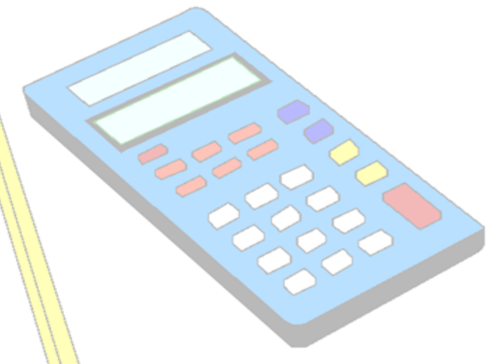
سلسلة

الأوائل

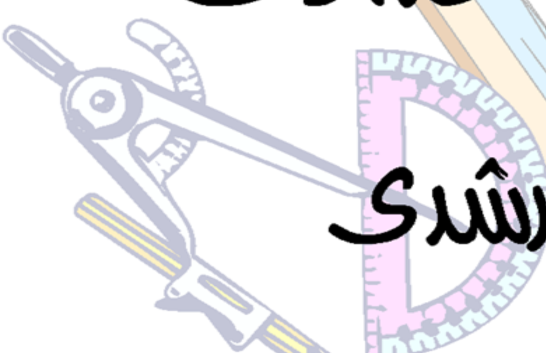
فى

الهندسة

للصف الثالث الإعدادى



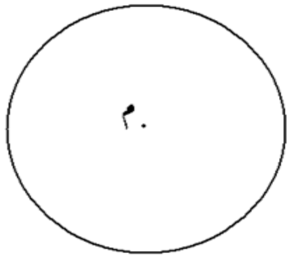
إعداد م / وليد رشدى



هدية مجانية

هندسة الدائرة

الدائرة



هي مجموعة لا نهائية من نقط المستوى التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة .

النقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة. والبعد الثابت يسمى طول نصف القطر.

سطح الدائرة

(١) مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة

(٢) مجموعة النقاط داخل الدائرة اتحاد مجموعة نقاط الدائرة تسمى منطقة دائرية.

(٣) مركز الدائرة م ∋ لمجموعة النقط داخل الدائرة

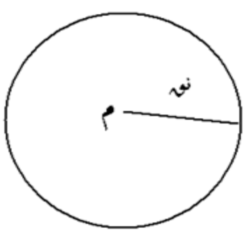
(٤) مركز الدائرة م ∌ لمجموعة نقط الدائرة

(٥) مركز الدائرة م ∋ لمجموعة نقط سطح الدائرة

(٦) مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢}

(٧) محيط الدائرة = ٢ π نق

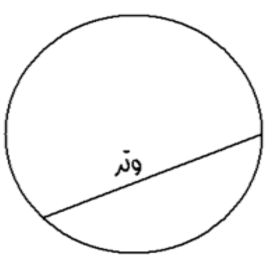
نصف قطر الدائرة :



(١) قطعة مستقيمة طرفيها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة.

(٢) أنصاف أقطار الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة) متساوية فى الطول

وتر الدائرة :

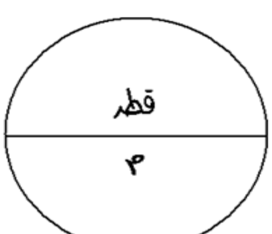


(١) قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين مختلفتين من نقاط الدائره.

(٢) اوتار الدائرة ليس بالضرورة ان تكون متساوية

(٣) طول أى وتر فى الدائرة غير ما بمركزها أصغر من طول قطر الدائرة

قطر الدائرة :



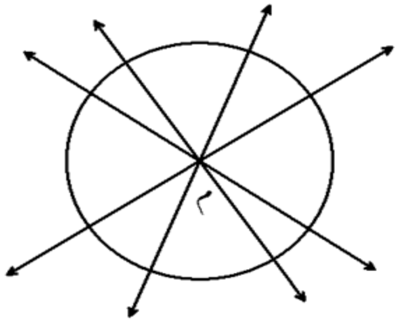
(١) هو وتر فى الدائرة يمر بمركزها.

(٢) القطر أكبر وتر فى الدائرة

(٣) كل قطر يسمى وتر ولكن ليس كل وتر يسمى قطر

تطابق دائرتين :

يقال لدائرتان أنهما متطابقتان إذا تساوى طولا نصف قطريهما.



محور تماثل الدائرة

(١) كل مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها.

(٢) عدد محاور تماثل الدائرة = عدد لا نهائى من الدوائر

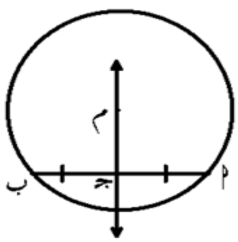
يلاحظ أن:

الدائره تجزئ مجموعة نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات هى :-

① مجموعة نقاط الدائرة　② مجموعة نقاط داخل الدائرة　③ مجموعة نقاط خارج الدائرة

نتائج هامة على الدائرة

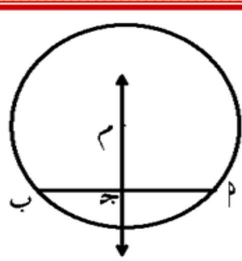
المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر



∵ جـ منتصف أب

∴ م جـ ⊥ أب

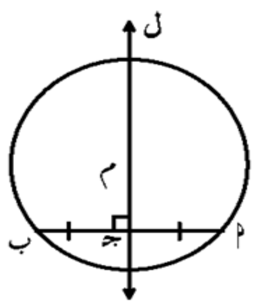
المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أى وتر فيها يكون ينصف هذا الوتر



∵ م جـ ⊥ أب

∴ جـ منتصف أب

المستقيم المار عموديا على أى وتر من منتصفه يمر بمركز الدائرة (محور تماثل لهذه للدائرة)



∵ جـ منتصف أب

∵ المستقيم ل ⊥ أب

∴ م ∈ المستقيم ل

ملاحظات لحل التمارين

(١) فى المثلث القائم الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠ ° يساوى نصف طول الوتر

(٢) فى المثلث القائم مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة

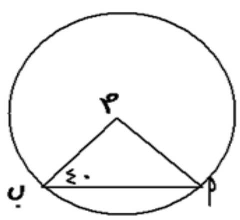
(٣) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها = نصف طول هذا الضلع

(٤) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتين (متساويتان فى القياس)

مثال [١]

دائرة م ، م أ ، م ب نصفى قطر فيها ، ق(∠ أ ب م) = ٤٠ ° احسب ق(∠ م)

الحل



∵ م أ = م ب = نق

∴ △ أ م ب متساوى الساقين

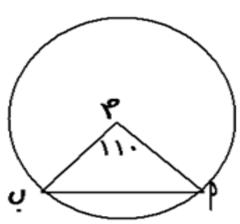
∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٤٠ °

∴ ق(∠ م) = ١٨٠ – (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ - ٨٠ = ١٠٠ °

مثال [٢]

دائرة م ، م أ ، م ب نصفى قطر فيها ، ق(∠ أ م ب) = ١١٠ ° احسب ق(∠ أ)

الحل ∵ م أ = م ب = نق



∴ △ أ م ب متساوى الساقين

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = $\frac{١٨٠ - ١١٠}{٢}$ = $\frac{٧٠}{٢}$ = ٣٥ °

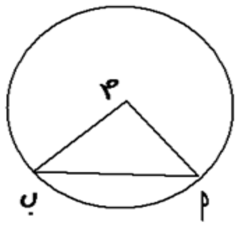
مثال [٣]

دائرة م ، $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ نصفى قطر فيها ، $\overline{\text{مأ}} \perp \overline{\text{مب}}$ ، مساحة المثلث أ ب جـ = ٣٢ سم^{٢}

احسب مساحة الدائرة

الحل ∵ م أ = م ب = نق

∴ ∆ أ م ب متساوى الساقين



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب = ٣٢

= $\frac{١}{٢}$ نق × نق = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} = ٣٢ ∴ نق^{٢} = ٦٤ نق = ٨

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ٦٤π سم^{٢}

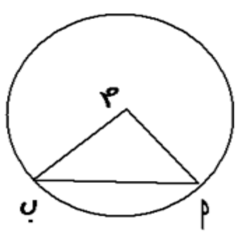
مثال [٤]

دائرة م ، $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ نصفى قطر فيها ، $\overline{\text{مأ}} \perp \overline{\text{مب}}$ ، مساحة الدائرة = ٢٥ط سم^{٢}

احسب مساحة المثلث أ ب جـ

الحل

∵ م أ = م ب = نق ∴ ∆ أ م ب متساوى الساقين



مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ٢٥π سم^{٢}

∴ نق^{٢} = ٢٥ نق = ٥ سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب = $\frac{١}{٢}$ نق × نق

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ = $\frac{٢٥}{٢}$

[٥] في الشكل المقابل

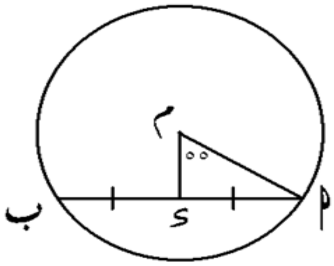
الدائرة م فيها ء منتصف أ ب ، ق(∠م) = ٥٥° أوجد ق(∠م ء أ)

∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ ق(∠م ء أ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٥°)

= ١٨٠° − ١٤٥° = ٣٥°



[٦] في الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م ، ق(∠ب أ جـ) = ٥٠° ، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

احسب : ق(∠ء م هـ)

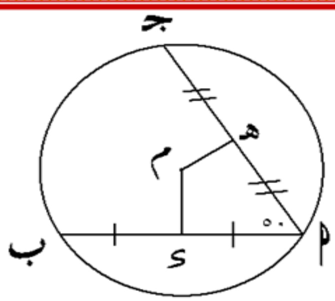
∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠° .... (١)

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠° .... (٢)

∴ ق(∠م) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°



[٧] في الشكل المقابل

أ ب وتر فى دائرة م ، ب جـ قطر فيها ، ء منتصف أ ب اثبت أن م ء // أ جـ .

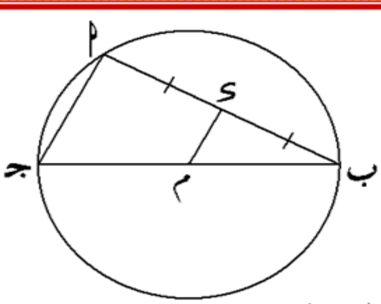
ثم احسب : ق(∠أ)

∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ ق(∠ب ء م) = ٩٠°

∵ م منتصف القطر ب جـ ∵ ء منتصف أ ب

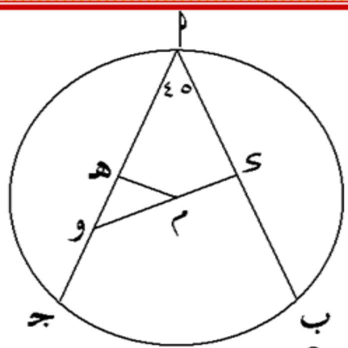
∴ م ء // أ جـ ∴ ق(∠ب ء م) = ق(∠أ) = ٩٠° بالتناظر



[٨] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى الدائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٤٥° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب

اثبت أن : △ هـ و م متساوى الساقين



∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$

∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠° .... (١)

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠° .... (٢)

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٥°) = ١٣٥°

∵ ق(∠ هـ م و) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

∵ ق(∠ م هـ و) = ٩٠° ∴ ق(م و هـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

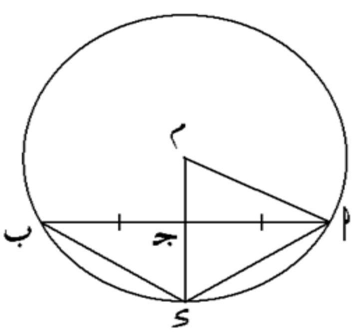
∴ ق(∠ هـ و م) = ق(∠ هـ م و) = ٤٥°

∴ هـ م = هـ و ∴ △ م هـ و متساوى الساقين

[٩] في الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم ، $\overline{أب}$ وتر فيها طوله ٢٤سم ، جـ منتصف $\overline{أب}$

، $\overrightarrow{مجـ}$ ∩ الدائرة م = { ء } **أوجد :** مساحة △ أ ء ب



∵ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$

∴ ق(∠ أ جـ م) = ٩٠°

فى △ أ م جـ القائم فى ∠ أ جـ م ∵ أ جـ = جـ ب = ١٢سم

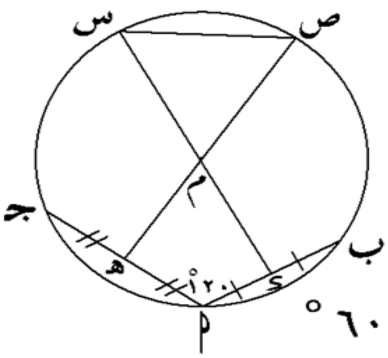
∵ $(مجـ)^2 = (أم)^2 - (أجـ)^2$ = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

∴ م جـ = ٥سم ∵ م ء = ١٣سم ∴ جـ ء = ١٣ − ٥ = ٨سم

∴ مساحة △ أ ء ب = $\frac{1}{2}$ × أ ب × جـ ء = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦سم²

[١٠] في الشكل المقابل

أب ، أجـ وتران فى الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب
سم ءم ، هـم فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب **اثبت أن** △ س ص م متساوى الأضلاع



∵ ء منتصف أب   ∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ أ ء م) = ٩٠° .... (١)

∵ هـ منتصف أجـ   ∴ م هـ ⊥ أجـ

∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠° .... (٢)

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ ق(∠ ء م هـ) = ق(∠ س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

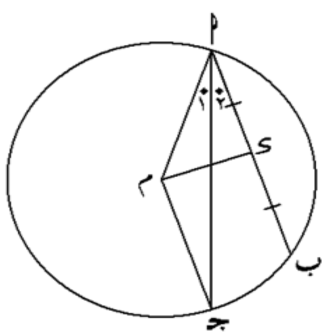
∵ م س = م ص = نق   ∴ ق(∠ س) = ق(∠ ص) = ٦٠°

∴ م س = م ص = س ص = نق   ∴ △ س ص م متساوى الأضلاع

[١١] في الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة م ، أجـ ينصف (∠ ب أ م) ويقطع الدائرة م فى جـ
، اذا كانت ء منتصف أب **اثبت أن** : م ء ⊥ م جـ

∵ فى △ م أ جـ   ∵ م أ = م جـ   ∴ △ م أ جـ متساوى الساقين



∴ ق(∠ ١) = ق(جـ) .... (١)

∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

∴ ق(جـ) = ق(∠ ٢) وهما فى وضع تبادل

∴ أب // م جـ   ∵ ء منتصف أب

∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ م ء أ) = ٩٠°   ∵ أب // م جـ ، م ء قاطع لها

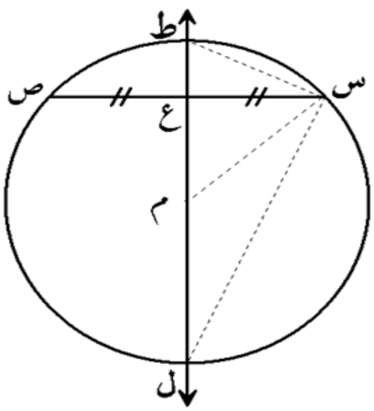
∴ ق(∠ م ء أ) = ق(∠ ء م جـ) = ٩٠°   م ء ⊥ م جـ

[١٢] في الشكل المقابل

س ص وتر فى الدائرة م ، ع منتصف س ص ، رسم المستقيم م ع قطع الدائرة فى ل ، ط

اثبت أن : ق(∠ ل س ط) = ٩٠°

، إذا كان س ص = ١٢سم ، ل ع = ٩سم . **احسب طول قطر الدائرة .**



فى △ ط س ل

∵ م س = م ط = م ل = نق

∵ م منتصف ط ل   ∴ م س متوسط △ ط س ل

∵ م س = $\frac{1}{2}$ ط ل   ∴ ق(∠ ط س ل) = ٩٠°

∵ ع منتصف س ص   ∴ ل ع ⊥ س ص

∵ ق(∠ ل س ط) = ٩٠°   ∴ من إقليدس

(س ع)² = ط ع × ع ل = (٦)² = ٣٦

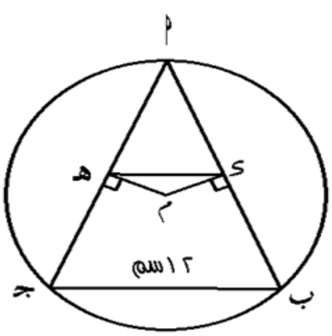
∴ ط ع × ٩ = ٣٦   ∴ ط ع = ٤سم

طول القطر = ط ل = ٤ + ٩ = ١٣سم

[١٣] في الشكل المقابل

أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ .

اثبت أن ء هـ // ب جـ وإذا كان ب جـ = ١٢سم **أوجد** طول ء هـ



∵ م ء ⊥ أ ب   ∴ ء منتصف أ ب

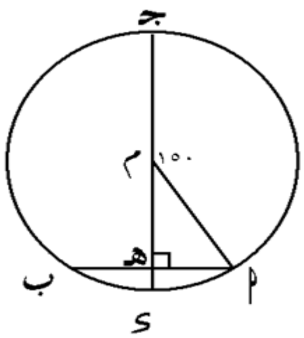
∵ م هـ ⊥ أ جـ   ∴ هـ منتصف أ جـ

∴ ء هـ // ب جـ   ∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦سم

[١٤] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وتر فى دائرة مركزها م ، $\overline{جـ د}$ قطر فيها ، $\overline{جـ د} \perp \overline{أب}$ فإذا كان أ ب = ٨سم ، ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° **أوجد** طول $\overline{جـ د}$



∵ ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠°

∴ ق(∠ أ م د) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أ هـ = هـ ب = ٤سم ∵ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∵ ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° ∴ ق(∠ أ م د) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

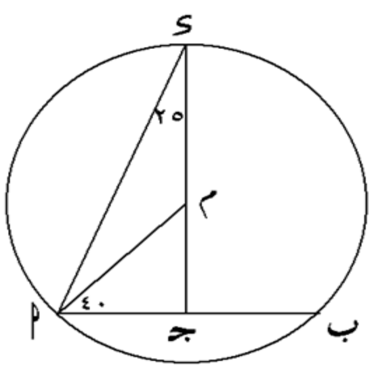
∴ △ م هـ أ ثلاثينى ستينى ∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ م

∴ أ م = ٢ أ هـ = ٨سم ∴ جـ د = ٢ أ م = ٢ × ٨ = ١٦سم

[١٥] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، ق(∠ د) = ٢٥° ، ق(∠ م أ جـ) = ٤٠°

برهن أن : جـ منتصف $\overline{أب}$



∵ فى △ م د أ ∵ م د = م أ = نق

∴ ق(∠ م أ د) = ق(∠ د) = ٢٥°

∵ ق(∠ م أ جـ) = ٤٠°

∴ ق(∠ د أ جـ) = ٤٠° + ٢٥° = ٦٥°

فى △ أ د جـ

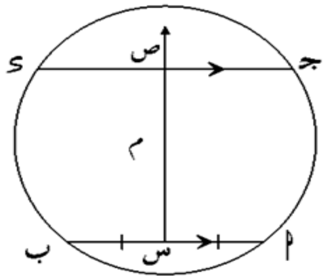
∴ ق(∠ د جـ أ) = ١٨٠° − (٢٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∴ $\overline{م جـ} \perp \overline{أب}$ ∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

[١٦] فى الشكل المقابل

م دائرة ، أب // جـ ء ، س منتصف أب ، رسم س م فقطع جـ ء فى ص

اثبت أن : ص منتصف جـ ء



∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠ أ س م) = ٩٠°

∵ أب // جـ ء ∵ س ص قاطع لهما

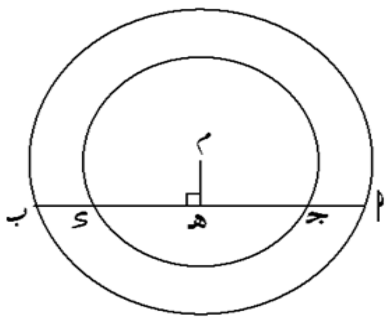
∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ ء ص س) = ٩٠°

∴ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء

[١٧] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، أب وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء

، م هـ ⊥ أب **اثبت أن :** أ جـ = ب ء



فى الدائرة الصغرى

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∴ هـ منتصف جـ ء

∴ هـ ء = هـ جـ .... (١)

∵ فى الدائرة الكبرى

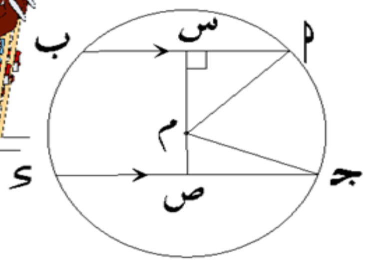
∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ منتصف أب

∴ هـ ب = هـ أ .... (٢) بطرح (١) من (٢)

∴ هـ ب – هـ ء = هـ أ – هـ جـ ∴ ب ء = أ جـ

[١٨] فى الشكل المقابل

أب ، جـ ء وتران متوازيان فى دائرة م ، أب = ١٢سم ، جـ ء = ١٦سم أوجد البعد بين هذين الوترين اذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠سم



العمل نرسم م س ⊥ أ ب

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب

∴ أ س = ب س = ٦سم

∵ م أ = ١٠سم ∴ من فيثاغورث فى △ أ س م

∵ (م س)² = (م أ)² − (أ س)² = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

∴ م س = ٨سم .... (١)

∵ أ ب // جـ ء ، س ص قاطع لهما

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ س ص جـ) = ٩٠°

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص = ء ص = ٨سم

∴ فى △ م ص جـ من فيثاغورث

∴ (م ص)² = (م جـ)² − (جـ ص)² = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

∴ م ص = ٦سم .... (٢)

∴ س ص (البعد بين الوترين) = ٨ + ٦ = ١٤سم

[١٩] في الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، جـ ء وترفيها ، هـ ∈ م أ ، و ∈ م ب ،
م س ⊥ جـ ء ، هـ جـ ⊥ جـ ء ، و ء ⊥ جـ ء . **برهن أن** أ هـ = ب و

∵ م س ⊥ جـ ء ∴ س منتصف جـ ء ∴ جـ س = ء س

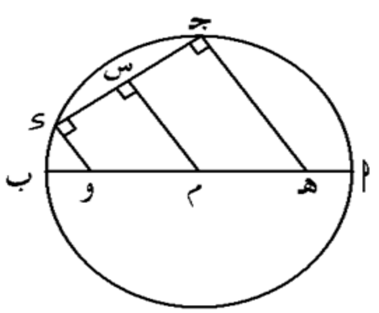
∵ هـ جـ ⊥ جـ ء ∵ م س ⊥ جـ ء

∵ و ء ⊥ جـ ء ∴ هـ جـ // م س // و ء

∵ أ ب ، جـ ء قاطعان ∵ جـ س = ء س

∴ هـ م = م و ∵ م أ = م ب = نق

∴ أ هـ = ب و



موضع نقطة بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع نقطة بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين البعد بين النقطة أ ومركز الدائرة م وليكن م أ فإذا كانت

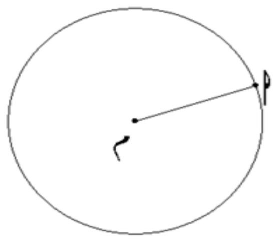
١ البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة.

٢ البعد أ م > نق فان النقطة تقع خارج الدائرة.

٣ البعد أ م < نق فان النقطة تقع داخل الدائرة.

٤ البعد أ م = ٠ فان النقطة فى تقع مركز الدائرة (داخل الدائرة).

إذا كان أ تقع على الدائرة

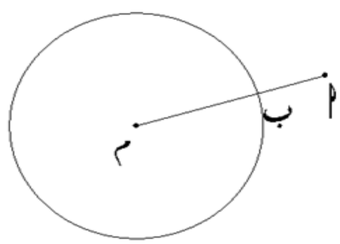


البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة ، تقع على الدائرة.

م أ = نق

م أ ∩ الدائرة م = { أ }

إذا كان أ تقع خارج الدائرة

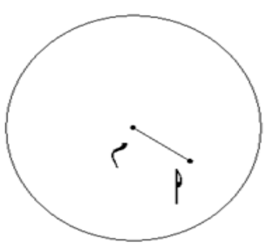


م أ > نق

م أ ∩ الدائرة م = { ب }

النقطة تقع خارج الدائرة إذا كان البعد م أ ∈] نق ، ∞ [

إذا كان أ تقع داخل الدائرة



م أ < نق

م أ ∩ الدائرة م = ∅

النقطة تقع داخل الدائرة إذا كان البعد م أ ∈ [صفر ، نق [

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع مستقيم ل بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين بعد مركز الدائرة م عن المستقيم ل وليكن م أ فإذا كان

١ أ م > نق كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة.

٢ أ م = نق كان المستقيم ل مماس للدائرة.

٣ أ م < نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة.

٤ أ م = صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة.

ملاحظات

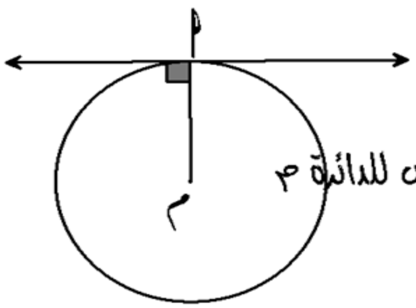
❶ المستقيم ل يقع **خارج الدائرة** إذا كان البعد م ٲ ∈] نق ، ∞ [

❷ المستقيم ل يسمى **مماس** لدائرة إذا كان البعد م ٲ = نق

❸ المستقيم ل يسمى **قاطع** لدائرة إذا كان البعد م ٲ ∈] صفر ، نق [

❹ المستقيم ل يسمى **محور تماثل** لدائرة إذا كان البعد م ٲ = صفر

ل مماس للدائرة م



(ٲ) م ٲ = نق

إذا كان البعد العمودي م ٲ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل مماس للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { ٲ }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

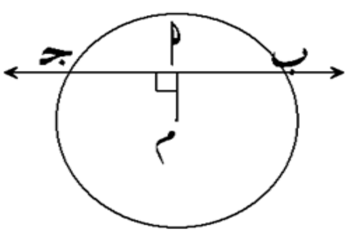
(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = { ٲ }

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

ل قاطع للدائرة م

(ٲ) م ٲ < نق

إذا كان البعد العمودي م ٲ عن المستقيم ل أقل من نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة م



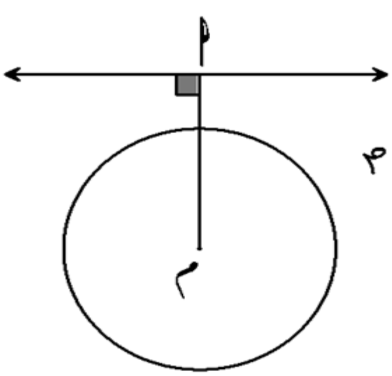
(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، حـ }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين كان المستقيم ل قاطع للدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = ب حـ

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل يقع خارج الدائرة م



(ٲ) م ٲ > نق

إذا كان البعد العمودي م ٲ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل خارج الدائرة م

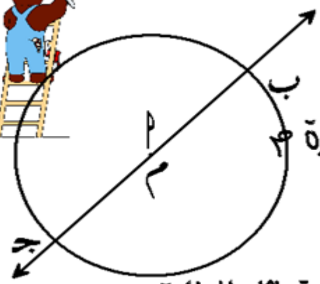
(ب) ل ∩ الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل خارج الدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل محور تماثل لدائرة م



(أ) م أ = صفر

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ } و يمر بالنقطة م

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين و يمر بالنقطة م كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

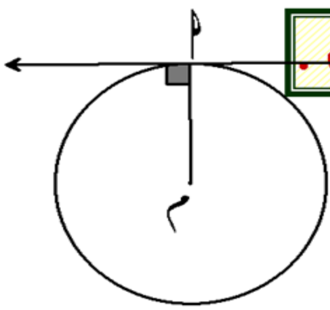
(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م =

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة و يمر بالنقطة م

كان المستقيم ل قاطع للدائرة

نتيجة ١

المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .



أى أن نصف القطر للدائرة يكون عمودى على المماس عند نقطة التماس

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

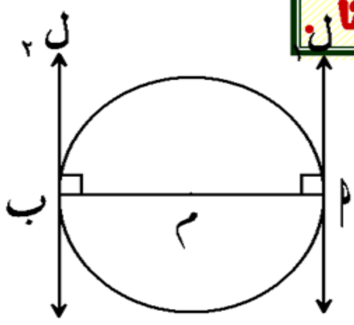
م أ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ق(م أ ب) = ٩٠°

نتيجة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماس لها .

نتيجة ٣

المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان .



إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م وكان $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ ل١ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ ل٢ فان

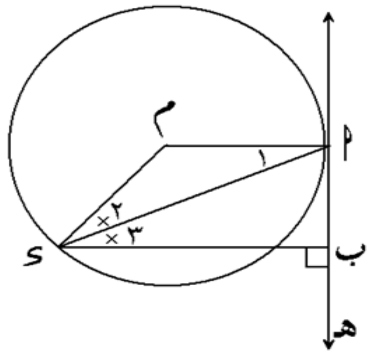
ل١ ، ل٢ مماسا للدائرة .

المماسان ل١ ، ل٢ عمودان على القطر $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منها ل١ // ل٢

أى أن المماسان لدائرة عند نهايتى القطر يكونان متوازيان

[١] فى الشكل المقابل

وضح لماذا يكون المستقيم ↔أ ب مماس .



∵ م أ = م ء = نق ∴ △ م أ ء متساوى الساقين

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∵ ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣)

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٣) وهما فى وضع تبادل

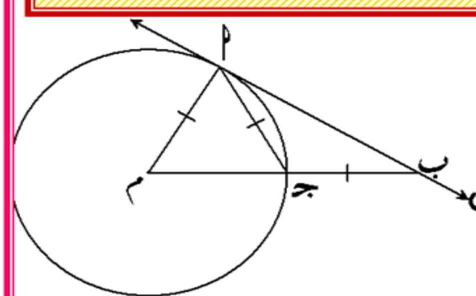
∴ ‾أ م // ‾ء ب

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ ب أ م) = ٩٠° بالتناظر

∴ ‾م أ ⊥ ‾أ ب عند نقطة أ ∴ ↔أ ب مماس

[٢] فى الشكل المقابل

وضح لماذا يكون المستقيم ↔أ ب مماس .



∵ م أ = م جـ = نق

∵ أ جـ = م أ = ب جـ ∴ م جـ = ب جـ

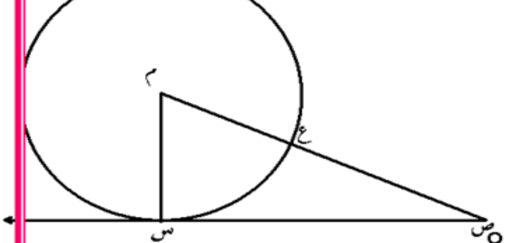
∴ جـ منتصف م ب ∴ ‾أ جـ متوسط △ م أ ب

∵ أ جـ = ١/٢ م ب ∴ ∠ ب أ م قائم

∴ ق(∠ ب أ م) = ٩٠° ∴ ‾م ب ⊥ ↔أ ب ∴ ↔أ ب مماس

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، س ص = ١٢سم ، ‾م ص ∩ الدائرة = { ع } ، ع ص = ٨سم

اثبت أن : المستقيم ↔س ص مماس للدائرة م عند س



∵ م س = م ع = ٥سم ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣سم

∵ (م ص)^2 = (١٣)^2 = ١٦٩ .... ❶

∵ (م س)^2 + (س ص)^2 = (٥)^2 + (١٢)^2

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ .... ❷ من ❶ ، ❷

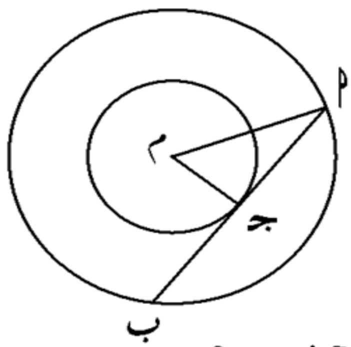
∴ (م ص)^2 = (م س)^2 + (س ص)^2 ∴ ق(س) = ٩٠°

∴ ‾م س ⊥ ↔س ص ∴ ↔س ص مماس

[٤] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أ ب = ٨سم

، طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم **أوجد** : طول نصف قطر الدائرة الصغرى



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة الصغرى عند جـ

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ م جـ أ) = ٩٠°

∵ فى الدائرة الكبرى ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها ∵ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ جـ منتصف أ جـ ∴ أ جـ = ب جـ = ٤سم

∴ فى △ م جـ أ ∵ ق(∠ م جـ أ) = ٩٠°

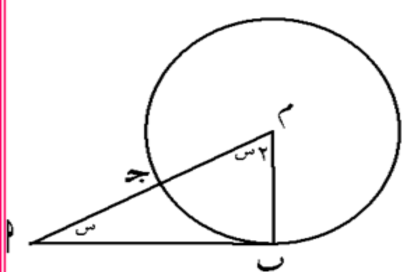
(م جـ)^2 = (م أ)^2 – (أ جـ)^2 = (٥)^2 – (٤)^2 = ٢٥ – ١٦ = ٩

∴ م جـ = ٣سم ∴ نق الصغرى = ٣سم

[٥] فى الشكل لمقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسية للدائرة م عند ب ، ق(∠ أ) = س ، ق (∠ م) = ٢س اثبت أن :

جـ منتصف $\overline{\text{أ م}}$ ، إذا كان : أ م = ١٤سم **فأوجد** مساحة سطح الدائرة م حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠ ب)= ٩٠°

∴ ق (∠ م) + ق (∠ أ) = ٩٠°

∴ ٢س + س = ٩٠° ∴ ٣ س = ٩٠°

∴ س = ٣٠° ∴ △ أ ب م ثلاثينى ستينى

م ب = $\frac{١}{٢}$ م أ ∵ م ب = م جـ = نق

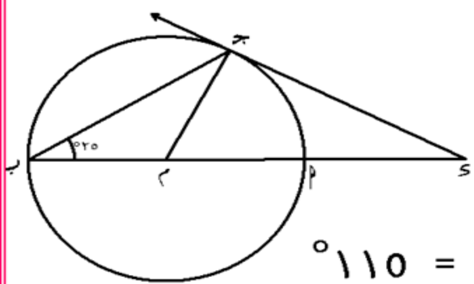
∴ جـ منتصف $\overline{\text{م أ}}$ ∵ أ م = ١٤سم ∴ م ب = نق = ٧سم

∴ مساحة الدائرة = π نق^2 = π (٧)^2 = ٤٩ π سم^2

(٦) فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ ب أ فإذا كان المستقيم ء جـ مماسا للدائرة عند جـ

، ق(∠ ب) = ٢٥° **فأوجد :** ق(∠ ء)



∵ فى △ م جـ ب ∴ م جـ = م ب = نق

∴ ق(∠ب) = ق(∠ م جـ ب) = ٢٥°

∵ ء جـ مماس ∴ م جـ ⊥ ء جـ

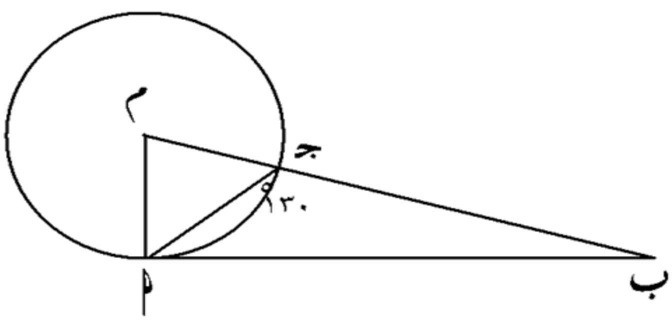
ق(∠ م جـ ء) = ٩٠° ∴ ق(∠ ء جـ ب) = ٩٠° + ٢٥° = ١١٥°

∴ ق(∠ء) = ١٨٠° − (١١٥° + ٢٥°) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

(٧) فى الشكل لمقابل

أب مماسة للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = {جـ} ق(∠ أ جـ ب) = ١٣٠°

أوجد ق(∠م) ، ق(∠ب)



∵ ∠ أ جـ ب = ∠ م جـ أ

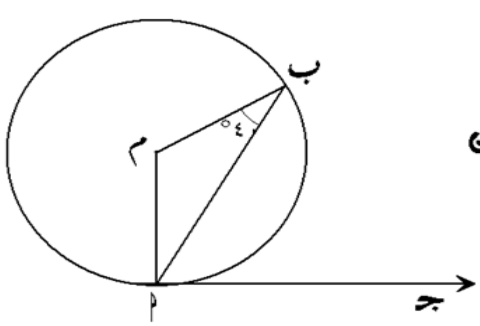
∴ ق(∠ م جـ أ) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

∵ م جـ = م أ = نق

∴ ق(∠ م جـ أ) = ق(م أ جـ) = ٥٠°

(٨) فى الشكل لمقابل

م دائرة أ جـ مماس لها عند أ ، فإذا كان ق(∠ أ ب م) = ٤٠° **أوجد** ق(∠ب أ جـ)



∵ أ جـ مماس للدائرة عند أ

∴ م أ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠ م أ جـ) = ٩٠°

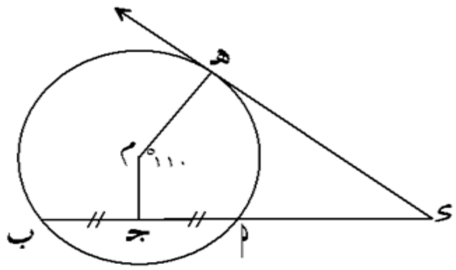
∵ م أ = م ب = نق ∴ △ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق(∠ م ب أ) = ق(∠ب) = ٤٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

[٩] فى الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة م ، ءهـ مماسا لها عند هـ ، جـ منتصف أب **أوجد :** بالبرهان ق(∠ء)



∵ جـ منتصف أب ∴ مجـ ⊥ أب

∴ ق(∠مجـ أ) = ٩٠°

∵ ءهـ مماس للدائرة عند هـ ∴ مهـ ⊥ ءهـ

∴ ق(∠هـ) = ٩٠°

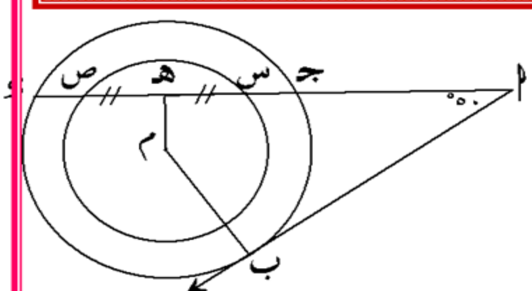
∴ ق(∠ء) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ١١٠°)

= ٣٦٠° – ٢٩٠° = ٧٠°

[١٠] فى الشكل المقابل

هـ منتصف س ص ، أب للدائرة الكبرى عند ب ، ق(∠أ) = ٥٠°

احسب : ق(∠هـ م ب) **اثبت أن :** جـ س = ء ص



∵ أب مماس للدائرة الكبرى عند ب

∴ م ب ⊥ أب ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

فى الدائرة الصغرى

∵ هـ منتصف س ص ∴ م هـ ⊥ س ص

∴ ق(∠م هـ أ) = ٩٠°

∴ ق(∠هـ م ب) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

فى الدائرة الكبرى

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∴ هـ منتصف جـ ء

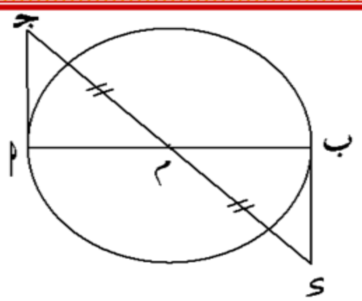
∴ هـ جـ = هـ ء ∵ هـ س = هـ ص

∴ هـ جـ – هـ س = هـ ء – هـ ص

∴ جـ س = جـ ء

[١١] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أجـ مماسا لها عند أ ، رسم جـ م وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء   **اثبت أن :** ب ء مماسا للدائرة عند ب



∵ أجـ مماسا للدائرة عند أ   ∴ م أ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠ أ) = 90°

∵ فى △ △ م أ جـ ، م ب ء فيهما

① م جـ = م ء

② م أ = م ب

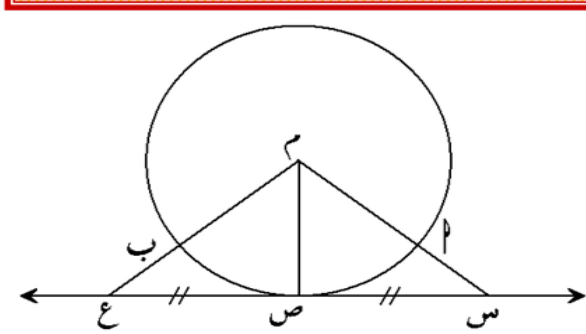
③ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

△ △ وينتج أن : ق(∠ ب) = ق(∠ أ) = 90°

∴ م ب ⊥ ب ء   ب ء مماس للدائرة

[١٢] فى الشكل المقابل

المستقيم س ع مماس للدائرة م عند ص ، س ص = ص ع **اثبت أن :** أ س = ب ع



∵ المستقيم س ع مماس للدائرة م عند ص

∴ م ص ⊥ س ع

∴ ق(∠ م ص س) = ق(∠ م ص ع) = 90°

∴ فى △ △ م ص س ، م ص ع فيهما

① ق(∠ م ص س) = ق(∠ م ص ع) = 90°

② م ص ضلع مشترك

③ س ص = ع ص

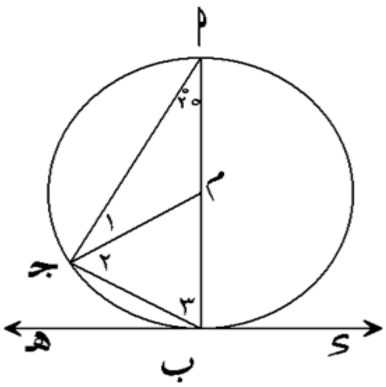
∴ ≡ △ △ وينتج أن :   م س = م ص   ∵ م أ = م ب = نق

∴ م س – م أ = م ع – م ب   ∴ أ س = ب ع

[١٣] فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، المستقيم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة م عند ب ، ق(∠أ) = ٢٥°

أوجد : ق(∠م جـ ب) ، ق(∠ء ب جـ)



∵ م أ = م جـ ∴ △ م أ جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠١) = ق(∠أ) = ٢٥°

∵ ∠ ب م جـ خارجة عن △ م أ جـ

∴ ق(∠ب م جـ) = ق(∠أ) + ق(∠١)

= ٢٥° + ٢٥° = ٥٠°

∵ م ب = م جـ ∴ △ م ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ءهـ}$

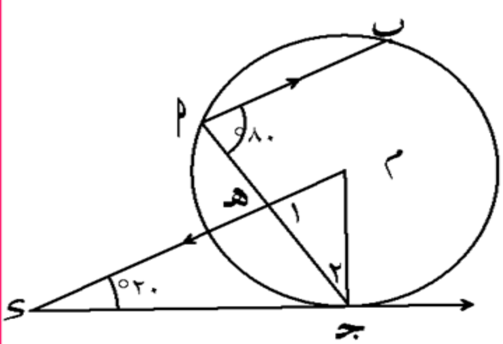
∴ ق(∠م ب ء) = ٩٠° ∴ ق(∠ء ب جـ) = ٩٠° + ٦٥° = ١٥٥°

[١٤] فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{ءجـ}$ يمس الدائرة م عند جـ ، $\overline{أب}$ // $\overline{مء}$ ، ق(∠ب أ جـ) = ٨٠°

، ق(∠م ء جـ) = ٢٠° ، $\overline{أجـ}$ ∩ $\overline{مء}$ = {هـ}

أوجد : ق(هـ جـ م)



∵ $\overleftarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند جـ ∴ $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overleftarrow{ءهـ}$

∴ ق(∠م جـ ء) = ٩٠° ∵ ق(ء) = ٢٠°

∴ ق(م) = ٧٠°

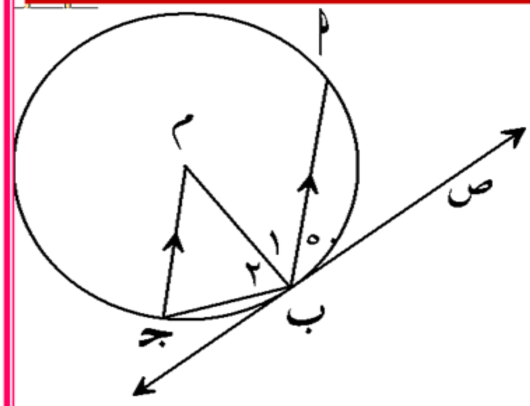
∵ $\overline{أب}$ // $\overline{ءم}$ ، $\overline{أجـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠١) = ٨٠° بالتناظر

∴ ق(∠٢) = ١٨٠° − (٨٠° + ٧٠°) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

[١٥] فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ مماسا للدائرة م عند ب ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م جـ}}$ ، ق($\angle$ أ ب ص) = ٥٠° **أوجد** ق($\angle$ م جـ ب)



∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ مماس للدائرة عند ب   ∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$

∴ ق($\angle$ م ب ص) = ٩٠°

∵ ق($\angle$ ١) = ٩٠° – ٥٠° = ٤٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ قاطع لهما

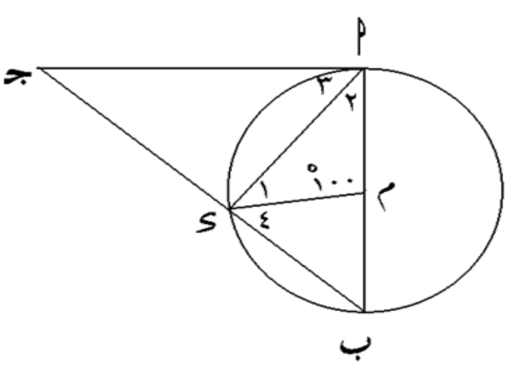
∴ ق($\angle$ م) = ق($\angle$ ١) = ٤٠° بالتبادل

∵ م ب = م جـ = نق

$$\therefore \text{ق}(\angle ٢) = \text{ق}(\angle \text{جـ}) = \frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢} = \frac{١٤٠°}{٢} = ٧٠°$$

[١٦] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعة مماسية للدائرة عند أ ، ق($\angle$ أ م ء) = ١٠٠° ،
أوجد ق($\angle$ ء أ م) ، ق($\angle$ جـ أ ء) ، ق($\angle$ أ ب ء)



∵ م أ = م ء = نق   ∴ △ م أ ء متساوى الساقين

$$\therefore \text{ق}(\angle ١) = \text{ق}(\angle ٢) = \frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢} = \frac{٨٠°}{٢} = ٤٠°$$

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة عند أ   ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق($\angle$ م أ جـ) = ٩٠°

∴ ق($\angle$ ٣) = ٩٠° – ٤٠° = ٥٠°

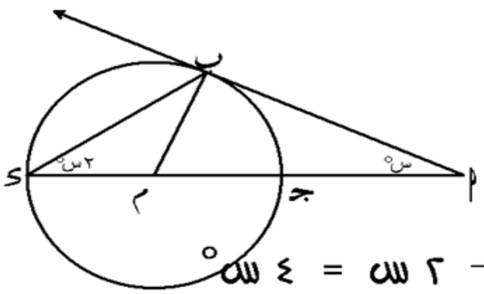
∵ $\angle$ أ م ء خارجة عن △ م ء ب   ∴ ق($\angle$ ٤) + ق($\angle$ ب) = ق($\angle$ أ م ء)

$$\because \text{م ء} = \text{م ب} = \text{نق} \quad \therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle ٤) = \frac{١٠٠°}{٢} = ٥٠°$$

