 267, (1970) ·

(57) Schwartz, W.M., intermediate Electromagnetic Theory, Wiley, New, York, (1964).

(58) Smythe, W.R., Static and Dynamic Electricity, Mc Graw-Hill, New York (1969) ·

(59) Stone , J.M., Radiation and Optics, Mc Graw – Hill New York (1963) ·

(60) Whittaker, E.T., A History of the Theories of ether and Electricity 2 Volumes Nelson, London, Reprinted by Harper, New York (1960).