[١٧] فى الشكل المقابل

أ ب تمس الدائرة م عند ب ، جـ ء قطر فيها ، ق(∠ ب أ م) = س° ، ق(∠ م ء ب) = ٢ س°

أوجد قيمة س بالدرجات



∵ م ب = م ء = نق ∴ Δ م ب ء متساوى الساقين

∴ ق(∠ م ب ء) = ق(∠ ء) = ٢ س°

∵ ∠ ب م أ خارجة عن Δ ب م ء

∴ ق(∠ ب م أ) = ق(∠ ء) + ق(∠ م ب أ) = ٢ س + ٢ س = ٤ س°

∵ أ ب مماس للدائرة عند ب ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق(∠ م ب أ) = ٩٠° ∴ فى Δ أ ب م

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ أ م ب) = ٩٠° ∴ س ° + ٤ س° = ٩٠°

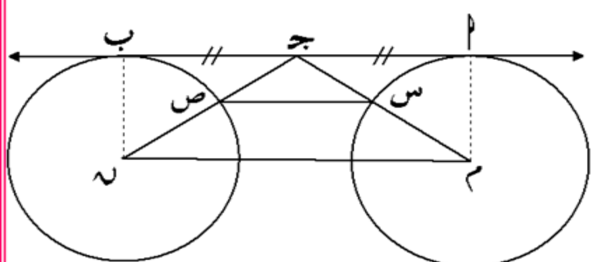
∴ ٥ س = ٩٠ ∴ س = $\frac{٩٠}{٥}$ = ١٨°

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، أ ب مماس مشترك لهما ، جـ منتصف أ ب

، الدائرة م ∩ م جـ = { س } ، الدائرة ن ∩ ن جـ = { ص } **اثبت أن :**

(١) أ ب // م ن (٢) Δ جـ م ن متساوى الساقين . (٣) س ص // م ن



∵ أ ب مماس مشترك للدائرتين

∴ م أ ⊥ أ ب ∴ ن ب ⊥ أ ب

∴ م أ // ن ب ∵ م أ = ن ب = نق

∵ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ أ ب ن م مستطيل ∴ أ ب // م ن

∵ فى ΔΔ م أ جـ ، ن ب جـ فيهما

① ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

② م أ = ن ب = نق

③ أ جـ = ب جـ

∴ ≡ △△ وينتج أن : م جـ = ن جـ

∴ △ م جـ ن متساوى الساقين ∵ م س = ن ص = نق   ∴ جـ س = جـ ص

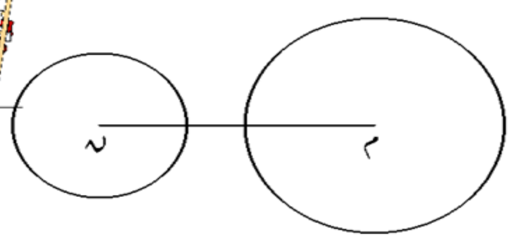
∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)   ∵ ∠ م جـ ن) زاوية مشتركة فى △ △ م جـ ن ، س جـ ص

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ جـ م ن)   وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى :

[١] الدائرتان المتباعدتان :

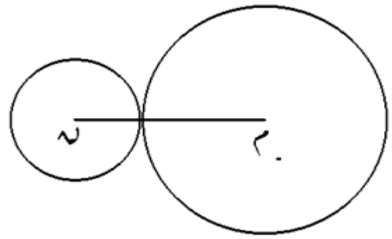


❶ م ن $>$ نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = $\varnothing$

[٢] الدائرتان المتماستان من الخارج :

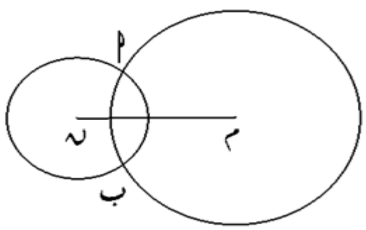


❶ م ن = نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = { أ }

[٣] الدائرتان المتقاطعتان :

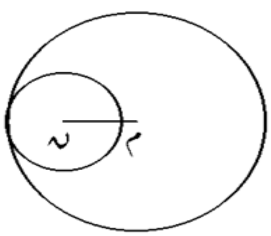


❶ نق$_1$ − نق$_2$ $<$ م ن $<$ نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ ، ب }

❸ أى دائرتان تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

[٤] الدائرتان المتماستان من الداخل :

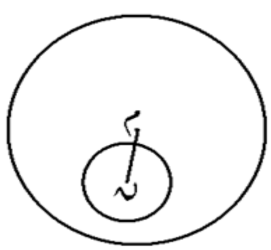


❶ م ن = نق$_1$ − نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٥] الدائرتان المتداخلتان :

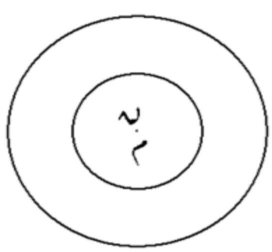


❶ م ن $<$ نق$_1$ − نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

[٦] الدائرتان المتحدتان فى المركز :



❶ م ن = صفر

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

الدائرتان متباعدتان

↑

المجموع ⊕ ← الدائرتان متماستان من الخارج

الدائرتان متقاطعتان

الطرح ⊖ ← الدائرتان متماستان من الداخل

↓

الدائرتان متداخلتان

الدائرتان متحدتان فى المركز م ن = ٠

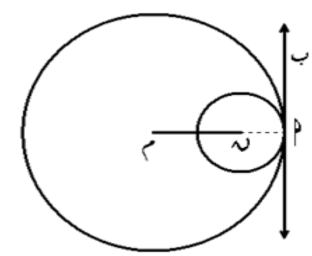
نتيجة ١:

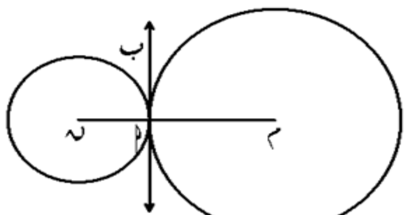
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$





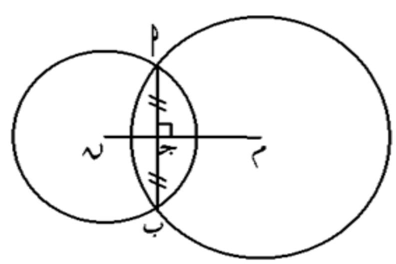
نتيجة ٢:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و ينصفه

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$



ملاحظات هامة

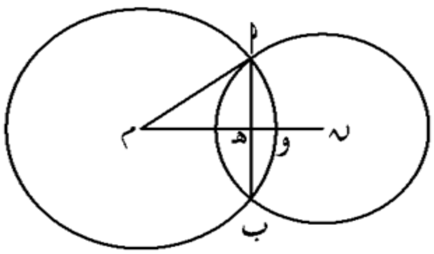
1. خط المركزين لدائرتين متقاطعتين محور تماثل للوتر المشترك
2. الوتر المشترك عمودى على خط المركزين فقط
3. خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك
4. خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التما

[١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٩ ، ب ، $\overline{٩ ب} \cap \overline{م ن} = \{ هـ \}$ ، $\overline{م ن} \cap$ الدائرة م = { و }
، ٩ ب = ٦سم ، م ٩ = ٥سم ، م ن = ٧سم . **أوجد طول** $\overline{٩ هـ}$ ، $\overline{هـ و}$

∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين   ∵ $\overline{٩ ب}$ تر مشترك   ∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{٩ ب}$

∴ هـ منتصف $\overline{٩ ب}$



∴ ٩ هـ = هـ ب = ٣سم   ∴ ق(∠ ٩ هـ م) = ٩٠°

∴ فى △ ٩ هـ م من فيثاغورث

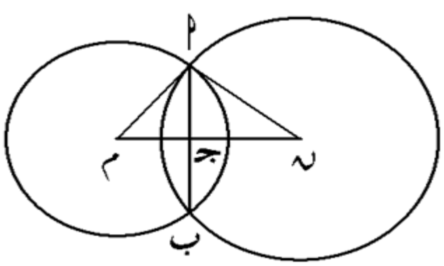
∴ (م هـ)^٢ = (م ٩)^٢ – (٩ هـ)^٢ = ٢٥ – ٩ = ١٦

∴ م هـ = ٤سم ∵ م ٩ = م و = ٥سم = نق الدائرة م

∴ و هـ = ٥ – ٤ = ١ سم

[٢] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ٩ ، ب ، $\overline{٩ ب} \cap \overline{م ن} = \{ جـ \}$ ، فإذا كان : م ٩ = ٦سم
، ن ٩ = ٨سم ، م ن = ١٠سم فأوجد : طول $\overline{٩ ب}$



فى △ ٩ م ن ∵ (م ن)^٢ = ١٠٠ .... ❶

∵ (م ٩)^٢ + (ن م)^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ .... ❷

∴ (م ن)^٢ = (م ٩)^٢ + (ن م)^٢

∴ ق(∠ م ٩ ن) = ٩٠° عكس نظرية فيثاغورث

∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ، $\overline{٩ ب}$ وتر مشترك ∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{٩ ب}$

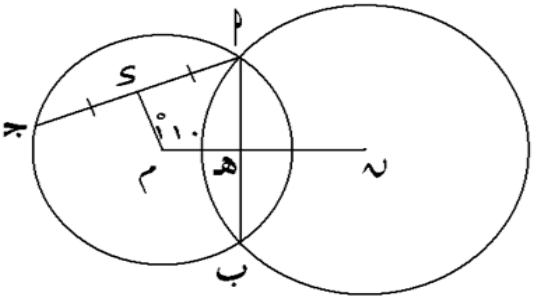
∴ من أقليدس ٩ جـ = $\frac{٩ م \times ٩ ن}{م ن} = \frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ، $\overline{٩ ب}$ وتر مشترك ∴ جـ منتصف $\overline{٩ ب}$

∴ ٩ جـ = ب جـ = ٤,٨ سم ∴ ٩ ب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

[٣] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ﺃ ، ب . فإذا كان $\overline{ﺃب} \cap \overline{م ن}$ = { هـ } ، $\overline{ﺃجـ}$ وتر فى الدائرة م ، ء منتصف ﺃ جـ ، ق(∠ م) = ١١٠° **أوجد :** ق(∠ ب ﺃ جـ)



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{ﺃ ب}$ تر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{ﺃ ب}$

∴ ق(∠ ﺃ هـ م) = ٩٠°

∵ فى الدائرة م ∵ ء منتصف $\overline{ﺃ جـ}$

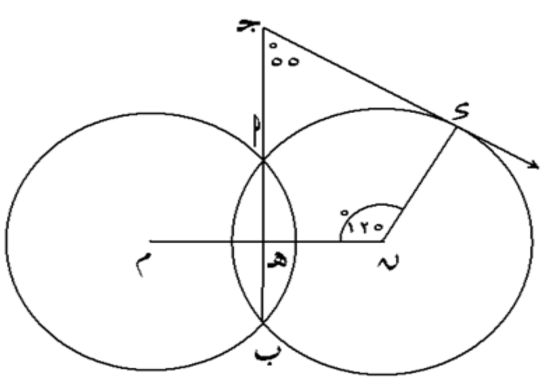
∴ $\overline{م ء} \perp \overline{ﺃ جـ}$

∴ ق(∠ ﺃ ء م) = ٩٠°

∴ ق(∠ ﺃ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ١١٠°) = ٣٦٠° – ٢٩٠° = ٧٠°

[٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ﺃ ، ب . وكانت جـ ∈ $\overrightarrow{ب ﺃ}$ ، ء ∈ الدائرة ن ، ق(م ن ء) = ١٢٥° ، ق(∠ ب جـ ء) = ٥٥° **اثبت أن :** المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة ن عند ء



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{ﺃ ب}$ تر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{ﺃ ب}$

∴ ق(∠ ﺃ هـ ن) = ٩٠°

∵ ق(∠ ء) = ٣٦٠° – (٩٠° + ١٢٥° + ٥٥°)

= ٣٦٠° – ٢٧٠° = ٩٠°

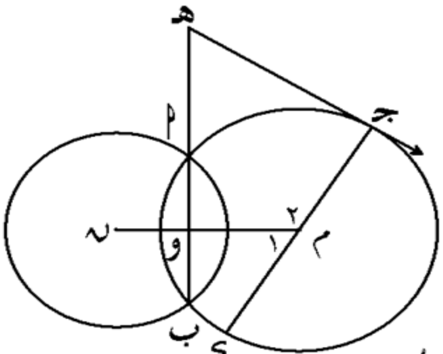
∴ $\overline{ن ء} \perp \overleftarrow{جـ ء}$

∴ $\overleftarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة ن

[٥] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب حيث جـ ء قطر فى الدائرة م ،

اثبت أن : ق(∠ء م ن) = ق(∠جـ هـ ب)



∵ هـ جـ مماس للدائرة م ∴ جـ ء ⊥ هـ جـ

∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∵ م ن خط مركزين ∵ أ ب تر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠هـ و م) = ٩٠°

∴ ∠هـ و م تكمل ∠جـ

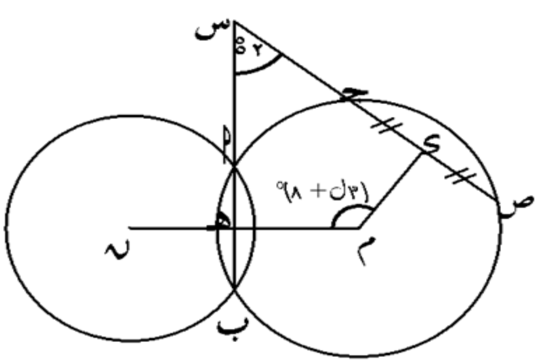
∴ (∠٢) تكمل (∠هـ) ∵ (∠١) تكمل (∠٢)

∴ ق(∠١) = ق(∠هـ) ∴ ق(∠ء م ن) = ق(∠جـ هـ ب)

[٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . ء منتصف ص جـ ، ق(س) = ٥٢°

، ق(∠ء م هـ) = (٣ل + ٨)° **احسب** قيمة ل



∵ م ن خط مركزين ∵ أ ب تر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠°

∵ ء منتصف جـ ص ∴ م ء ⊥ جـ ص

∴ ق(∠م ء جـ) = ٩٠°

∵ ∠م ء س تكمل ∠س هـ م

∵ الشكل س ء م هـ شكل رباعى

∴ ق(∠س) + ق(∠م) = ١٨٠° ∴ ٣ل + ٨ + ٥٢ = ١٨٠

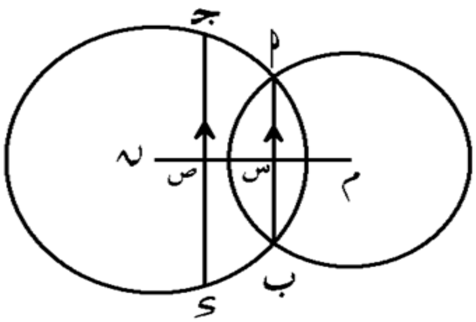
∴ ٣ل + ٦٠ = ١٨٠° ∴ ٣ل = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∴ ل = $\frac{١٢٠}{٣}$ = ٤٠°

(ل) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{أ ب}} = \{\text{س}\}$ ، $\overline{\text{جـ د}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

، $\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{جـ د}} = \{\text{ص}\}$ **اثبت أن :** ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠ أ س م) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ د}}$

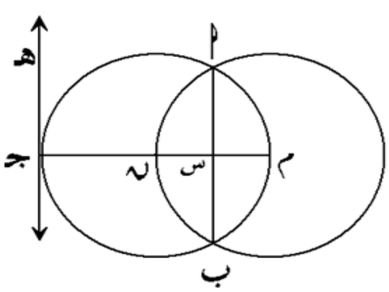
∴ ق (∠ م ص جـ) = ق (∠ أ س م) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$ ∴ ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$

(م) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متقاطعتان فى أ ، ب ، م ∈ الدائرة ن ، ن ∈ الدائرة م ،

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ مماس للدائرة ن عند جـ **اثبت أن :** $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠ أ س م) = ٩٠°

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ مماس للدائرة ن عند جـ

∴ $\overline{\text{ن جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

∴ ق (∠ جـ) = ٩٠°

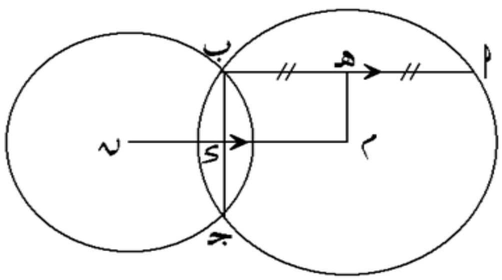
∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ أ س م) = ٩٠° وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

[٩] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ب ، $\overline{مـ ن} \cap \overline{أ ب} = \{ س \}$

$\overline{أ ب} \parallel \overline{ب جـ} = \{ ء \}$ ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ **اثبت أن :** هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{جـ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{جـ ب}$ ∴ ق(∠ ب ء م) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$

∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{أ ب} \parallel \overline{م ن}$ ، م هـ قاطع لهما ∴ ق(∠ أ هـ م) = ق(∠ م) = ٩٠° بالتبادل

∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

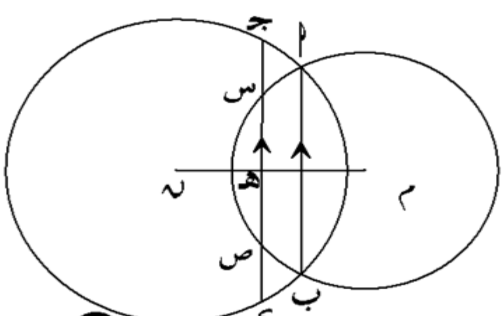
∴ هـ م ء ب مستطيل ∴ القطران متساويان

∴ ء هـ = م ب = نق ∵ هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .

[١٠] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن ، المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء} \parallel \overline{أ ب}$

ويقطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء **اثبت أن :** جـ س = ء ص



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

∵ $\overleftrightarrow{جـ ء} \parallel \overline{أ ب}$ ∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$

∵ فى الدائرة م

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{س ص}$ ∴ هـ منتصف $\overline{س ص}$ ∴ هـ س = هـ ص .... ❶

∵ فى الدائرة ن

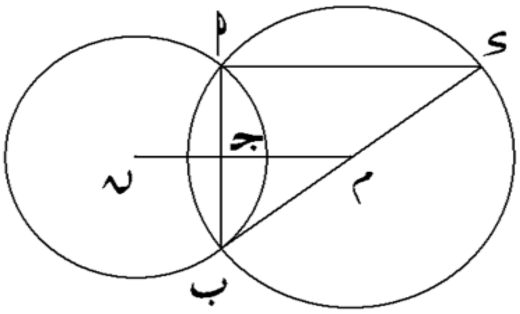
∵ $\overline{ن هـ} \perp \overline{جـ ء}$ ∴ هـ منتصف $\overline{جـ ء}$ ∴ هـ جـ = هـ ء .... ❷

من ❶ ، ❷ ∴ هـ جـ − هـ س = هـ ء − هـ س

∴ جـ س = ء ص

(١١) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{من}} = \{\text{جـ}\}$ ، $\overline{\text{بء}}$ قطر فى الدائرة م
، ب جـ = ٤سم ، م ء = ٥سم **احسب** طول $\overline{\text{أء}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ خط مركزين   ∵ $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{من}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∴ ق(∠ م جـ ب) = ٩٠°

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ أ جـ = ب جـ = ٤سم

∴ أ ب = ٨سم   ∵ م ء = ٥سم

∴ ء ب = ١٠سم

∵ م منتصف $\overline{\text{بء}}$ ∵ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{مجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$

∴ ق(∠ م جـ ب) = ق(∠ أ) = ٩٠° بالتناظر

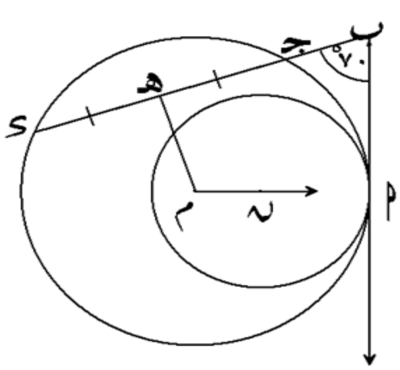
فى △ أ ء ب

∴ (أ ء)² = (ء ب)² − (أ ب)² = (١٠)² − (٨)² = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

∴ أ ء = ٦سم

(١٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـء}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ مماس مشترك عند أ
، ق(∠ب) = ٧٠° احسب : ق(∠ هـ م ن)



فى الدائرة م :   ∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـء}}$

∴ $\overline{\text{مهـ}} \perp \overline{\text{جـء}}$

∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°

∵ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل   ∴ $\overrightarrow{\text{من}} \perp \overrightarrow{\text{بأ}}$

∴ ق(∠ ب أ م) = ٩٠°

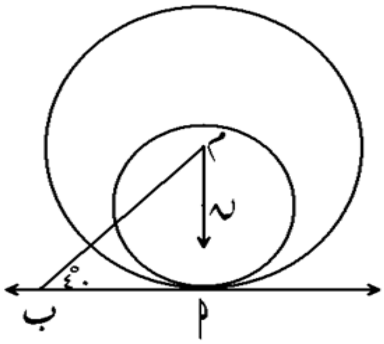
∴ ق(∠ م) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°) = ١١٠°

[١٣] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك عند أ

، إذا كان ق(∠ب) = ٤٠° **احسب :** ق(∠ن م ب)

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك عند أ



∵ $\overleftarrow{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠م) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

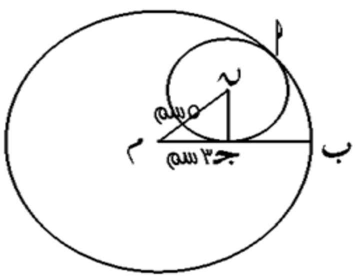
= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

[١٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، رسم $\overline{م ب}$ مماس للدائرة ن عند جـ ، م جـ = ٣سم

، م ن = ٥سم **احسب :** طول $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{ب م}$ مماس للدائرة ن



∴ $\overline{م جـ}$ ⊥ $\overline{ب م}$ ∴ ق(∠ن جـ م) = ٩٠°

فى △ ن جـ م :

(م جـ)² = (م ن)² − (م جـ)² = ٢٥ − ٩ = ١٦

ن جـ = نق الصغرى = ٤سم

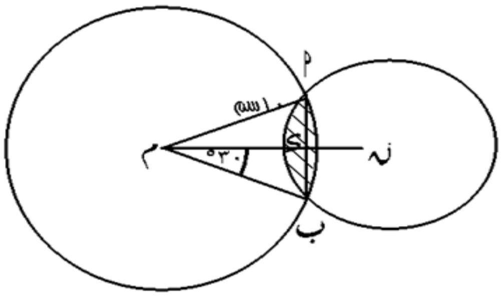
∵ الدائرتان متماستان من الداخل ∴ نق الكبرى − نق الصغرى = م ن

∴ نق الكبرى = م ن + نق الصغرى = ٥ + ٤ = ٩سم

∵ م جـ = نق الكبرى = ٩سم ∴ ب جـ = ٩ − ٣ = ٦سم

[١٥] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . م أ = ١٠ سم ، ق(∠ ب م ء) = ٣٠° **احسب طول** $\overline{أب}$



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين ∵ $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

∴ ء منتصف $\overline{أ ب}$

∵ فى △ م ء ب القائم فى ء

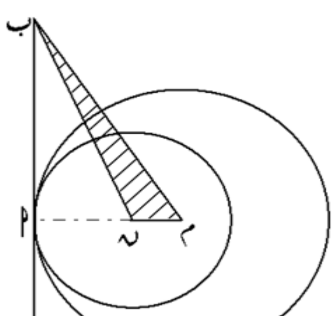
∵ ق(∠ ء م ب) = ٣٠° ∴ △ ء م ب ثلاثينى ستينى

∴ ء ب = $\frac{١}{٢}$ م ب ∵ م ب = م أ = ١٠ سم ∴ ب ء = ٥سم

∴ أ ب = ٢ × ٥ = ١٠ سم

[١٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم على الترتيب ومتماستان من الداخل ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك لهما عند أ ، إذا كانت مساحة △ ب م ن = ٢٤ سم² **أوجد :** طول $\overline{أ ب}$



∵ الدائرتان متماستان من الداخل

∴ م ن = نق الكبرى – نق الصغرى = ١٠ – ٦ = ٤ سم

∴ م ن = ٤ سم

∵ $\overline{أ ب}$ مماس مشترك ∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

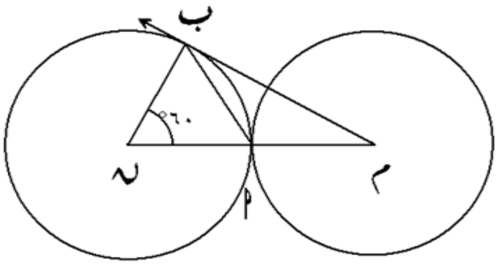
∴ $\overline{أ ب}$ هو ارتفاع △ م ن ب

∴ م △ = $\frac{١}{٢}$ ق × ع = ٢٤ ∴ $\frac{١}{٢}$ × م ن × أ ب = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ × أ ب = ٢٤ ∴ ٢ أ ب = ٢٤ ∴ أ ب = ١٢ سم

[١٧] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متطابقتان ومتماستان من الخارج فى أ ، رسم فى الدائرة ن نصف القطر ن ب ، بحيث ق(∠ أ ن ب) = ٦٠° **أثبت أن :** م ب تمس الدائرة ن عند ب



∵ ن ب = ن أ = نق ∴ △ ن أ ب متساوى الساقين

∵ ق(∠ ن) = ٦٠° ∴ △ ن أ ب متساوى الأضلاع

∴ أ ب = نق ∵ الدائرتان م ، ن متطابقتان

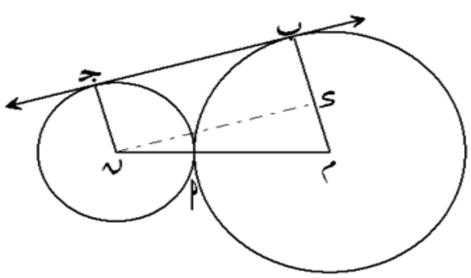
∴ م أ = ن أ = نق

∴ أ ب = ن أ = ن أ ∴ أ منتصف م ن ، أ ب متوسط فى △ م ب ن

∵ أ ب = $\frac{١}{٢}$ م ن ∴ ق(∠ م ب ن) = ٩٠°

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ، ب جـ مماس مشترك لهما فإذا كان طولا نصفى قطريهما ١٨سم ، ٨سم على الترتيب أوجد مساحة سطح الشكل م ب جـ ن



العمل نرسم ن د ⊥ ب م

∵ ب جـ مماس مشترك للدائرتين م ، ن

∴ م ب ⊥ ب جـ ، ن جـ ⊥ ب جـ

∴ ن جـ // د ب

∵ ن د ⊥ ب م ∴ الشكل ب د ن جـ مستطيل ∴ ن جـ = ب د = ٨سم

∴ م د = ١٨ − ٨ = ١٠سم ∵ ن أ + م أ = ٨ + ١٨ = ٢٦سم

فى △ ن د م القائم فى د

∴ (د ن)² = (م ن)² − (م د)² = (٢٦)² − (١٠)² = ٥٧٦ − ١٠٠ = ٤٧٦

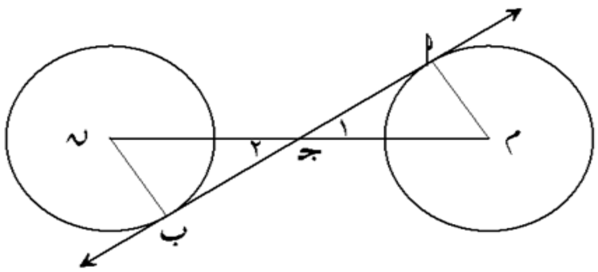
∴ د ن = √٤٧٦ = ٢٤ سم ∵ ب جـ = د ن من خواص المستطيل

∴ ب جـ = ٢٤سم

[١٩] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتان م ، ن عند أ ، ب

برهن أن : جـ منتصف كلا من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$



∵ م ، ن دائرتان متطابقتان ∴ م أ = ن ب = نق

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ أ) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∴ ق(∠ م) = ق(∠ ن)

∵ فى △△ جـ م أ ، جـ ن ب

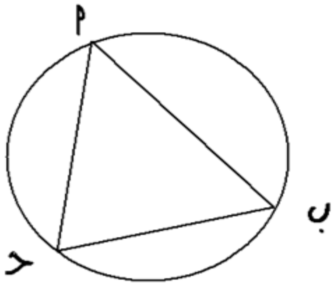
① ق(∠ م) = ق(∠ ن)

② ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

③ م أ = ن ب = نق

∴ △△ ≡ وينتج أن : أ جـ = ب جـ ، م جـ = ن جـ

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ جـ منتصف $\overline{\text{م ن}}$



الدائرة الخارجة للمثلث

الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع (تلاقى) محاور تماثل أضلاعه أو الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث

١ مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث .

٢ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

٣ مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية تقع فى منتصف وتره .

٤ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة و هى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته

نظرية

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها

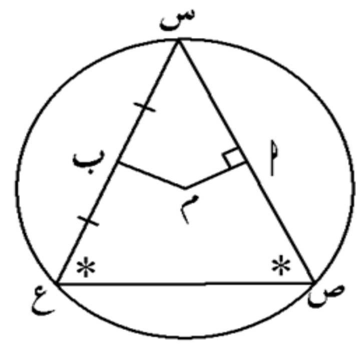
نتيجة : الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية

فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول

[١] فى الشكل المقابل

△ س ص ع مرسوم داخل دائرة م فيه ق(∠ص) = ق(∠ع)
، ﻫ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{س ع}}$ أثبت أن : م ﻫ = م ب



فى △ س ص ع

∵ ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

∴ △ س ص ع متساوى الساقين

∴ س ص = س ع

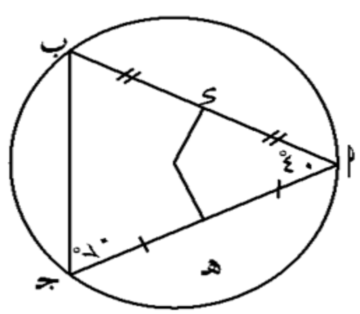
∵ م ب منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ∴ $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{س ع}}$

∵ $\overline{\text{م ﻫ}} \perp \overline{\text{س ص}}$

∵ س ص = س ع ∴ م ﻫ = م ب

[٢] فى الشكل المقابل

ق(∠ﻫ) = ٤٠° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° ، ء منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ، ﻫ منتصف $\overline{\text{ﻫ جـ}}$
احسب ق (∠ ء م ﻫ) برهن أن : م ء = م ﻫ .



فى △ ﻫ ب جـ :

∵ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٠°) = ٧٠°

∴ ق(∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٧٠°

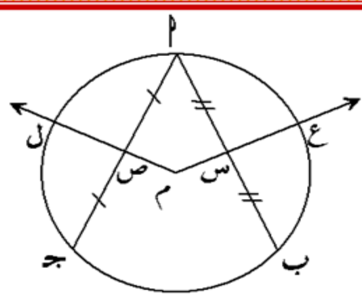
∴ △ ﻫ ب جـ متساوى الساقين

∴ ﻫ ب = ﻫ جـ

∵ ء منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$

[٣] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،حيث س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب . رسم م س ، م ص يقطعان الدائرة فى ع ، ل على الترتيب اثبت أن س ع = ص ل



∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

∴ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ

∴ م ص = م س

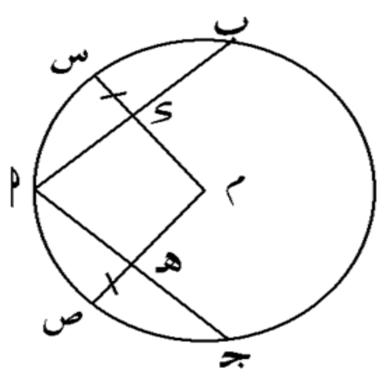
∵ م ع = م ل = نق

∴ م ع − م س = م ل − م ص

∴ ع س = ل ص

[٤] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م ، حيث ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ، على الترتيب ، م هـ ، م ء يقطعان الدائرة فى ص ، س على الترتيب بحيث ء س = هـ ص ، اثبت أن أ ب = أ جـ



∵ م س = م ص = نق ، ∵ ء س = هـ جـ

∴ م س − ء س = م ص − هـ ص

∴ م ء = م هـ ، ∵ ء منتصف أ ب

∵ هـ منتصف أ جـ

∴ م ء ⊥ أ ب ، ∴ م هـ ⊥ أ جـ

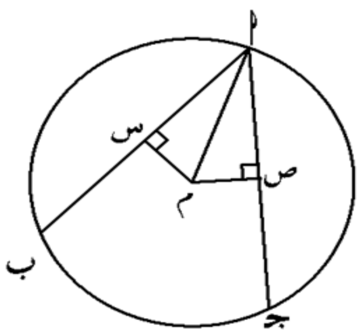
∵ م ء = م هـ

∴ أ ب = أ جـ

[٥] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

اثبت أن : ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)



∵ م ص ⊥ أ جـ ∵ م س ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ ∴ م س = م ص

∵ فى △△ أ م س ، أ م ص فيهما

(١) م ص = م س

(٢) ق(∠ م ص أ) = ق(∠ م س أ) = ٩٠°

(٣) أ م ضلع مشترك

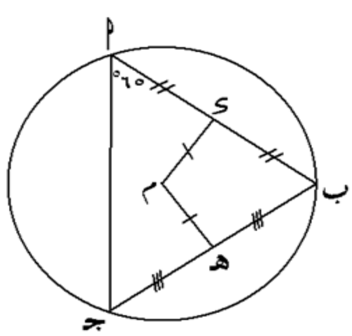
∴ △△ ≡ وينتج أن :

∴ ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)

[٦] فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ أ) = ٦٥° ، ء ، هـ منتصفا أ ب ، ب جـ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : ق(∠ ب)



∵ ∠ ء منتصف أ ب ∵ هـ منتصف ب جـ

∴ م ء ⊥ أ ب ∵ م هـ ⊥ ب جـ

∵ م ء = م هـ

∴ أ ب = ب جـ

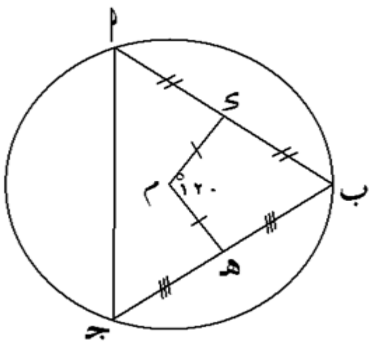
∴ أ ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) = ٦٥°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

[٧] في الشكل المقابل

△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠م) = ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا أ ب ، ب جـ على الترتيب
م ء = م هـ اثبت أن : △ أ ب جـ متساوى الأضلاع



∵ ء منتصف أ ب

∵ هـ منتصف ب جـ

∴ م ء ⊥ أ ب ∴ م هـ ⊥ ب جـ

∴ ق(∠ب ء م) = ق(∠ب هـ م) = ٩٠°

∴ ق(∠ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ م ء ⊥ أ ب ∵ م هـ ⊥ ب جـ

∵ م ء = م هـ ∴ أ ب = ب جـ

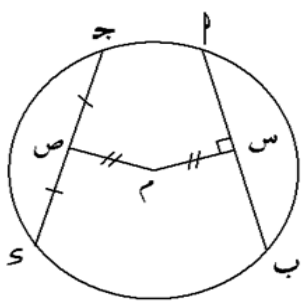
∴ △ أ ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) = ٦٠°

∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

[٨] في الشكل المقابل

م دائرة ، م س ⊥ أ ب ، ص منتصف جـ ء ، م س = م ص ، أ ب = ٧سم احسب طول ء ص



∵ ص منتصف جـ ء

∴ م ص ⊥ جـ ء

∵ م س ⊥ أ ب

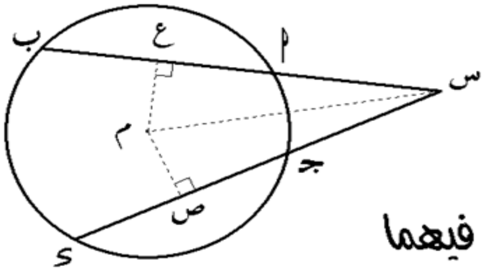
∵ م س = م ص ∴ أ ب = جـ ء = ٧سم

∵ ء ص = $\frac{١}{٢}$ جـ ء = ٣٫٥

[٩] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م وغير متقاطعان ، فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب أ}} \cap \overleftrightarrow{\text{د جـ}} = \{\text{س}\}$

اثبت أن : س أ = س جـ



العمل نرسم $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

∵ $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

∵ أب = جـ د

∴ م ص = م ع

∵ فى △△ س م ص ، س م ع فيهما

(١) $\overline{\text{م س}}$ ضلع مشترك

(٢) م ص = م ع

(٣) ق(∠ س ع م) = ق(∠ س ص م) = 90°

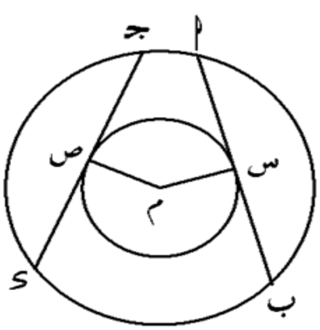
∴ △△ ≡ وينتج أن : س ع = س ص

∵ أب = جـ د ∴ $\frac{1}{2}$ أب = $\frac{1}{2}$ جـ د ∴ جـ ص = أ ع

∴ س ع − أ ع = س ص − جـ ص ∴ س أ = س جـ

[١٠] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران فى الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب . اثبت أن : أب = جـ د



∵ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ مماسان للدائرة الصغرى

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

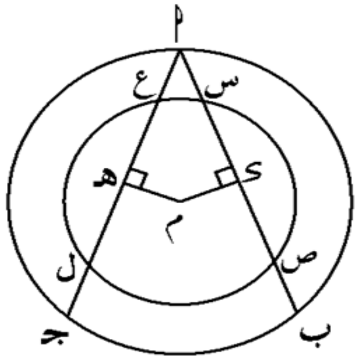
∵ م س = م ص = نق الصغرى

∴ فى الدائرة الكبرى ∵ ∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أب}}$

∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$ ∵ م س = م ص = نق ∴ أب = جـ د

[11] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، م ب = م جـ ، م ء ⊥ م ب ، م هـ ⊥ م جـ أثبت أن : س ص = ع ل



∵ فى الدائرة الكبرى

∵ م ء ⊥ م ب ، م هـ ⊥ م جـ ∵ م ب = م جـ

∴ م ء = م هـ

∵ فى الدائرة الصغرى

∵ م ء ⊥ س ص ، ∵ م هـ ⊥ ع ل

∵ م ء = م هـ

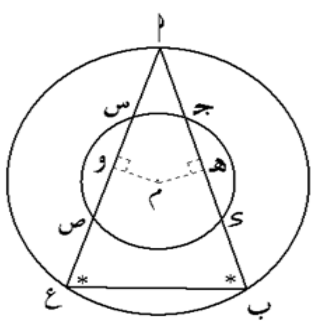
∴ س ص = ع ل

[12] فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز م، م ب وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء على الترتيب

م ع وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب

فإذا كان : ق(∠ م ب ع) = ق(∠ م ع ب) أثبت أن : جـ ء = س ص



فى △ م ب جـ :

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ ع)

∴ △ م ب ع متساوى الساقين

∴ م ب = م ع

∵ م هـ ⊥ م ب ، م و ⊥ م ع

∴ م هـ = م و

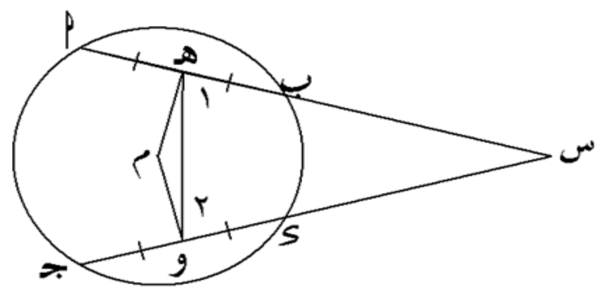
∵ فى الدائرة الصغرى :

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∵ م و ⊥ س ص

∵ م هـ = م و ∴ جـ ء = س ص

(١٣) فى الشكل المقابل

م دائرة ، أ ب = أ جـ ، هـ ، و منتصفا أ ب ، جـ ء . اثبت أن : △ س هـ و متساوي الساقين



∵ هـ منتصف أ ب ∵ و منتصف ء جـ

∴ م هـ ⊥ أ ب ∴ م و ⊥ ء جـ

∵ أ ب = جـ ء ∴ م و = م هـ

∴ △ م ء هـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ م و هـ) = ق(∠ م هـ و)

∵ ∠ م و هـ تتمم ∠ ٢

، ∠ م هـ و تتمم ∠ ١

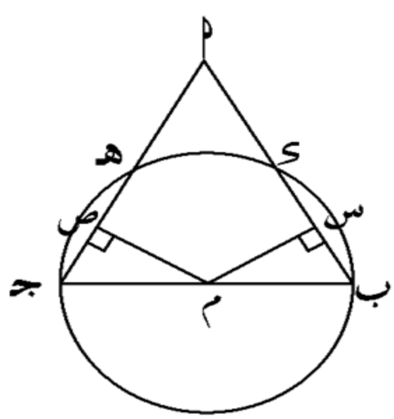
∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∴ س هـ = س و

∴ △ س هـ و متساوي الساقين

(١٤) فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ فيه ب جـ قطر فى دائرة م ، أ ب = أ جـ ، رسم م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

اثبت أن : ب ء = جـ هـ



∵ △△ م س ب ، م ص جـ فيهما :

(١) م ب = م جـ = نق

(٢) ق(∠ م س ب) = ق(∠ م ص جـ) = ٩٠°

(٣) ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) لأن : أ ب = أ جـ

∴ △ م س ب ≡ △ م ص جـ وينتج أن :

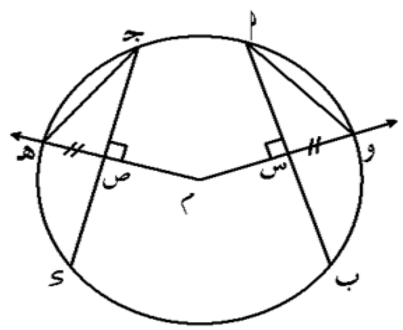
م س = م ص

∵ م س ⊥ ب ء ، م ص ⊥ جـ هـ

∴ ب ء = جـ هـ

[١٥] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى دائرة م ، م س ⊥ أ ب ويقطع الدائرة فى و ، م ص ⊥ جـ ء ويقطع الدائرة فى هـ ، وس = هـ ص أثبت أن : (١) أ ب = جـ ء (٢) أ و = جـ هـ



∵ و س = هـ م = نق ∵ و س = هـ ص

∴ م س = م ص

∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

∴ أ ب = جـ ء

∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء ∴ $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ جـ ء ∴ أ س = جـ ص

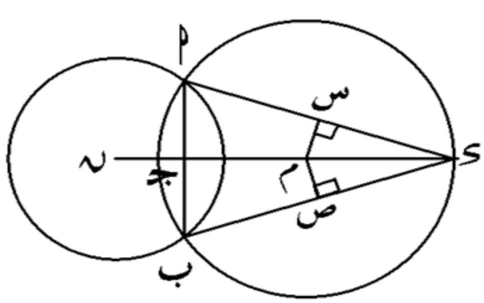
فى △△ أ س و ، جـ ص هـ :

(١) أ س = جـ ص (٢) س و = ص هـ (٣) ق(∠ أ س و) = ق(جـ ص هـ) = ٩٠°

△△ وينتج أن : أ و = جـ هـ

[١٦] فى الشكل المقابل

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، أ ب ∩ م ن = { جـ } ، ء ∈ المستقيم م ن ، م س ⊥ أ ء ، م ص ⊥ ب ء أثبت أن : م س = م ص



∵ م ن خط مركزين ، أ ب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ، جـ منتصف أ ب

∴ م ن محور تماثل أ ب

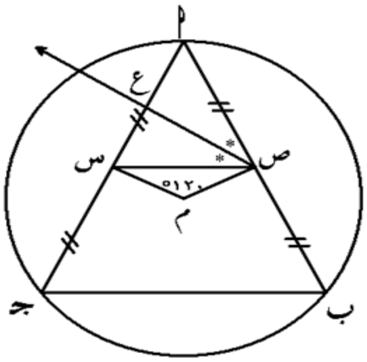
∴ ء أ = ء ب ∵ م س ⊥ أ ء

∵ م ص ⊥ ء ب

∵ ء أ = ء ب ∴ م س = م ص

[١٧] فى الشكل المقابل

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، س ، ص منتصفا هما على الترتيب ، ق ($\angle$ س م ص) = ١٢٠° ، $\overleftarrow{ص ع}$ ينصف ($\angle$ أ ص س) اثبت أن : $\overleftarrow{ص ع}$ // $\overline{م س}$



∵ ص منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

∵ أ ب = أ جـ ∴ م س = م ص

∴ ق ($\angle$ م ص س) = ق ($\angle$ م س ص)

$$= \frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$$

∴ ق ($\angle$ ع ص س) = ق (أ ص ع) $= \frac{٩٠° - ٣٠}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$

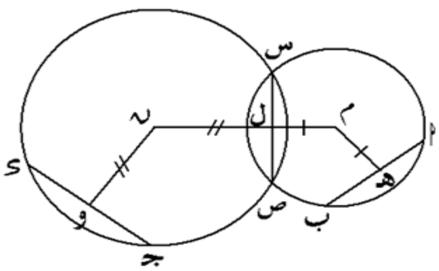
∴ ق ($\angle$ ع ص س) = ق ($\angle$ م س ص) = ٣٠° وهما فى وضع تبادل

∴ $\overleftarrow{ص ع}$ // $\overline{م س}$

[١٨] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى س ، ص ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{ن و} \perp \overline{د جـ}$

، م هـ = م ل ، ن و = ن ل اثبت أن أ ب = جـ د



∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط مركزين $\overline{أ ب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{س ص}$ ∴ $\overline{م ل} \perp \overline{س ص}$

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$

∵ م هـ = م ل ∴ أ ب = س ص .... (١)

بالمثل ∵ $\overline{ن ل} \perp \overline{س ص}$ ∵ $\overline{ن و} \perp \overline{د جـ}$ ∵ ن ل = ن و

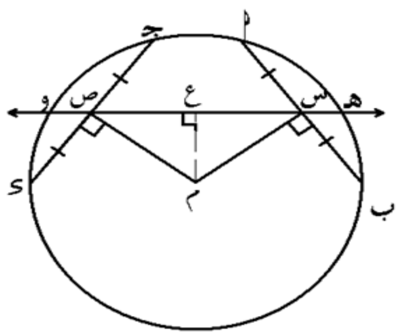
∴ س ص = جـ د .... (٢) من (١) ، (٢)

∴ أ ب = جـ د

[١٩] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ على الترتيب . رسم المستقيم س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و ، رسم ل $\overline{م}$ ⊥ المستقيم $\overleftrightarrow{س ص}$

اثبت أن : س هـ = ص و



نرسم $\overline{م س}$ ، $\overline{م ص}$

ونرسم $\overline{م ع}$ ⊥ $\overleftrightarrow{س ص}$ فيقطعه فى ع

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$

∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∵ أ ب = جـ ء ∴ م س = م ص

∴ △ م س ص فيه :

م س = م ص ، $\overline{م ع}$ ⊥ $\overline{س ص}$

∴ س ع = ص ع .... (١)

∵ $\overline{م ع}$ ⊥ $\overline{و هـ}$

∴ ع هـ = ع و .... (٢)

بالطرح ∴ ع هـ − س ع = ع و − ص ع

∴ س هـ = ص و

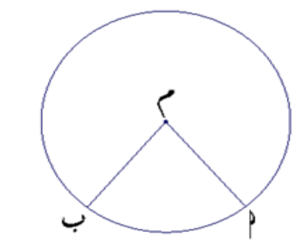
الزوايا والأقواس

القوس

هو جزء من الدائرة محدد بنقطتى البادية والنهاية ينتميان للدائرة

ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

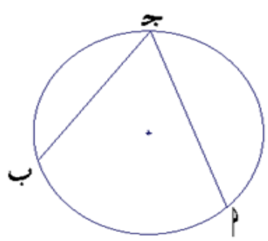
الزاوية المركزية



هى زاوية تقع رأسها فى مركز الدائرة وكل من ضلعيها نصفى قطر للدائرة

(∠ أ م ب) زاوية مركزية

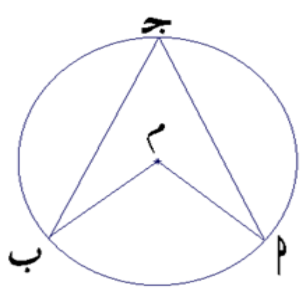
الزاوية المحيطية



هى زاوية تقع رأسها على الدائرة وكل من ضلعيها وترين للدائرة

(∠ أ جـ ب)زاوية محيطية

العلاقة بين الزوايا والأقواس



قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التى تحصره (المقابلة له)

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق (∠ أ م ب) المركزية

قياس القوس = ٢ قياس الزاوية المحيطية التى تحصره (المقابلة له)

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٢ ق (∠ أ جـ ب) المحيطية

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المقابل لها

ق (∠ أ جـ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

قياس الدائرة = ٣٦٠ °

قياس أي جزء من الدائرة = الجزء × ٣٦٠ °

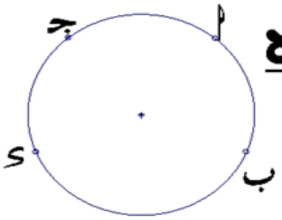
❶ قياس $\frac{١}{٢}$ دائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠ = ١٨٠°

❷ قياس $\frac{١}{٣}$ دائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠ = ١٢٠°

❸ قياس $\frac{١}{٤}$ دائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠ = ٩٠°

نتائج هامة على الزوايا والأقواس

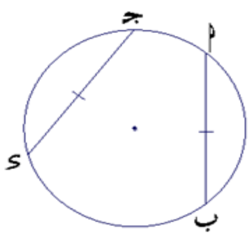
فى الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة)



❶ الأقواس المتساوية فى القياس **تكون متساوية فى الطول والعكس صحيح**

ق (⌒أب) = ق (⌒جـ ى)

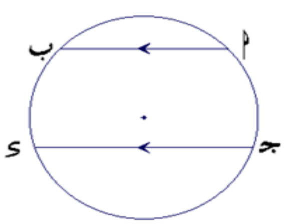
طول (⌒أب) = طول (⌒جـ ى)



❷ الوتران المتساويان يحصران قوسان **متساويان فى القياس**

أب = جـ ى

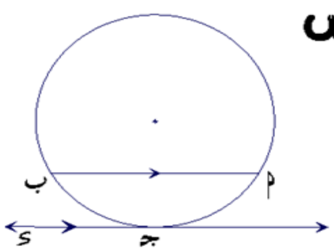
ق (⌒أب) = ق (⌒جـ ى)



❸ الوتران المتوازيان يحصران بينهما قوسان **متساويان فى القياس**

$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$

ق (⌒أجـ) = ق (⌒ب ى)

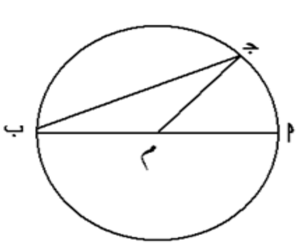


❹ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازية يكونان **متساويان فى القياس**

$\overline{\text{أب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$

ق (⌒أجـ) = ق (⌒ب جـ)

نظرية



❶ قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

❷ قياس الزاوية المركزية = ٢ قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس

❸ ق (∠ أ ب جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ أ م ب) المركزية لأنهما يحصران القوس (أ⌒جـ)

❹ ق (∠ أ م ب) المركزية = ٢ ق (∠ أ ب جـ) المحيطية لأنهما يحصران القوس (أ⌒جـ)

❺ قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

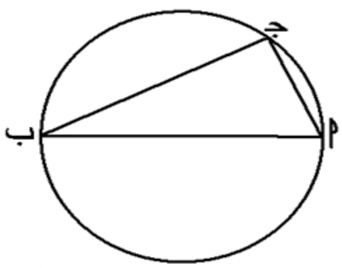
❻ قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

❼ الزاوية المحيطية المقامة فى نصف دائرة قائمة (قياسها = ٩٠°)

❽ النسبة بين قياس المحيطية وقياس المركزية المشتركة معها فى القوس = ١ : ٢

❾ النسبة بين قياس المركزية وقياس المحيطية المشتركة معها فى القوس = ٢ : ١

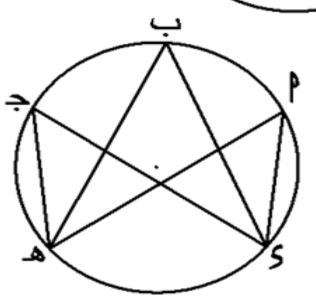
نتيجة



الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°

نظرية



فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

❶ الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس متساوية فى القياس

❷ الزوايا المحيطية التى تحصر أقواس متساوية فى القياس (الطول) تكون متساوية فى القياس

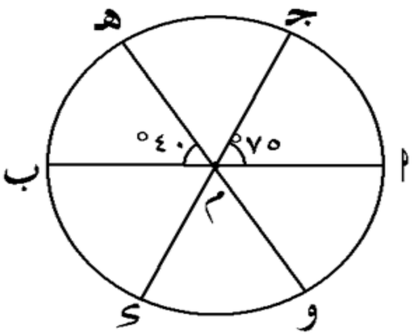
❸ الزوايا المحيطية التى تقابل أقواس متساوية فى القياس (الطول) تكون متساوية فى القياس

ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) لأنهما يحصران (د⌒هـ)

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ أقطار فى الدائرة م أوجد

❶ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) ❷ ق($\overset{\frown}{أ جـ هـ}$) ❸ ق($\overset{\frown}{أ جـ ء}$) ❹ ق($\overset{\frown}{أ و هـ}$)



ق(∠ ء م ب) = ق(∠ أ م جـ) = ٧٥°

∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٧٥°

ق(أ م و) = ق(∠ هـ م ب) = ٤٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أ و}$) = ق($\overset{\frown}{هـ ب}$) = ٤٠°

ق(∠ جـ م هـ) = ق(∠ و م ء) = ١٨٠ – [٧٥° + ٤٠°] = ١٨٠° – ١١٥° = ٦٥°

∴ ق($\overset{\frown}{جـ هـ}$) = ق($\overset{\frown}{و ء}$) = ٦٥°

ق($\overset{\frown}{أ جـ هـ}$) = ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) + ق($\overset{\frown}{جـ هـ}$) = ٧٥° + ٦٥° = ١٤٠°

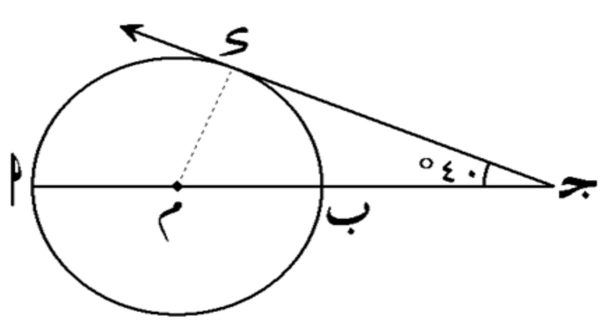
ق($\overset{\frown}{أ جـ ء}$) = ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) + ق($\overset{\frown}{جـ ء}$) = ٧٥° + ١٨٠° = ٢٥٥°

ق($\overset{\frown}{أ و هـ}$) = ق($\overset{\frown}{أ ب}$) + ق($\overset{\frown}{ب هـ}$) = ١٨٠° + ٤٠° = ٢٢٠°

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة م عند ء احسب : ق($\overset{\frown}{أ ء}$) ، طول($\overset{\frown}{أ ء}$)

$\overleftarrow{جـ ء}$ مماس $\overline{م ء}$ ⊥ $\overleftarrow{جـ ء}$



∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠°

ق(∠ ء م جـ) = ١٨٠° – (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

ق($\overset{\frown}{ب ء}$) = ق(∠ ء م جـ) = ٥٠°

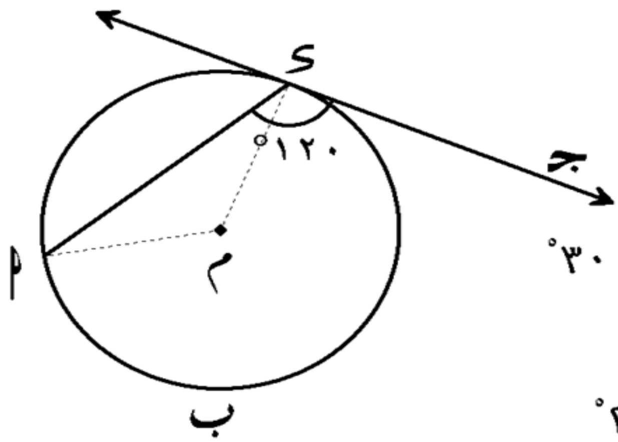
ق($\overset{\frown}{أ ء}$) = ١٨٠° – ٥٠° = ١٣٠°

طول القوس = $\frac{١٣٠}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{١٣}{٣٦}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٥,٨٩ سم

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة م عند ء ، ق(∠ ء جـ) = ١٢٠° احسب ق($\overset{\frown}{أ ب ء}$)

الحل العمل ، نصل $\overline{م ء}$ ، $\overline{م أ}$



$\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس ∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م ء أ) = ١٢٠° – ٩٠° = ٣٠°

م ء = م أ ∴ ق(∠ م أ ء) = ٣٠°

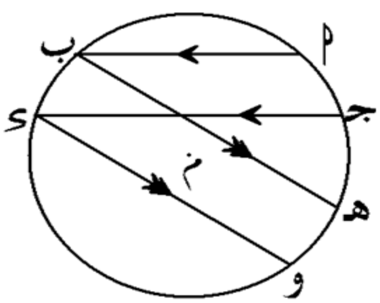
∴ ق(∠ ء م أ) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ م ء) المنعكسة = ٣٦٠° – ١٢٠° = ٢٤٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أ ب ء}$) = ٢٤٠°

(٤) فى الشكل المقابل :

فى الدائرة م : $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ ب}$ // $\overline{و ء}$ برهن أن : ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{هـ و}$)



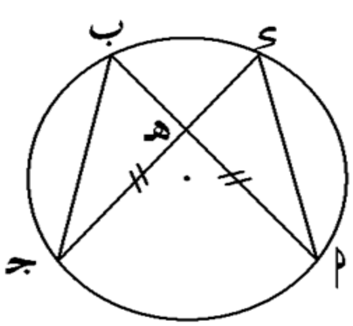
∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب ء}$) .... (١)

∵ $\overline{هـ ب}$ // $\overline{و ء}$ ∴ ق($\overset{\frown}{هـ و}$) = ق($\overset{\frown}{ب ء}$) .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{هـ و}$)

(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الطول ، $\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ } أثبت أن : أ ء = ب جـ



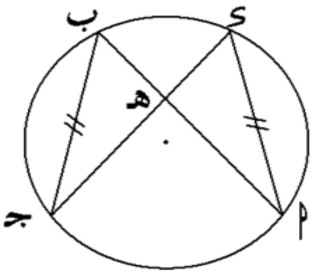
الحل ∵ أ ب = جـ ء ∴ ق($\overset{\frown}{أ ء ب}$) = ق($\overset{\frown}{جـ ب ء}$)

∴ بحذف ق($\overset{\frown}{ب ء}$) للطرفين

∴ ق($\overset{\frown}{أ ء}$) = ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) ∴ أ ء = ب جـ

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ، أ ء = ب جـ أثبت أن : أ ب = جـ ء



الحل

∵ أ ء = ب جـ ∴ ق(أ ء) = ق(ب جـ)

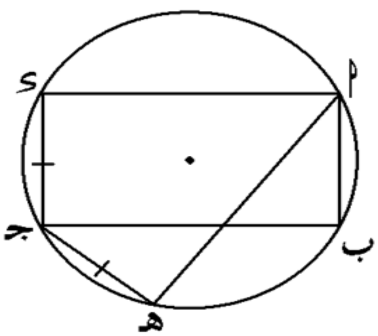
∴ بإضافة ق(ب ء) للطرفين

∴ ق(أ ء ب) = ق(جـ ب ء) ∴ أ ب = جـ ء

(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة رسم الوتر جـ هـ بحيث جـ هـ = جـ ء أثبت أن أ هـ = ب جـ

الحل



∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ أ ب = ء جـ .... (١)

∵ جـ هـ = جـ ء .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ∴ أ ب = جـ هـ

∴ ق(أ ب) = ق(جـ هـ) بإضافة ق(ب هـ) للطرفين

∴ ق(أ ب) + ق(ب هـ) = ق(جـ هـ) + ق(ب هـ)

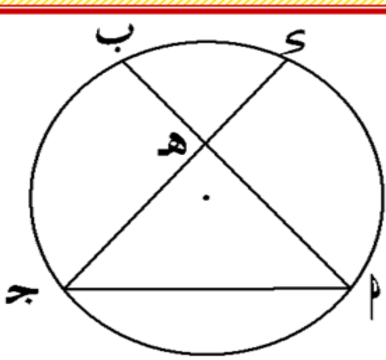
∴ ق(أ ب هـ) = ق(ب هـ جـ) ∴ أ هـ = ب جـ

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ }

أثبت أن : المثلث أ جـ هـ متساوى الساقين

الحل



أ ب = جـ ء ∴ ق(أ ء ب) = ق(جـ ب ء)

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ أ)

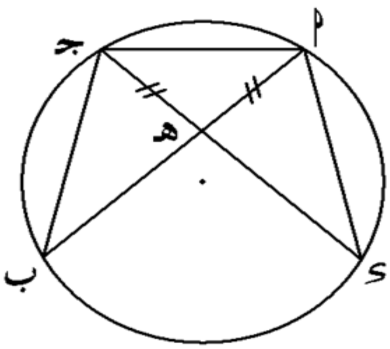
∴ هـ أ = هـ جـ ∴ △ هـ أ جـ متساوى الساقين

(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب ، ء جـ وتران فى دائرة م متقاطعان فى هـ فإذا كان أ هـ = جـ هـ

أثبت أن : ق(أ جـ ب) = ق(جـ أ ء)

الحل



فى ∆ هـ أ جـ   أ هـ = هـ جـ

∴ ق(∠ هـ أ جـ) = ق(∠ هـ جـ أ)

∴ ق(⌒جـ ب) = ق(⌒أ ء)   بأضافة ق(⌒ء ب) للطرفين

ق(⌒جـ ب) + ق(⌒ء ب) = ق(⌒أ ء) + ق(⌒ء ب)

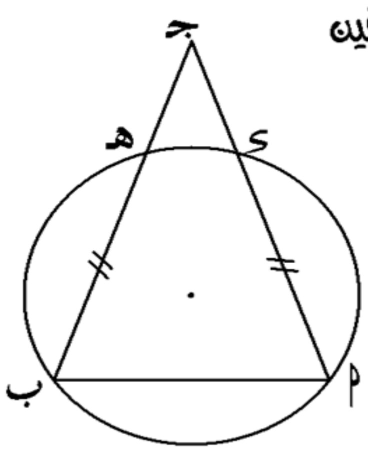
∴ ق(⌒جـ ب ء) = ق(⌒أ ء ب)

∴ ق(أ جـ ب) = ق(جـ أ ء)

(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ء ، ب هـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة   أ ء ∩ ب هـ = { جـ } أثبت أن جـ ء = جـ هـ

الحل



أ ء = هـ ب   ∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒هـ ب)   بإضافة ق(⌒ء هـ) للطرفين

∴ ق(⌒أ ء) + ق(⌒ء هـ) = ق(⌒هـ ب) + ق(⌒ء هـ)

∴ ق(⌒أ هـ) = ق(⌒ء ب)

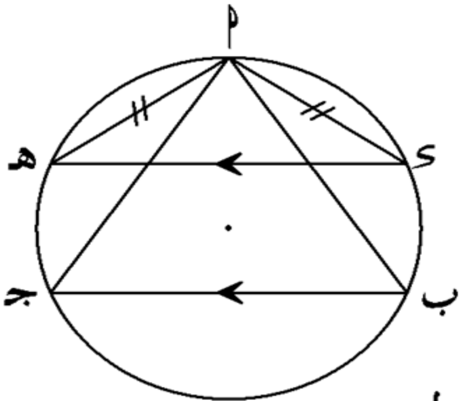
∴ ق(∠ ب) = ق(∠ أ)   ∴ جـ أ = جـ ب

∴ جـ أ − أ ء = جـ ب − هـ ب   جـ ء = جـ هـ

(١١) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ ، ا ء = ا هـ أثبت أن △ ا ب جـ متساوى الساقين

الحـــل



ء هـ // ب جـ

∴ ق(ء ب) = ق(جـ هـ) ....(١)

∵ ا ء = ا هـ

∴ ق(ا ء) = ق(ا هـ) ....(٢)   بجمع (١) ، (٢)

∴ ق(ا ء جـ) = ق(ا هـ جـ)   ∴ ا ب = ا جـ

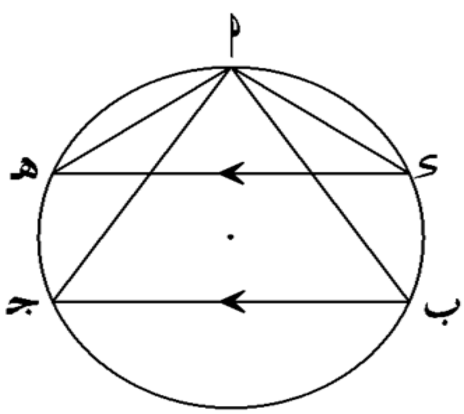
∴ △ ا ب جـ متساوى الساقين

(١٢) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ أثبت أن ق(∠ ء ا جـ) = ق(∠ ب ا هـ)

الحـــل

ء هـ // ب جـ



∴ ق(ء ب) = ق(جـ هـ) . بإضافة ق(ب جـ) للطرفين

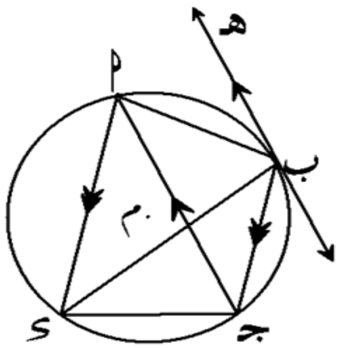
ق(ء ب) + ق(ب جـ) = ق(جـ هـ) + ق(ب جـ)

∴ ق(ء ب جـ) = ق(ب جـ هـ)

∴ ق(∠ ء ا جـ) = ق(∠ ب ا هـ)

(١٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ أثبت أن : Δ ب جـ ء متساوى الساقين .



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) .... (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) .... (٢) من (١) ، (٢)

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

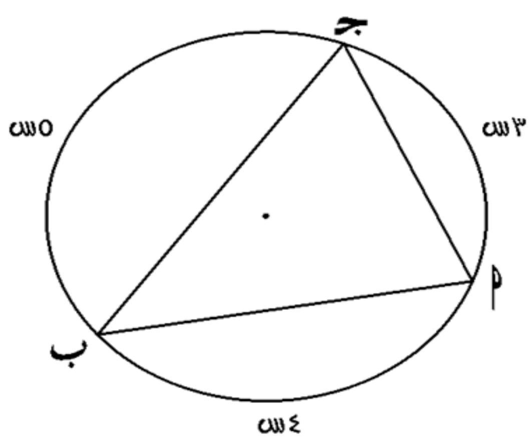
∴ ء جـ = ب جـ   ∴ Δ ب جـ ء متساوى الساقين

(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) : ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) : ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٤ : ٥ : ٣ أوجد ق(∠ أ جـ ب)

∵ ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٣ س ، ∵ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٥س ، ∵ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٤س

قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ٣٦٠°



∴ ٣ س + ٤ س + ٥ س = ٣٦٠°

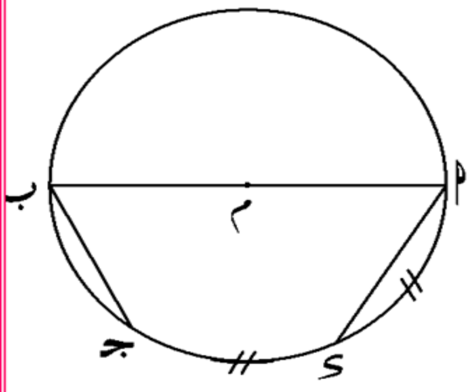
∴ ١٢ س = ٣٦٠°   ∴ س = $\frac{٣٦٠}{١٢}$ = ٣٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٤ × ٣٠ = ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠

(١٥) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(أ ء) = ق(ء جـ) ، ق(∠ أ ب جـ) = ٤٠ أوجد ق(∠ ب أ ء)



الحـــــل

ق(∠ ب) = ٤٠° ∴ ق(أ ء جـ) = ٨٠

ق(أ ء) = ق(ء جـ) ∴ ق(ء جـ) = ٤٠°

أ ب قطر ∴ ق(أ ب) = ١٨٠°

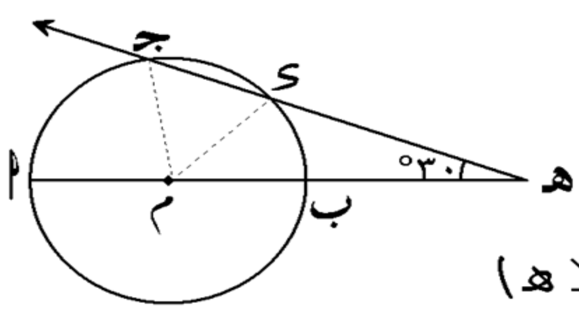
∴ ق(ء جـ ب) = ١٨٠° – ق(أ ء)

ق(ء جـ ب) = ١٨٠° – ٤٠° = ١٤٠°

ق(∠ ب أ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(ء جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠° = ٧٠°

(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ هـ جـ) = ٣٠° ق(أ جـ) = ٨٠° ، أوجد ق(جـ ء)



الحـــــل ∵ ق(أ جـ) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ م جـ) المركزية = ق(أ جـ) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ م جـ) الخارجة = ق(∠ جـ) + ق(∠ هـ)

∴ ق(∠ جـ) = ٨٠ – ٣٠ = ٥٠°

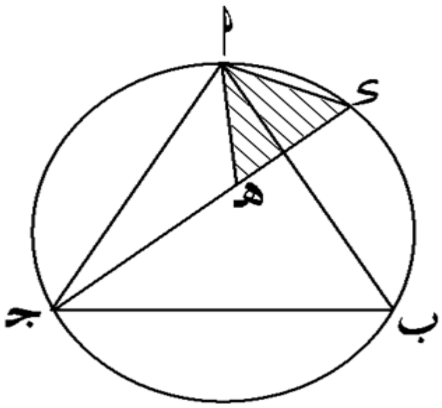
∵ م جـ = م ء = نق ∴ ق(∠ جـ ء) = ق(∠ جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠ جـ م ء) المركزية = ١٨٠ – (٥٠ + ٥٠) = ١٨٠ – ١٠٠ = ٨٠°

∴ ق(جـ ء) = ق(∠ جـ م ء) = ٨٠°

(١٧) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث أ ء = ء هـ أثبت أن : Δ أ ء هـ متساوى الأضلاع



Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ أ ب = ب جـ = أ جـ

∴ ق(⌢أ ب) = ق(⌢ب جـ) = ق(⌢أ جـ) = ٣٦٠ / ٣ = ١٢٠°

ق(∠ أ ء هـ) = ١/٢ ق(⌢أ جـ) = ١/٢ × ١٢٠° = ٦٠°

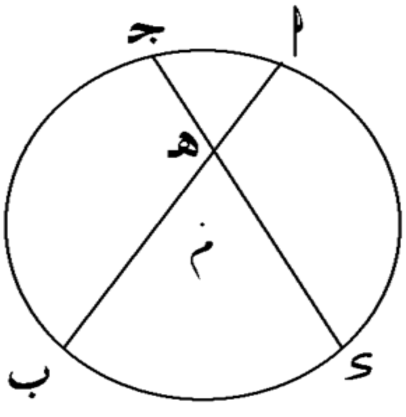
فى Δ أ ء هـ   أ ء = ء هـ

∴ ق(∠ ء أ هـ) = ق(∠ ء هـ أ) = ١٢٠ / ٢ = ٦٠°

Δ أ ء هـ متساوى الاضلاع

(١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ، أ ب = جـ ء   اثبت أن : هـ أ = هـ جـ



∵ أ ب = جـ ء .... (١)

∴ ق(⌢أ ب) = ق(⌢جـ ء) بحذف ق(⌢أ جـ) من الطرفين

∴ ق(⌢ب جـ) = ق(⌢أ ء)

∵ ق(∠ ء) = ١/٢ ق(⌢ب جـ)   ∠ ق(∠ ب) = ١/٢ ق(⌢أ ء)

∴ ق(∠ ء) = ق(∠ ب)   ∴ هـ ب = هـ ء وبطرح (٢) من (١)

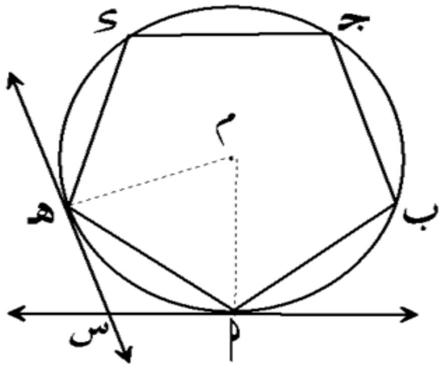
∴ هـ أ = هـ جـ

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ مماس للدائرة عند أ ،
$\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ حيث $\overleftrightarrow{\text{أس}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ = { س }

أوجد : ❶ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) ❷ ق(∠ أ س هـ)

العمل : نرسم $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$



البرهان

∵ الشكل أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = أ هـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ٧٢° ∴ ق(∠ أ م هـ) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ٧٢°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة م ، أ م = نق ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ س}}$

∴ ق(∠ م أ س) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة م ، م هـ = نق ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$

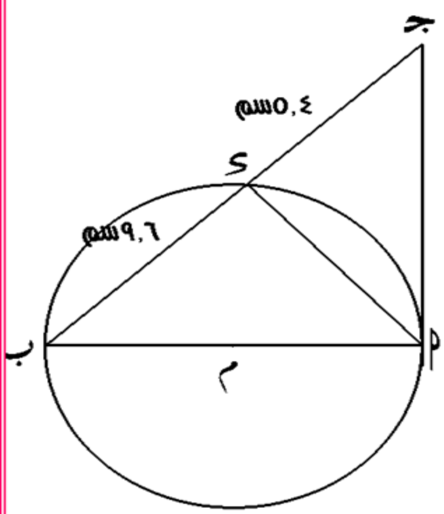
∴ ق(∠ م هـ س) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ أ س هـ) = ٣٦٠ − (٩ + ٩٠ + ٧٢) = ١٠٨°

(٢٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ تمسها عند أ ، $\overline{بجـ}$ تقطعها فى ء فإذا كان : ب ء = ٩,٦ سم ، ء جـ = ٥,٤ سم فأوجد طول نصف قطر الدائرة م



∵ $\overline{أجـ}$ تمس الدائرة عند أ ∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠° ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∆ أ ب جـ قائم فى أ ∵ $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ من نظرية إقليدس

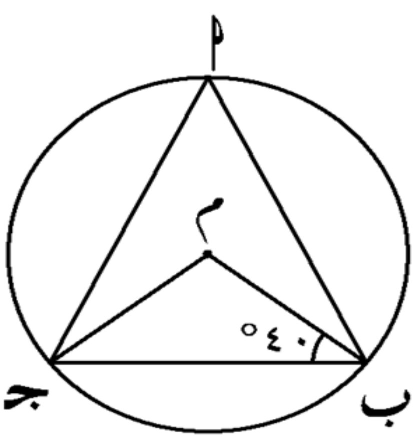
∴ (أ ب)^{2} = ب ء × ب جـ = ٩,٦ (٩,٦ + ٥,٤) = ١٤٤

∴ أ ب = ١٢ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة م = ٦ سم

(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ∆ تمر برؤوسه الدائرة م ، ق(∠ م ب جـ) = ٤٠° احسب ق(∠ أ)



∵ م مركز الدائرة ∴ م ب = م جـ = نق

∴ ∆ م ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ م جـ ب) = ق(∠ م ب جـ) = ٤٠°

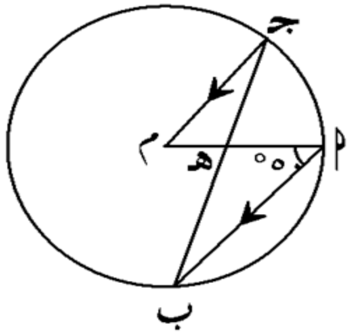
ق(∠ ب م جـ) = ١٨٠ – (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠°

∵ ∠ ب أ جـ المحيطية ، ∠ ب م جـ المركزية مشتركتان فى $\frown{بجـ}$

∴ ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م جـ) = ٥٠°

(٢٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ م}$ // $\overline{جـ ب}$ ، ق($\angle$ م جـ ب) = ٥٠° احسب ❶ ق($\angle$ ب) ❷ ب هـ > أ هـ



$\because$ $\overline{أ م}$ // $\overline{جـ ب}$

ق($\angle$ جـ) = ق($\angle$ م) = ٥٠° بالتبادل

$\because$ $\angle$ أ ب جـ المحيطية ، $\angle$ أ م جـ المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ جـ}$

$\therefore$ ق($\angle$ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(م) المركزية

$\therefore$ ق($\angle$ ب) = ٢٥° $\therefore$ ق($\angle$ م) > ق(ب)

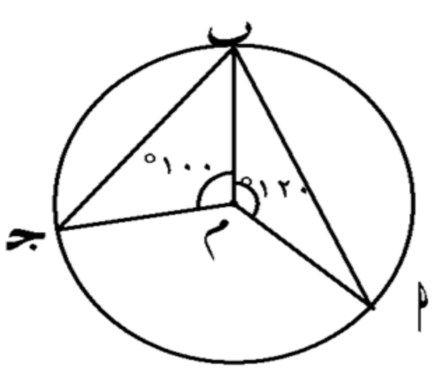
$\because$ ق($\angle$ جـ) = ق($\angle$ م)

$\because$ فى Δ هـ ب جـ $\therefore$ ق(جـ) > ق(ب)

$\therefore$ ب هـ > أ هـ

(٢٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$، $\overline{جـ ب}$ وتران فى دائرة م بحيث ق($\angle$ أ م ب) = ١٢٠° ، ق($\angle$ ب م جـ) = ١٠٠° أوجد : ق($\angle$ أ ب جـ)



$\because$ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة = ٣٦٠°

$\therefore$ ق($\angle$ أ م جـ) = ٣٦٠ − (١٢٠ + ١٠٠) = ١٤٠°

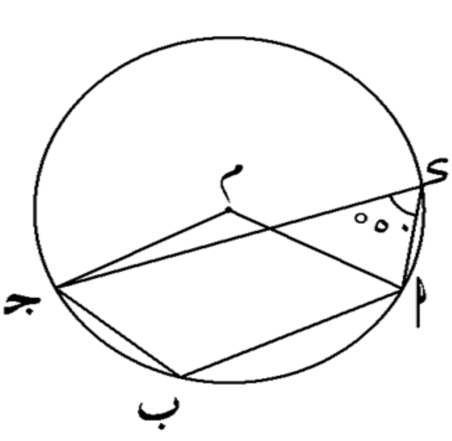
$\because$ $\angle$ أ ب جـ المحيطية ، $\angle$ أ م جـ المركزية مشتركتان ف $\overset{\frown}{أ جـ}$

$\therefore$ ق($\angle$ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\angle$ أ م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠ = ٧٠°

✍ (٢٤) فى الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، جـ ، ء تنتمى للدائرة م فإذا كان ق(∠ أ ء جـ) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(أ م جـ) ❷ ق(∠ أ ب جـ)



∵ ∠ أ ء جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية مشتركتان فى ⌒أ جـ

∴ ق(∠ أ ء جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م جـ)

∵ ق(∠ أ ء جـ) = ٥٠° ∴ ق(∠ أ م جـ) = ١٠٠°

∴ ق(أ م جـ) المنعكسة = ٣٦٠ − ١٠٠ = ٢٦٠°

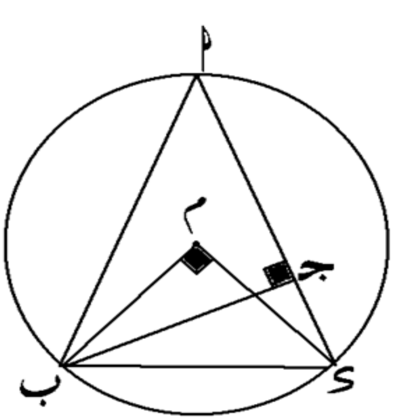
∵ ∠ أ ب جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية المنعكسة مشتركتان ف ⌒أ ء جـ

∴ ق(أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ م جـ) المنعكسة ∴ ق(∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٢٦٠ = ١٣٠°

✍ (٢٥) فى الشكل المقابل :

م ب ، م ء نصفا قطرين متعامدين فى الدائر م ، أ ∈ للدائرة م ، ب جـ ⊥ أ ء تقطعها فى جـ

أثبت أن : ب جـ = أ جـ وإذا كان ق(∠ أ) = (٣س − ١٥)° أوجد قيم س



∵ ∠ ب م ء المركزية ، ∠ ب أ ء المحيطية مشتركتان فى ⌒ب ء

∴ ق(∠ ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) = $\frac{1}{2}$ × ٩٠ = ٤٥°

فى △ أ ب جـ

∵ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠° ∵ ق(∠ أ) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ ب جـ)

∴ ب جـ = أ جـ

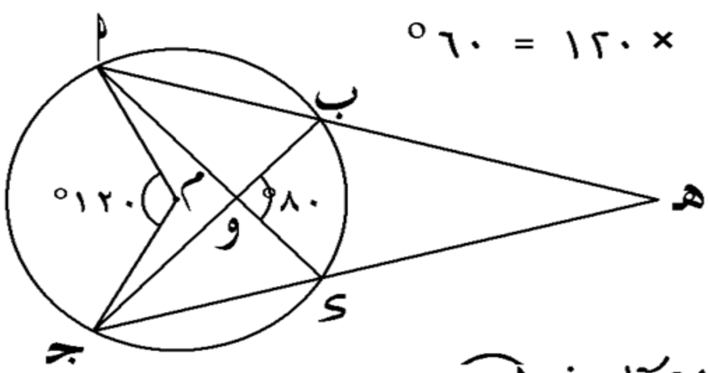
∵ ق(∠ أ) = ٣س − ١٥ = ٤٥

∴ ٣س = ١٥ + ٤٥ = ٦٠

∴ س = ٦٠ / ٣ ∴ س = ٢٠°

(٢٦) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، ب جـ ∩ أ ء = {و} ، أ ب ⟵ ∩ جـ ء ⟵ = {هـ} ،
ق(∠ ب و ء) = ٨٠° ، ق(∠ أ م جـ) = ١٢٠° أوجد: ❶ ق(∠ أ ب جـ) ❷ ق(∠ هـ)



∵ ∠ أ ب جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية مشتركتان فى أ جـ ⌒

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١/٢ ق(∠ أ م جـ) = ١/٢ × ١٢٠ = ٦٠°

∵ ب ∈ أ هـ

∴ ق(∠ هـ ب و) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∵ ∠ أ ء جـ المحيطية ، ∠ أ م جـ المركزية مشتركتان فى أ جـ ⌒

∴ ق(أ ء جـ) = ١/٢ ق(∠ أ م جـ) = ١/٢ × ١٢٠ = ٦٠°

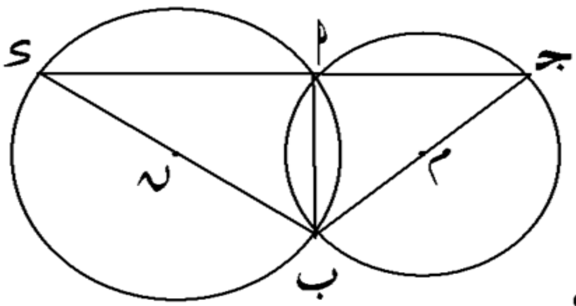
∴ ق(∠ هـ) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٢٠° + ٨٠°) = ٣٦٠° − ٣٢٠° = ٤٠°

(٢٧) فى الشكل المقابل :

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب د قطر فى الدائرة ن

اثبت أن : جـ ، أ ، د على استقامة واحدة

∵ ب جـ قطر فى الدائرة م ∴ ق (∠ ب أ جـ) = المحيطية = ٩٠° ....(١)



∵ جـ د قطر فى الدائرة ن

∴ ق (∠ ب أ د) = ٩٠° ....(٢)

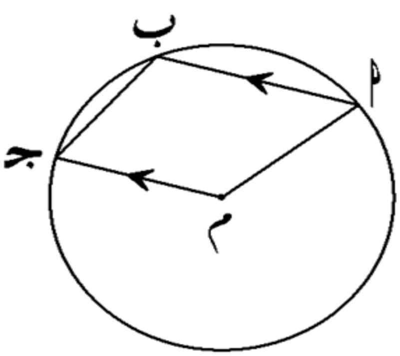
بجمع (١) ، (٢)

∴ ق (ب أ جـ) + ق (ب أ د) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ جـ ، أ ، د على استقامة واحدة

(٢٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ م شكل رباعى فيه أ ب // م جـ ، ق (∠ أ) = ٦٠° احسب ق (∠ ب)



∵ أ ب // م جـ ، أ م قاطع لهما

ق (∠ أ) + ق (∠ م) = ١٨٠°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

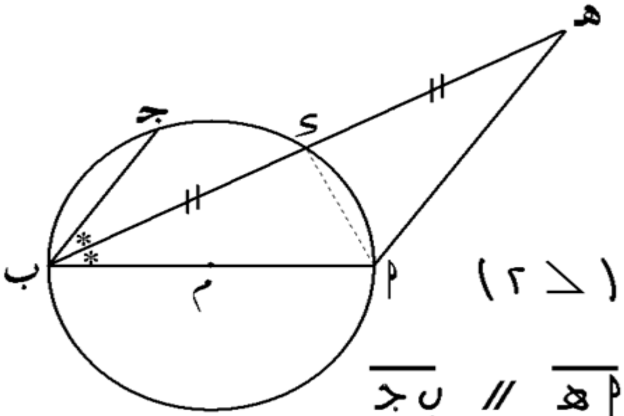
∴ ق (∠ أ م جـ) المنعكسة = ٣٦٠ – ١٢٠ = ٢٤٠°

∵ ق (∠ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ أ م جـ) المنعكسة يحصرا (أ جـ) الأكبر

∴ ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ = ١٢٠°

(٢٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ فى الدائرة م ، $\overline{بجـ}$ وتر فيها ، رسم $\overrightarrow{بء}$ ينصف (∠ ب) ويقطع الدائرة فى ء ، حيث هـ ∈ $\overrightarrow{بء}$ ، ب ء = هـ ء أثبت أن : $\overline{أهـ}$ // $\overline{بجـ}$



∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ∴ ق (أ ء ب) = ٩٠°

∵ Δ أ ب هـ فيه $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{بهـ}$ ، ∵ ب ء = ء هـ

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ هـ) ∵ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

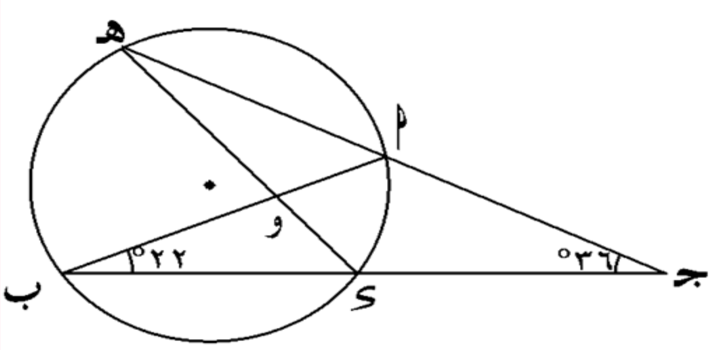
∴ ق (∠ هـ) = ق (∠ ٢) وهما فى وضع تبادل ∴ $\overline{أهـ}$ // $\overline{بجـ}$

∴ ق ∠ (هـ ء و) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠° ∴ الشكل هـ ء و ب رباعى

∴ ق (∠ هـ) = ٣٦٠ – (١٢٠ + ١٢٠ + ٨٠) = ٢٤٠°

(٣٠) فى الشكل المقابل :

جـ نقطة خارج دائرة ، $\overline{أب}$ ، $\overline{ءهـ}$ وتران فيها متقاطعان فى نقطة و بحيث : ق (ب) = ٢٢° ، ق (جـ) = ٣٦° أوجد : ق ($\overset{\frown}{بهـ}$)



∵ ق (∠ أ ب ء) = ٢٢°

∴ ق ($\overset{\frown}{أء}$) = ٢ ق (∠ أ ب ء) = ٤٤°

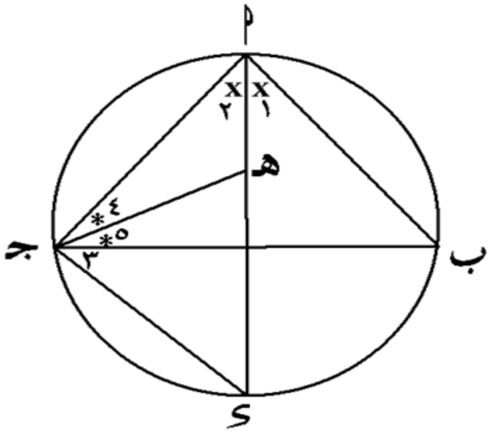
∵ ∠ هـ أ ب خارجة عن Δ أ جـ ب

∴ ق (∠ هـ أ ب) = ق (∠ جـ) + ق (∠ ب) = ٣٦ + ٢٢ = ٥٨°

∴ ق ($\overset{\frown}{هـب}$) = ٢ ق (هـ أ ب) = ٢ × ٥٨ = ١١٦°

(٣١) فى الشكل المقابل :

∆ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ أ) ويقطع الدائرة فى ء ، $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ جـ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ فى هـ   اثبت أن : ∆ ء جـ هـ متساوى الساقين .



∵ ق(∠ ١) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ء)

∵ ق(∠ ٣) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ء)

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٣)

∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ جـ)   ∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

∴ ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣)   ....(١)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف (∠ أ جـ ب)

∴ ق(∠ ٤) = ق(∠ ٥)   ....(٢)   بجمع (١) ، (٢)

∴ ق(∠ ٢) + ق(∠ ٤) = ق(∠ ٣) + ق(∠ ٥)

∵ ق(∠ ء هـ جـ) = ق(∠ ٢) + ق(∠ ٤)

∵ ق(∠ ء جـ هـ) = ق(∠ ٣) + ق(∠ ٥)

∴ ق(∠ ء هـ جـ) = ق(∠ ء جـ هـ)   ∴ ء هـ = ء جـ

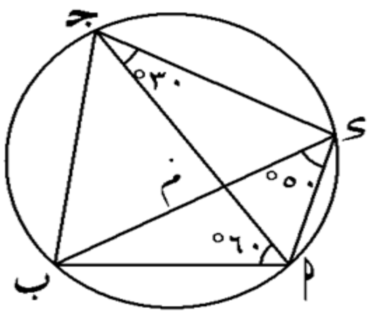
∴ ∆ ء جـ هـ متساوى الساقين

(٣٢) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب ؟ جـ) = ٦٠° ، ق(∠ ؟ ء ب) = ٥٠° ، ق(∠ ؟ جـ ء) = ٣٠°

اوجد قياسات الزوايا ❶ ق(∠ ب ؟ جـ) ❷ ق(∠ ؟ ب ء) ❸ ق(∠ ب ء جـ)

❹ ق(∠ ء ؟ جـ) ❺ ق(∠ ء ب جـ)



ق(∠ ب ؟ جـ) = ق(∠ ؟ ء ب) = ٥٠°

(محيطيطان يحصران ⌒؟ ب)

ق(∠ ؟ ب ء) = ق(∠ ؟ جـ ء) = ٣٠°

(محيطيتان مشتركتان ف ⌒؟ ء)

ق(∠ ب ء جـ) = ق(∠ ب ؟ جـ) = ٦٠°

(محيطيتان مشتركتان فى ⌒ب جـ)

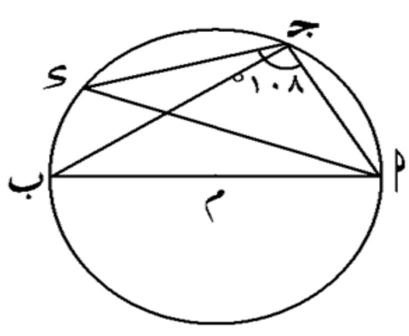
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة ؟ جـ ء = ١٨٠°

ق(∠ ء ؟ جـ) = ١٨٠ – (٣٠ + ٥٠ + ٦٠) = ٤٠°

ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء ؟ جـ) = ٤٠° (محيطيتان مشتركتان فى ⌒ء جـ)

(٣٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{؟ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ ؟ جـ ء) = ١٠٨° أوجد : ق(∠ ب ؟ ء)



$\overline{\text{؟ ب}}$ قطر فى الدائرة م

ق(∠ ؟ جـ ب) = ٩٠°

ق(∠ ب جـ ء) = ق(∠ ؟ جـ ء) – ق(∠ ؟ جـ ب)

= ١٠٨ – ٩٠ = ١٨°

ق(∠ ب ؟ ء) = ق(ب جـ ء) = ١٨° (محيطيتان تحصران ⌒ب ء)

عكس نظرية (١ – ٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

نظرية (١ – ٣)

إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)

نظرية

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

١ إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢ إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

نتائج هامة

١ المماس يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

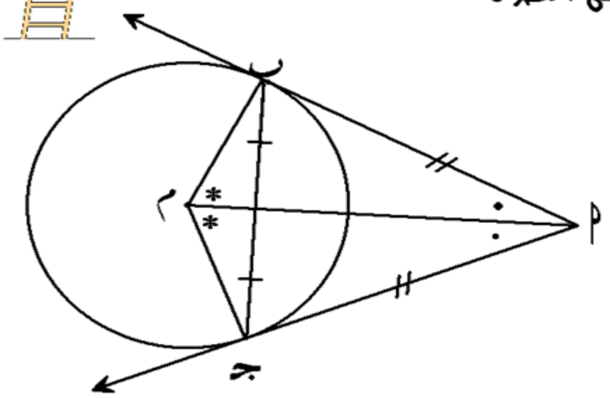
٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من أحدى نهايتيه يكون مماسا للدائرة

٣ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان

٤ المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يتقاطعان فى نقطة واحدة

نظرية

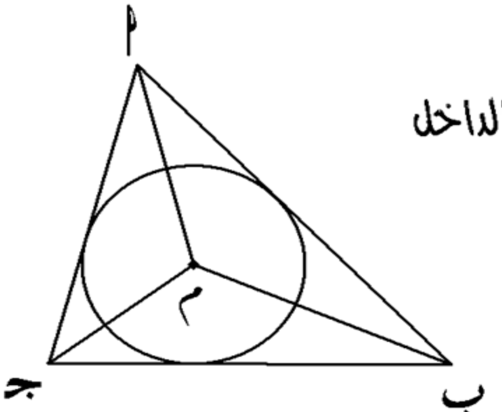
القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول



نتائج هامة

(١) المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها محور تماثل لوتر التماس الواصل بين نقطتى التماس

(٢) المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطر المرسومين من نقطتى التماس



الدائرة الداخلة للمثلث :- هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

الدائرة الخارجة للمثلث :- هى الدائرة التى تمر برؤوسه

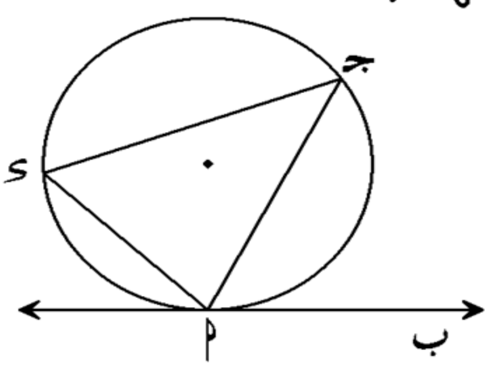
مركز الدائرة الخارجة للمثلث

هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها (محاور أضلاعه)

نظرية (٢ – ٢)

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

ق(ب أ جـ) = ق(أ ء جـ)



قياس المماسية = $\frac{١}{٢}$ قياس المركزية المشتركة معها فى القوس

= $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المحصور بين ضلعيها

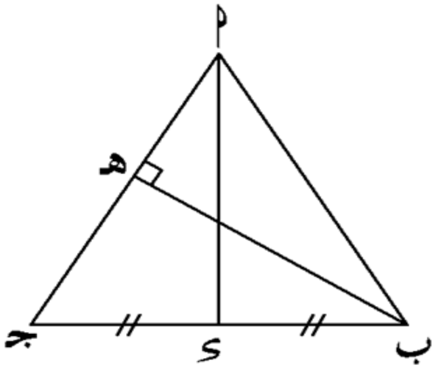
قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة = ١٣٥°

قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى سدس دائرة = ١٥٠°

[١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ ، ء منتصف ب جـ ، رسم ب هـ ⊥ أ جـ

حيث ب هـ ∩ أ جـ = { هـ } أثبت أن النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة



فى △ أ ب جـ

أ ب = أ جـ ، ء منتصف ب جـ

∴ أ ء ⊥ ب جـ

∴ ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°

ب هـ ⊥ أ جـ

∴ ق (∠ أ هـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ ء ب) [زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

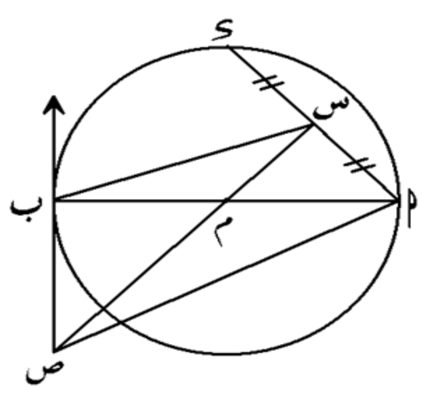
∴ النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة

[٢] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، س منتصف أ جـ س م يقطع مماس للدائرة عند ب فى ص

أثبت أن الشكل أ س ب ص رباعى دائرى

الحـــــل



س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ جـ

∴ ق (∠ أ س ص) = ٩٠°

ص ب مماس

∴ ق (أ ب ص) = ٩٠°

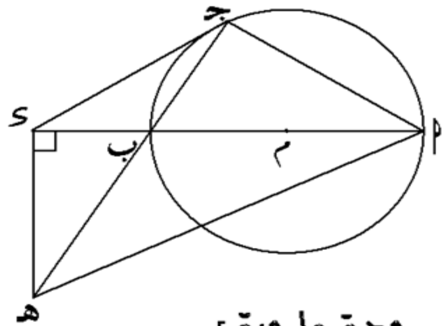
ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ب جـ)

زوايتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة

∴ الشكل أ س ب ص رباعى دائرى

[٣] فى الشكل المقابل :

ﺃ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ ﺃ ب أثبت أن الشكل ﺃ جـ ء هـ رباعى دائرى



الحـــــــــل   ﺃ ب قطر

∴ ق (ﺃ جـ ب) = ٩٠° [محيطية فى نصف دائرة]

ء هـ ⊥ ﺃ ب

∴ ق (ﺃ ء هـ) = ٩٠°

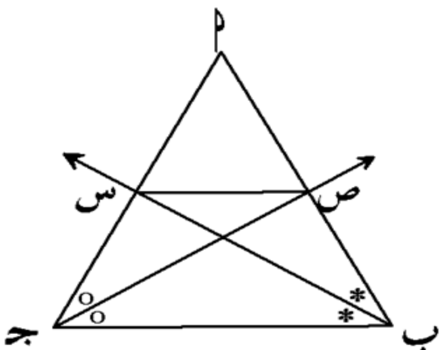
ق (ﺃ جـ هـ) = ق (ﺃ ء هـ) [مرسومتان على قاعدة واحدة ﺃ هـ وفى جهة واحدة]

∴ الشكل ﺃ جـ ء هـ رباعى دائرى

[٤] فى الشكل المقابل :

ﺃ ب = ﺃ جـ ، ب س ينصف ∠ ب ، جـ ص ينصف ∠ جـ

أثبت ان ❶ ب جـ س ص رباعى دائرى ❷ س ص // ب جـ



الحـــــــــل   ﺃ ب = ﺃ جـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) .... (١)

ب س ينصف ∠ ب

∴ ق (∠ ص ب س) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب) .... (٢)

جـ ص ينصف ∠ جـ

∴ ق (∠ ص جـ س) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ جـ) ....(٣) من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج ان

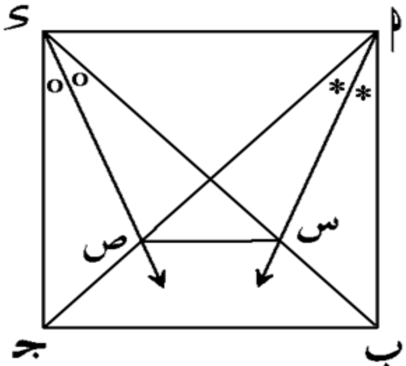
ق (∠ ص ب س) = ق (∠ ص جـ س)   ∴ الشكل ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق (∠ ﺃ ص س) = ق (∠ جـ) .... (٤)

من ١ ، ٤ ينتج انق (∠ ﺃ ص س) = ق (∠ ب)   ∴ س ص // ب جـ

(٥) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ء مربع ، $\overrightarrow{\text{ا س}}$ ينصف ∠ ب ا جـ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى س ، $\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ جـ ء ب ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى ص أثبت أن ❶ الشكل ا س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ ا ص س) = ٤٥°



الحــــــل ا ب جـ ء مربع

∴ ق(∠ ب ا جـ) = ق(∠ ب ء جـ) = ٤٥°

$\overrightarrow{\text{ا س}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ ق(∠ س ا ص) = $\frac{٤٥}{٢}$ = ٢٢,٥°

$\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ ب ء جـ

∴ ق(∠ س ء ص) = $\frac{٤٥}{٢}$ = ٢٢,٥°   ∴ ق(∠ س ا ص) = ق(∠ س ء ص)

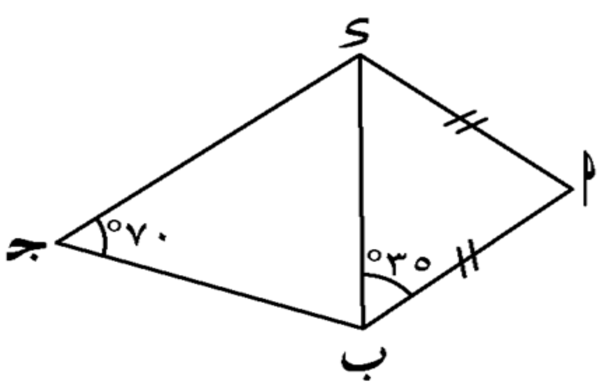
∴ ا س ص ء رباعى دائرى   ∴ ق(∠ ا ص س) = ٤٥°

∴ ق(∠ ا ص س) = ق(∠ ا ء ب) [مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها]

ا س ص ء رباعى دائرى

(٦) فى الشكل المقابل :

ا ب = ا ء ، ق(∠ ا ب ء) = ٣٥° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° أثبت أن ا ب جـ ء رباعى دائرى



الحــــــل

فى △ ا ب ء   ا ب = ا ء

∴ ق(∠ ا ب ء) = ق(∠ ا ء ب) = ٣٥°

∴ ق(∠ ا) = ١٨٠° – ٧٠° = ١١٠°

ق(∠ ا) + ق(∠ جـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

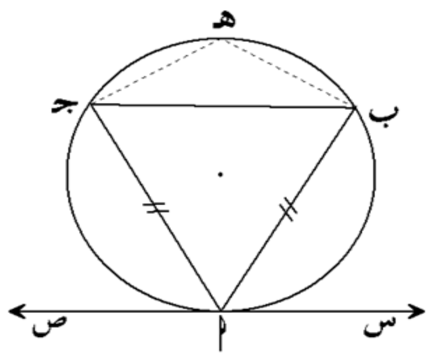
∴ ا ب جـ ء رباعى دائرى

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند ﺃ ، ﺃ ب = ﺃ جـ ، ق(∠ ص ﺃ جـ) = ٧٠°

أوجد ق(∠ ب هـ جـ) حيث هـ ∈ $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

الحـــــل



$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ ﺃ ب)

[مماسية ومحيطية] هـ ب ﺃ جـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب) = ٧٠°

ﺃ ب = ﺃ جـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

∴ ق(∠ ب ﺃ جـ) = ١٨٠° — ١٤٠° = ٤٠°

∴ ق(∠ ب هـ جـ) = ١٨٠° — ٤٠° = ١٤٠°

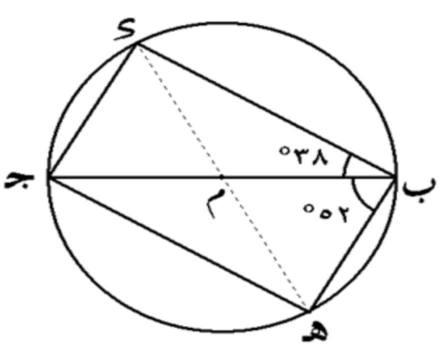
(٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى دائرة م ، ب ء ، $\overline{\text{ب هـ}}$ وتران رسما فى جهتين مختلفتين من $\overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان

ق(∠ جـ ب هـ) = ٥٢° ، ق(∠ ء ب جـ) = ٣٨°

❶ أوجد ق(∠ جـ هـ ب) ، ق(∠ ء جـ ب) ❷ أثبت أن $\overline{\text{ء هـ}}$ قطر فى الدائرة م

الحـــــل $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر ∴ ق(∠ جـ هـ ب) = ٩٠°



، ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠°

ق(∠ ء جـ ب) = ١٨٠° — [٣٨° + ٩٠°]

= ١٨٠° — ١٢٨° = ٥٢°

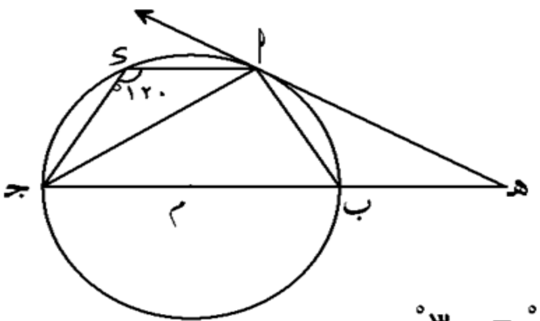
ق(∠ ء ب جـ) = ٣٨° + ٥٢° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ قطر فى الدائرة م

(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء رباعى دائرى داخل دائرة م ب جـ قطر فيها ، هـ أ مماس للدائرة عند أ

وإذا كان ق (∠ أ ء جـ) = ١٢٠° أثبت أن ❶ ب أ = ب هـ ❷ ق (أ ب هـ) = ق (هـ أ جـ)



الحـــل ب جـ قطر ∴ ق (∠ ب أ جـ) = ٩٠°

أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

، ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ ء جـ) = ١٢٠°

ق (∠ أ جـ ب) = ١٨٠° – [٩٠° + ٦٠°] = ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°

ق (∠ هـ) = ١٨٠° – [١٢٠° + ٣٠°] = ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°

ق (∠ هـ) = ق (∠ هـ أ ب) = ٣٠°

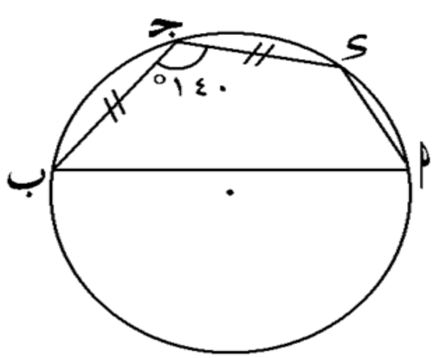
فى △ أ هـ ب ∴ ب هـ = ب أ   ق (∠ أ ب هـ) = ١٢٠°

∴ ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ هـ أ جـ)   ق (∠ هـ أ جـ) = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠°

(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مرسوم داخل الدائرة م ، جـ ب = جـ ء ، ق (∠ ب جـ ء) = ١٤٠°

أوجد ❶ ق (∠ أ) ❷ ق (∠ ء)



الحـــل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

∴ ق (∠ ب جـ ء) = ٨٠°

ق (∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٢٢٠° = ١١٠°

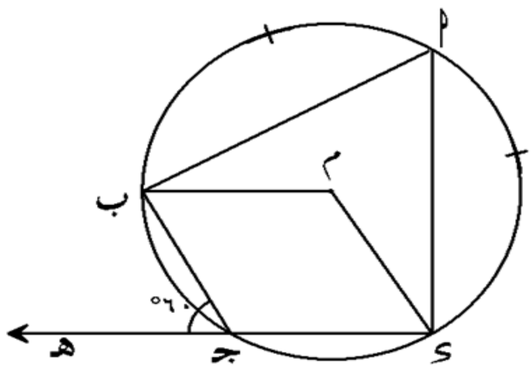
ب جـ = جـ ء   ∴ ق (ب⌒جـ) = ق (جـ⌒ء) = ٤٠°

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠° + ٤٠° = ٢٢٠°

[١٢] فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب جـ هـ) = ٦٠° ، ب جـ // م ء ، أ منتصف ⌒ب ء أثبت أن

❶ الشكل ب م ء جـ معين ❷ أ جـ قطر فى الدائرة



أ ء جـ ب رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب جـ ء) = ٦٠° [خارجة]

ق(∠ ء م ب) = ٢ ق(∠ أ) [محيطية ومركزية]

∴ ق(∠ ء م ب) = ١٢٠°

ق(∠ ب جـ ء) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

ب جـ // م ء ، ء جـ قاطع لهما

∴ ق(∠ م ء جـ) = ١٨٠ − ١٢٠° = ٦٠°

ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ ب جـ هـ) [متناظرتان]

∴ م ء // جـ ب   ب جـ // م ء

∴ م ء جـ ب متوازى أضلاع

م ء = م ب

∴ م ء جـ ب معين   ق(∠ ء م ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ء جـ ب) = ١٢٠°

∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒أ ب) = ١٢٠°

أ ء = أ ب

ء جـ = جـ ب   [م ء جـ ب معين]

∴ ق(⌒ء جـ) = ق(⌒جـ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠

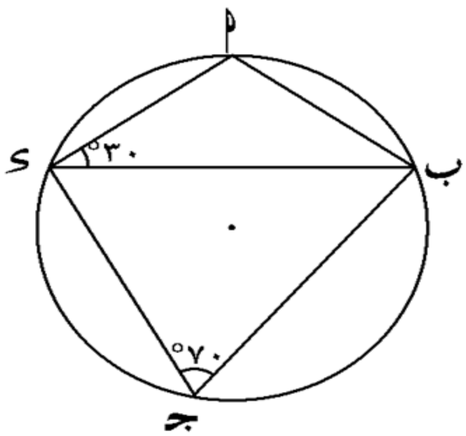
∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

∴ أ جـ قطر فى الدائرة م

(١٣) فى الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان ق(أ ب ء)

الحــــــل



أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – ٧٠° = ١١٠°

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

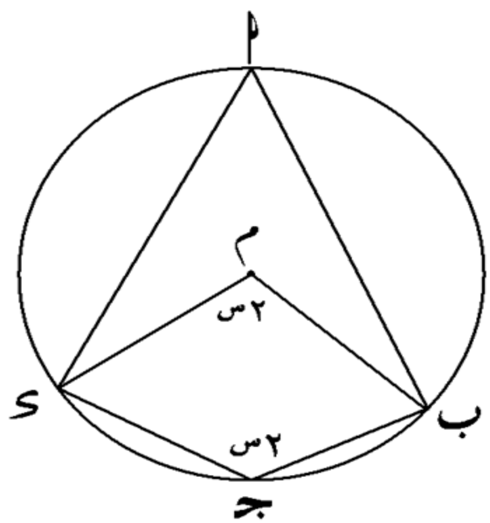
∴ ق(∠ أ ب ء) = ١٨٠° – [١١٠ + ٣٠°]

= ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

(١٤) فى الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان ق(∠ أ)

الحــــــل



ق(∠ ب م ء) المنعكسة = ٣٦٠° – ٢ س

ق(∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) المنعكسة

٢س = $\frac{1}{2}$ [٣٦٠° – ٢ س]

٢س = ١٨٠° – س

٢س + س = ١٨٠°

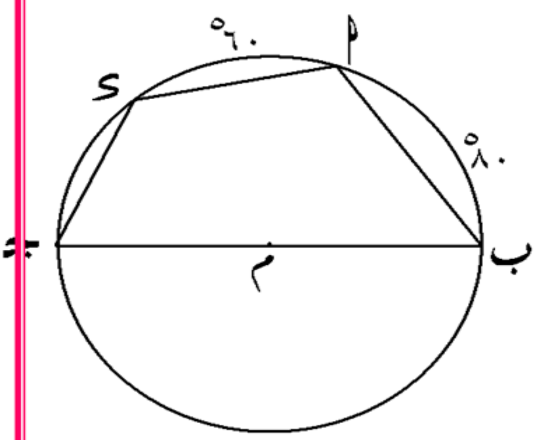
٣ س = ١٨٠°   س = ٦٠°

ق(∠ جـ) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

ق(∠ أ) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

[١٥] فى الشكل المقابل :

أوجد قياسات زوايا الشكل الرباعى ٲ ب جـ ء



ب جـ قطر ق(ب جـ⌒) = ١٨٠°

∴ ق(ء جـ⌒) = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ٲ ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠° = ٥٠°

∴ ق(∠ ء) = ١٨٠° – ٥٠° = ١٣٠°

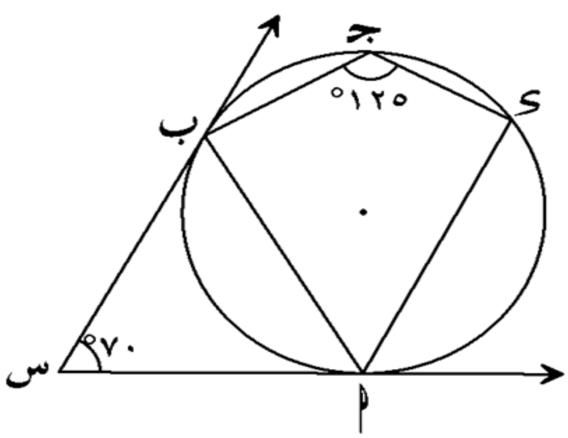
ق(∠ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب ٲ ء) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠° = ٧٠°

∴ ق(∠ ٲ) = ١٨٠° – ٧٠°

[١٦] فى الشكل المقابل :

س ٲ⟵ ، س ب⟵ مماسان للدائرة عند ٲ ، ب ، ق(∠ ٲ س ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن ❶ ٲ ب‾ ينصف ∠ ء ٲ س ❷ ٲ ء‾ // س ب⟵



ٲ ء جـ ب رباعى دائرى

ق(∠ جـ) + ق(∠ ء ٲ ب) = ١٨٠ [متقابلتان]

ق(∠ ء ٲ ب) = ١٨٠° – ١٢٥° = ٥٥°

س ٲ⟵ ، س ب⟵ مماستان ∴ س ٲ = س ب

∴ ق(∠ س ٲ ب) = ق(∠ س ب ٲ) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

ق(∠ ء ٲ ب) = ق(∠ س ٲ ب)

∴ ٲ ب ينصف ∠ ء ٲ س

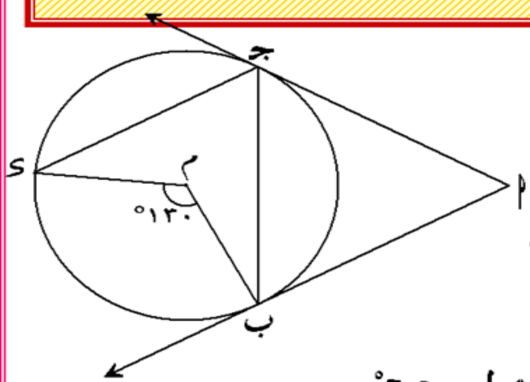
ق(∠ س ب ٲ) = ق(∠ ء ٲ ب) = ٥٥ وهما متبادلتان

∴ ٲ ء‾ // س ب⟵

(١٧) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ مماستان للدائرة م ، أ ب // جـ ء ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

أثبت أن ❶ جـ ب ينصف ∠ أ جـ ء ❷ ق(∠ أ)



ق(∠ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ء) [محيطية ومركزية]

∴ ق(∠ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ × ١٣٠° = ٦٥°   أ ب // جـ ء

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ ب جـ ء) [متبادلتان]   ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٦٥°

أ ب ، أ جـ مماستان   ∴ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ ب جـ)   ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٦٥°

ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ب جـ ء)   ∴ جـ ب ينصف أ جـ ء

فى △ أ ب جـ   ق(∠ أ) = ١٨٠° − [٦٥° + ٦٥°] = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

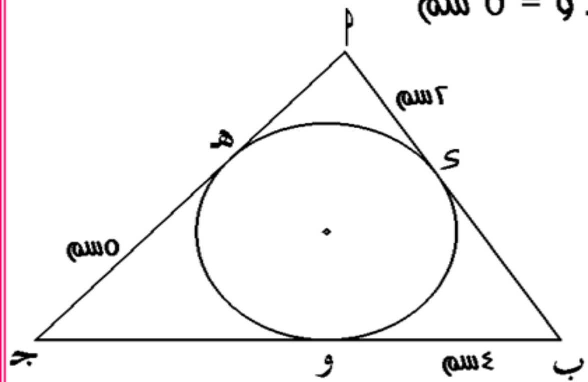
(١٨) فى الشكل المقابل :

الدائرة تمس أضلاع المثلث أ ب جـ من الداخل فى ء ، هـ ، و أوجد : محيط △ أ ب جـ

أ ء ، أ هـ قطعتان مماستان ∴ أ ء = أ هـ   ∴ أ هـ = ٢ سم

ب ء ، ب و قطعتان مماستان ∴ ب ء = ب و   ∴ ب ء = ٤ سم

جـ و ، جـ هـ قطعتان مماستان ∴ جـ و = جـ هـ   ∴ جـ و = ٥ سم



∴ أ ب = ٢ + ٤ = ٦سم

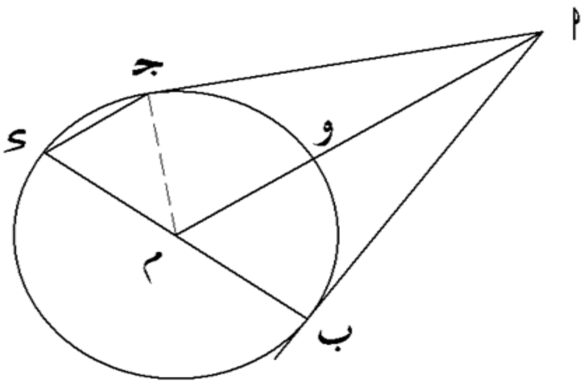
ب جـ = ٤ + ٥ = ٩ سم

أ جـ = ٢ + ٥ = ٧ سم

محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٩ + ٧ = ٢٢ سم

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ب ء قطر فى الدائرة أثبت ان أ م // جـ ء



الحـــــل العمل نصل م جـ

أ جـ ، أ ب قطعتان مماستان

∴ ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ أ م ب)

∴ ق(⌒ و جـ) = ق(⌒ و ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ جـ و ب)

∴ ق(∠ أ م ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ جـ و ب) .... (١)

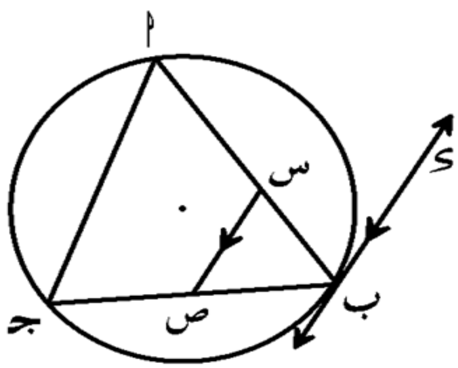
، ق(∠ جـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ جـ و ب) .... (٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ أ م ب) = ق(∠ جـ ء ب) وهما متناظرتان ∴ جـ ء // أ ب

(٢١) فى الشكل المقابل :

فى الشكل المقابل ب ء ↔ مماسا للدائرة عند ب ، س ص // ب ء

أثبت أن الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى



الحـــــل ب ء ↔ مماس عند ب

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ جـ) .... (١)

ب ء // س ص

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ب س ص) .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

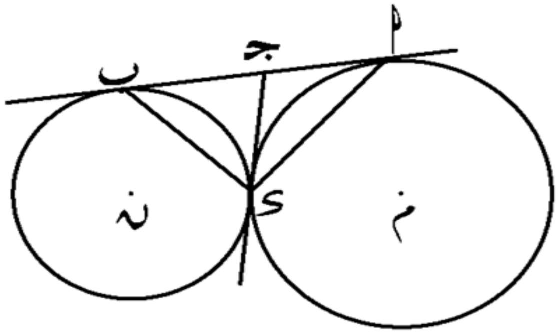
ق(∠ ب س ص) = ق(∠ جـ) [وهى خارجة عن الرباعى س ص جـ أ]

∴ س ص جـ أ رباعى دائرى

[٢٠] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء ، $\overline{أ ب}$ مماس مشترك لهما عند أ ، ب ، ء جـ مماس مشترك لهما عند ء (١) أثبت أن جـ منتصف $\overline{أ ب}$ (٢) ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

الحـــــــــل



$\overline{جـ أ}$ ، $\overline{جـ ء}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ جـ أ = جـ ء .... (١)

$\overline{جـ ء}$ ، $\overline{جـ ب}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

جـ ء = جـ ب .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن جـ أ = جـ ب

∴ جـ منتصف $\overline{أ ب}$ جـ أ = جـ ء

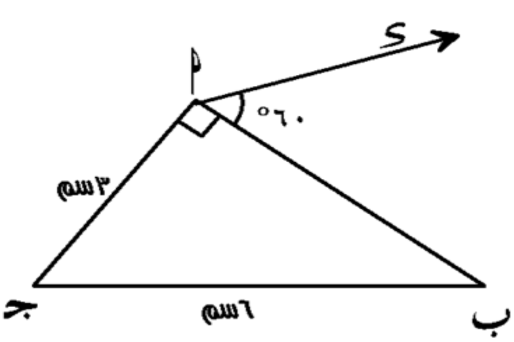
∴ ق(∠ جـ ء أ) = ق(∠ جـ أ ء) .... (٣)

∴ جـ ء = جـ ب .... (٤) ∴ ق(∠ جـ ء ب) = ق(∠ جـ ب ء) من ٣ ، ٤ ينتج

ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ جـ أ ء) + ق(∠ جـ ب ء) ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

[٢٦] فى الشكل المقابل :

أثبت أن $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماسا للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ∠ أ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

∴ ق(∠ ب) = ٣٠°

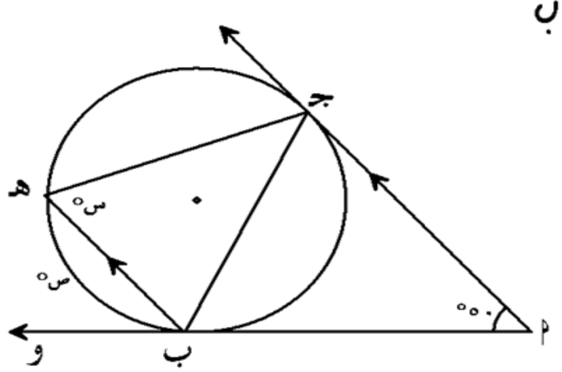
∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − [٩٠ + ٣٠] = ٦٠°

ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ جـ)

∴ أ ء يمس الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

(٢٩) فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة س ، ص



ﻡ جـ ، ﻡ ب قطعتان مماستان . ∴ ﻡ جـ = ﻡ ب

∴ ق(∠ ﻡ جـ ب) = ق(∠ ﻡ ب جـ) = ٦٥°

ﻡ جـ مماس

∴ ق(∠ هـ) = ق(∠ ﻡ جـ ب)

∴ س = ٦٥°

∵ ﻡ جـ // ب هـ

∴ ق (∠ هـ ب و) = ق(∠ ﻡ) بالتناظر

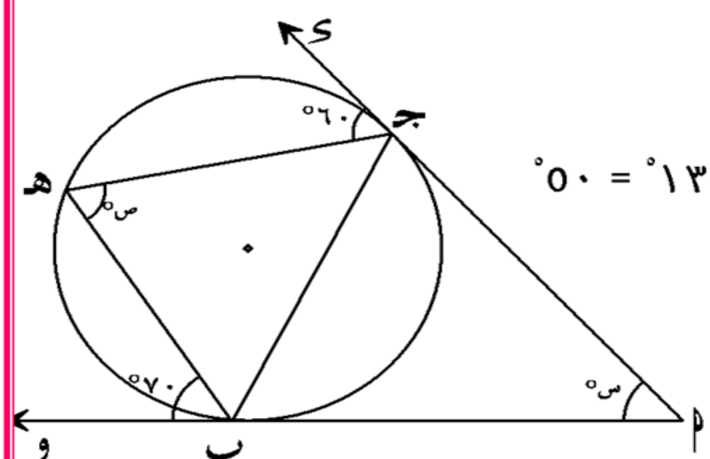
∴ ق (∠ هـ ب و) = ٥٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{هـ ب}}$) = ١٠٠° ص = ١٠٠°

(٣١) فى الشكل المقابل :

أوجد قيمتى س ، ص

الحــــــل



$\overleftarrow{\text{ﻡ ب}}$ مماس ∴ ق(∠ ب جـ ى) = ٦٠°

$\overleftarrow{\text{ﻡ جـ}}$ مماس ∴ ق(∠ جـ ب ى) = ٧٠°

∴ ق(∠ ى) = ١٨٠° — [٦٠° + ٧٠°] = ١٨٠° — ١٣٠° = ٥٠°

$\overleftarrow{\text{ﻡ جـ}}$ مماس

∴ ق (∠ ﻡ جـ ب) = ق(∠ ى) = ٥٠°

$\overleftarrow{\text{ﻡ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ﻡ جـ}}$ مماستان

∴ ق(∠ ﻡ ب جـ) = ق(∠ ﻡ جـ ب) = ٥٠°

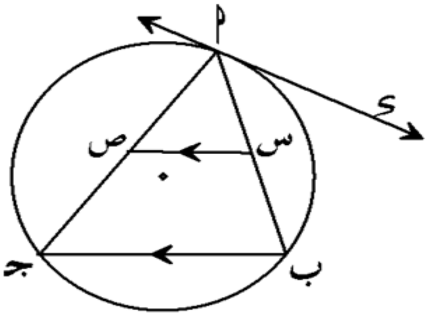
ق(∠ ﻡ) = ١٨٠° — ١٠٠° = ٨٠°

(٣٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماسا للدائرة عند أ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماساً للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس ∴ ق(∠ ء أ ب) المماسية = ق(∠ جـ) المحيطية يحصران $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ .... (١)



$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ جـ) بالتناظر .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ أ ص س)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ يمس الدائرة المارة برؤوس △ أ س ص

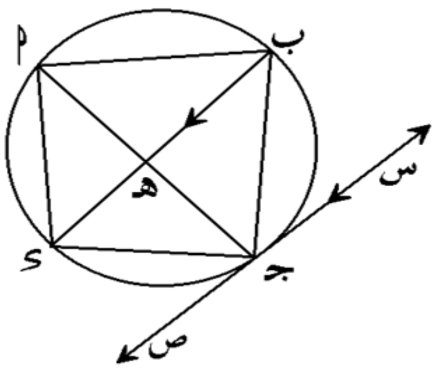
(٣٣) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسا للدائرة عند جـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ أثبت ان

(١) أ جـ ينصف ∠ ب أ ء   (٢) $\overline{\text{ب جـ}}$ يمس الدائرة المارة برؤوس △ أ ب هـ

الحل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ ∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) .... (١)



ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

∴ ق(∠ جـ أ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)

ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ جـ أ ء)

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء   ∴ ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

ق(∠ جـ ب ء) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)   ∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)

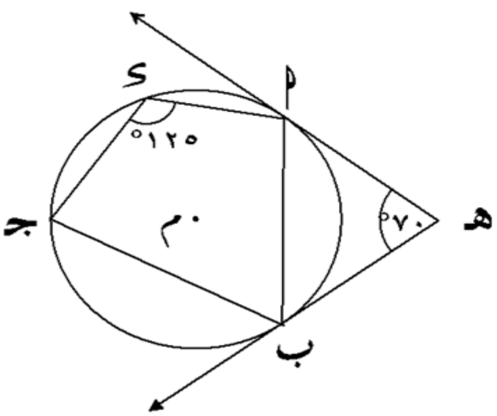
ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ جـ ب ء)   ∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ يمس الدائرة المارة بـ △ أ ب هـ

(٣٤) فى الشكل المقابل :

ﻡ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، $\overline{\text{هـ ﻡ}}$ ، $\overline{\text{هـ ب}}$ مماسان للدائرة عند ﻡ ، ب

فإذا كان ق (∠ ﻡ هـ ب) = ٧٠° ، ق (∠ ﻡ ء جـ) = ١٢٥° أثبت أن

(١) ﻡ ب = ﻡ جـ (٢) $\overline{\text{ﻡ جـ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ﻡ ، ب ، هـ



الحـــــــل ﻡ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ ﻡ ب جـ) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ﻡ ب جـ) = ١٨٠° – ١٢٥° = ٥٥°

$\overline{\text{هـ ﻡ}}$ ، $\overline{\text{هـ ب}}$ قطعتان مماستان

∴ ق(∠ هـ ﻡ ب) = ق (∠ هـ ب ﻡ) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

$\overleftarrow{\text{هـ ﻡ}}$ مماس ∴ ق (ﻡ ب هـ) المماسية = ق(∠ ﻡ جـ ب) المحيطية

يحصران $\overset{\frown}{\text{ﻡ ب}}$

∴ ق (ﻡ جـ ب) = ٥٥° ∴ ق (ﻡ جـ ب) = ق (ﻡ ب جـ)

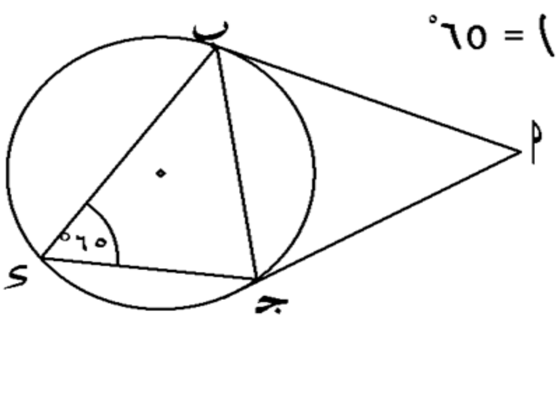
∴ ﻡ ب = ﻡ جـ وهو المطلوب أولاً

∵ ق (ب ﻡ جـ) = ١٨٠ – [٥٥° + ٥٥°]= ١٨٠° – ١١٠° = ٧٠°

ق (ب ﻡ جـ) = ق (ﻡ هـ ب) ∴ ﻡ جـ مماس للدائرة المارة بالمثلث Δ ﻡ هـ ب

(٣٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ﻡ ب}}$ ، $\overline{\text{ﻡ جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ق (∠ ب ء جـ) = ٦٥° أوجد بالبرهان ق(∠ ﻡ)



الحـــــــل $\overline{\text{ﻡ جـ}}$ مماس ∴ ق (∠ ﻡ جـ ب) = ٦٥°

$\overline{\text{ﻡ ب}}$ مماس

∴ ق(∠ ﻡ ب جـ) = ٦٥°

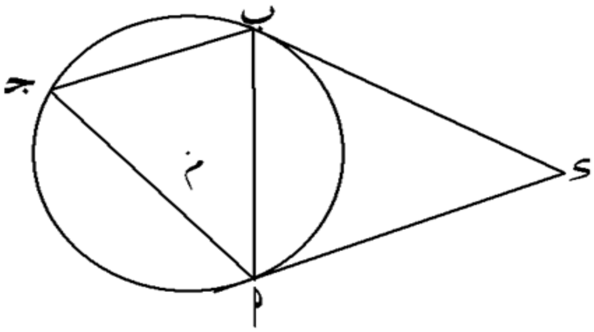
ق(∠ ﻡ) = ١٨٠° – [٦٥° + ٦٥°] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

(٣٦) فى الشكل المقابل :

ء ب ، ء أ قطعتان مماستان للدائرة أ ب = أ جـ

أثبت أن أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

الحـــــل ء ب ، ء أ قطعتان مماستان



∴ ء ب = ء جـ

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ء أ ب) .... (١)

أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ جـ) .... (٢)

ء ب مماس للدائرة

∴ ق(∠ ء ب أ) المماسية = ق(∠ جـ) المحيطية يحصران أ ب ⌒ .... (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ جـ)

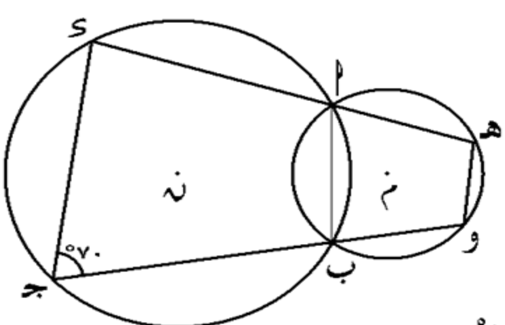
∴ أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

(٣٧) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم أ ء يقطع الدائرة م فى هـ والدائرة ن فى ء ، ق(∠ جـ) = °٧٠

(١) أوجد ق(∠ و) (٢) أثبت أن جـ ء // هـ و

الحـــــل أ ب جـ ء رباعى دائرى



∴ ق(∠ ب أ ء) + ق(∠ جـ) = °١٨٠

ق(∠ ب أ ء) = °١٨٠ – °٧٠ = °١١٠

∵ أ هـ و ب رباعى دائرى

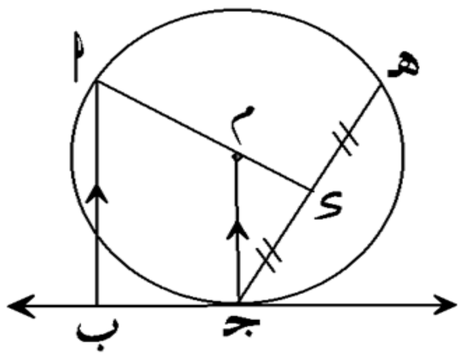
∴ ق(∠ ب أ ء) الخارجة = ق(∠ و) ∴ ق(∠ و) = °١١٠

ق(∠ و) + ق(∠ جـ) = °١١٠ + °٧٠ = ١٨٠

متكاملتان وفى جهة واحدة من القاطع ∴ جـ ء // هـ و

(٣٨) فى الشكل المقابل :

ء منتصف هـ جـ ، جـ م // أ ب ، ب جـ مماس أثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــل ء منتصف هـ جـ

∴ م ء ⊥ جـ هـ

∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠° ....(١)

جـ ب مماس م جـ ⊥ ب جـ

∴ ق(∠ م جـ ب) = ٩٠°

جـ م // أ ب

∴ ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ م جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠° – ٩٠° = ٩٠° ....(٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

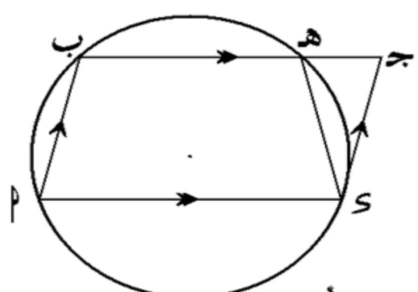
ق(∠ م ء جـ) + ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠

∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٣٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء تقطع ب جـ فى هـ أثبت أن جـ ء = هـ ء

الحـــــل



أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) خواص متوازى الأضلاع ....(١)

أ ب هـ ء رباعى دائرى

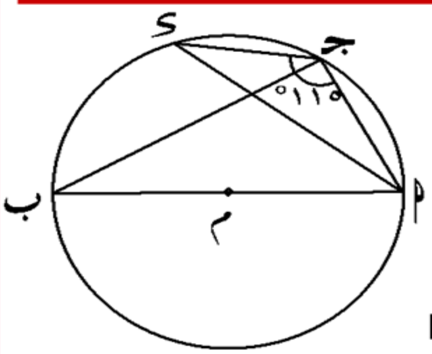
∴ ق(∠ جـ هـ ء) الخارجة = ق(∠ أ) ....(٢) من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ جـ هـ ء) الخارجة = ق(∠ جـ)

∴ ء هـ = ء جـ

[٤٠] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ جـ ء) = ١١٥° أوجد بالبرهان ق(∠ ب أ ء)



الحـــــل

أ ب قطر ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ ء جـ ب) = ١١٥° − ٩٠° = ٢٥°

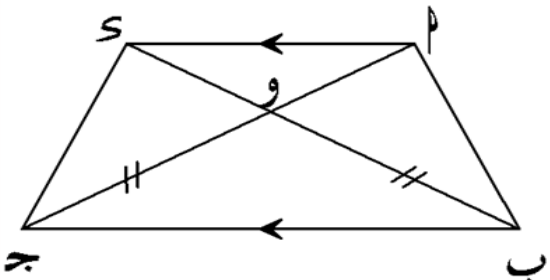
ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ء جـ ب) [محيطيتان مشتركتان فى القوس]

∴ ق(∠ ب أ ء) = ٢٥°

[٤١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أ ء // ب جـ ، أ جـ ∩ ب ء = { و } حيث و ب = و جـ

فأثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــل

و ب = و جـ

∴ ق(∠ و ب جـ) = ق(∠ و جـ ب) .... (١)

أ ء // ب جـ

∴ ق(∠ ء أ جـ) = ق(∠ و جـ ب) .... (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ ء أ جـ) = ق(∠ ء ب جـ) [زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

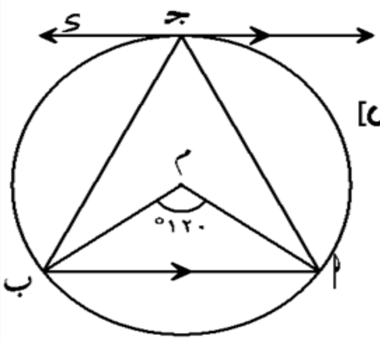
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

[٤٢] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ ، ق(∠ ا م ب) = ١٢٠°

أثبت أن : △ جـ ا ب متساوى الأضلاع

الحـــــــل



ق(∠ ا جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ا م ب) [محيطية ومركزية مشتركتان فى القوس]

∴ ق(∠ ا جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠° .... (١)

ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) الأصغر = ق(∠ ا م ب) = ١٢٠

$\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = $\frac{٣٦٠ - ١٢٠}{٢}$ = $\frac{٢٤٠}{٢}$ = ١٢٠°

ق(∠ جـ ا ب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ٦٠° ....(٢)

ق(∠ جـ ب ا) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠° ....(٣) من ١ ، ٢ ، ٣

△ ا ب جـ متساوى الأضلاع

الهندسة

الوحدة الرابعة

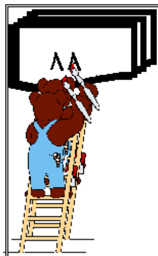
❶ نتائج على الدائرة

❷ موضع (نقطة – مستقيم – دائرة) بالنسبة لدائرة

❸ تعيين الدائرة

❹ نظرية الأوتار المتساوية فى الدائرة

Mr : Walid Rushdy   0112467874   0162220750

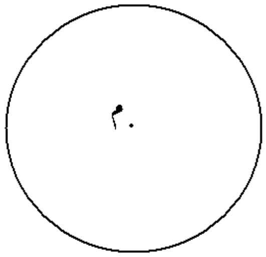


هندسة الدائرة

الدائرة

هى مجموعة لا نهائية من نقط المستوى التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة .

النقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة. والبعد الثابت يسمى طول نصف القطر.



سطح الدائرة

(١) مجموعة نقط الدائرة $\cup$ مجموعة النقط داخل الدائرة

(٢) مجموعة النقاط داخل الدائرة اتحاد مجموعة نقاط الدائرة تسمى منطقة دائرية.

(٣) مركز الدائرة م $\in$ لمجموعة النقط داخل الدائرة

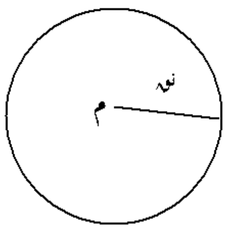
(٤) مركز الدائرة م $\notin$ لمجموعة نقط الدائرة

(٥) مركز الدائرة م $\in$ لمجموعة نقط سطح الدائرة

(٦) مساحة سطح الدائرة = π نق^2

(٧) محيط الدائرة = ٢ π نق

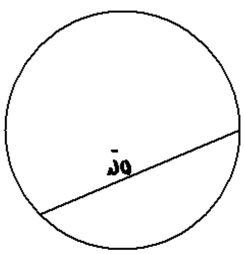
نصف قطر الدائرة:



(١) قطعة مستقيمة طرفيها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة.

(٢) أنصاف أقطار الدائرة الواحدة (الدوائر المتطابقة) متساوية فى الطول

وتر الدائرة:

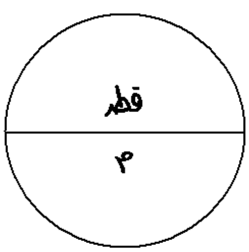


(١) قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين مختلفتين من نقاط الدائره.

(٢) اوتار الدائرة ليس بالضرورة ان تكون متساوية

(٣) طول أى وتر فى الدائرة غير ما بمركزها أصغر من طول قطر الدائرة

قطر الدائرة :



(١) هو وتر فى الدائرة يمر بمركزها.

(٢) القطر أكبر وتر فى الدائرة

(٣) كل قطر يسمى وتر ولكن ليس كل وتر يسمى قطر

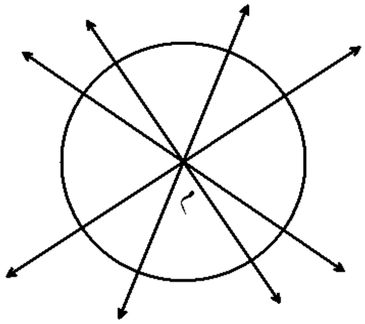
تطابق دائرتين :

يقال لدائرتان أنهما متطابقتان إذا تساوى طولا نصف قطريهما.

محور تماثل الدائرة

(١) كل مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها.

(٢) عدد محاور تماثل الدائرة = عدد لا نهائى من الدوائر



يلاحظ أن:

الدائره تجزئ مجموعة نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات هى :-

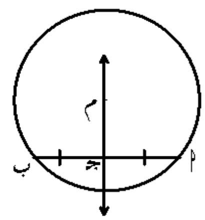
أ) مجموعة نقاط الدائرة ب) مجموعة نقاط داخل الدائرة جـ) مجموعة نقاط خارج الدائرة

نتائج هامة على الدائرة

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

∵ جـ منتصف $\overline{أ ب}$

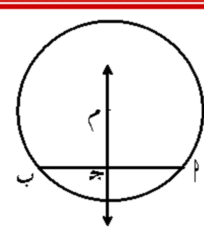
∴ $\overleftrightarrow{م جـ} \perp \overline{أ ب}$



المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أى وتر فيها يكون ينصف هذا الوتر

∵ $\overleftrightarrow{م جـ} \perp \overline{أ ب}$

∴ جـ منتصف $\overline{أ ب}$

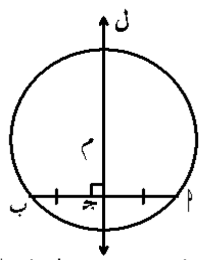


المستقيم المار عموديا على أى وتر من منتصفه يمر بمركز الدائرة (محور تماثل لهذه للدائرة)

∵ جـ منتصف $\overline{أ ب}$

∵ المستقيم ل $\perp \overline{أ ب}$

∴ م ∈ المستقيم ل



ملاحظات لحل التمارين

(١) فى المثلث القائم الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوى نصف طول الوتر

(٢) فى المثلث القائم مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة

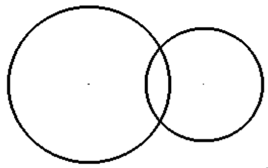
(٣) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها = نصف طول هذا الضلع

(٤) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتين (متساويتان فى القياس)

تمارين نتائج المفاهيم الأساسية على الدائرة

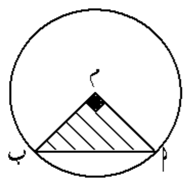
[١] أكمل ما يأتى

(١) الوتر الذى يمر بمركز الدائرة يسمى ....



(٢) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....

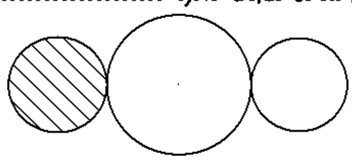
(٣) إذا كان أكبر أوتار الدائرة طولا = ١٤سم فان محيط هذه الدائرة = ...



(٤) فى الشكل المقابل إذا كانت م دائرة ، محيط الدائرة م = ١٢ π سم

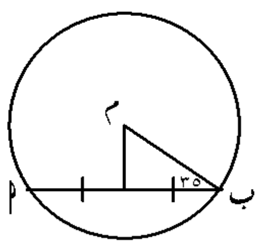
فان مساحة △ أ م ب = ... سم²

(٥) عدد محاور تماثل الدائرة .... بينما عدد محاور تماثل نصف دائرة ....



(٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....

(٧) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر ....



(٨) فى الشكل المقابل

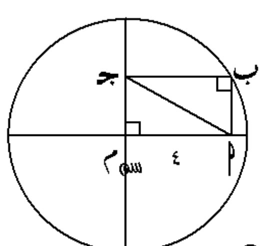
ء منتصف أ ب ، ق(∠ب) = ٣٥ ° فان ق(∠أ م ء)= ....

(٩) ناتج ضرب النسبة التقريبية π فى طول قطر الدائرة = ...

(١٠) أكبر أوتار الدائرة طولا يسمى ....

(١١) إذا كانت $\overline{\text{ءهـ}}$ قطر فى دائرة م ، ء(– ٤ ، ٠) ، م(٠ ، ٢)

فان هـ = (.... ، ....) وطول نصف قطر الدائرة = ... وحدة طول



(١٢) فى الشكل المقابل أ ب جـ م مستطيل ، أ م = ٤سم ، نصف قطر الدائرة م = ٥سم

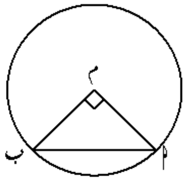
فان أ جـ = ... سم ، أ ب = ... سم

(١٣) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م حيث أ(٣ ، –٥) ، ب(–٧ ، –١) فيكون احداثى نقطة مركز الدائرة م ....

(١٤) إذا كانت م دائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها ، $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فان $\overline{\text{ب ء}}$ ...... $\overline{\text{أ ء}}$

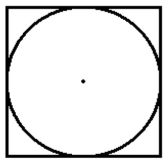
(١٥) فى الشكل المقابل : اذا كانت م دائرة ، مساحة △ ا م ب = ٥٠سم٢

فان مساحة سطح الدائرة م = ...



(١٦) فى الشكل المقابل : دائرة مرسومة داخل مربع مساحتها ١٦π سم٢

فان طول ضلع المربع = ... سم

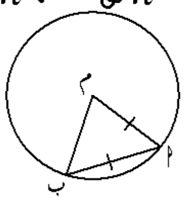


(١٧) إذا كانت $\overline{ءهـ}$ قطر فى دائرة م ، ء(- ١ ، ٨) ، م(٣ ، ٢) فان هـ = (.... ، ....)

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإختيارات الآتية

(١) مساحة سطح الدائرة = ... وحدة مربعة [٤πنق ، ٢πنق ، π نق ، π نق٢]

(٢) فى الشكل المقابل △ ا م ب ....



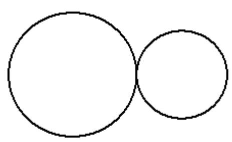
[متساوى الأضلاع ، مختلف الأضلاع ، قائم الزاوية ، منفرج الزاوية]

(٣) عدد محاور تماثل الدائرة .... [٤ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

(٤) أكبر الأوتار طولا فى الدائرة .... [المماس ، المحيط ، القطر ، نصف القطر]

(٥) محيط الدائرة = ... وحدة طول [٤πنق ، ٢πنق ، π نق ، π نق٢]

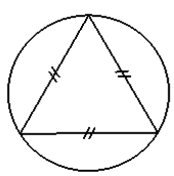
(٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....



[٤ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

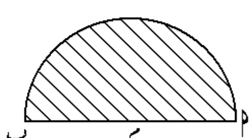
(٧) دائرة طول نصف قطرها $\frac{5}{\pi}$ سم فان محيطها = ... سم [٨ ، ١٠ ، ١٢ ، $\frac{10}{\pi}$]

(٨) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....



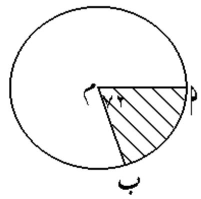
[٤ ، ٣ ، ١ ، عدد لانهائى]

(٩) فى الشكل المقابل : محيط الشكل = ... وحدة طول



[٢ π نق + ٢نق ، π نق + نق ، π نق ، π نق + ٢نق]

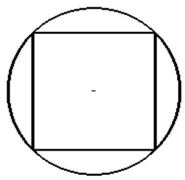
(١٠) فى الشكل المقابل : مساحة الجزء المظلل = ... سم^2



[$\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ، $\frac{1}{4}\pi$ نق^2 ، $\frac{1}{5}\pi$ نق^2 ، $\frac{1}{6}\pi$ نق^2]

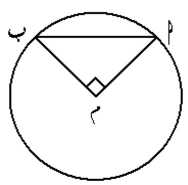
(١١) أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو .... [قطر فيها ، محور تماثل لها ، وتر فيها ، مماس لها]

(١٢) فى الشكل المقابل : مربع مرسوم داخل دائرة مساحته ١٨ سم^2



فان طول قطر الدائرة = ... سم [٦ ، ١٢ ، ٢٤ π ، ٩ π]

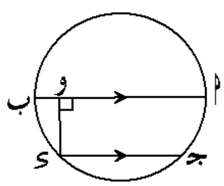
(١٣) إذا كانت م دائرة ، مساحة سطح الدائرة م = ١٥٤ سم^2



فان مساحة $\triangle$ أ م ب = ... سم^2

[١٤ ، ٤٩ ، ٧ π ، ٢٤,٥]

(١٤) فى الشكل المقابل



إذا كان أ ب = ٢٦سم ، جـ ء = ٢٤سم

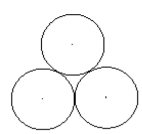
، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ء و}$ $\perp$ $\overline{أ ب}$ فان ء و = ... سم

[٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٢]

(١٥) وتر طوله ١٢سم مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠سم فان بعد هذا الوتر عن مركزها .... سم

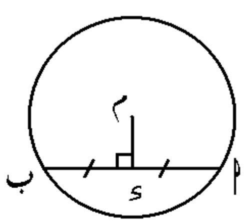
[٧ ، ٢٦ ، ٨ ، ٢]

(١٦) عدد محاور تماثل الشكل المقابل ....



[٣ ، ٢ ، ١ ، عدد لانهائى]

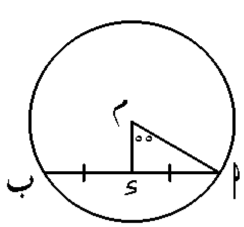
[٣] فى الشكل المقابل



الدائرة م طول نصف قطرها ٥سم ، $\overline{أ ب}$ وتر فيها

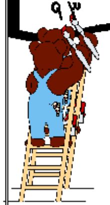
، ء منتصف $\overline{أ ب}$ فاذا كان م ء = ١٤سم . **أوجد مساحة سطح الدائرة م**

[٤] فى الشكل المقابل

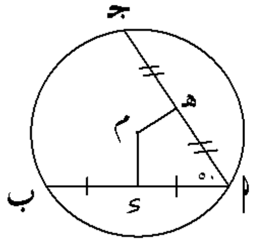


الدائرة م فيها ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، ق($\angle$ م) = ٥٥°

أوجد ق($\angle$ م أ ء)



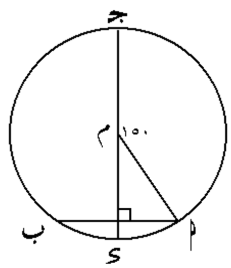
[٥] في الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٠°

، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ **احسب** ق(∠ ء م هـ)

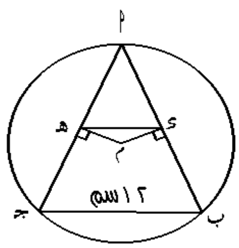
[٦] في الشكل المقابل



أ ب وتر فى دائرة مركزها م ، جـ ء قطر فيها ، جـ ء ⊥ أ ب

فاذا كان أ ب = ٨سم ، ق(∠ أ م جـ) = ١٥٠° **أوجد** طول جـ ء

[٧] في الشكل المقابل

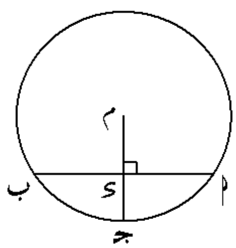


أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ .

اثبت أن ء هـ // ب جـ

وإذا كان ب جـ = ١٢سم **أوجد** طول ء هـ

[٨] في الشكل المقابل

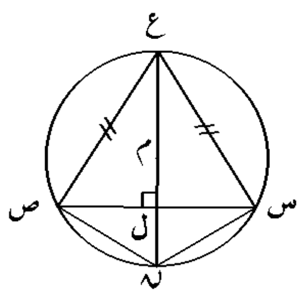


أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، م ء ⊥ أ ب ،

هـ منتصف أ جـ فاذا كان ق(∠ جـ) = ٦٠° ، ب جـ = ٥سم

أوجد: ❶ ق(∠ ء م هـ) ❷ محيط △ أ ب جـ ❸ طول نصف قطر الدائرة م

[٩] في الشكل المقابل

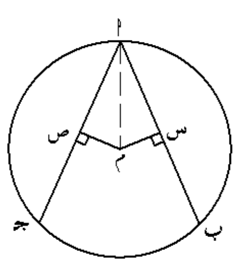


س ع = ص ع ، ع ل ⊥ س ص ، حيث ع ل ∩ الدائرة م = { ن }

اثبت أن : م ∈ ع ل وإذا كان س ص = ١٦سم ، نق = ١٠سم .

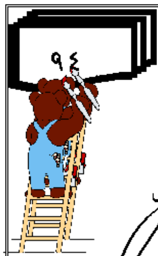
أوجد طول م ل ، ع ص ، **اثبت أن** س ن = ن ص

[١٠] في الشكل المقابل

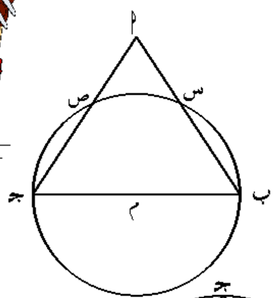


أ ب = أ جـ = ٢٤سم ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

فإذا كان م س = ٥سم . **أوجد نصف قطر الدائرة** م



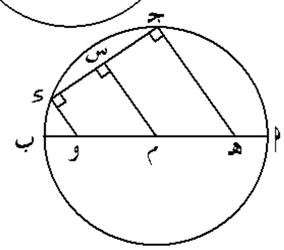
[١١] في الشكل المقابل



ب جـ قطر فى الدائرة م ، أ ب = أ جـ

اثبت أن : أ س = أ ص

[١٢] في الشكل المقابل

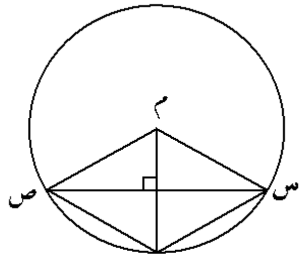


أ ب قطر فى الدائرة م ، جـ ء وترفيها ، هـ ∈ م أ ، و ∈ م ب ،

م س ⊥ جـ ء ، هـ جـ ⊥ جـ ء ، و ء ⊥ جـ ء .

برهن أن أ هـ = ب و

[١٣] في الشكل المقابل



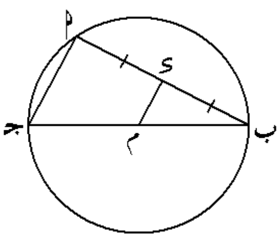
الدائرة م طول قطرها ٢٦سم ، س ص وترا فيها طوله ٢٤سم .

أوجد مساحة سطح △ س ص م .

وإذا سم م ع ⊥ س ص يقطع الدائرة م فى ع .

أوجد مساحة سطح △ س ص ع **ومن ذلك استنتج : مساحة سطح الشكل الرباعى** س م ص ع

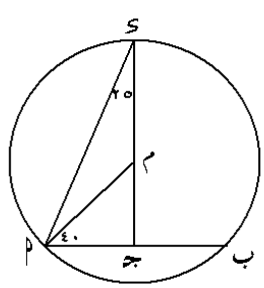
[١٤] في الشكل المقابل



أ ب وتر فى دائرة م ، ب جـ قطر فيها ، ء منتصف أ ب

اثبت أن م ء // أ جـ . **ثم احسب :** ق(∠ أ)

[١٥] في الشكل المقابل

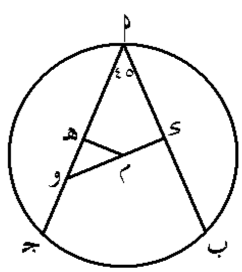


أ ب وتر فى الدائرة م ، ق(∠ ء) = ٢٥°

، ق(∠ م أ جـ) = ٤٠°

برهن أن : جـ منتصف أ ب

[١٦] في الشكل المقابل

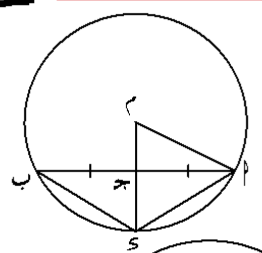


أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٤٥

ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

اثبت أن : △ هـ و م متساوى الساقين

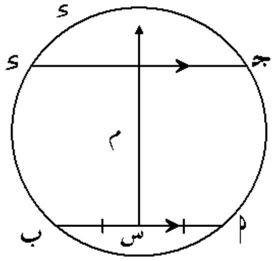
[١٧] في الشكل المقابل



م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها طوله ٢٤ سم ،

جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ∩ الدائرة م = { ء } **أوجد** : مساحة △ أ ء ب

[١٨] في الشكل المقابل

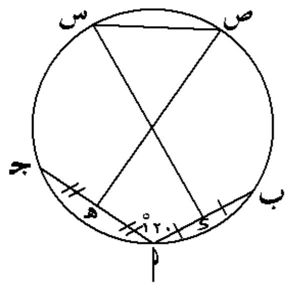


م دائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، رسم $\overrightarrow{\text{س م}}$ فقطع $\overline{\text{جـ ء}}$ في ص

أثبت أن : ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$

[١٩] في الشكل المقابل

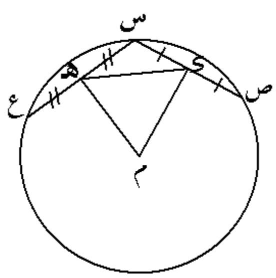


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران في الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب رسم $\overrightarrow{\text{ء م}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ م}}$ فقطعا الدائرة في س ، ص على الترتيب

أثبت أن △ س ص م متساوى الأضلاع

[٢٠] في الشكل المقابل

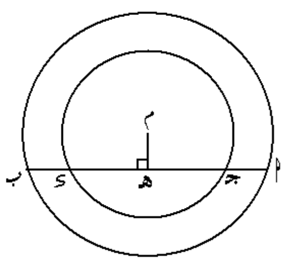


$\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ وتران متساويان في الطول في دائرة م بحيث ق(ص س ع) = ١٢٠°

فاذا كان : ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ على الترتيب

أوجد : ق(∠ء م هـ) **أثبت أن** : △ م ء هـ متساوى الساقين

[٢١] في الشكل المقابل

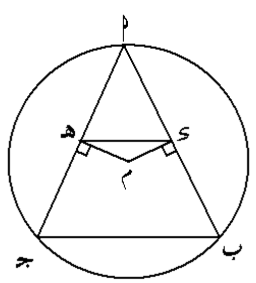


دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة الكبرى

ويقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن : أ جـ = ب ء

[٢٢]



△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م

، $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

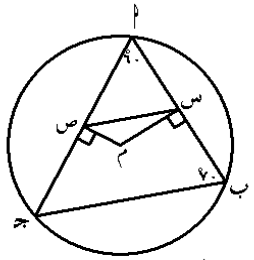
أثبت أن : $\overline{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$.

محيط △ جـ ء هـ = $\frac{1}{2}$ محيط △ أ ب جـ

[٢٣] في الشكل المقابل

م دائرة ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ ، ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠ب) = ٧٠° **أوجد قياسات زوايا** △ م س ص

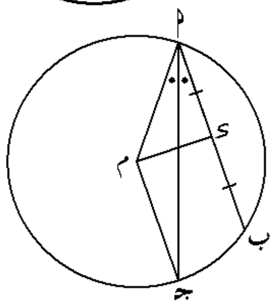


[٢٤] في الشكل المقابل

أ ب وترفى الدائرة م ، أ جـ ينصف (∠ ب أ م) ويقطع الدائرة م فى جـ

، اذا كانت ء منتصف أ ب

اثبت أن : م ء ⊥ جـ م

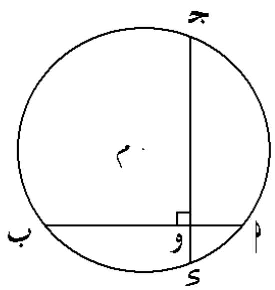


[٢٥] في الشكل المقابل

دائرة م طول نصف قطرها ٧سم ، أ ب ، جـ ء وتران

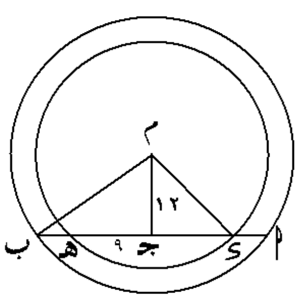
متعامدان ومتقاطعان فى النقطة و

فإذا كان : أ ب = ١٢سم ، جـ ء = ١٠سم . **أوجد طول** م و



[٢٦] أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى دائرة م ، أ ب = ١٢سم ، جـ ء = ١٦سم

أوجد البعد بين هذين الوترين اذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠سم **فهل توجد إجابات أخرى ؟ فسر إجابتك**



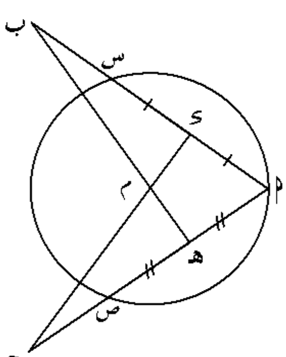
[٢٧] في الشكل المقابل

أ ب وترفى الدائرة الكبرى ويقطع الدائة الصغرى فى ء ، هـ

فاذا كان جـ منتصف أ ب ، م جـ = ١٢سم ، جـ هـ = ٩سم ،

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = $\frac{٣}{٤}$ طول نصف قطر الدائرة الكبرى .

فأوجد : طول هـ ب



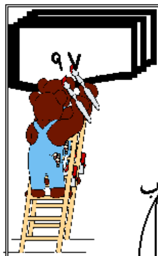
[٢٨] في الشكل المقابل

أ س ، أ ص وتران فى دائرة م ، ء منتصف أ س ،

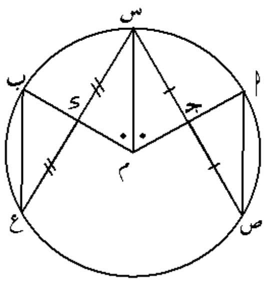
هـ منتصف أ ص ، ء م ∩ أ ص = {ب}

فاذا كان أ ب = أ جـ

برهن أن أ س = أ ص



[٢٩] في الشكل المقابل



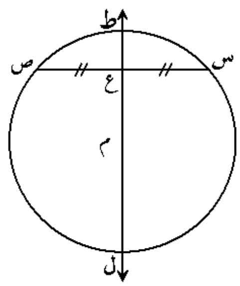
س ص ، س ع وتران فى دائرة م ،

وكان جـ ، ء منتصفا س ص ، س ع على الترتيب

م س ينصف (∠ جـ م ء) ، م جـ ، م ء يقطعان الدائرة م فى أ ، ب على الترتيب

اثبت أن : أ ص = ب ع

[٣٠] في الشكل المقابل

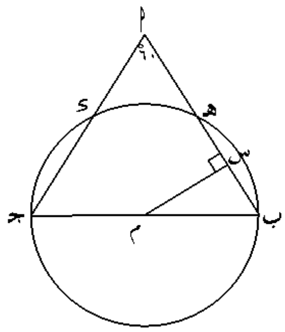


س ص وتر فى الدائرة م ، ع منتصف س ص ، رسم المستقيم م ع قطع الدائرة فى ل ، ط

اثبت أن : ق (∠ ل س ط) = ٩٠° ،

إذا كان س ص = ١٢سم ، ل ع = ٩سم . **احسب طول قطر الدائرة .**

[٣١] في الشكل المقابل

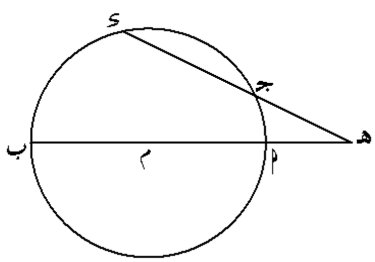


ب جـ قطر فى دائرة م ، أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°

ب س = ٢,٥سم ، م س ⊥ أ ب .

أوجد طول أ هـ

[٣٢] في الشكل المقابل

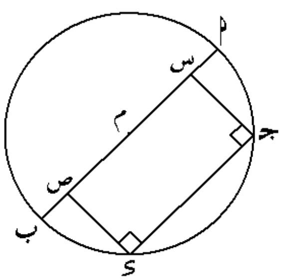


أ ب قطر فى الدائرة م ، ب أ ∩ ء جـ = { هـ }

اثبت أن : هـ ب > هـ ء

هـ جـ > هـ أ

[٣٣] في الشكل المقابل



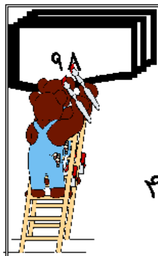
أ ب قطر فى الدائرة م ، جـ ء وتر فيها

س جـ ⊥ جـ ء ، ص ء ⊥ جـ ء

اثبت أن : أ س = ب ص

[٣٤] فى مستوى احداثى متعامد اذا كان : أ ب قطر فى دائرة مركزها م حيث : أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، - ٣) **أوجد**

احداثيى نقطة م **ثم احسب محيط الدائرة** م



[٣٥] فى مستوى احداثى متعامد اذا كانت : م(−١ ، ٢) ، أ(٢ ، ٦) ، ب(٢ ، −٢)

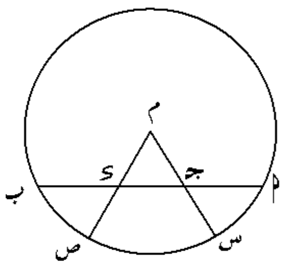
اثبت أن : م مركز دائرة مارة بالنقطتين أ ، ب **ثم احسب البعد العمودى للوتر** $\overline{\text{أب}}$ **عن مركز الدائرة** م

[٣٦] فى مستوى احداثى متعامد اذا كانت $\overline{\text{أب}}$ وتر فى دائرة م ، ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ فاذا كانت :

أ(٤ ، ١) ، ب(−٤ ، ٥) **فأوجد معادلة** $\overleftrightarrow{\text{مء}}$

تمارين متميزة للمتفوقين

[٣٧] فى الشكل المقابل

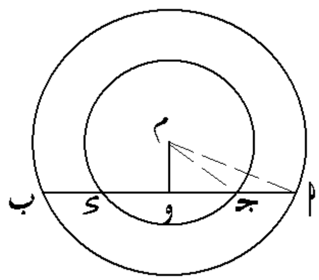


$\overline{\text{أب}}$ وتر فى دائرة م ، $\overline{\text{مس}}$ ، $\overline{\text{مص}}$ نصفى قطر للدائرة م ،

$\overline{\text{مس}}$ ∩ $\overline{\text{أب}}$ = {ء} ، أء = ب جـ

اثبت أن : جـ س = ء ص   **برهن أن** ق(∠ أ س م) = ق(∠ ب ص م)

[٣٨] فى الشكل المقابل

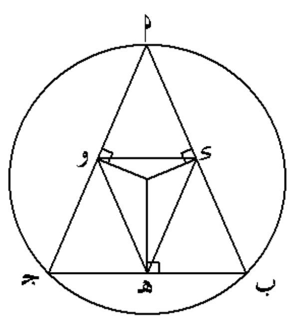


دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء .

فاذا كان م أ = ٤$\sqrt{٥}$سم ، م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، م و = ٤سم ، أ جـ = ٥سم .

فأوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى

[٣٩] فى الشكل المقابل

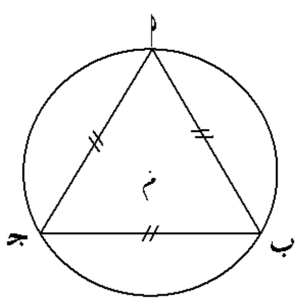


دائرة م ، $\overline{\text{مء}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\overline{\text{مو}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$.

اثبت أن : △ ء هـ و ~ △ أ ب جـ

[٤٠] فى الشكل المقابل

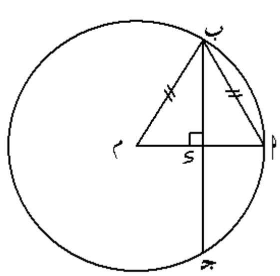


△ أ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م طول ضلعة = ١٢سم

فاذا كان م نقطة تلاقى المتوسطات △ أ ب جـ

فأوجد طول نصف قطر الدائرة م

[٤١] فى الشكل المقابل



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتران فى الدائرة م ، أ ب = ب م ،

$\overline{\text{مأ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب جـ = ١٤$\sqrt{٣}$سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م.

موضع نقطة بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع نقطة بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين البعد بين النقطة أ ومركز الدائرة م وليكن أ م فإذا كانت

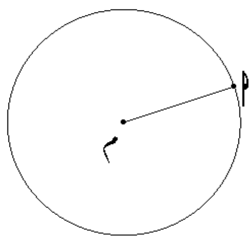
١. البعد أ م = نق   **فان النقطة تقع على الدائرة.**

٢. البعد أ م > نق   **فان النقطة تقع خارج الدائرة.**

٣. البعد أ م < نق   **فان النقطة تقع داخل الدائرة.**

٤. البعد أ م = ٠   **فان النقطة تقع فى مركز الدائرة (داخل الدائرة) .**

إذا كان أ تقع على الدائرة

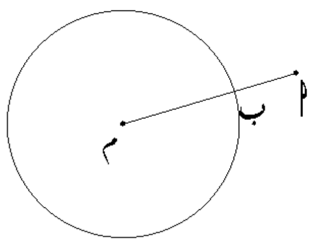


البعد أ م = نق فان النقطة تقع على الدائرة ، تقع على الدائرة.

م أ = نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { أ }

إذا كان أ تقع خارج الدائرة

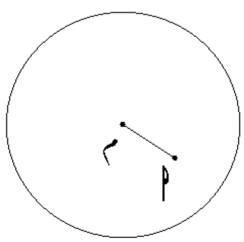


م أ > نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { ب }

النقطة تقع خارج الدائرة إذا كان البعد م أ ∈] نق ، ∞ [

إذا كان أ تقع داخل الدائرة



م أ < نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = ∅

النقطة تقع داخل الدائرة إذا كان البعد م أ ∈] صفر ، نق [

مثال

دائرة م نصف قطرها ٧سم حدد موضع النقطة أ فى الحالات التالية

م أ = ٣سم ، م أ = ٨سم ، م أ = ٧سم ، م أ = ٢ نق ، م أ = $\frac{\text{نق}}{٣}$ ، م أ = ٥$\sqrt{٢}$

م أ = ٣سم   فان ٣ < ٧   م أ < نق   أ تقع داخل الدائرة

م أ = ٨سم   ٨ > ٧   م أ > نق   أ تقع خارج الدائرة

م أ = ٧سم   ٧ = ٧   م أ = نق   أ تقع على الدائرة

م أ = ٢ نق   ٢نق > نق   أ تقع خارج الدائرة

م أ = $\frac{\text{نق}}{٣}$ $\frac{\text{نق}}{٣}$ < نق   أ تقع داخل الدائرة

م أ = ٢$\sqrt{٢}$ـ ٥$\sqrt{٢}$ > ٧   أ تقع خارج الدائرة لأن $(٢\sqrt{٢})^٢ > (٧)^٢$

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة معلومة

لمعرفة موضع مستقيم ل بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين بعد مركز الدائرة م عن المستقيم ل وليكن م أ فإذا كان

١. أ م > نق كان المستقيم ل **يقع خارج الدائرة.**

٢. أ م = نق كان المستقيم ل **مماس للدائرة.**

٣. أ م < نق كان المستقيم ل **قاطع للدائرة.**

٤. أ م = صفر كان المستقيم ل **محور تماثل للدائرة.**

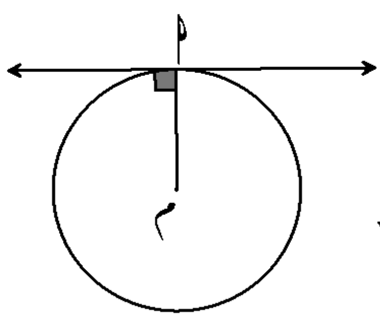
ملاحظات

المستقيم ل يقع **خارج الدائرة** إذا كان البعد أ م ∈]نق ، ∞[

المستقيم ل يسمى **مماس** لدائرة إذا كان البعد أ م = نق

المستقيم ل يسمى **قاطع** لدائرة إذا كان البعد أ م ∈]صفر ، نق[

المستقيم ل يسمى **محور تماثل** لدائرة إذا كان البعد أ م = صفر



ل مماس للدائرة م

(أ) م أ = نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل مماس للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { أ }

إذا قطع المستقيم ل الدائرة م في نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

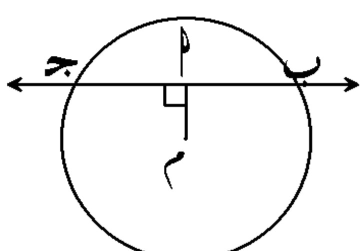
(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = { أ }

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م في نقطة واحدة كان المستقيم ل مماس للدائرة

ل قاطع للدائرة م

(أ) م أ < نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل أقل من نق كان المستقيم ل قاطع للدائرة م

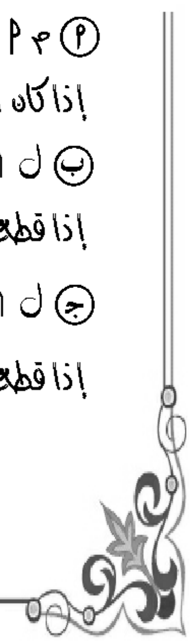


(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ }

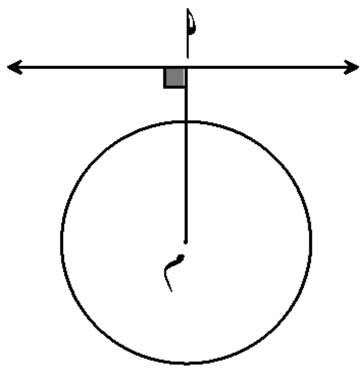
إذا قطع المستقيم ل الدائرة م في نقطتين كان المستقيم ل قاطع للدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب جـ}}$

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة كان المستقيم ل قاطع للدائرة



ل يقع خارج الدائرة م



(أ) م أ > نق

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى نق كان المستقيم ل خارج الدائرة م

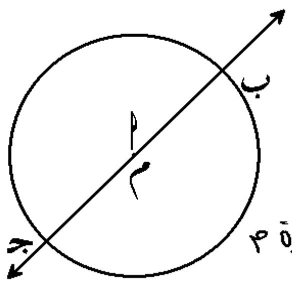
(ب) ل ∩ الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل خارج الدائرة

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

إذا لم يقطع المستقيم ل سطح الدائرة م فى أى نقطة كان المستقيم ل قاطع للدائرة

ل محور تماثل لدائرة م



(أ) م أ = صفر

إذا كان البعد العمودي م أ عن المستقيم ل يساوى صفر كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(ب) ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ } و يمر بالنقطة م

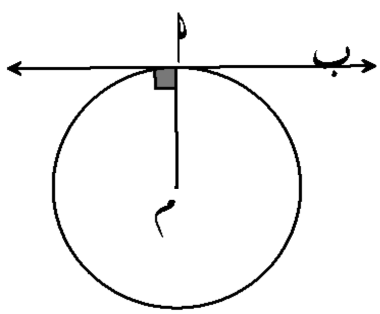
إذا قطع المستقيم ل الدائرة م فى نقطتين و يمر بالنقطة م كان المستقيم ل محور تماثل للدائرة م

(جـ) ل ∩ سطح الدائرة م =

إذا قطع المستقيم ل سطح الدائرة م ونتج قطعة مستقيمة طرفيها نقطتين على الدائرة و يمر بالنقطة م

كان المستقيم ل قاطع للدائرة

نتيجة ١



المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .

أى أن نصف القطر للدائرة يكون عمودى على المماس عند نقطة التماس

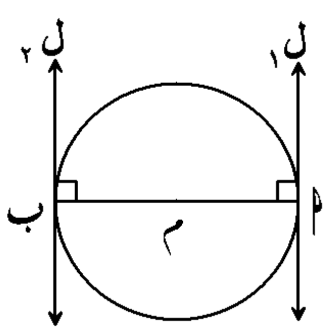
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

م أ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ق(م أ ب) = ٩٠°

نتيجة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماس لها .

نتيجة ٣



المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان .

إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م وكان $\overline{أب}$ ⊥ $ل_1$ ، $\overline{أب}$ ⊥ $ل_2$ فان

$ل_1$ ، $ل_2$ مماسا للدائرة .

المماسان $ل_1$ ، $ل_2$ عمودان على القطر $\overline{أب}$ ، و منها $ل_1$ // $ل_2$

أى أن المماسان لدائرة عند نهايتى القطر يكونان متوازيان

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة للدائرة

[١] أكمل ما يأتى

(١) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ ، ب } فإن المستقيم ل يكون ....

(٢) دائرة م طول قطرها ١٠سم ، أ نقطة فى مستواها وكان م أ = ١٠سم فإن أ ....الدائرة

(٣) إذا كان م دائرة محيطها ٨πسم ، أ نقطة على الدائرة فإن : م أ = ...

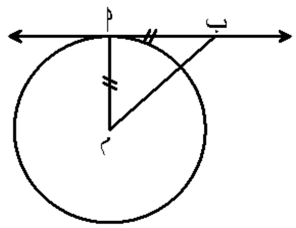
(٤) دائرة م طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة فإذا كان م أ = $\frac{٢نق}{٣}$ فإن النقطة أ تقع .... الدائرة

(٥) دائرة م طول قطرها ٦سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها م مسافة ٦سم فإن المستقيم ل يكون ....

(٦) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فإن المستقيم ل يقع ....

(٧) إذا كان المستقيم ل يقطع الدائرة م فى النقطتين أ ، ب فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ...

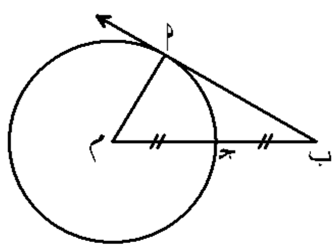
(٨) فى الشكل المقابل



إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسا للدائرة م عند أ ، أ ب = م أ

فإن ق(∠م) = ...°

(٩) فى الشكل المقابل



إذا كان $\overrightarrow{بأ}$ مماسا للدائرة م عند أ ، ب جـ = م جـ فإن

ق(∠ب) = ...°

ق(∠م) = ...° ، م أ = ... م ب

[٢] دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٧سم ، م أ ⊥ ل حيث أ ∈ ل حيث أ نقطة فى مستوى الدائرة

حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م فى الحالات التالية

❶ إذا كان : م أ = ٤$\sqrt{٣}$ سم ❷ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٧}$ سم ❸ إذا كان : م أ = ٥سم

❹ إذا كان : ٢ م أ – ٥ = ٩ ❺ إذا كان : م أ = ٢$\sqrt{٧}$ سم ❻ إذا كان : م أ = صفر

❼ إذا كان : المستقيم ل يقطع الدائرة م فى نقطتين ، م أ = ٣س – ٥ فإن : س ∈ ....

❽ إذا كان : المستقيم ل يقطع الدائرة م فى نقطة واحدة ، م أ = س^{٢} – ٢ فإن : س ∈ ....

❾ إذا كان : المستقيم ل لا يقطع الدائرة م ، م أ = ٢س – ١ فإن : س ∈ ....

[٣] دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٦سم ، أنقطة فى مستوى الدائرة حدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى الحالات التالية

❶ إذا كان : م أ = ٨سم ❷ إذا كان : م أ = ٥سم ❸ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

❹ إذا كان : م أ = ٣$\sqrt{٦}$ سم ❺ إذا كان : م أ = صفر ❻ إذا كان : م أ = ٢$\sqrt{٥}$

[٤] إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = نق ، م أ ⊥ ل ، أ ∈ ل فحدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م

فى كلا من الحالات التالية ① أ م = نق ② أ م = ٣نق ③ أ م = $\frac{٤}{٥}$ نق

[٥] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت : م دائرة طول قطرها ٦سم ، أ نقطة على الدائرة فان : ....

(أ) م أ > ٦سم (ب) م أ = ٦سم (جـ) م أ = ٣سم (د) م أ < ٣سم

(٢) م دائرة طول نصف قطرها ٣سم ، أ نقطة بحيث م أ = ٧سم فان : ....

(أ) أ ∉ الدائرة م (ب) أ ∈ الدائرة م

(جـ) أ ∈ أحد أنصاف أقطار الدائرة (د) أ إحدى نقاط التماس

(٣) إذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة م طول قطرها ٦سم فانه يبعد عن مركزها ....سم

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٤) دائرة م طول نصف قطرها ٥سم ، أ نقطة خارج الدائرة فان م أ يمكن أن تساوى .... سم

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٤

(٥) م دائرة طول قطرها ٦سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٤سم فان المستقيم ل ....

(أ) قاطع للدائرة (ب) مماس للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) يمر بمركز الدائرة

(٦) أ ب قطر فى الدائرة م ، المستقيمان أ جـ ، ب ء مماسان للدائرة ، فان أ جـ .... ب ء

(أ) يقطع (ب) يوازى (جـ) عمودي على (د) ينطبق

(٧) دائرة م محيطها ٦π سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٣سم . فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) قطرا فى الدائرة .

(٨) دائرة م مساحتها ٢٥ π سم² ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة ٤سم . فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) قطرا فى الدائرة .

(٩) دائرة م مساحتها ٤٩π سم² ، و النقطة أ تبعد عن مركزها مسافة ٧سم . فان النقطة أ تقع ....

(أ) فى مركز الدائرة (ب) داخل لدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) على الدائرة .

(١٠) دائرة م طول قطرها ١٤سم فإذا كان المستقيم ل خارج الدائرة م فانه يبعد عن مركزها مسافة ∈ ....

(أ) [٠ ، ٧] (ب)]٠ ، ٧[(جـ) [٠ ، ٧[(د) [٤ ، ∞[

(١١) إذا كانت أ نقطة فى مستوى الدائرة م ، طول نصف قطرها نق وكان صفر < م أ < نق فان أ تقع ...... الدائرة

(أ) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) على مركز

(١٢) دائرة قطرها (٢ س + ٢)سم ، والمستقيم ل يبعد عنها مسافة س سم فان المستقيم ل يكون..........

(أ) قاطعا للدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) قطرا فى الدائرة . (د) مماسا للدائرة

(١٣) المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ....

(أ) متعامدان (ب) متوازيان (ج) متساويان فى الطول (د) متقاطعان

(١٤) دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) محور تماثل للدائرة

(١٥) ل يبعد عن مركزها ٤,٥سم فان المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسا للدائرة (ب) قاطعا للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) محور تماثل للدائرة

(١٦) دائرة طول قطرها ٨سم ، فإذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة فانه يبعد عن مركزها مسافة

(أ) ٤سم (ب) ٨سم (ج) ١٦سم (د) ٢سم

(١٧) م دائرة طول نصف قطرها نق ،فإذا كانت النقطة أ تقع فى مستواها بحيث م أ = $\frac{٣}{٤}$ نق سم فان النقطة أ تقع ....

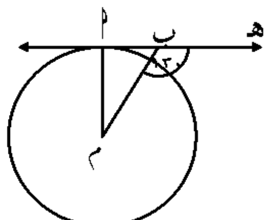
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) فى مركز الدائرة

(١٨) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فان المستقيم ل يكون .... الدائرة

(أ) قاطع (ب) خارج (ج) مماس (د) محور تماثل

(١٩) م دائرة طول قطرها ١٠سم ، فإذا كانت النقطة س تقع فى مستواها بحيث م س = ٦سم فان النقطة س تقع ......

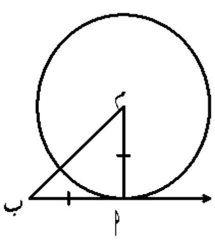
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) فى مركز الدائرة



(٢٠) إذا كان : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ ، ق(∠ م ب هـ) = ١٣٠°

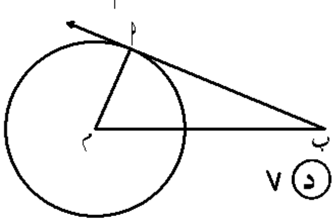
فان ق(∠ أ م ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (ج) ٦٠ (د) ٥٠



(٢١) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماسا للدائرة م عند أ ، أ م = أ ب فان ق(∠م) = ... °

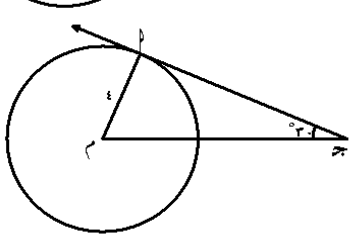
(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠



(٢٢) إذا كانت $\overleftrightarrow{أب}$ تمس الدائرة م عند أ ، أ م = ٥سم ، م ب = ١٣سم

فان : أ ب = ...سم

(أ) ١٩ (ب) ١٢ (ج) ٥ (د) ٧

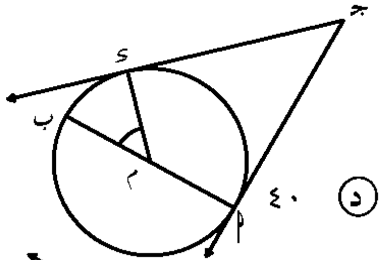


(٢٣) $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(∠أ جـ م) = ٣٠° .

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٤سم

فان : م جـ = ... سم

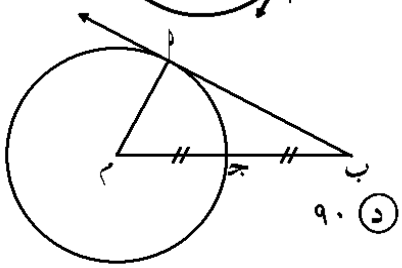
(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) ٤√٣ (د) ٨√٣



(٢٤) أ ب قطر فى دائرة م ، أجـ ، جـ ء يمسان الدائرة م عند أ ، ء

فإذا كان : ق(∠ ء م ب) = ٥٠° فإن : ق(∠ جـ) = ... °

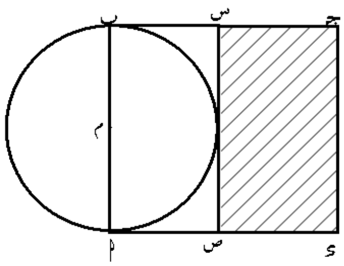
(أ) ٥٠ (ب) ١٣٠ (ج) ٩٠ (د) ٤٠



(٢٥) إذا كانت : أب تمس الدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = {جـ}

حيث م جـ = ب جـ فإن : ق(∠ ب) = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

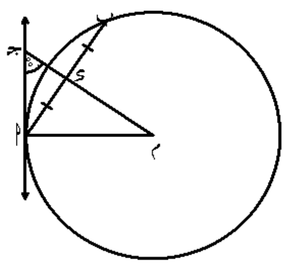


(٢٦) دائرة م ، أب قطر فيها ، أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨سم

، س ص مماس // أ ب

فان مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (ج) ٣٢ (د) ٨



(٢٧) إذا كانت أجـ يمس الدائرة م عند أ ، ء منتصف الوتر أ ب

، ق(∠ أ جـ م) = ٥٠°

فان : ق(∠ ب أ م) = ... °

(أ) ٤٠ (ب) ٤٥ (ج) ٥٠ (د) ٩٠

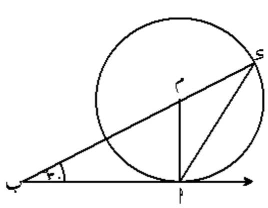
[٦] دائرة م طول قطرها ٢س سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها (س + ١) سم

حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م

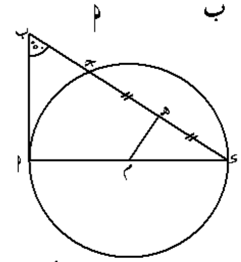
[٧] فى كل من الأشكال الآتية م دائرة ، المستقيم أ ب مماس . أكمل

ق(∠أ م ب) = ... °

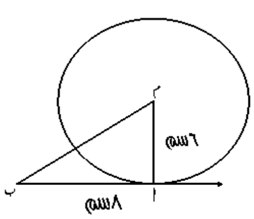
ق(∠أ ء ب) = ... °



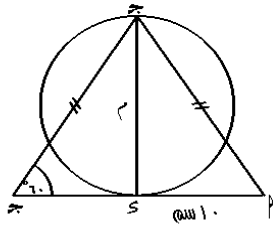
ق(∠ أ م هـ) = ... °



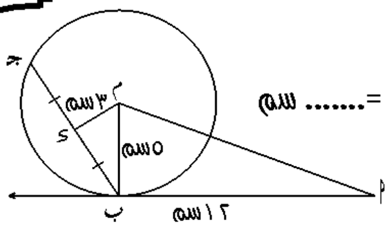
ء ب = ... سم



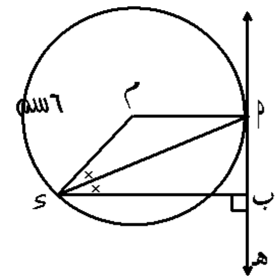
محيط △ أ ب جـ = ... سم

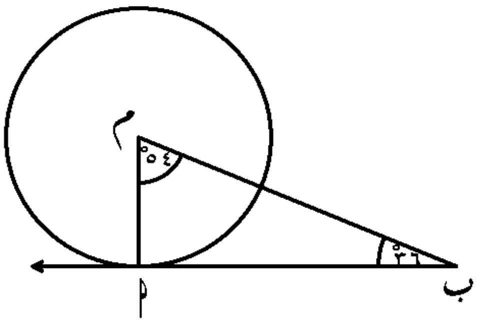


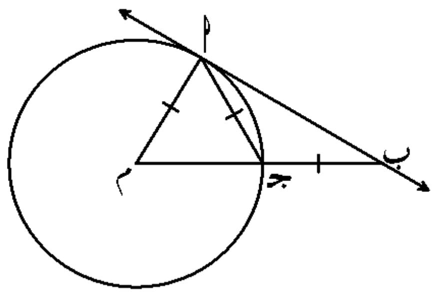
محيط الشكل أ ب م ء = ... سم



[٨] في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، وضح لماذا يكون المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس .





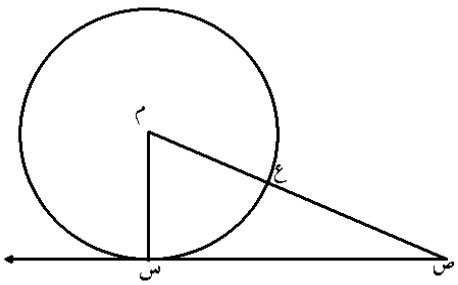


[٩] فى الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، س ص = ١٢سم

، $\overline{م ص}$ ∩ الدائرة = { ع } ، ع ص = ٨سم

اثبت أن : المستقيم $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة م عند س

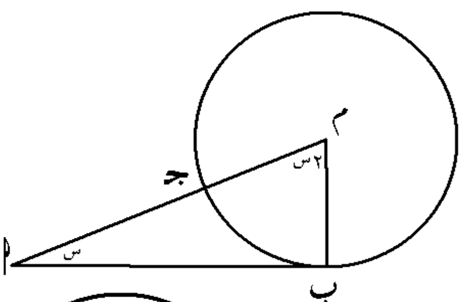


[١٠] فى الشكل لمقابل

$\overline{أ ب}$ مماسية للدائرة م عند ب ، ق(∠ أ) = س ، ق (∠ م) = ٢س

اثبت أن : جـ منتصف $\overline{أ م}$ ، اذا كان : أ م = ١٤سم

فأوجد مساحة سطح الدائرة م حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

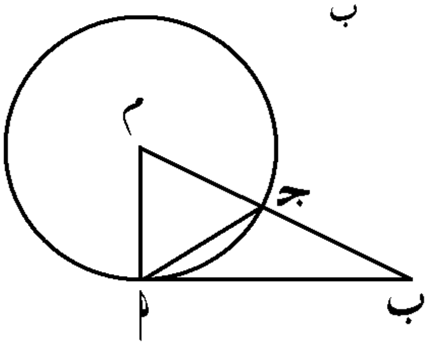


[١١] فى الشكل لمقابل

$\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م عند أ ، جـ منتصف $\overline{م ب}$.

أوجد ق(∠ ب أ جـ) . واذا كان أ ب = ٤$\sqrt{٣}$سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م ثم **احسب** مساحة سطح △ أ ب جـ

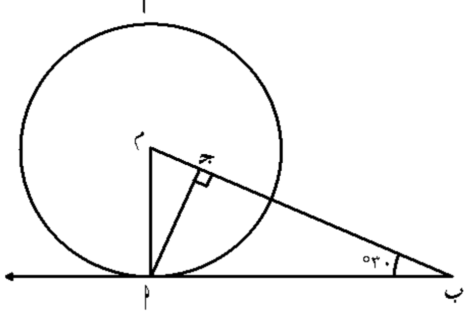


[١٢] فى الشكل المقابل

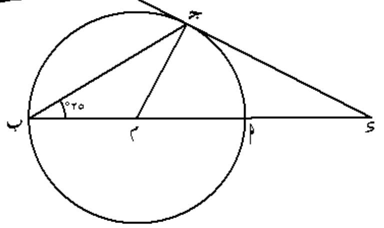
المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند أ

، م أ = ٨سم ، ق(∠أ ب م) = ٣٠° ، $\overline{أ جـ}$ ⊥ $\overline{م ب}$

أوجد طول كلا من : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$



[١٣] فى الشكل المقابل

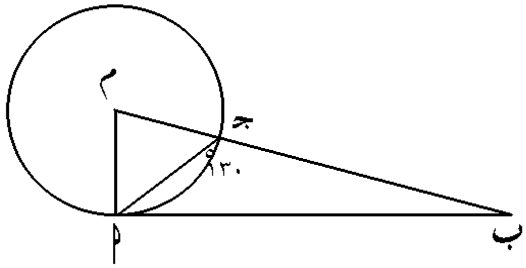


أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ ب أ

فاذا كان المستقيم ء جـ مماسا للدائرة عند جـ ، ق(∠ ب) = ٢٥ °

فأوجد : ق(∠ ء)

[١٤] فى الشكل لمقابل

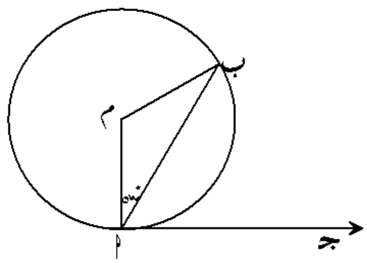


أ ب مماسة للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = { جـ }

ق(∠ أ جـ ب) = ١٣٠ °

أوجد ق(∠ م) ، ق(∠ ب)

[١٥] فى الشكل لمقابل

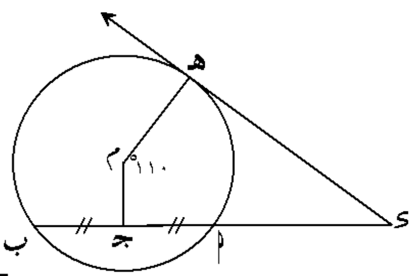


م دائرة أ جـ مماس لها عند أ

فإذا كان ق(∠ أ ب م) = ٤٠ °

أوجد ق(∠ ب أ جـ)

[١٦] فى الشكل لمقابل

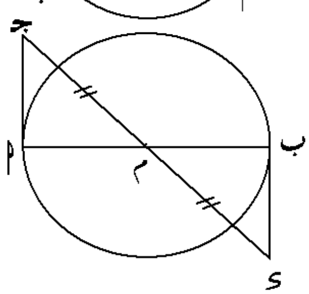


أ ب وتر فى الدائرة م ، ء هـ مماسا لها عند هـ ،

جـ منتصف أ ب

أوجد : بالبرهان ق(∠ ء)

[١٧] فى الشكل المقابل

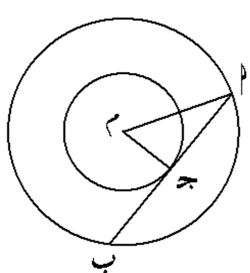


أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ مماسا لها عند أ

، رسم جـ م وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء

اثبت أن : ب ء مماسا للدائرة عند ب

[١٨] فى الشكل المقابل

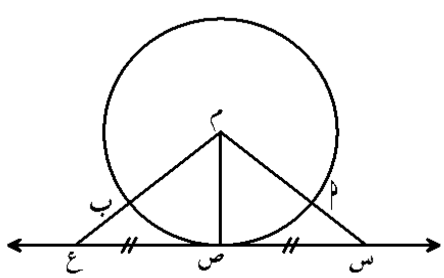


أ ب وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أ ب = ٨سم

، طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم

أو جد : طول نصف قطر الدائرة الصغرى

[١٩] فى الشكل المقابل

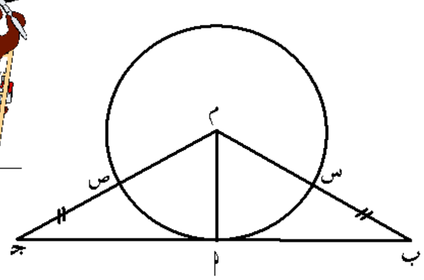


المستقيم س ع مماس للدائرة م عند ص

، س ص = ص ع

اثبت أن : أ س = ب ع

[٢٠] فى الشكل المقابل

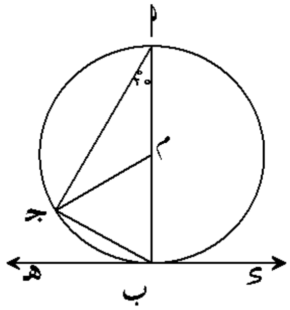


المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{م ب}}$ ∩ الدائرة م = { س }

، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ∩ الدائرة م = { ص } فإذا كان : ب س = جـ ص

فأثبت أن : ق(∠ ب م أ) = ق(∠ جـ م أ)

[٢١] فى الشكل المقابل

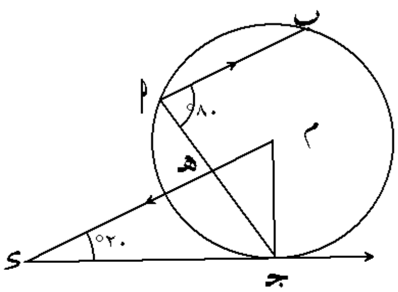


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة م ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ مماس للدائرة م عند

ب ، ق(∠ أ) = ٢٥°

ق(∠ م جـ ب) ، ق(∠ ء ب جـ)

[٢٢] فى الشكل المقابل

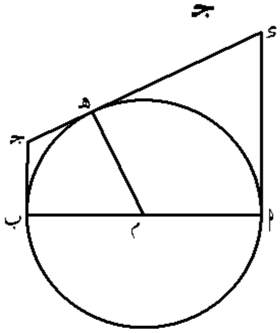


$\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ يمس الدائرة م عند جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ء}}$ ، ق(∠ ب أ جـ) = ٨٠°

، ق(∠ م ء جـ) = ٢٠° ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{م ء}}$ = { هـ }

أوجد : ق(هـ جـ م)

[٢٣] فى الشكل المقابل



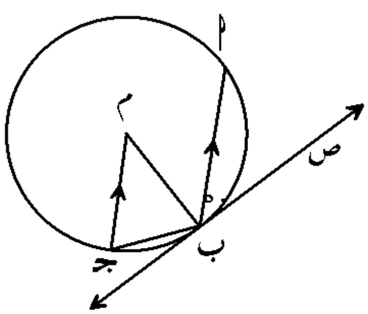
$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ مماس للدائرة عند هـ

اثبت أن : ١) ق(أ ء هـ) + ق(ب جـ هـ) = ١٨٠°

٢) ق(أ م هـ) = ق(ب جـ هـ)

[٢٤] فى الشكل لمقابل



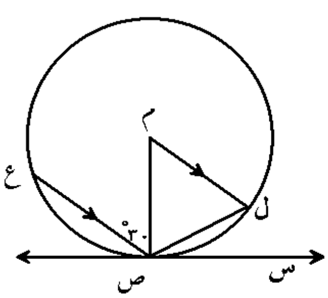
المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ مماسا للدائرة م عند ب

، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م جـ}}$ ،

ق(∠ أ ب ص) = ٥٠°

أوجد ق(∠ م جـ ب)

[٢٥] فى الشكل لمقابل



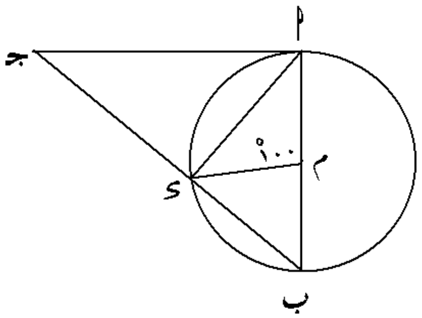
المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائر م عند ص ،

ق(∠ م ص ع) = ٣٠° ، $\overline{\text{م ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

أوجد ق(∠ ل م ص) ، ق(∠ ل ص س).

[٢٦] أ ب ، جـ ء قطران متعامدان فى الدائرة م ، رسم مماسان للدائرة م عند أ ، جـ بحيث كانا متقاطعان فى هـ

اثبت أن الشكل أ م جـ هـ مربع

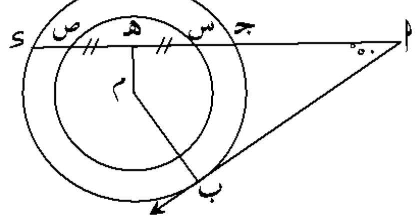


[٢٧] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى دائرة م ، أ جـ قطعة مماسية للدائرة عند أ

، ق(∠ أ م ء) = ١٠٠° ،

أوجد ق(∠ ء أ م) ، ق(∠ جـ أ ء) ، ق(∠ أ ب ء)

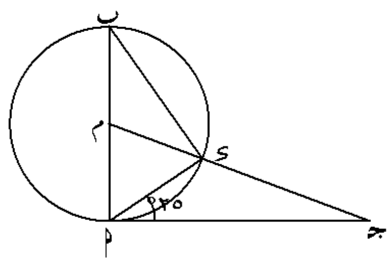


[٢٨] فى الشكل المقابل

هـ منتصف س ص ، أ ب للدائرة الكبرى عند ب ، ق(∠ أ) = ٥٠°

احسب : ق(∠ هـ م ب)

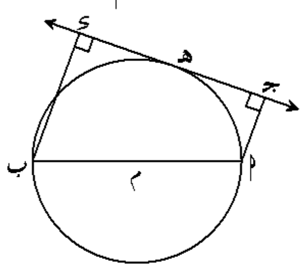
اثبت أن : جـ س = ء ص



[٢٩] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ مماس لها عند أ ، ق(∠ ء أ جـ) = ٣٥°

أوجد ق(∠ ء أ م) ، ق(∠ أ م ء) ، ق(∠ أ ب ء) ، ق(∠ أ ء ب)



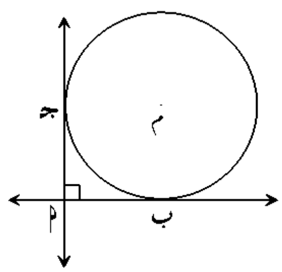
[٣٠] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، المستقيم جـ ء مماسا للدائرة عند هـ

بحيث أ جـ ، ب ء متعامدان على المستقيم جـ ء

اثبت أن هـ منتصف جـ ء

وإذا كان أ ب = ١٠سم ، جـ هـ = ٤سم **فأوجد** مساحة شبه المنحرف أ ب ء جـ



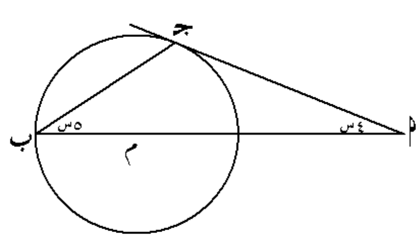
[٣١] فى الشكل المقابل

المستقيمان أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ومتعامدان

اثبت أن ب جـ = $\sqrt{2}$ نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة م .وإذا كان محيط الدائرة م = ٤٤سم .

أوجد مساحة الشكل أ ب م جـ حيث ($\pi = \frac{22}{7}$)

[٣٢] أ ب قطر فى الدائرة م ، المستقيمان أ جـ ، ب ء مماسان للدائرة م ، م جـ قطع الدائرة م فى س ، ص وقطع المستقيم ب ء فى هـ **اثبت أن** : جـ س = ص هـ

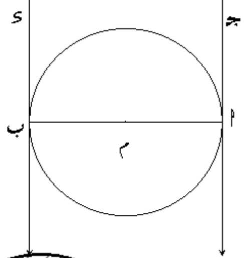


[٣٣] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، ء جـ مماس للدائرة عند جـ .

ق(∠ ب) = ٥س ، ق(∠ ء) = ٤س

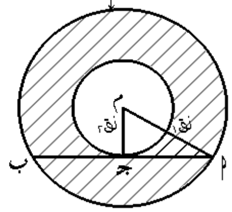
أوجد قيمة س ومن ثم أوجد ق(∠ ب جـ ء)



(٣٤) فى الشكل المقابل $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس لها عند أ

فإذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$: س − ٣ص = ١ ، معادلة ب ء : ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢

اثبت أن : المستقيم $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماس للدائرة م عند ب

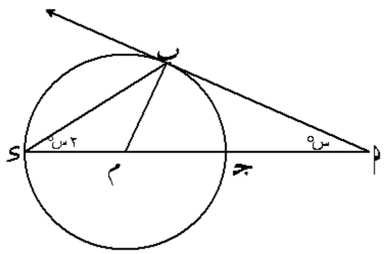


(٣٥) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتى المركز م ، طول نصف قطر الدائرة الكبرى نق$_١$ ، طول نصف قطر الدائرة الصغرى نق$_٢$

، $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى فى جـ ، أب = ٧سم

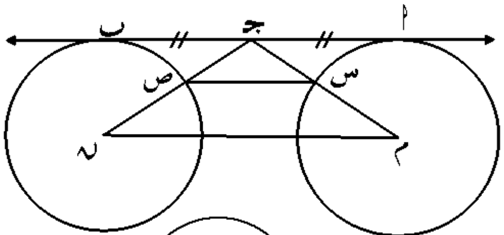
أوجد : مساحة المنطقة المظللة وكذلك محيطها اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$



(٣٦) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ تمس الدائرة م عند ب ، $\overline{جـ ء}$ قطر فيها ، ق(∠ ب أ م) = س°

، ق(∠م ء ب) = ٢س° **أوجد** قيمة س بالدرجات



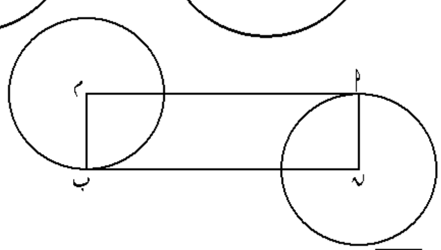
(٣٧) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك لهما ، جـ منتصف $\overline{أب}$

، الدائرة م ∩ $\overline{مجـ}$ = { س } ، الدائرة ن ∩ $\overline{نجـ}$ = { ص }

اثبت أن : ① $\overline{أب}$ // $\overline{م ن}$ ② △ جـ م ن متساوى الساقين .

③ $\overline{س ص}$ // $\overline{م ن}$



(٣٨) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان رسمت $\overline{م أ}$ مماسة للدائرة ن عند أ ،

ثم رسمت $\overline{ن ب}$ مماسة للدائرة م عند ب **اثبت أن** أ م ب ن مستطيل

(٣٩) أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم $\overrightarrow{أم}$ فقطع الدائرة فى ب بحيث ب ∉ $\overline{أم}$ ، والنقطة جـ ∈ الدائرة م ،

رسم $\overrightarrow{أجـ}$ فقطع الدائرة فى ء فإذا كان أ ء = م ء **اثبت أن :** ق(ب م جـ) = ٣ ق(م أ ء)

(٤٠) عين كموضع النقط الآتية بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ وحدات طول علما بأن م(٠ ، ٠)

، أ(−٣ ، ٤) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٨) **أوجد** طول نصف قطر الدائرة المارة بالنقطة (−٣ ، ٤) و مركزها نقطة الأصل

(٤١) فى مستوى احداثى متعامد رسمت دائرة م حيث م(−١ ، ٢) ، نقطة أ(٣ ، ٥) تقع على الدائرة م

، نقطة ب(٦ ، ١) تقع فى مستواها **اثبت أن :** $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ **وأوجد معادلته .**

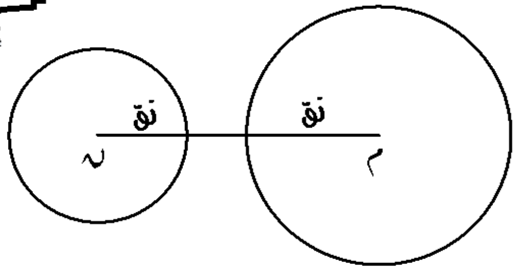
(٤٢) اثبت أن النقط أ(٤ ، −٤) ، ب(−٢ ، −٦) ، جـ(٦ ، ١٠) تقع على دائرة واحدة مركزها م(−٢ ، ٤)

ثم أوجد محيط هذه الدائرة ومساحة سطحها .

(٤٣) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها م(٢ ، −٣) وتمر بالنقطة ن(−١ ، ١)

ثم بين موضع كل من النقط أ(١ ، ١) ، ب(−٢ ، ٠) ، جـ(−٤ ، ٥) بالنسبة للدائرة م

موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى :

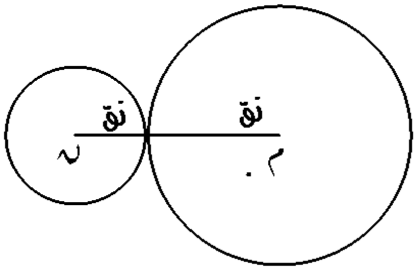


[١] الدائرتان المتباعدتان :

❶ م ن $>$ نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = $\varnothing$

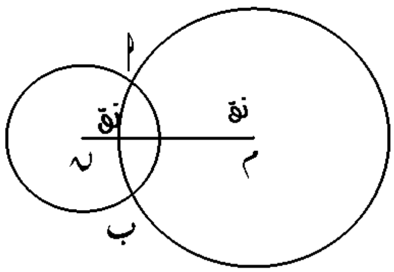


[٢] الدائرتان المتماستان من الخارج :

❶ م ن = نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = { أ }

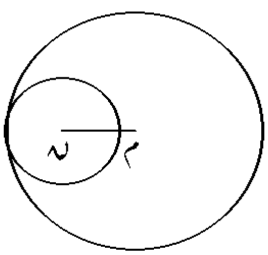


[٣] الدائرتان المتقاطعتان :

❶ نق$_1$ – نق$_2$ $<$ م ن $<$ نق$_1$ + نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ ، ب }

❸ أى دائرتان تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

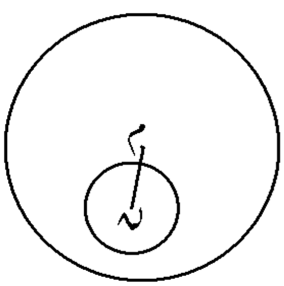


[٤] الدائرتان المتماستان من الداخل :

❶ م ن = نق$_1$ – نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ }

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

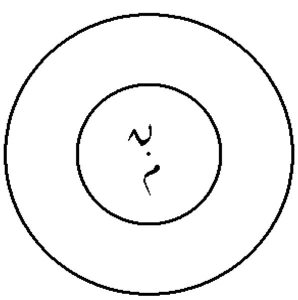


[٥] الدائرتان المتداخلتان :

❶ م ن $<$ نق$_1$ – نق$_2$

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن



[٦] الدائرتان المتحدتان فى المركز :

❶ م ن = صفر

❷ الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\varnothing$

❸ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

الدائرتان متباعدتان

المجموع ⊕ ← الدائرتان متماستان من الخارج

الدائرتان متقاطعتان

الطرح ⊖ ← الدائرتان متماستان من الداخل

الدائرتان متداخلتان

الدائرتان متحدتان فى المركز م ن = ٠

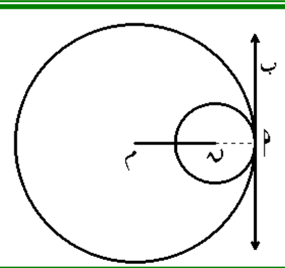
نتيجة ١:

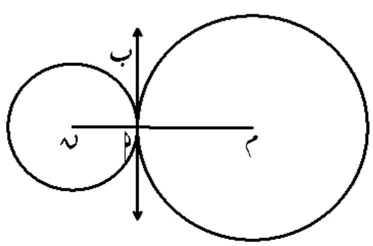
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب





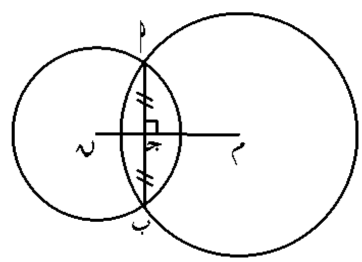
نتيجة ٢:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و ينصفه

∵ م ن خط مركزين

∵ أ ب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب



ملاحظات هامة

١ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين محور تماثل للوتر المشترك

٢ الوتر المشترك عمودى على خط المركزين فقط

٣ خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك

٤ خط المركزين لدائرتين متماستان من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التماس

تمارين على موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخري

[١] اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة

(١) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون .... الوتر المشترك و........

(٢) خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل (الخارج) يمر ....

(٣) م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب فان محور تماثل الدائرتين ....

(٤) إذا كان سطح الدائرة التى مركزها م ∩ سطح الدائرة التى مركزها ن = ∅ فان الدائرتان م ، ن تكونان ....

(٥) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج طول نصف قطر أحدهما ٣سم ، م ن = ٨سم
فان طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم

(٦) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٥سم فان طول $\overline{\text{م ن}}$ = ...سم

(٧) دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٦سم ، البعد بين مركزيهما ٩سم فان الدائرتين م ، ن تكونان ....

(٨) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ فان الدائرتان م ، ن إما أن تكون .... أو ....

(٩) محور تماثل الدائرتين م ، ن المتقاطعتين فى أ ، ب هو .... خط المركزين لدائرتين متماستين من (الداخل أو الخارج) يكون عموديا على ....

(١٠) اذا كان الدائرتان م ، ن متباعدتان فان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ...

(١١) م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٤سم على الترتيب فان : م ن ∈ ....

(١٢) إذا كان الدائرتان م ، ن متحدتى المركز فان الدائرة م ∩ الدائرة ن = ...

(١٣) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } فان الدائرتان م ، ن إما أن تكون .... أو ....

(١٤) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على .... و ....

(١٥) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فان الدائرتان م ، ن تكونان ....

(١٦) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة الصغرى ن فان الدائرتان م ، ن تكونان .... أو........

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسان

(١) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ حيث م ن > نق$_1$ + نق$_2$ فان الدائرتان م ، ن
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٧سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٩سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٤) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ حيث م ن = نق$_1$ + نق$_2$ فان الدائرتان م ، ن
(متماستان من الخارج ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٥) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٣سم فإذا كان م ن = ١٢سم فان الدائرتان م ، ن ....

(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٦) إذا كان م ، ن دائرتان نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ حيث نق$_1$ – نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$

فان الدائرتان م ، ن .... (متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٧) إذا كان مجموع طولى نصفى قطرين لدائرتين يساوى البعد بين مركزيهما تكون الدائرتان............

(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متداخلتان)

(٨) دائرتان م ، ن متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ٦سم فان م ن يمكن أن تساوى ....

(١١ ، ١ ، ٥ ، ١٣)

(٩) إذا كان طول نصف قطر دائرة م هو ٣سم وطول نصف قطر الدائرة ن = ٧سم وكانت الدائرتان م ، ن متداخلتان

فان م ن = ... (٤ ، ١٠ ، ٥ ، ٢)

(١٠) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٦سم فإذا كان م ن = ٨$\sqrt{2}$سم فان الدائرتان م ، ن ....

(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١١) م ، ن دائرتان متماستان حيث م ن = ٦سم ، ونصف قطر الدائرة الكبرى ١٠سم

(١٢) فيكون نصف قطر الدائرة الصغرى = ... سم (١٦ ، ١٢ ، ٨ ، ٤)

(١٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٨سم فإذا كان م ن = ٥سم فان الدائرتان م ، ن ....

(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١٤) دائرة م نصف قطرها ٤سم تمس دائرة ن من الخارج فإذا كان م ن = ٧سم فان محيط الدائرة ن .... سم

(٤π ، ٦π ، ٧π ، ٨π)

(١٥) إذا كان طول نصف قطر دائرة م هو ٣سم وطول نصف قطر الدائرة ن = ٥سم وكانت الدائرتان م ن= ٦سم

فان م ، ن دائرتان .... (متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(١٦) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، طول قطر أحدهما ٦سم ، ٢م ن = ٨سم

فان طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

(١٧) دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب فان محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ هو.................

($\overline{\text{م ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن م}}$ ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ن}}$)

(١٨) دائرة م طول نصف قطرها ٤سم تمس دائرة ن من الداخل ، م ن = ٧سم فان محيط الدائرة م:محيط الدائرة ن = ...

(٤ : ٧ ، ٤ : ٣ ، ٣ : ٤ ، ٤ : ١١)

(١٩) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٧سم فان م ن =...............

(٤ ، ٢ ، ٥ ، ١٠)

(٢٠) إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = طول نصف قطر الدائرة ن = م ن فان الدائرتان ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢١) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٢سم فإذا كان م ن = ٣سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متماستان من الخارج ، متباعدتان)

(٢٢) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٢سم فإذا كان م ن = ...
(٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨)

(٢٣) دائرتان م ، ن متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٥سم فإذا كان م ن ∈ ....
( ] ٠ ، ٢ [،] ٢ ، ٨ [،] ٨ ، ∞ [،] ٢ ، ∞ [ )

(٢٤) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك و..........
(يساويه ، يساويه وينصفه ، ينصفه ، يوازيه)

(٢٥) إذا كان الدائرة التى مركزها م ∩ الدائرة التى مركزها ن = { أ ، ب } فان الدائرتان م ، ن تكونان ....
(متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

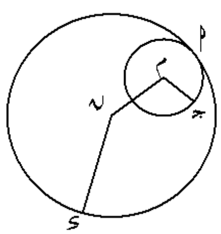
(٢٦) إذا كان سطح الدائرة التى مركزها م ∩ سطح الدائرة التى مركزها ن = سطح الدائرة ن فان الدائرتان م ، ن تكونان.......
(متماستان من الخارج ، متقاطعتان ، متباعدتان ، متداخلتان)

(٢٧) إذا كان مجموع طولى نصفى قطرى دائرتين = البعد بين مركزيهما فان الدائرتين
(متماستان من الخارج ، متماستان من الداخل ، متقاطعتان ، متحدتى المركز)

(٢٨) إذا كان م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٤سم ، من = ٢سم فان الدائرتان م ، ن ....
(متماستان من الداخل ، متماستان من الخارج ، متداخلتان ، متباعدتان)

(٢٩) $\overline{أب}$ وتر فى دائرة م طوله ٦سم وكان بعده العمودى عن المركز الدائرة ٤سم ، فإذا كانت جـ ∈ $\overrightarrow{مأ}$ بحيث م جـ = ٦سم
فان جـ تقع .... (على الدائرة ، خارج الدائرة ، داخل الدائرة ، على الوتر $\overline{أب}$)

(٣٠) فى الشكل المقابل م ، ن دائرتان متماستان من الداخل فى أ
فإذا كان م جـ = ٤سم ، ن ء = ٩سم فان م ن = ...
(١٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٨)



[٣] دائرتان مركزيهما م ، ن طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ٣سم . أوجد طول $\overline{م ن}$ فى الحالات التالية

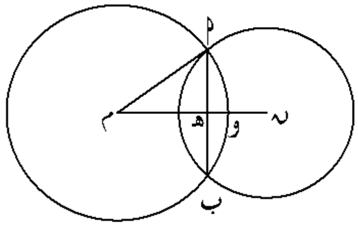
① م ، ن متماستان من الداخل   ② م ، ن متماستان من الخارج

[٤] دائرتان م ، ن طولى نصفى قطريهما ٧سم ، ٣سم على الترتيب حدد موضع الدائرتين م ، ن فى الحالات التالية

① م ن = ١٠سم   ② م ن = ٤سم   ③ م ن = صفر

④ م ن = ٨سم   ⑤ م ن = ٢سم   ⑥ م ن = ١٥

[٥] فى الشكل المقابل

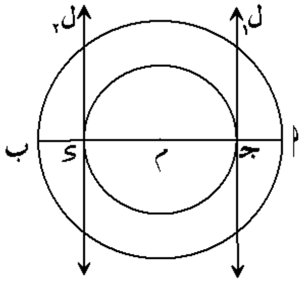


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، أ ب ∩ م ن = { هـ }

م ن ∩ الدائرة م = { و } ، أ ب = ٦سم ، م أ = ٥سم ، م ن = ٧سم .

أوجد طول أ هـ ، هـ و ، م ن

[٦] فى الشكل المقابل



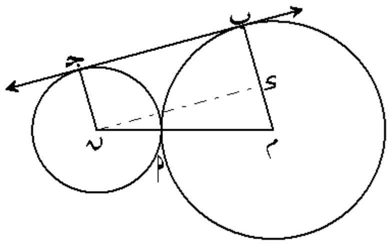
دائرتان متحدتى المركز فى م ، أ ب قطر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى عند جـ ، ء ،

ل١ ، ل٢ مماسان للدائرة الصغرى عند جـ ، ء ،

اثبت أن : ل١ // ل٢

اثبت أن : أ جـ = ب ء ، أ ء = ب جـ

[٧] فى الشكل المقابل

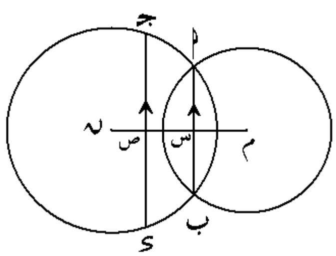


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند أ ، ب جـ مماس مشترك لهما

فإذا كان طولا نصفى قطريهما ١٨سم ، ٨سم على الترتيب

أوجد مساحة سطح الشكل م ب جـ ن

[٨] فى الشكل المقابل

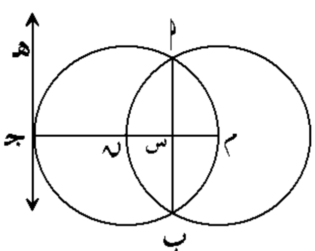


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

جـ ء // أ ب ، م ن ∩ جـ ء = { ص }

اثبت أن : ص منتصف جـ ء

[٩] فى الشكل المقابل

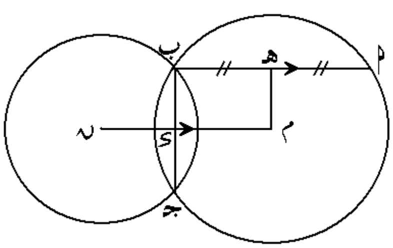


م ، ن دائرتان متطابقتان و متقاطعتان فى أ ، ب ، م ∈ الدائرة ن ،

ن ∈ الدائرة م ، المستقيم جـ هـ مماس للدائرة ن عند جـ

اثبت أن (١) أ ب // جـ هـ (٢) م س = س ن

[١٠] فى الشكل المقابل

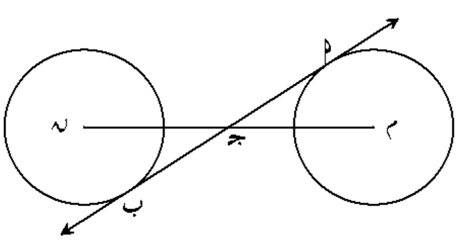


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

أ ب // ب جـ = { ء } ، هـ منتصف أ ب

اثبت أن هـ ء = طول نصف قطر الدائرة م .

[١١] فى الشكل المقابل

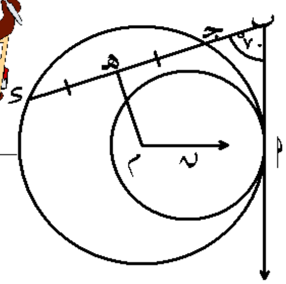


م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ،

المستقيم أ ب مماس مشترك للدائرتان م ، ن عند أ ، ب

برهن أن : جـ منتصف كلا من أ ب ، م ن

(١٢) فى الشكل المقابل

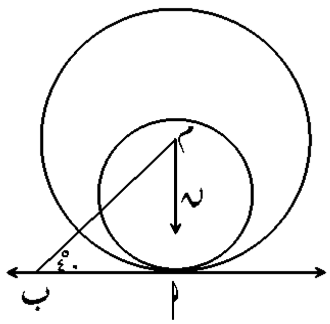


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند ا ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$

$\overline{\text{ا ب}}$ مماس مشترك عند ا ، ق(∠ب) = ٧٠°

احسب : ق(∠هـ م ن)

(١٣) فى الشكل المقابل

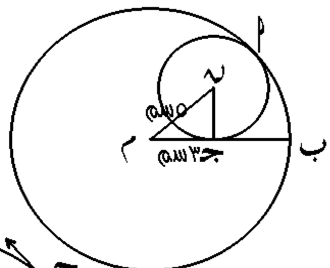


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند ا ،

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماس مشترك عند ا ، إذا كان ق(∠ب) = ٤٠°

احسب : ق(∠ن م ب)

(١٤) فى الشكل المقابل

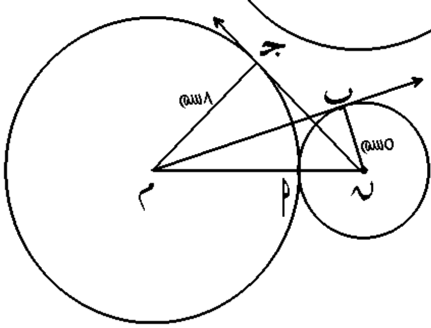


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند ا ،

سم $\overline{\text{م ب}}$ مماس للدائرة ن عند جـ ، م جـ = ٣سم ، م ن = ٥سم

احسب : طول $\overline{\text{ب جـ}}$

(١٥) فى الشكل المقابل

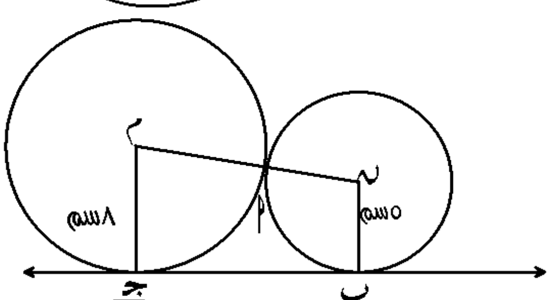


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند ا ، سم $\overleftarrow{\text{م ب}}$ مماس للدائرة ن عند ب

، سم $\overleftarrow{\text{ن جـ}}$ مماس للدائرة م عند جـ ،

م جـ = ٨ سم ، ن ب= ٥سم احسب : طول $\overline{\text{ن جـ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

(١٦) فى الشكل المقابل



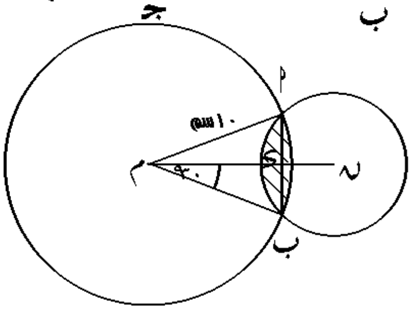
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند ا ،

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس مشترك عند جـ ، ب على الترتيب

ن ب = ٥سم ، م جـ = ٨سم

احسب : احسب طول $\overline{\text{ب جـ}}$

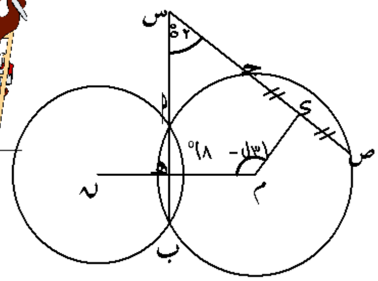
(١٧) فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب .

م ا = ١٠سم ، ق(∠ب م ء) = ٣٠° احسب طول $\overline{\text{ا ب}}$

[١٨] فى الشكل المقابل

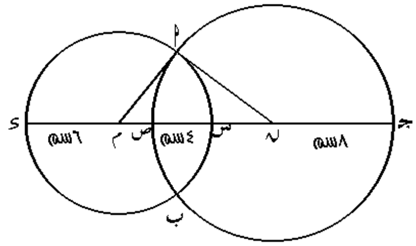


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب .

ء منتصف ص جـ ، ق(س) = ٥٢°

، ق(∠ ء م هـ) = (٣ل – ٨)° احسب قيمة ل

[١٩] ادرس الشكل ثم اكمل مكان النقط



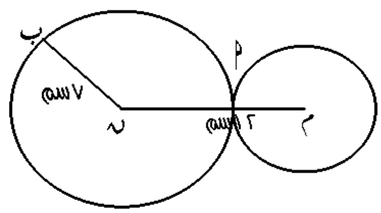
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٦سم على الترتيب

، س ص = ٤سم ص م = ... سم ، جـ س = ...سم

، جـ ء = ... سم هل محيط △ أ ن م = طول جـ ء ؟ فسر إجابتك .

احسب ① ق(∠ ن أ م) ② احسب مساحة △ ن أ م ③ احسب طول الوتر المشترك أ ب .

[٢٠] فى الشكل المقابل :

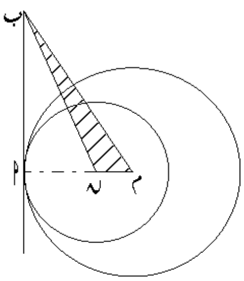


دائرتا م ، ن متماستان من الخارج عند أ

، البعد بين مركزيهما م ن = ١٢سم ، فإذا كان : ن ب = ٧سم .

أوجد طول أ م

[٢١] فى الشكل المقابل

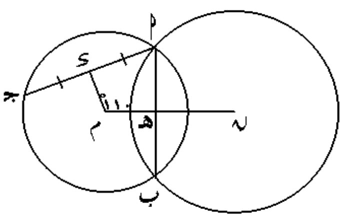


م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم ، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل

، المستقيم أ ب مماس مشترك لهما عند أ ، إذا كانت مساحة △ ب م ن = ٢٤سم^2

أوجد : طول أ ب

[٢٢] فى الشكل المقابل :

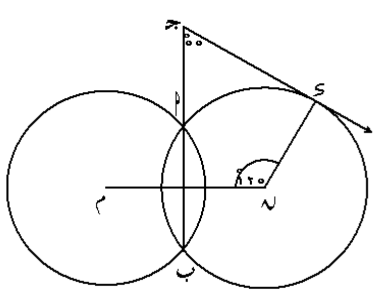


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . فاذا كان أ ب ∩ م ن = { هـ }

، أ جـ وتر فى الدائرة م ، ء منتصف أ جـ ، ق(∠ م) = ١١٠°

أوجد : ق(∠ ب أ جـ)

[٢٣] فى الشكل المقابل

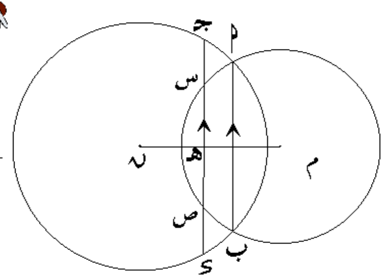


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . وكانت جـ ∈ ب أ

، ء ∈ الدائرة ن ، ق(م ن ء) = ١٢٥° ، ق(∠ ب جـ ء) = ٥٥°

اثبت أن : المستقيم جـ ء مماس للدائرة ن عند ء

[٢٤] فى الشكل المقابل

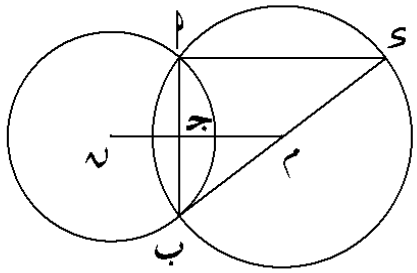


أ ب الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن ، المستقيم جـ ء // أ ب

ويقطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء

أثبت أن : جـ س = ء ص

[٢٥] فى الشكل المقابل :

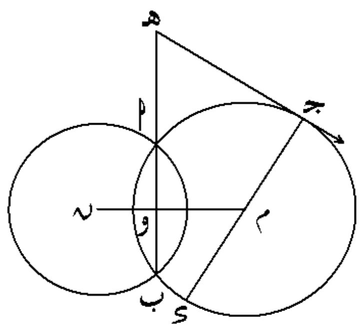


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، أ ب ∩ م ن = { جـ }

، ب ء قطر فى الدائرة م ، ب جـ = ٤سم ، م ء = ٥سم

احسب طول أ ء

[٢٦] فى الشكل المقابل



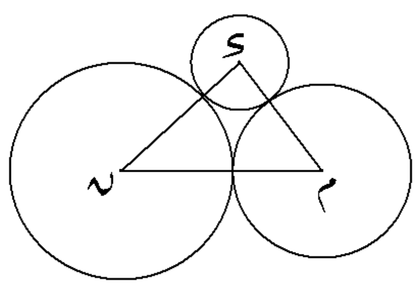
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب حيث جـ ء قطر فى الدائرة م

، جـ س للدائرة م عند جـ حيث جـ س ∩ ب أ = { هـ }

، المستقيم م ن ∩ أ ب = { و }

أثبت أن : ق(∠ ء م ن) = ق(∠ جـ هـ ب)

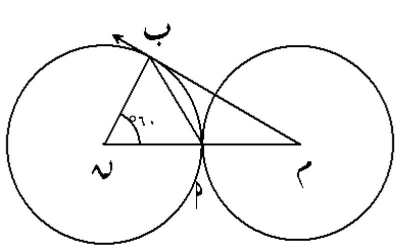
[٢٧] فى الشكل المقابل



ثلاث دوائر م ، ن ، ء متماسة مثنى مثنى أطوال أنصاف أقطارها

٢سم ، ٣سم ، ١سم على الترتيب احسب ق(∠ م ء ن)

[٢٨] فى الشكل المقابل



دائرتان م ، ن متطابقتان ومتماستان من الخارج فى أ

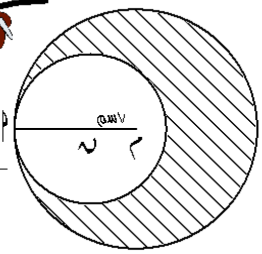
، رسم فى الدائرة ن نصف القطر ن ب

بحيث ق(∠ أ ن ب) = ٦٠° . أثبت أن : م ب تمس الدائرة ن فى ب

[٢٩] دائرتان م ، ن متباعدتان ، رسم م ن فقطع الدائرة م فى أ ، وقطع الدائرة ن فى ب ،

ورسم أ ء مماسا للدائرة م ، ورسم ب جـ مماسا للدائرة ن أثبت أن أ ء // ب جـ

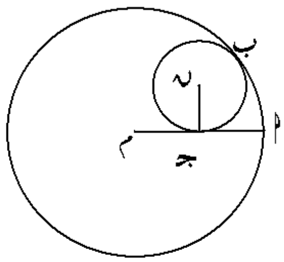
[٣٠] فى الشكل المقابل



دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، مساحة المنطقة المظللة ٥٥٠ سم^2 ، م ن = ٧سم

أوجد مجموع طولى نصفى قطريهما . اعتبر ($\pi = \frac{22}{7}$)

[٣١] فى الشكل المقابل

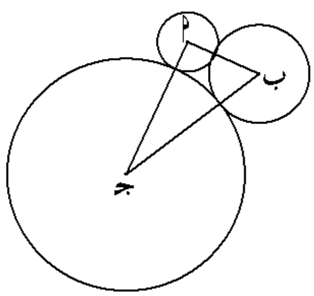


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل

نصف قطر الدائرة م = ٩سم ، نصف قطر الدائرة ن = ٤سم

م أ نصف قطر للدائرة م ، يمس الدائرة ن عند جـ . احسب طول أ جـ

[٣٢] فى الشكل المقابل



أ ، ب ، جـ ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى

أطوال أنصاف أقطارها ٢سم ، ٣سم ، ١٠سم على الترتيب

أثبت أن : ① ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠°

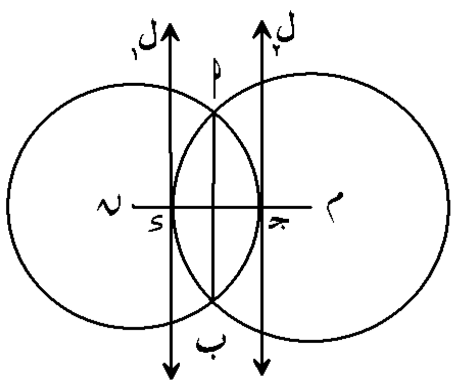
② احسب مساحة △ أ ب جـ

تمارين متميزة للمتفوقين

[٣٣] م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، رسمت ن ب مماسة للدائرة م عند ب فقطعت الدائرة ن فى جـ

بحيث كان ب جـ = $\frac{1}{2}$ جـ ن ، ب ن = ١٢سم . أوجد مساحة سطح △ م ب ن

[٣٤] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، م ن ∩ الدائرة ن = { جـ } .

رسم المماس ل١ للدائرة م عند ء ، رسم المماس ل٢ للدائرة ن عند جـ

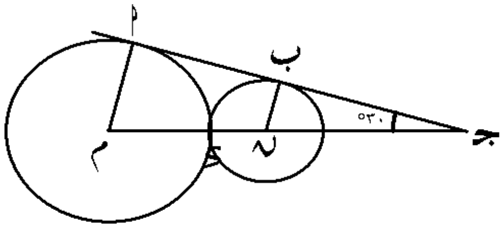
أثبت أن : ل١ // ل٢ // أ ب

[٣٥] م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب . س ص مماس مشترك لهما عند س ، ص . جـ ء // س ص

أ ∈ جـ ء . أثبت أن : س ص = $\frac{1}{2}$ جـ ء

[٣٦] دائرتان مركزيهما ن ، م متقاطعتان فى أ ، ب و النقطة جـ منتصف $\overline{مـ ن}$ ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{أ ء}$ عمودى على المستقيم $\overleftrightarrow{جـ أ}$ فقطع الدائرة ن فى ء و الدائرة م فى هـ أثبت أن : أ ء = أ هـ

[٣٧] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء اذا مد المماس المشترك للدائرتين ليتلاقى مع امتداد خط المركزين عند جـ

وكان ق (∠ جـ) = ٣٠ ° فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٦سم . أوجد : طول نصف قطر الدائرة ن

[٣٨] دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب . فإذا قطع $\overrightarrow{مـ ن}$ الدائرة ن فى س ، رسم $\overrightarrow{س أ}$ فقطع الدائرة م فى جـ ، رسم $\overrightarrow{س ب}$ فقطع الدائرة م فى ء

أثبت أن : ① ق (∠ أ س ن) = ق (∠ ب س ن) ② أ جـ = ب ء

③ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$

(ارشاد : ارسم $\overrightarrow{مـ ص}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ يقطعه فى ص ، $\overrightarrow{مـ ع}$ ⊥ $\overline{ب ء}$ يقطعه فى ع)

[٣٩] فى مستوى احداثى متعامد رسمت دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٦ وحدات طول ، ٤ وحدات طول على الترتيب بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل لحالات الآتية

① م (–٤ ، ٨) ، ن (٥ ، –٤)

② م (٢ ، ١) ، ن (٦ ، –٢)

[٤٠] فى مستوى احداثى متعامد اذا كانت الدائرتان م ، ن متقاطعتين فى أ ، ب حيث أ (٠ ، ٣) ، ب (–٤ ، –١) فأوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{مـ ن}$

[٤١] إذا كانت م (٣ ، ٥) ، ن (–٣ ، –٧) مركزى دائرتين طولا نصفى قطريها ٤ $\sqrt{٥}$ سم ، ٢ $\sqrt{٥}$ سم على الترتيب ، أ (–١ ، –٣) أثبت أن : الدائرتين م ، ن متماستان عند أ مبينا نوع التماس .

تعيين الدائرة

❶ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة

❷ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين

❸ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

❹ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط لا يجمعهم مستقيم واحد

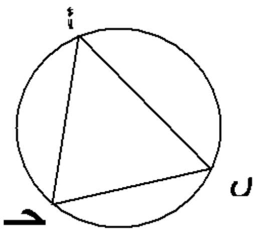
❺ يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقاط ∌ مستقيم واحد

❻ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة

❼ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط يجمعهم مستقيم واحد

❽ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط ∋ مستقيم واحد

الدائرة الخارجة للمثلث



الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع (تلاقى) محاور تماثل أضلاعة

أو الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث

١- مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث .

٢- مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

٣- مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية تقع فى منتصف وتره .

٤- مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه و هى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة و هى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته

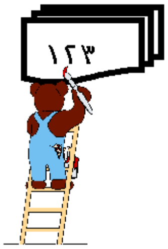
نظرية

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها

نتيجة : الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية

فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



تمارين على تعيين الدائرة

[١] اكمل مكان النقط

(١) تعيين الدائرة اذا علم .... ، ....

(٢) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط لاتنتمى لمستقيم واحد ....

(٣) مركز الدائرة الخارجة المارة برؤوس المثلث هى ....

(٤) نقطة تلاقى محاور تمثل أضلاع المثلث هى مركز الدائرة ....

(٥) اذا كان طول $\overline{أب}$ = ٦سم ، فان طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ...سم

(٦) نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على اضلاع المثلث من منتصفاتها هى مركز الدائرة ....

(٧) عدد الدوائر التى طول نصف قطر كل منها ٤سم وتمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦سم = ...

(٨) مثلث قائم الزاوية فاذا كان طولا ضلعى القائمة ٦سم ، ٨سم

(٩) فان مساحة سطح الدائرة المارة رؤوسة = ...سم² اعتبر ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٠) الدائرة المارة برؤوس المثلث تسمى ....

(١١) عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بثلاث رؤوس لمتوازى أضلاع هو ....

(١٢) اذا كان أ ب= ٦سم فان عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(١٣) اذا كانت أ ب = ٧سم فان محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ... سم

(١٤) عدد الدوائر المارة بقطة معلومة ....

(١٥) عدد الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين أ ، ب ....

(١٦) عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط معلومة أ ، ب ، جـ ....

(١٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة م ، وأيضا أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة ن ، فان الدائرة م ...... الدائرة ن

(١٨) عدد الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب ومركزها يقع على مستقيم ل .....حيث ل لا يوازى محور القطعة $\overline{أب}$ ولا ينطبق عليه .

(١٩) عدد الدوائر التى نصف قطرها ٣سم والتى مراكزها على مستقيم معلوم ل والتى يمر كل منها بنقطة معلومة أ ∈ ل هو........

(٢٠) .... لدائرتان متقاطعتان هو محور تماثل وترهما المشترك .

(٢١) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفها تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة هى ....

(٢٢) إذا كانت ك نقطة داخل دائرة ورسم منها عدة قطع مستقيمة متساوية فى الطول طرفها الآخر على الدائرة فان ك هى ......

(٢٣) أ ، ب نقطتان فى المستوى حيث أ ب = ٦,٢سم فان عدد الدوائر التى نصف قطر كل منها ٣,١سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(٢٤) أكبر طول لقطعة مستقيمة يقع طرفيها على الدائرة التى طول نصف قطرها ٦سم = ... سم

(٢٥) اذا كانت أ ب = ١٤سم فان مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب = ... سم²

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

[٢] اختر الإجابة الصحيحة

(١) أى ثلاث نقط لا تنتمي لمستقيم واحد تمر بها

(أ) دائرة وحيدة   (ب) دائرتان   (ج) ثلاث دوائر   (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٢) يمكن رسم .... تمر بالنقطتين أ ، ب

(أ) دائرة وحيدة   (ب) دائرتان   (ج) ثلاث دوائر   (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٣) يمكن رسم .... تمر بنقطة معلومة

(أ) دائرة وحيدة   (ب) دائرتان   (ج) ثلاث دوائر   (د) عدد لانهائي من الدوائر

(٤) مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هي نقطة تلاقى ....

(أ) ارتفاعاته   (ب) متوسطاته   (ج) محاور تماثل أضلاعه   (د) منصفات زواياه الداخلة

(٥) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) المعين   (ب) المستطيل   (ج) متوازي الأضلاع   (د) شبه المنحرف بصفة عامة

(٦) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) المثلث   (ب) المربع   (ج) المستطيل   (د) المعين

(٧) أ ، ب نقطتان حيث أ ب = ٦سم . فان عدد الدوائر الى طول نصف قطر كل منها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب = ...

(أ) ٣   (ب) ٦   (ج) ٤   (د) ٢

(٨) عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأي ثلاث نقط على استقامة واحدة يساوى

(أ) ٣   (ب) صفر   (ج) ١   (د) ٢

(٩) عدد لانهائي جميع الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع مراكزها جميعا على ....

(أ) أ ب   (ب) المستقيم أ ب   (ج) محور تماثل أ ب   (د) نقطة منتصف أ ب

(١٠) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) مستطيل   (ب) معين   (ج) مربع   (د) مثلث

(١١) إذا كانت : أ ب قطعة مستقيمة طولها ٦سم فان طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(أ) ٢سم   (ب) ٣سم   (ج) ٦سم   (د) ١٢سم

(١٢) يمكن تعيين دائرة بمعلومية ....

(أ) ثلاث نقط على استقامة واحدة   (ب) نقطتين   (ج) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة   (د) نقطة واحدة

(١٣) إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فان مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....

(أ) منتصف أ ب   (ب) منتصف أ جـ   (ج) منتصف ب جـ   (د) خارج △

(١٤) △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب بحيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم فان نصف قطر الدائرة المارة برؤوسة = ... سم

(أ) ٥   (ب) ١٠   (ج) ٦   (د) ٨

[٤] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم $\overline{أب}$ حيث أ ب = ٤سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم ، $\overline{أب}$ وتر فيها (لا تمح الأقواس)

[٥] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم $\overline{أب}$ حيث أ ب = ٥سم . ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها = ٤سم

[٦] $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ٧سم ، ارسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب و طول نصف قطرها أصغر ما يمكن .

[٧] ل مستقيم فى المستوى ، أ ∈ ل . بين كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل .

ارسم ل١ ، ل٢ مستقيمان متوازيان البعد بينهما ٥سم . ثم ارسم دائرة مركزها يقع على ل١ وتمس ل٢ .

[٨] ل مستقيم فى المستوى . أ ∉ ل ، والبعد بينهما ٣سم . بين كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل ويكون : (١) طول نصف قطرها ٤سم (٢) طول قطرها ٦سم

(٣) طول قطرها ٤سم (٤) طول قطرها ٣سم

[٩] ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تقع على المستقيم ل . بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ١,٥سم بحيث تمر بالنقطة أ ، ويقع مركزها على المستقيم ل . وكم عدد الحلول فى هذه الحالة ؟

[١٠] ارسم $\overline{أب}$ طولها ٥سم ، كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة أ ومركزها النقطة ب . وكذلك كم دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطة ب ويكون مركزها أ . مع توضيح ذلك بالرسم فى شكل واحد . اذا رسم المستقيم أب فقطع الدائرتين فى س،ص. فأوجد طول $\overline{س ص}$

[١١] $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ٦سم ، ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٤سم ، كم دائرة يمكن رسمها ؟

[١٢] باستخدام أدواتك الهندسية ارسم $\overline{أب}$ طولها ٤سم ثم ارسم على شكل واحد

دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٥سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٢سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٣سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

[١٣] ارسم △ أ ب جـ المتساوى الأضلاع و الذى طول ضلعه ٥سم ثم ارسم الدائرة الخارجة له .

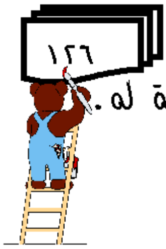
ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ

[١٤] ارسم △ أ ب جـ المتساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٥سم ، ب جـ = ٦سم ثم ارسم الدائرة الخارجة له .

ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ

[١٥] ارسم △ أ ب جـ فيه ب جـ = ٨سم ، أ ب =٦سم ، أ جـ = ١٠سم ، ثم ارسم الدائرة الخارجة له .

ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ



[١٦] ارسم △ أ ب جـ فيه ب جـ = ٥سم ، أ ب = ٧سم ، ق(∠ أ ب جـ)= ١٣٠° ، ثم ارسم الدائرة الخارجة له .
ما موضع مركز الدائرة بالنسبة △ أ ب جـ

[١٧] ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = ٦سم ، ق(أ) = ٤٠° ، طول نصف قطر الدائرة المارة رؤوسه = ٥سم ،
إذا كانت ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، فاحسب طول $\overline{م ء}$ حيث م مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث

[٢١] ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = ٤سم ، ق(∠ ب أ جـ) = ٥٨° ، داخل دائرة طول نصف قطرها= ٢,٥سم ،
ثم أوجد بالبرهان بعد مركزها عن $\overline{أ ب}$

[٢٢] ارسم ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى من الخارج أطوال أنصاف أقطارها : ٢سم ، ٣سم ، ٤سم

[٢٦] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب بحيث أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٤سم .
ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ومن الرسم أوجد طول نصف قطر الدائرة

[٢٧] ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٤سم ، ق(∠ أ) = ٧٠° ثم انشئ دائرة تمر برؤوس △ أ ب جـ .
وأوجد بالقياس طول نصف قطرها .

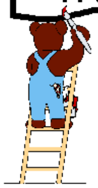
[٢٨] ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ = ٣سم ، ق(∠ جـ) = ٦٠° ثم ارسم دائرة تمر برؤوس △ أ ب جـ
وأوجد بالقياس طول نصف قطر هذه الدائرة .

[٢٩] ارسم △ س ص ع فيه س ص = ٦سم ، س ع = ص ع = ٥سمثم ارسم دائرة تمر برؤوس △ س ص ع
وأوجد طول محيط هذه الدائرة

[٣٠] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٦سم ، أ جـ = ٧سم ثم ارسم الدائرة
المارة برؤسه وأوجد مساحة سطح تلك الدائرة

[٣١] باستخدام الأدوات الهندسية ارسم △ أ ب جـ فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٣سم
ثم ارسم الدائرة المارة برؤسه وأوجد مساحة سطح تلك الدائرة .ثم ارسم الدائرة التى مركزها أ وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$
، دائرة مركزها ب وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، ودائرة مركزها جـ وتمس المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$

[٣٣] ارسم △ أ ب جـ المتساوى الأضلاع بحيث طول ضلعه ٥سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوسه
وأوجد بالقياس طول نصف قطر الدائرة وماذا تلاحظ ؟



تمارين على نظرية الأوتار المتساوية

[١] اكمل ما يأتى :

(١) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على أبعاد .... من مركزها

(٢) الأوتار المتطابقة فى الدوائر المتطابقة تكون على أبعاد .... من ....

(٣) منتصفات أضلاع الخماسي المنتظم المرسوم داخل دائرة تكون على .... من مركزها

(٤) أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م فإذا كان بعد كل منهما عن المركز = $\frac{١}{٢}$ نق وكان جـ ء = ٧سم فان أ ب = ... سم

(٥) أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م ، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠° ، س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ جـ
فإذا كان م س = م ص ، ب جـ = ١٠سم فان أ ص = ... سم ، محيط △ أ ب جـ = ... سم

(٦) الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة والذي أضلاعه على إبعاد متساوية من مركز الدائرة المارة برؤوسه يسمى ....

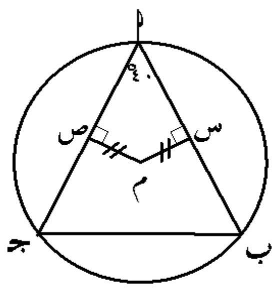
(٧) أ ب ، أ جـ وتران متعامدان فى دائرة مركزها م . فإذا كان هـ منصف أ ب ، و منتصف أ جـ وكان أ ب > أ جـ
فان م هـ .... م و

(٨) فى الدائرة الواحدة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون ....

(٩) المربع المرسوم داخل دائرة تكون أضلاعه على أبعاد .... من مركز الدائرة

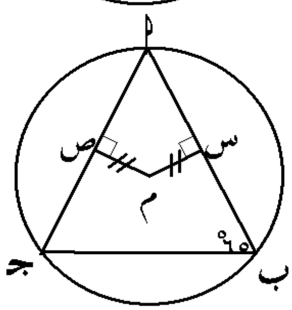
(١٠) فى الشكل المقابل

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ
، م س = م ص ، ق(∠ أ) = ٤٠°
فيكون ق(∠ ب) = ...°



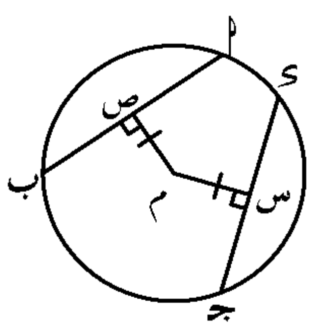
(١١) فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ
م س = م ص ، ق(∠ ب) = ٦٥°
فان ق(∠ أ) = ...
إذا كان أ ب = ٨سم فان أ ص = ...سم

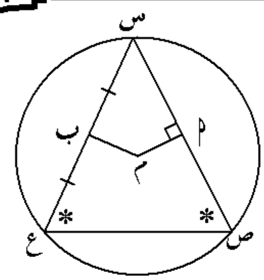


(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة م
، س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب
وكان : م س = م ص ، أ ب = ٧سم
فان : جـ ص = ...سم



[٢] فى الشكل المقابل

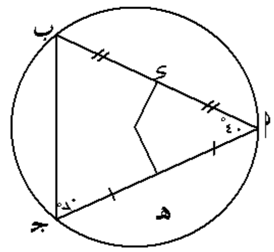


∆ س ص ع مرسوم داخل دائرة م فيه ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

، أ منتصف س ص ، م ب ⊥ س ع

أثبت أن م أ = م ب

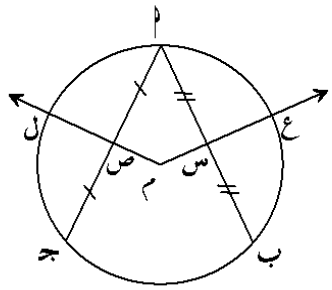
[٣] فى الشكل المقابل



ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° ، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

احسب ق(∠ ء م هـ)   برهن أن : م ء = م هـ .

[٤] فى الشكل المقابل

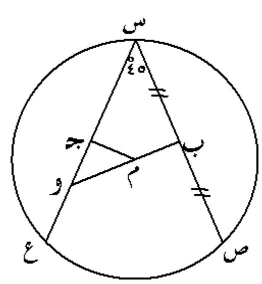


أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

حيث س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب .

رسم م س ، م ص يقطعان الدائرة فى ع ، ل على الترتيب   أثبت أن س ع = ص ل

[٥] فى الشكل المقابل

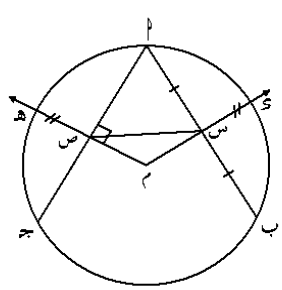


س ص ، س ع وتران متساويان فى دائرة م ، ب ، جـ منتصفا س ص ، س ع على الترتيب .

ق(∠ س) = ٤٥° ، ء ∈ ب م ، ب م ∩ س ع = { ء }

احسب ق(∠ ب م جـ) ، ق(∠ ء م جـ) ، أثبت أن ب م = جـ ء

[٦] فى الشكل المقابل

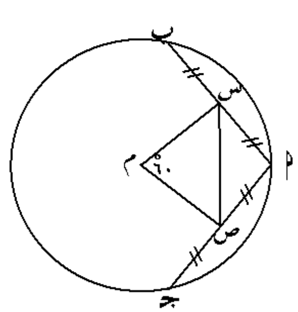


أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م، س منتصف أ ب

، م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص ⊥ أ جـ يقطعه فى ص ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : (١) س ء = ص هـ   (٢) ق(∠ ص س ب) = ق(∠ س ص جـ)

[٧] فى الشكل المقابل

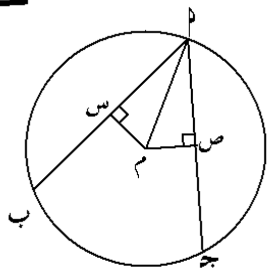


أ ب = أ جـ ، ق(∠م) = ٦٠°

، س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ .

أثبت أن : ∆ م س ع متساوى الأضلاع

[٨] فى الشكل المقابل

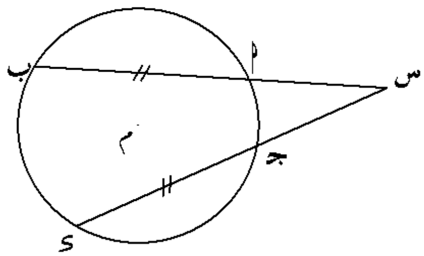


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م

، م س ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

اثبت أن : ق(∠ س أ م) = ق(∠ ص أ م)

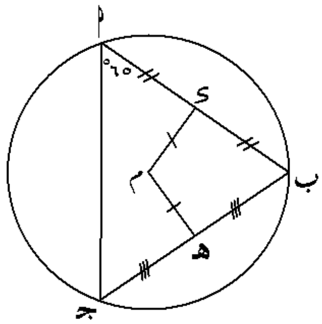
[٩] فى الشكل المقابل



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م وغير متقاطعان

، فاذا كان $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ = { س } اثبت أن : س أ = س جـ

[١٠] فى الشكل المقابل

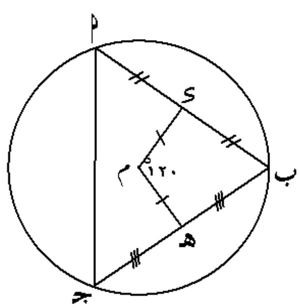


△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ أ) = ٦٥°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : ق(∠ ب)

[١١] فى الشكل المقابل

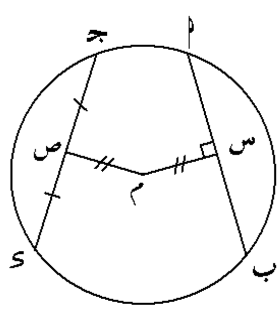


△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ م) = ١٢٠°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب

م ء = م هـ اثبت أن : △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

[١٢] فى الشكل المقابل

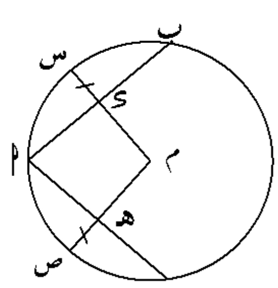


م دائرة ، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$

، م س = م ص ، أ ب = ٧سم

احسب طول $\overline{\text{ء ص}}$

[١٣] فى الشكل المقابل

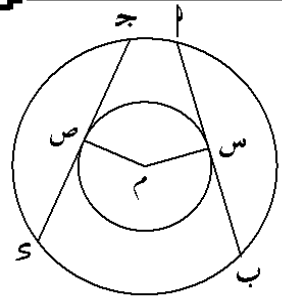


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران فى دائرة م ، حيث ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، على الترتيب

، $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ء}}$ يقطعان الدائرة فى ص ، س على الترتيب بحيث ء س = هـ ص ،

اثبت أن أ ب = أ جـ

[١٤] فى الشكل المقابل

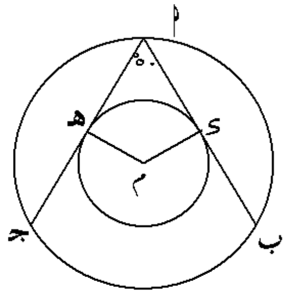


دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، جـ د وتران فى الدائرة الكبرى

يمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب .

اثبت أن : أ ب = جـ د

[١٥] فى الشكل المقابل

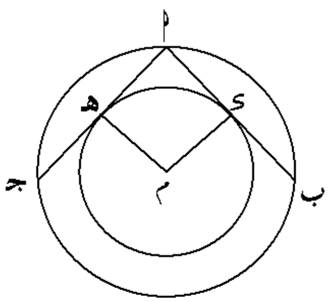


دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، أ جـ مماستان للدائرة الصغرى

، ق(∠ب) = ٥٠°

اثبت أن ① أ ب = أ جـ ② ق(∠ د م هـ)

[١٦] فى الشكل المقابل

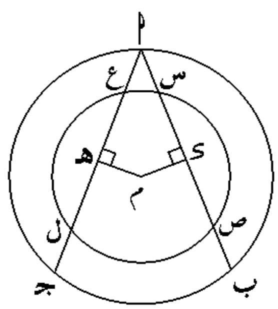


دائرتان متحدتا المركز م ،

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة الكبرى و يمسان الدائرة الصغرى ف د ، هـ

اثبت أن أ د = أ هـ

[١٧] فى الشكل المقابل



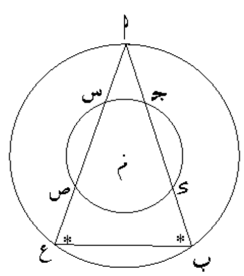
دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب = أ جـ

، م د ⊥ أ ب

، م هـ ⊥ أ جـ

اثبت أن س ص = ع ل

[١٨] فى الشكل المقابل



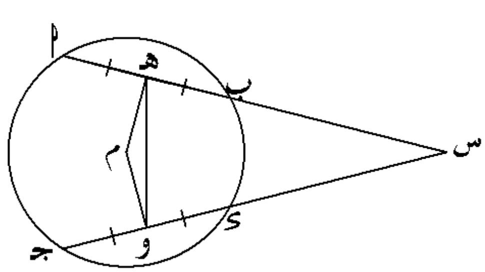
دائرتان متحدتى المركز م، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، د على الترتيب

أ ع وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب

فاذا كان : ق(∠ أ ب ع) = ق (∠ أ ع ب)

اثبت أن : جـ د = س ص

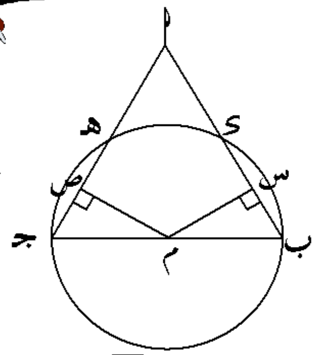
[١٩] فى الشكل المقابل



م دائرة ، أ ب = أ جـ ، هـ ، و منتصفا أ ب ، جـ د .

اثبت أن : △ س هـ و متساوي الساقين

[٢٠] فى الشكل المقابل

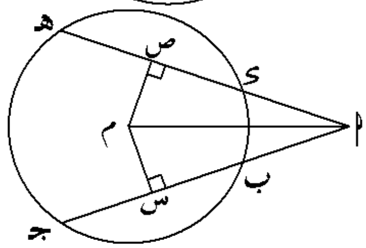


△ أ ب جـ فيه ب جـ قطر فى دائرة م

، رسم م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

أثبت أن أ ب = أ جـ

[٢١] فى الشكل المقابل



ب جـ = ء هـ ، جـ ب ∩ هـ ء = { أ }

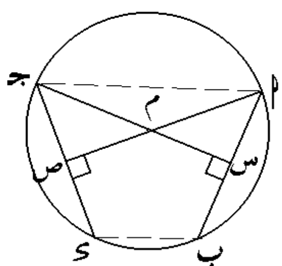
أثبت أن : (١) أ م ينصف (∠ هـ أ جـ) (٢) أ ب = أ ء

[٢٢] دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب وطولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢

حيث نق١ > نق٢ رسم أ جـ ∥ م ن . ويقطع الدائرة م فى جـ ، الدائرة ن فى ء

أثبت أن : أ جـ > أ ء .

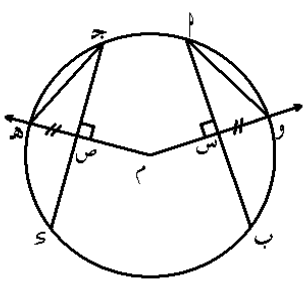
[٢٣] فى الشكل المقابل



م دائرة ، أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

أثبت أن : (١) ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ء ص س) (٢) أ جـ ∥ ب ء

[٢٤] فى الشكل المقابل

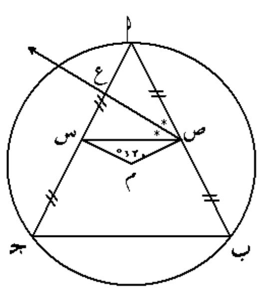


أ ب ، جـ ء وتران فى دائرة م ، م س ⊥ أ ب ويقطع الدائرة فى و

، م ص ⊥ جـ ء ويقطع الدائرة فى هـ ، وس = هـ ص

أثبت أن : (١) أ ب = جـ ء (٢) أ و = جـ هـ

[٢٥] فى الشكل المقابل



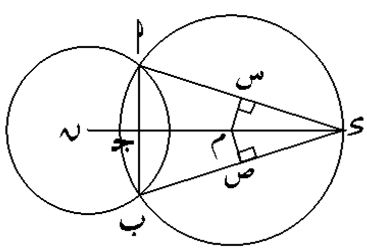
أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

س ، ص منتصفا هما على الترتيب، ق(∠ س م ص) = ١٢٠°

، ص ع ينصف (∠ أ ص س)

أثبت أن : ص ع ∥ م س

[٢٦] فى الشكل المقابل

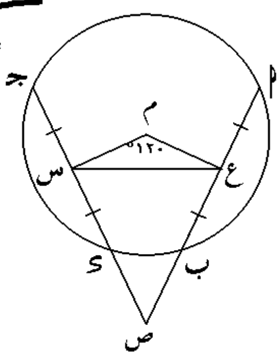


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، أ ب ∩ م ن = { حـ }

ء ∈ المستقيم م ن ، م س ⊥ أ ء ، م ص ⊥ ب ء

أثبت أن : م س = م ص

[٢٧] فى الشكل المقابل :

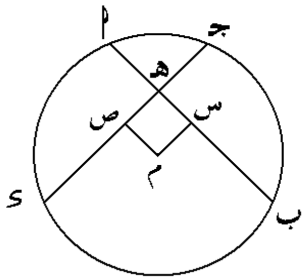


أب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ،

أب ∩ جـ ء = { ص } ، ع منتصف أب ، س منتصف جـ ء

، ق(∠ ع م س) = ١٢٠° أثبت أن : △ ع ص س متساوى الأضلاع .

[٢٨] فى الشكل المقابل

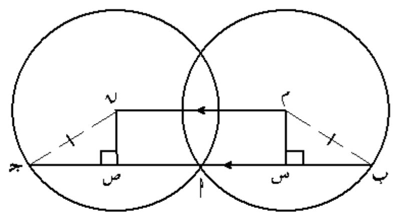


أب ، أجـ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، أب ∩ جـ ء = { هـ }

، النقطة س منتصف أب ، النقطة ص منتصف جـ ء

أثبت أن : (١) △ هـ ب ء متساوى الساقين   (٢) س ص // ب ء

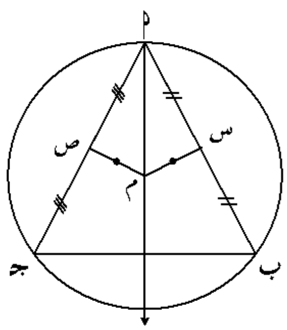
[٢٩] فى الشكل المقابل



المستقيم م ن // المستقيم ب جـ

، م ب = ن جـ   أثبت أن : أ ب = أ جـ

[٣٠] فى الشكل المقابل :

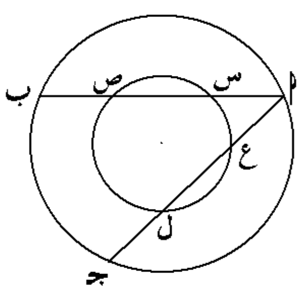


△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ ب أ جـ) = ٦٠°

، س منتصف أب ، ص منتصف أجـ ، م س = م ص

أثبت أن : (١) △ أ ب جـ متساوى الأضلاع .   (٢) أم ⊥ ب جـ

[٣١] فى الشكل المقابل

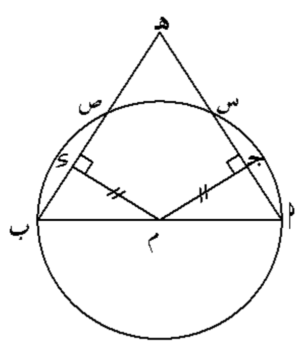


دائرتان متحدتى المركز م ، أب ، أجـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى

ويقطعان الدائرة الصغرى الأول فى س ، ص ، الثانى فى ع ، ل

أثبت أن أ س = أ ع

[٣٢] فى الشكل المقابل



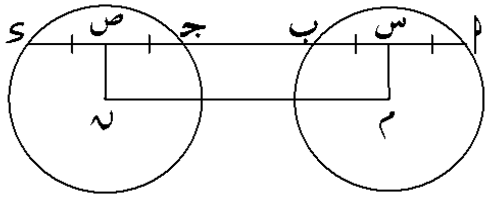
أب قطر فى دائرة م ، م جـ ⊥ أ س ، م ء ⊥ ب ص

، م جـ = م ء ، م س ∩ ب ص = { هـ }

أثبت أن : (١) △ هـ أ ب متساوى الساقين .

(٢) س ص // أ ب

[٣٣] فى الشكل المقابل



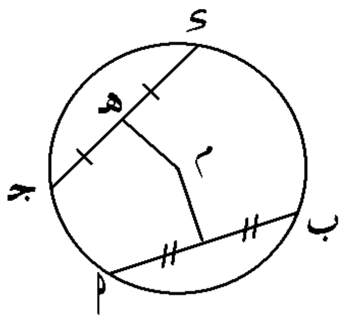
م ، ن دائرتان متطابقتان ، $\overline{\text{أب}}$ = $\overline{\text{جـ ء}}$

، س ، ص منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب

أثبت أن : م س = ن ص

[٣٤] م ، ن دائرتان متطابقتان متقاطعتان فى س ، ص ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ن و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$ ، أب = س ص

، أب = جـ ء . أثبت أن : ① م هـ = م ل ② ن و = ن ل



[٣٥] فى الشكل المقابل

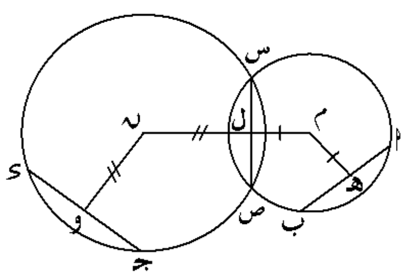
$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران فى الدائرة م حيث و ، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب

فإذا كانت أ(٠ ، -٣) ، ب(٤ ، -١) ، هـ(-١ ، ١) ، م(١ ، ٠)

أثبت أن : أب = جـ ء

[٣٦] إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ وترين متساويين فى الطول فى الدائرة م وكان م(٢ ، ١) ، أ(٤ ، ٣) ، ب(٠ ، ٣)

أوجد : بعد الوتر $\overline{\text{أجـ}}$ عن مركز الدائرة م .

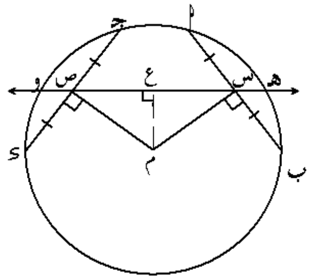


[٣٧] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى س ، ص ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ن و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

، م هـ = م ل ، ن و = ن ل أثبت أن أب = جـ ء

[٣٨] فى الشكل المقابل:

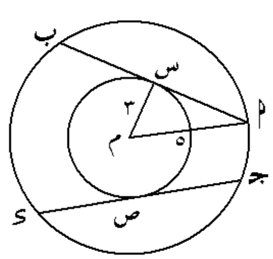


$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب . رسم المستقيم س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و

، رسم $\overline{\text{م ل}}$ ⊥ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ أثبت أن : س هـ = ص و

[٣٩] فى الشكل المقابل

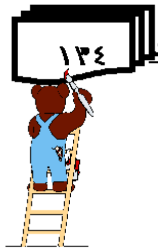


دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ وتران فى الدائرة الكبرى

ويمسان الدائرة الصغرى ف س ، ص على الترتيب . أثبت أن أب = أجـ.

وإذا كان طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم

وطول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٣سم . أوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

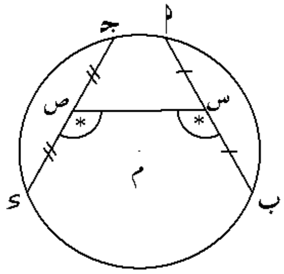


[٤٠] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة مركزها م س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ د

، ق(∠ س ص د) = ق(∠ ص س ب)

أثبت أن : أ ب = جـ د

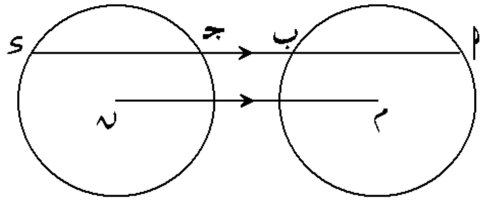


[٤١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان ، أ د // م ن

، أ د يقطع الدائرة م فى أ ، ب ويقطع الدائرة ن فى جـ ، د

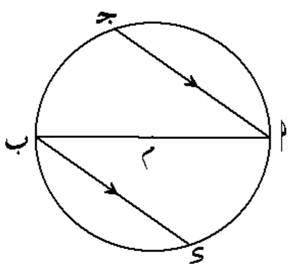
أثبت أن : أ ب = جـ د



[٤٢] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ ، ب د وتران متوازيان

أثبت أن : ① أ جـ = ب د ② جـ د قطر فى الدائرة م

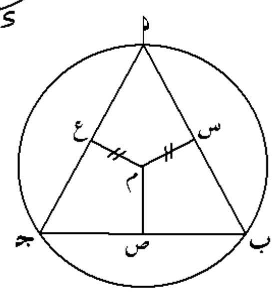


[٤٣] فى الشكل المقابل

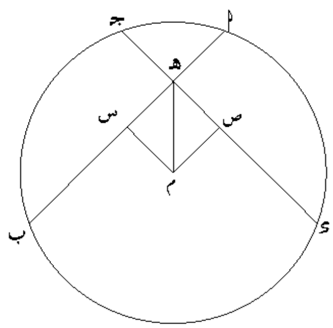
△ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة م وكانت س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه

، م س = م ص

أثبت أن م ص ينصف الزاوية المنعكسة ∠ (س م ع)



[٤٤] أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ، ارسم م د فقطع الدائرة فى س ، ارسم م هـ فقطع الدائرة فى ص اثبت أن : ① د س = هـ ص ② أ س = أ ص

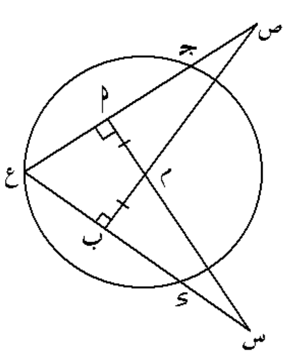


[٤٥] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ د وتران فى الدائرة م يتقاطعان فى نقطة هـ ، م س ⊥ أ ب

، م ص ⊥ جـ د ، ق(∠ أ هـ م) = ق(∠ د هـ م)

أثبت أن : أ ب = جـ د



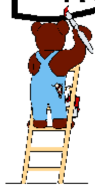
[٤٦] فى الشكل المقابل:

ع جـ ، ع د وتران فى الدائرة م ، وكان أ ∈ ع جـ بحيث م أ ⊥ ع جـ

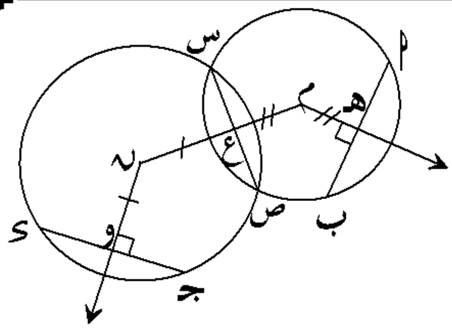
، م أ ∩ ع د = { س } ، ب ∈ ع د بحيث م ب ⊥ ع د

، م ب ∩ ع جـ = { ص } فاذا كان : م أ = م ب

أثبت أن : جـ ص = د س



[٤٧] فى الشكل المقابل

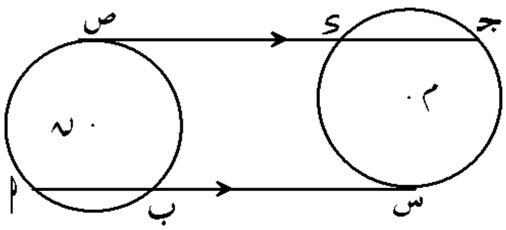


دائرتان م ، ن متقاطعتان فى س ، ص ، وكانت م هـ = م ع

، ن و = ن ع ، م هـ ⊥ أ ب ، ن و ⊥ جـ د .

أثبت أن أ ب = جـ د

[٤٨] فى الشكل المقابل

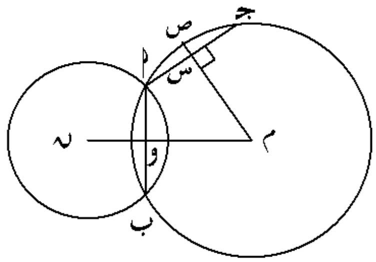


م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ، أ ب يمس الدائرة م عند س

، جـ د يمس الدائرة ن عند ص ، المستقيم أ ب // المستقيم جـ د .

أثبت أن ① أ ب = جـ د ، ② أ س = جـ ص

[٤٩] فى الشكل المقابل



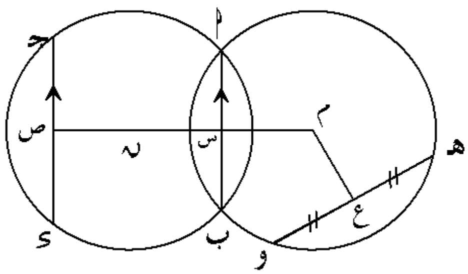
دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب رسم م س ⊥ أ جـ

ويقطع أ جـ فى س ويقطع الدائرة م فى ص

ورسم م ن ويقطع أ ب فى و والدائرة م فى هـ فإذا كان س ص = و هـ .

أثبت أن أ جـ = أ ب

[٥٠] فى الشكل المقابل

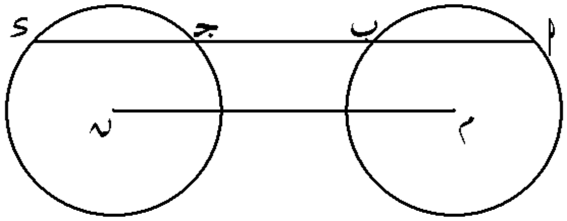


م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب ، م ن ∩ أ ب = { س }

جـ د // أ ب ، م ن ∩ جـ د = { ص } ، ع منتصف هـ و ، هـ و = جـ د

أثبت أن : ① م ع = ن ص ، ② س ص > س ع

[٥١] فى الشكل المقابل

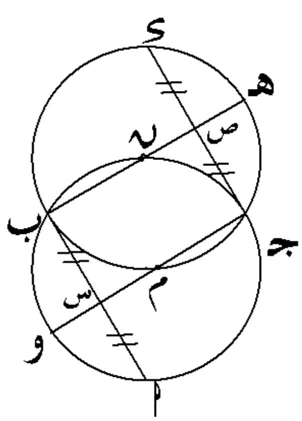


م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان ،

أ د يقطع الدائرة م فى أ ، ب ويقطع الدائرة ن فى جـ ، د ،

أ ب = جـ د ، أثبت أن أ د // م ن

[٥٢] فى الشكل المقابل

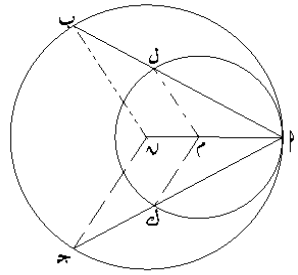


م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب = جـ د ، أ س = س ب ، جـ ص = ص د

أثبت أن : ① ن ص ⊥ جـ د

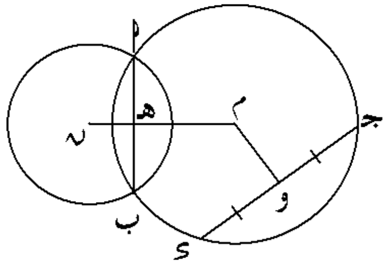
② م س ⊥ أ ب ③ هـ ص = س و

[٥٣] فى الشكل المقابل



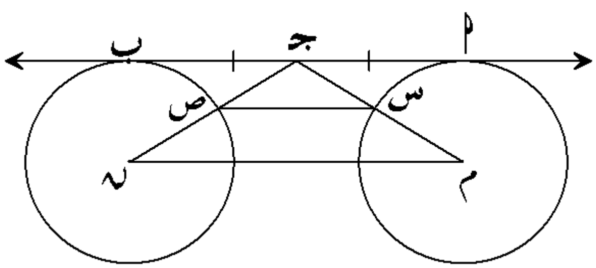
دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى أ ،
رسم $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى ن
فقطعا الدائرة الصغرى م فى ل ، ك على الترتيب
أثبت أن : أ ل = أ ك

[٥٤] فى الشكل المقابل



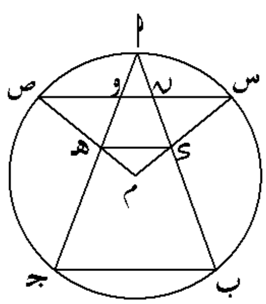
م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{\text{م ن}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = { هـ }
، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتر فى الدائرة م ، و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ، أ ب = جـ ء .
أثبت أن م هـ = م و

[٥٥] فى الشكل المقابل



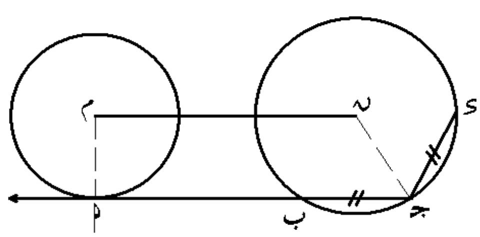
م ، ن دائرتان متطابقتان ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك لهما
، جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، الدائرة م ∩ $\overline{\text{م جـ}}$ = { س } ،
الدائرة ن ∩ $\overline{\text{ن جـ}}$ = { ص }
أثبت أن : ① $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ن}}$
② △ جـ م ن متساوى الساقين ③ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

[٥٦] فى الشكل المقابل



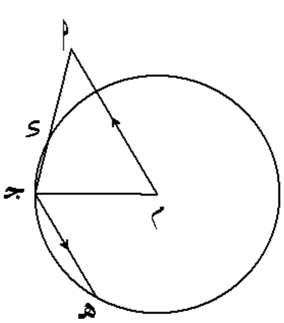
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$
، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ يقطعان الدائرة م فى س ، ص على الترتيب .
$\overline{\text{س ص}}$ تقطع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ن ، و . أثبت أن : س ء = ص هـ

[٥٧] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٥سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يمس الدائرة م عند أ
ويقطع الدائرة ن فى ب ، جـ على الترتيب حيث ب جـ = ٦سم ، م ن = ١٢سم
أثبت أن : الشكل م أ جـ ن شبه منحرف ثم احسب مساحته
إذا كانت : جـ ء = جـ ب أوجد بعد النقطة ن عن $\overline{\text{جـ ء}}$

[٥٨] فى الشكل المقابل



△ أ ب جـ فيه : أ م = أ جـ ، ورسمت دائرة مركزها م ، و نصف قطرها $\overline{\text{م جـ}}$
فقطعت $\overline{\text{أ جـ}}$ فى نقطة ء ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{أ م}}$ فقطع الدائرة فى هـ
أثبت أن : جـ هـ = جـ ء

الوحدة الخامسة

١ الزوايا والأقواس

٢ العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المرسومة على نفس القوس

٣ التمارين المشهورة

٤ العلاقة بين الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

تمارين [١] على الزوايا والأقواس

(١) اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

(١) قياس القوس الذى يمثل ربع دائرة = ...°

(٢) طول القوس الذى يمثل ثلث محيط دائرة = ...

(٣) Δ ا ب جـ متساوى الأضلاع تمر برؤوسه دائرة م فان ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ...°

(٤) طول القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٥}$ دائرة = ...

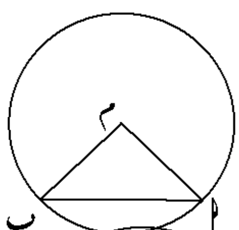
(٥) الزاوية التى يقع رأسها على الدائرة وكل من ضلعيها وترين فى الدائرة تسمى زاوية ....

(٦) الزاوية المركزية التى قياسها ١٥٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط دائرة

(٧) إذا تساوى قياسا قوسين فى دائرة فان وتريهما ....

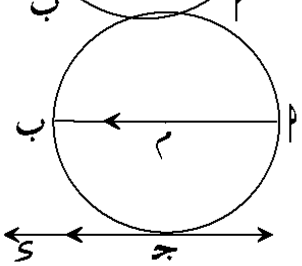
(٨) الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران بينهما ....

(٩) الزاوية المركزية التى قياسها ١٠٠° تقابل قوسا قياسه ....°



(١٠) دائرة مركزها م ، ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ٦٠° ،

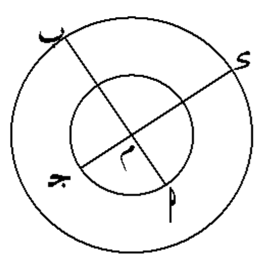
ا ب = ٧سم فان محيط الدائرة المقابلة .... سم



(١١) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس ، $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

ق($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = ...°



(١٢) فى الشكل المقابل :

ق($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = ٥٠°

فان : ق($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ...°

(١٣) ا ب جـ ء مربع مرسوم داخل دائرة م فان : ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ...°

(٢) اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

(١) قياس القوس الذى يمثل ٣/٤ قياس دائرة .... °

(٢) قياس نصف الدائرة = ... ° بينما طول نصف الدائرة = ...

(٣) إذا توازى وتران فى الدائرة فإنهما يحصران بينهما .... فى القياس

(٤) إذا مرت دائرة برؤوس الشكل السداسى المنتظم ا ب جـ ء هـ و فان ق (ا ب) = ... °

(٥) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه الدائرة............

(٦) إذا كان س ص // ع ل وتران متوازيان فى دائرة فان ق (س ع) = ق (.........)

(٧) إذا كان ا ب قطر فى الدائرة م فان : ا ب يمثل .... الدائرة

(٨) قياس الدائرة = ... ° (٩) الزاوية المركزية هى ....

(١٠) قياس القوس هو قياس الزاوية .... بينما طول القوس هو جزء من ....

(١١) إذا رسم المربع ا ب جـ ء دخل دائرة م فان : ق (ا ب) = ... °

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أصغر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٢) قياس القوس الذى يمثل ٢/٥ قياس الدائرة .... °

❶ ١٢٠ ❷ ١٤٤ ❸ ١٥٦ ❹ ٢٠٧

(٣) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٤) طول ١/٤ الدائرة التى طول نصف قطرها = ١٤سم (حيث π = ٢٢/٧) = ... سم

❶ ٢٢ ❷ ٣٢ ❸ ٤٤ ❹ ٨٨

(٥) الزاوية المركزية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٦) طول نصف الدائرة التى طول نصف قطرها نق = ...

❶ ٩٠° ❷ π نق ❸ ١٨٠° ❹ ٢π نق

(٧) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا = نصف دائرة فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٨) الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ $\frac{١}{٤}$ ❷ $\frac{١}{٦}$ ❸ $\frac{١}{٣}$ ❹ $\frac{١}{٢}$

(٩) قياس $\frac{١}{٦}$ دائرة = ...°

❶ ٦٠ ❷ ١٢٠ ❸ ٣٠ ❹ ٣٦٠

(١٠) $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة التى طول نصف قطرها نق = ...

❶ ٤٥° ❷ ٩٠° ❸ π نق ❹ $\frac{\pi \text{ نق}}{٢}$

(١١) قياس القوس الذى يمثل ربع قياس الدائرة = ...

❶ ١٨٠° ❷ ٩٠° ❸ π نق ❹ $\frac{\pi \text{ نق}}{٢}$

(١٢) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة = ...

❶ ٦٠° ❷ ١٢٠ ❸ π نق ❹ $\frac{٢}{٣}$ π نق

(١٣) طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ...

❶ ٢πنق ❷ π نق ❸ $\frac{١}{٢}$ π نق ❹ ١٨٠°

(١٤) أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ فان ....

❶ أ ب < ء جـ ❷ أ ب > ء جـ ❸ أ ب = ء جـ ❹ $\overline{أ ب}$ // $\overline{ب جـ}$

(١٥) الزاوية المركزية التى قياسها ٦٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ $\frac{١}{٢}$ ❷ $\frac{١}{٣}$ ❸ $\frac{١}{٤}$ ❹ $\frac{١}{٦}$

مع أرق تمنياتى بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

(١٦) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° لدائرة طول نصف قطرها ٢,١سم هو ....

❶ ٤,٤سم ❷ ٦٠° ❸ ٦,٦سم ❹ ٤,٢سم

(١٧) إذا كان قياس زاوية مركزية قياسها ١٣٥° فى دائرة طول نصف قطرها ٤سم فان طول قوسها = ... سم

❶ ٦π ❷ ٣π ❸ $\frac{١٦}{٣}\pi$ ❹ ٢٧٠°

(١٨) دائرة محيطها ٣٦سم فان قياس القوس منها طوله ٦سم يكون ....

❶ ٦٠° ❷ ٣٠° ❸ ٩٠° ❹ ١٢٠°

(١٩) قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}\pi$ نق فانه يقابل زاوية مركزية قياسها ....

❶ ٣٠° ❷ ٦٠° ❸ ١٢٠° ❹ ٢٤٠°

(٢٠) الزاوية التى قياسها ٩٠° تقابل قوسا طوله = ... محيط الدائرة

❶ ٤ ❷ $\frac{١}{٢}$ ❸ $\frac{١}{٣}$ ❹ $\frac{١}{٤}$

(٢١) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها نق = ...

❶ $\frac{١}{٣}\pi$ نق ❷ $\frac{٢}{٣}\pi$ نق ❸ ٣ π نق ❹ π نق

(٢٢) طول القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة = ...سم

❶ ٢π نق ❷ π نق ❸ $\frac{١}{٢}\pi$ نق ❹ $\frac{١}{٤}\pi$ نق

(٢٣) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة = ...

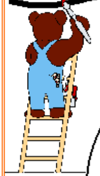
❶ ٦٠° ❷ ٧٢° ❸ ١٢٠° ❹ ١٣٥°

(٢٤) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠° فى دائرة محيطها ٣٦سم = ... سم

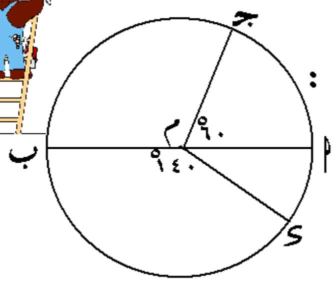
❶ ١٨ ❷ ٩ ❸ ٣ ❹ ٤,٥

(٢٥) قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}\pi$ نق فانه يقابل زاوية مركزية قياسها ....

❶ ٢٤٠° ❷ ٣٠° ❸ ١٢٠° ❹ ٦٠°



[٤] فى الشكل المقابل :



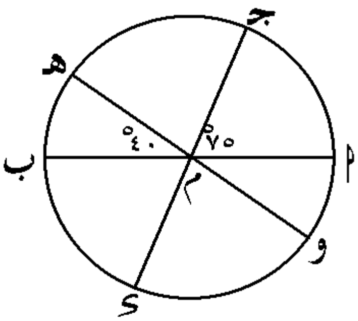
$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(أ م جـ) = ٦٠° ، ق(ب م ء) = ١٤٠° أكمل ما يأتى :

① ق(⌒أ جـ) = ...° ② ق(⌒ب ء) = ...°

③ ق(⌒جـ ء) = ...° ④ ق(⌒جـ ب ء) = ...°

⑤ ق(⌒ب جـ ء) = ...°

[٥] فى الشكل المقابل :

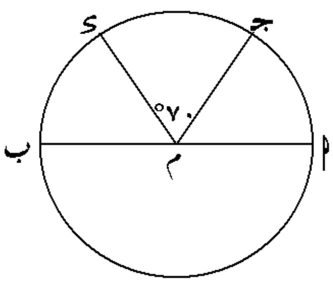


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ أقطار فى الدائرة م أكمل :

① ق(⌒أ جـ) =..........° ② ق(⌒أ جـ هـ) =..........°

③ ق(⌒أ جـ ء) =..........° ④ ق(⌒أ و هـ) =..........°

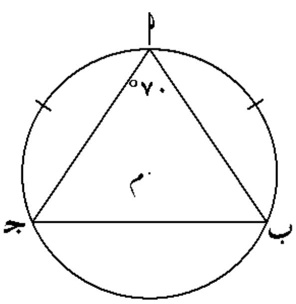
[٦] فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(جـ م ء) = ٧٠° ،

ق(⌒أ جـ) : ق(⌒ء ب) = ٥ : ٦ أوجد : ق(⌒أ جـ ء)

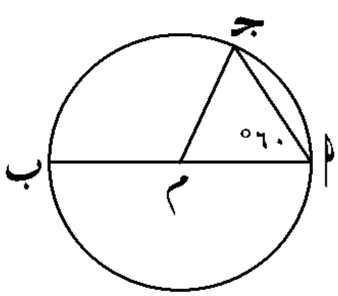
[٧] فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق(⌒أ جـ) = ق(⌒ب جـ) ،

ق(أ جـ ب) = ٧٠° أوجد : ق(⌒أ ب جـ)

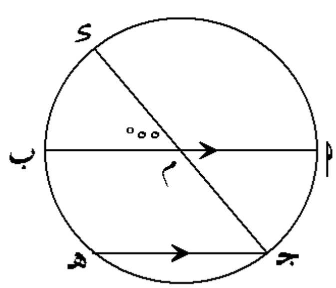
[٨] فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ق(∠ أ) = ٦٠° ،

احسب ق(⌒أ جـ) ، ق(⌒ب جـ) ، ق(∠ ب أ جـ)

[٩] فى الشكل المقابل :

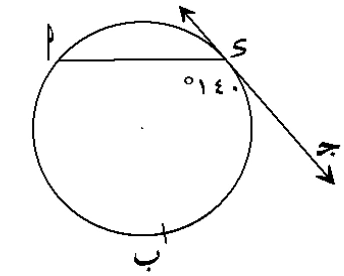


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ قطران فى الدائرة م ،

ق(ء م ب) = ٥٥° ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

أوجد : ق(⌒ب هـ)

✍ [١٠] فى الشكل المقابل :

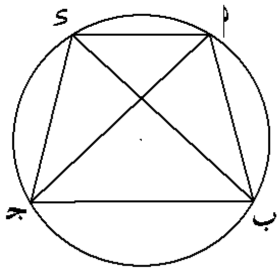


جـ ء ↔ للدائرة م عند نقطة ء ،

ق(أ ء جـ) = ١٤٠°

أوجد : ق(أ ب ء ⌒)

✍ [١١] فى الشكل المقابل :

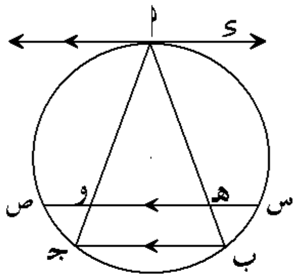


أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، أ جـ = ب ء

، أ ب = (٣س − ٥) سم ، ء جـ = (س + ٣) سم

اثبت أن : ❶ أ ب = ء جـ   ❷ أوجد طول أ ب

✍ [١٢] فى الشكل المقابل :

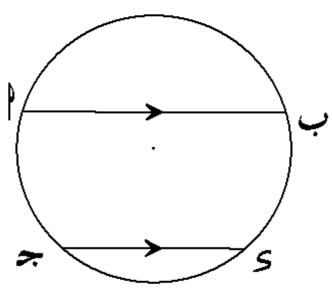


أ ء ↔ مماس للدائرة عند نقطة أ ،

أ ء ↔ // س ص // ب جـ

اثبت أن : ب هـ = جـ و

✍ [١٣] فى الشكل المقابل :

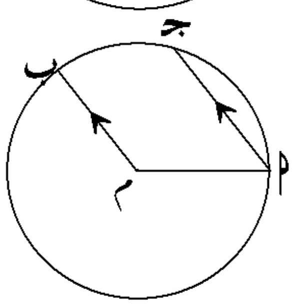


أ ب // جـ ء ، ق(أ ب ⌒) = ١٦٠° ، ق(جـ ء ⌒) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ق(أ جـ ⌒)

اثبت أن : ب جـ = أ ء

✍ [١٤] فى الشكل المقابل :

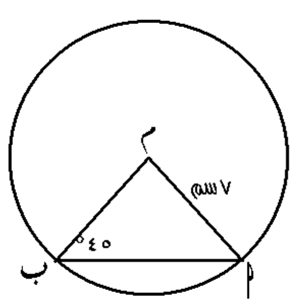


دائرة م ، أ جـ // م ب ،

ق(أ م ب) = ٢ ق(أ)

أوجد : ق(أ جـ ب ⌒)

✍ [١٥] فى الشكل المقابل :



أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م

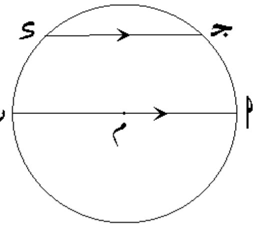
بحيث ق(∠ م ب أ) = ٤٥° ، أ م = ٧سم

أوجد طول أ ب ⌒   ($\pi = \frac{22}{7}$)

(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ،

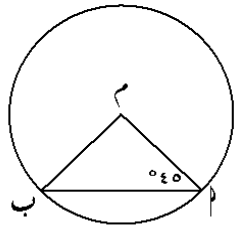
ق(أ جـ⌒) = ٤٠° ، جـ د // أ ب أوجد : ق(جـ د⌒)



(١٧) فى الشكل المقابل :

طول نصف قطر الدائرة = ٧سم ، ق(∠ م أ ب) = ٤٥°

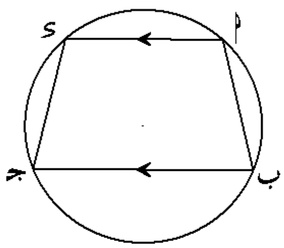
أوجد طول أ ب⌒



(١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

أ د // ب جـ اثبت أن أ جـ = ب د

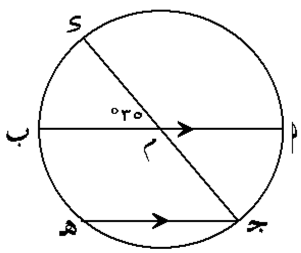


(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ د قطران فى الدائرة م

بحيث ق(∠ د م ب) = ٣٥° ، جـ هـ // أ ب

أوجد : ق(ب هـ⌒)

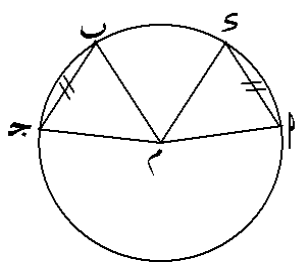


(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م ،

د ∈ أ ب⌒ الأصغر ، جـ ∈ أ ب⌒ الأكبر ، أ د = ب جـ

اثبت أن : ق(∠ أ م ب) = ق(∠ جـ م د)

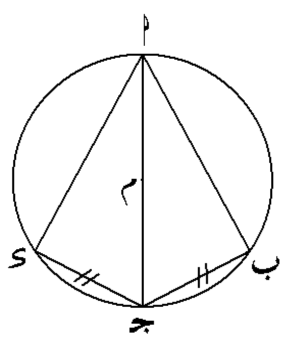


(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم دال دائرة م ،

أ جـ قطر فى الدائرة م ، جـ ب = جـ د

اثبت أن : ق(أ ب⌒) ق(أ د⌒)

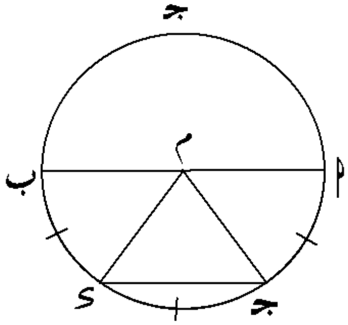


(٢٢) فى الشكل المقابل :

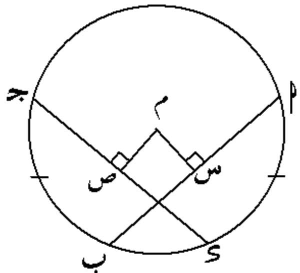
أ ب قطر فى الدائرة التى مركزها م ،

ق(أ جـ⌒) = ق(جـ د⌒) = ق(د ب⌒)

اثبت أن : △ م جـ د متساوى الأضلاع .



✍ (٢٣) فى الشكل المقابل :

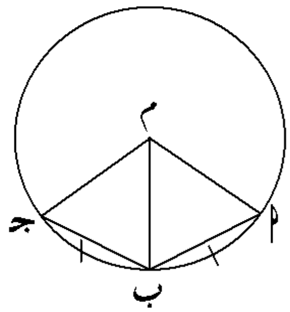


ق(أ جـ) = ق(ب د) ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ د

أثبت أن : ❶ طول أ ب = طول جـ د

❷ م س = م ص

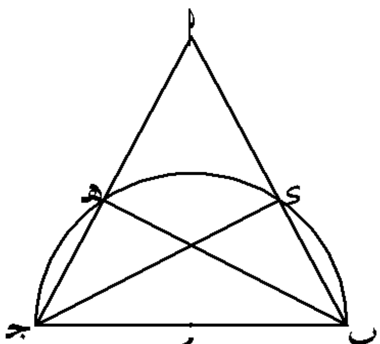
✍ (٢٤) فى الشكل المقابل :



ق(أ ب) = ق(ب جـ)

أثبت أن : محيط △ م أ ب = محيط △ م ب جـ

✍ (٢٥) فى الشكل المقابل :

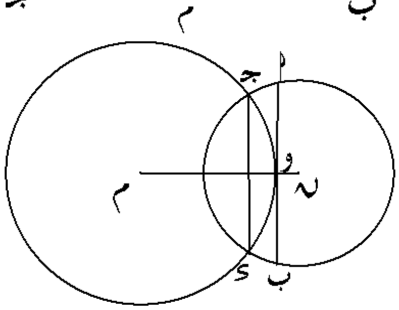


ب د ∩ جـ هـ = { أ } ، أ ب = أ جـ ، أ د = أ هـ

أثبت أن ❶ ق(ب د) = ق(جـ هـ)

❷ ب هـ = جـ د

✍ (٢٦) فى الشكل المقابل :

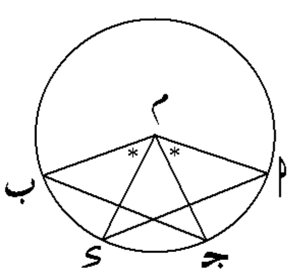


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { جـ ، د }

، أ ب مماس للدائرة م عند و

أثبت أن : ق(أ جـ) = ق(ب د)

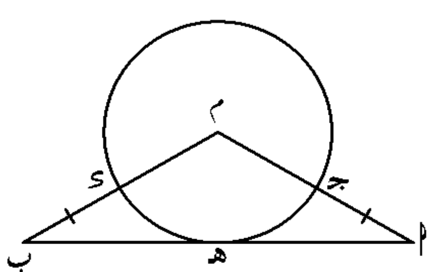
✍ (٢٧) فى الشكل المقابل :



فى الدائرة م : ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ د م ب)

أثبت أن : أ د = ب جـ

✍ (٢٨) فى الشكل المقابل :

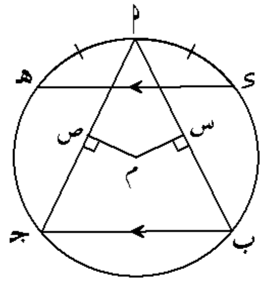


دائرة م طول نصف قطرها ٦سم ،

أ ب قطعة مماسة للدائرة عند هـ ،

أ جـ = د ب = ٦سم أوجد : ق(جـ هـ د)

(٢٩) في الشكل المقابل :

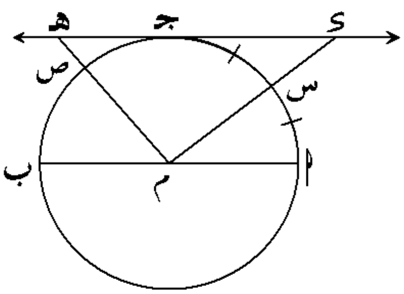


ب جـ // ء هـ ، أ منتصف $\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$ ،

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

أثبت أن : ❶ أ ب = أ جـ ❷ م س = م ص

(٣٠) في الشكل المقابل :

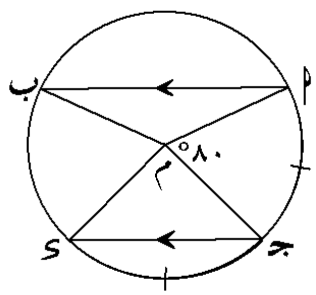


أ ب قطر في الدائرة م ، ء هـ مماس للدائرة م عند جـ

ء هـ // أ ب ق($\overset{\frown}{\text{ب ص}}$) = ٢ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ص}}$) ، س منتصف ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$)

أوجد قياسات زوايا △ م ء هـ

(٣١) في الشكل المقابل :



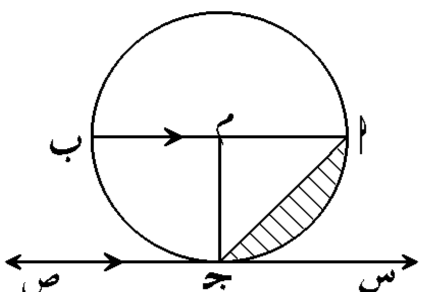
م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم ، أ ب // جـ ء

، ق(∠أ م جـ) = ٨٠° ، طول ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = طول ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)

أوجد : ❶ ق(∠ء جـ م)

❷ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) ❸ طول ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

(٣٢) في الشكل المقابل :



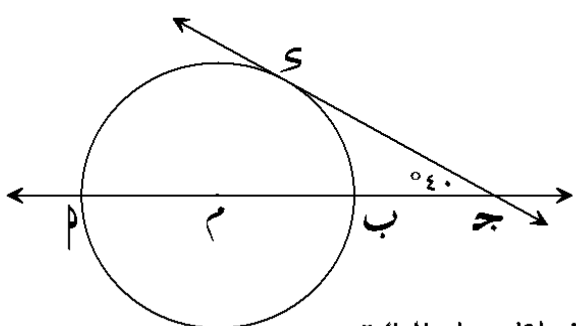
دائرة م طول نصف قطرها ٧سم ،

أ ب قطر فيها ، س ص مماس لها عند جـ ،

س ص // أ ب أوجد :

❶ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ❷ طول أ جـ ❸ مساحة المنطقة المظللة ($\pi = \frac{22}{7}$)

(٣٣) في الشكل المقابل :



جـ ء مماس للدائرة عند ء :

أوجد : ق($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) ، ق($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$)

(٣٤)

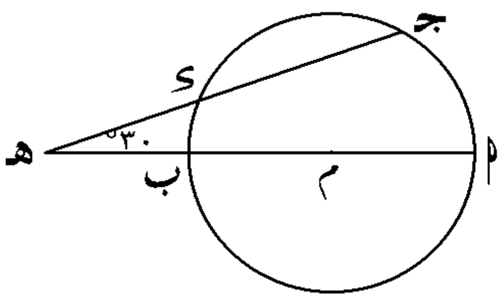
م دائرة طول نصف قطرها ٥سم فإذا كان أ ، ب نقطتان على الدائرة م بحيث ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١٠٨° أوجد طول ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) حيث π = ٣,١٤

(٣٥) أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ، أ ب = أ ء ، ب جـ = جـ ء

اثبت أن : $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فى الدائرة م

(٣٦) أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على دائرة بحيث ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) : ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) : ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) كنسبة ١ : ٢ : ٣ فاذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٨سم أوجد : طول ($\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}}$)

(٣٧) فى الشكل المقابل :



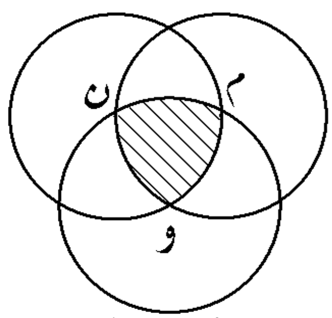
$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = { هـ }

ق(أ هـ جـ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٨٠°

أوجد : ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)

متفوقين

(٣٨)



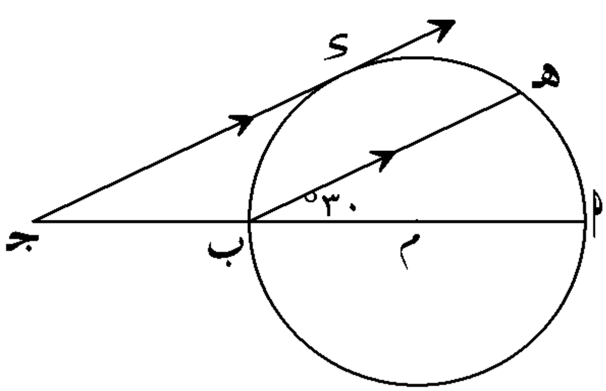
م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة وكل منها تمر بمركز الأخرى

فإذا كان محيط الجزء المظلل = π سم

أوجد : طول نصف قطر الدائرة م

(٣٩) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$ فى الدائرة بحيث ب منتصف $\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$ ، هـ نقطة على الدائرة بحيث $\overline{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ اثبت أن : م ∈ $\overline{\text{ء هـ}}$

(٤٠) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

فإذا كان : ق(أ ب هـ) = ٣٠°

أوجد : ق (أ م هـ) ، ق($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$)

تمارين [٢] على علاقة الزاوية المحيطية بالمركزية

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٢) الزاوية لمركزية التى تقابل قوسا أكبر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٣) الزاوية المحيطية التى تقابل قوسا أصغر فى الدائرة ....

❶ قائمة ❷ حادة ❸ منفرجة ❹ منعكسة

(٤) قياس القوس المقابل لزاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة ....

❶ ٩٠° ❷ ١٨٠° ❸ ٢٧٠° ❹ ٦٠°

(٥) قياس الزاوية المحيطية = ... الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .

❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

(٦) قياس الزاوية المركزية = ... الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس .

❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

(٧) النسبة بين قياس الزاوية المركزية الى قياس الزاوية المحيطية التى تحصر نفس القوس

❶ ٣ : ١ ❷ ٢ : ١ ❸ ١ : ٢ ❹ ١ : ٣

(٨) قياس الزاوية المركزية يساوى .... القوس المقابل لها

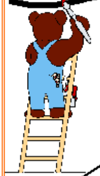
❶ ربع قياس ❷ نصف قياس ❸ قياس ❹ ضعف قياس

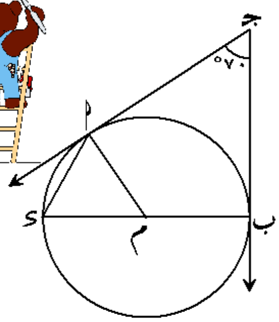
(٩) إذا كان قياس زاوية مركزية = ٩٠° فان قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس = ...

❶ ٩٠° ❷ ٤٥° ❸ ١٨٠° ❹ ٣٦٠°

(١٠) فى أى دائرة الزاوية لمحيطية التى قياسها س° فان قياس الزاوية المركزية لمشتركة معها فى نفس القوس تساوى ....

❶ س° ❷ $س^٢$° ❸ ٢س° ❹ $\frac{١}{٢}$ س°



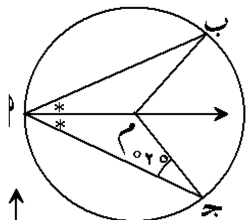


[٢] في الشكل المقابل: إذا كان : $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ مماسين للدائرة م ،

ق(∠ جـ) = ٧٠° فإن ق(∠ أ ء م) = ...

① ٣٥° ② ٥٥°

③ ٦٥° ④ ٤٥°

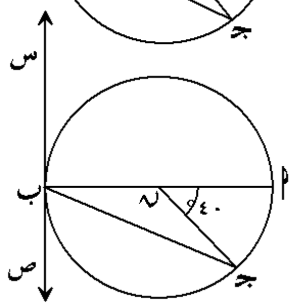


[٣] في الشكل المقابل: إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف (∠ ب أ جـ)

، ق(∠ أ جـ م) = ٢٥° فإن : ق(ب⌢جـ) = ...

① ٢٥° ② ٥٠°

③ ١٠٠° ④ ١٤٠°



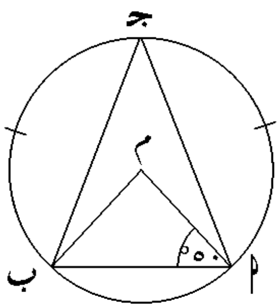
[٤] في الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة مركزها ن ،

$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند ب ، ق(∠ أ ن جـ) = ٤٠°

فإن : ق(∠ جـ ب ص) = ...

① ٤٠° ② ٥٠°

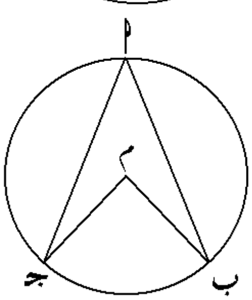
③ ٢٠° ④ ٧٠°



[٥] في الشكل المقابل: ق(∠ جـ أ م) = ...

① ٢٠° ② ٤٠°

③ ٣٠° ④ ٥٠°



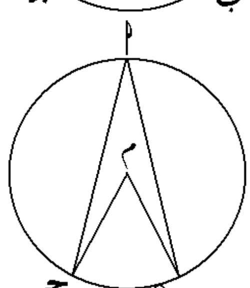
[٦] في الشكل المقابل:

دائرة م ، ق(∠ أ) + ق(∠ب م جـ) = ١٥٠°

فإن : ق(∠ أ) = ...

① ١٠٠° ② ٤٥°

③ ٧٥° ④ ٥٠°



[٧] في الشكل المقابل:

إذا كان : ق(∠ ب م جـ) − ق(∠ أ) = ٣٠°

فإن : ق(∠ أ) = ...

① ١٥٠ ② ٤٥° ③ ٦٠° ④ ٣٠°

(ن) اكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة :

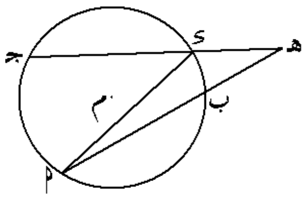
❶ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

❷ الزاوية المركزية المرسومة فى نصف دائرة ....

❸ قياس الزاوية المركزية = ... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس .

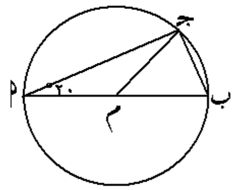
❹ فى الشكل المقابل : ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٧٠° ، ق($\overset{\frown}{بء}$) = ٣٠°

فان : ق(∠ هـ) = ...°

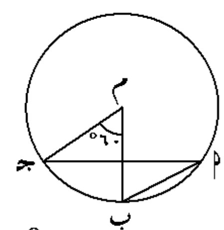


❺ فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، ق(∠ جـ أ ب) = ٢٠°

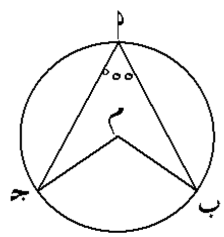
① ق(∠ ب م جـ) = ...°   ② ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ...°



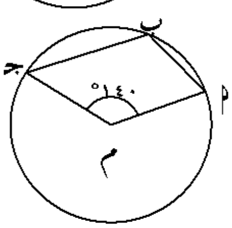
❻ فى جميع الأشكال التالية : احسب قياسات الزوايا المطلوبة



ق(∠ ب أ جـ) = ...°

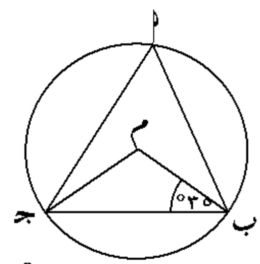


ق(∠ ب م جـ) = ...°

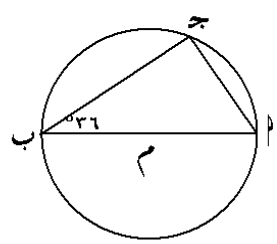


ق(∠ أ ب جـ) = ...°

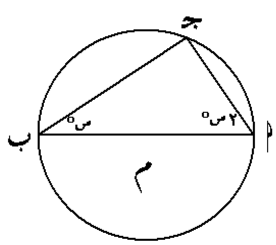
❼ فى جميع الأشكال التالية : احسب قياسات الزوايا المطلوبة



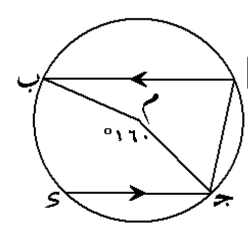
ق(∠ ب أ جـ) = ...°



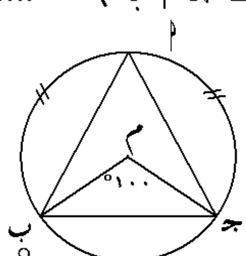
ق(∠ جـ أ ب) = ...°



ق(∠ أ ب جـ) = ...°



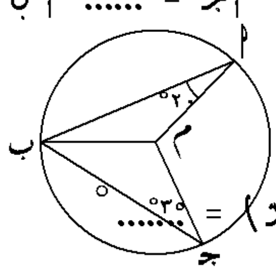
ق(∠ أ جـ ء) = ...°



ق(∠ أ جـ ب) = ...°

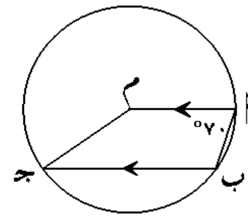
ق(∠ أ ب م) = ...°

أ جـ = ... أ ب

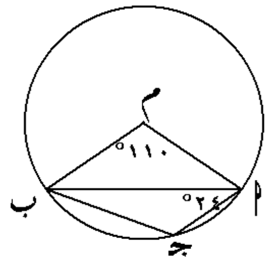


ق(∠ أ م جـ) = ...°

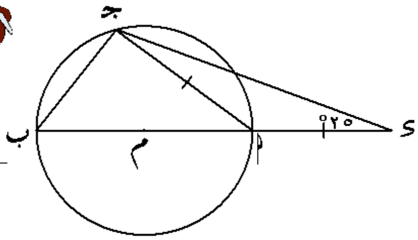
مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



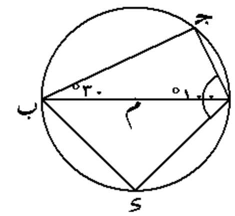
ق(∠ أ م جـ) = ... °



ق(∠ أ ب جـ) = ... °

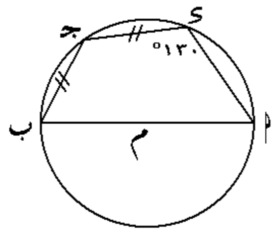


ق(∠ أ ب جـ) = ... °

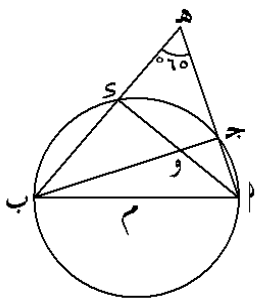


ق(∠ ء أ ب) = ... °

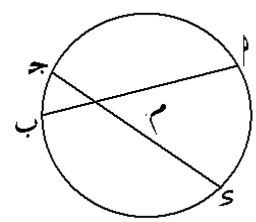
ق(∠ أ ب ء) = ... °



ق(∠ ء جـ ب) = ... °



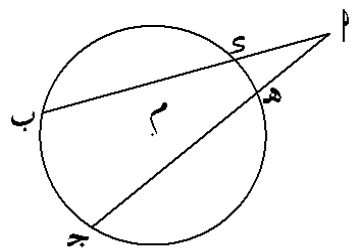
ق(∠ جـ و ء) = ... °



ق(أ⌒ء) = ٧٠°

ق(ب⌒جـ) = ٣٠°

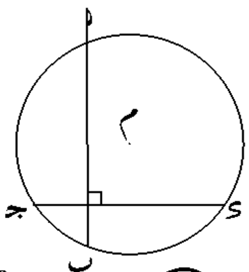
فان ق(∠ أ هـ ء) = ... °



ق(جـ⌒ب) = ١٤٠°

ق(ء⌒هـ) = ٣٠°

فان ق(∠ أ) = ... °



ق(أ⌒ء) = ١٥٠°

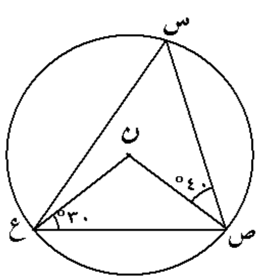
ق(ب⌒جـ) = ... °

❼ **فى الشكل المقابل :** س ص ع △ مرسوم داخل دائرة ن

، ق(∠ س ص ن) = ٤٠° ، ق(∠ ن ع ص) = ٣٠°

(١) ق(∠ ن) = ... (٢) ق(∠ س) = ...

(٣) ق(س⌒ع) = ... (٤) ق(س⌒ص) = ...

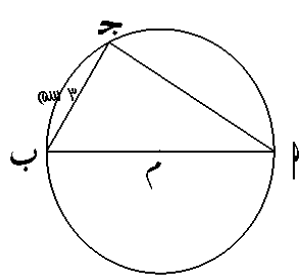


❽ **فى الشكل المقابل :** أب قطر فى دائرة م ،

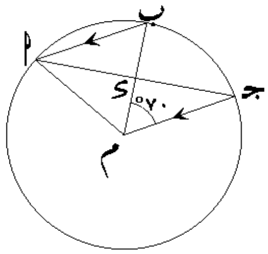
طول نصف قطرها ٢,٥سم فإذا كان : ب جـ = ٣سم أكمل :

محيط △ أ ب جـ = ...سم

مساحة △ أ ب جـ = ...سم²



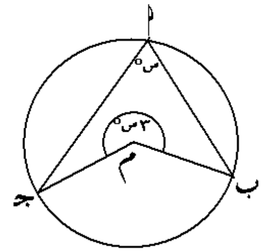
(٩) فى الشكل المقابل :

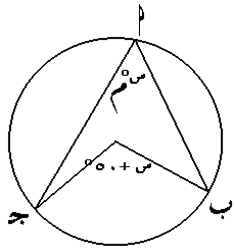


دائرة م ، ق(∠ جـ م ب) = ٧٠° ، م جـ // أ ب

أوجد : ق(∠ أ ء م)

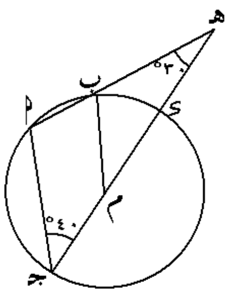
(١٠) فى الشكل المقابل :





أوجد قيمة س .

(١١) فى الشكل المقابل :

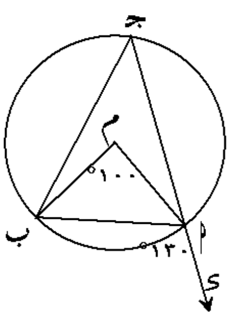


جـ ء قطر فى الدائرة م ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ،

ق(∠ أ جـ ء) = ٤٠° ، ق(∠ هـ) = ٣٠°

أوجد : ق(∠ ب م جـ)

(١٢) فى الشكل المقابل :

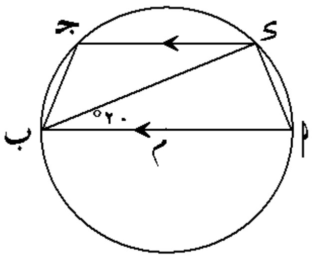


أ ب جـ △ مرسوم داخل الدائرة م ،

ء ∈ جـ أ ، ق(∠ ب أ ء) = ١٣٠° ، ق(∠ أ م ب) = ١٠٠°

أوجد : ق(∠ م ب جـ)

(١٣) فى الشكل المقابل :

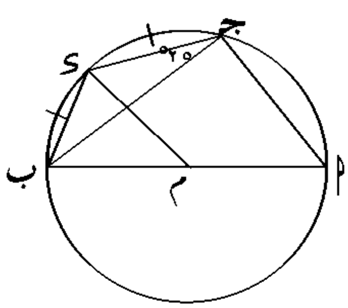


أ ب قطر فى دائرة م ، ء جـ // أ ب ، ق(∠ أ ب ء) = ٢٠°

أثبت أن : أ ء = جـ ب

أوجد : ق(⌒ب جـ) ، ق(⌒ء جـ ب)

(١٤) فى الشكل المقابل :



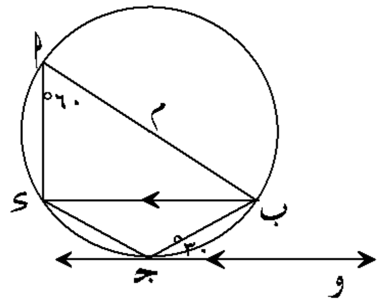
أ ب قطر فى الدائرة م ،

ق(⌒جـ ء) = ق(⌒ء ب) ، ق(∠ ء جـ ب) = ٢٥°

أوجد : ق(∠ أ جـ ء) ، ق(∠ ء ب أ)

برهن أن : م ء // أ جـ

[١٥] في الشكل المقابل :

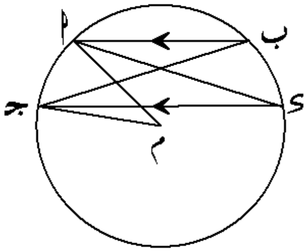


أ ب قطر في الدائرة م ، ب ء // جـ و ،

ق(∠ ب أ ء) = ٦٠° ، ق(∠ و جـ ب) = ٣٠°

أوجد : ق(∠ أ ب ء) ، ق(∠ ب أ جـ)

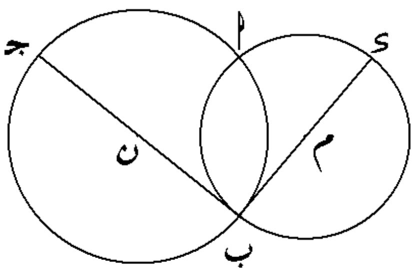
[١٦] في الشكل المقابل :



دائرة م ، أ ب // جـ ء ، ق(أ ء⌒) = ٧٠°

أوجد : ق(∠ أ م ء) ، ق(∠ ب ء جـ)

[١٩] في الشكل المقابل :

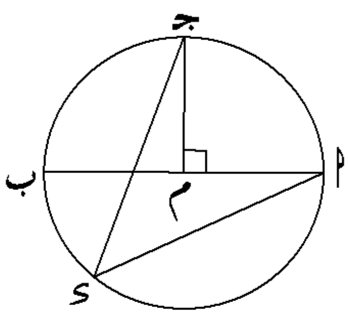


م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

ب جـ قطر في الدائرة م ، ب ء قطر في الدائرة ن

اثبت أن : جـ ، أ ، ء على استقامة واحدة

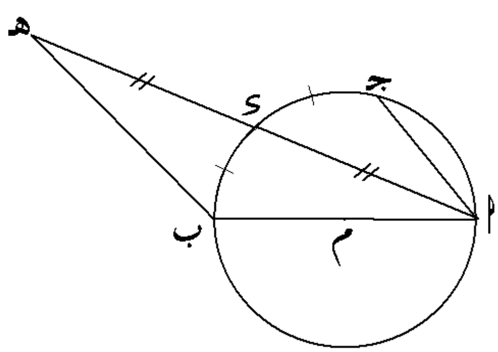
[٢٠] في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م ، م جـ ⊥ أ ب أوجد : ق(∠ أ ء جـ)

إذا كان أ م = ٧سم ، ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) . أوجد طول القوس الأكبر أ جـ⌒

[٢١] في الشكل المقابل :

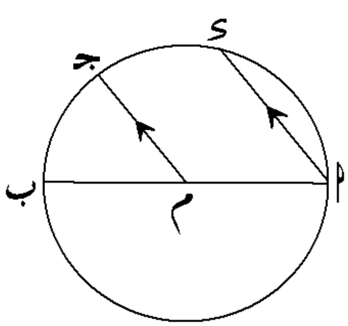


أ ب قطر في الدائرة م ، أ جـ وتر فيها ،

ء منتصف ب جـ⌒ ، هـ ∈ أ ء بحيث أ ء = ء هـ

برهن أن : أ جـ // ب هـ

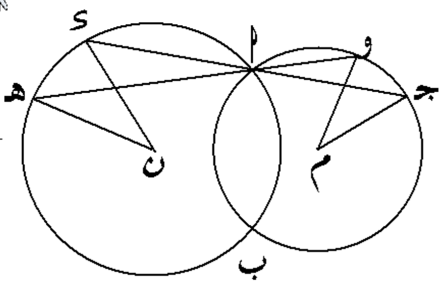
[٢٢] في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م ، أ ء // م جـ

اثبت أن : جـ منتصف ء ب⌒

[٢٣] فى الشكل المقابل :

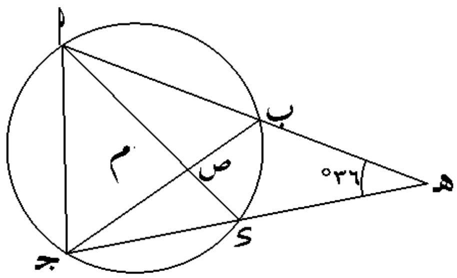


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{ء أ}$ ، $\overline{هـ أ}$ وتران فى الدائرة م ،

سم $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{هـ أ}$ فقطعا الدائرة ن فى جـ ، و على الترتيب

اثبت أن : ق(∠ ء م هـ) = ق(∠ و ن جـ)

[٢٤] فى الشكل المقابل :

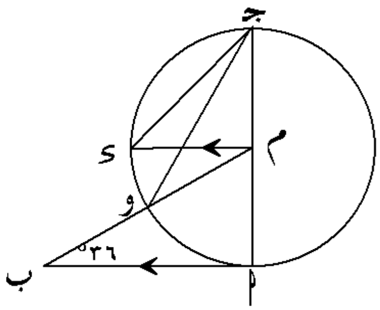


$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى الدائرة م ، سم $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ متقاطعان فى س

حيث (∠ س) = ٣٦° ، ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٨٤°

اوجد : ق(∠ أ ص جـ)

[٢٤] فى الشكل المقابل :

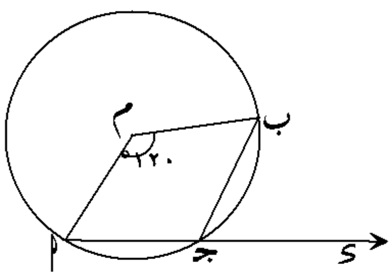


$\overline{أ ب}$ قطعة مماسية للدائرة م عند أ ، $\overline{أ جـ}$ قطر ، $\overline{م ء}$ // $\overline{أ ب}$

، ق(∠ ب) = ٣٦° أوجد : ❶ ق(∠ و جـ م)

❷ ق(∠ و جـ ء)

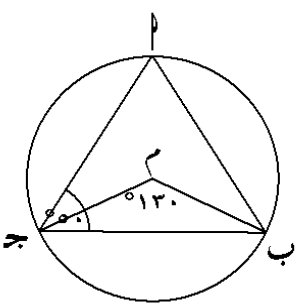
[٢٥] فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ م ب) = ١٢٠° ، ء ∈ $\overleftarrow{أ جـ}$

أوجد : ق(∠ ب جـ ء)

[٢٦] فى الشكل المقابل :

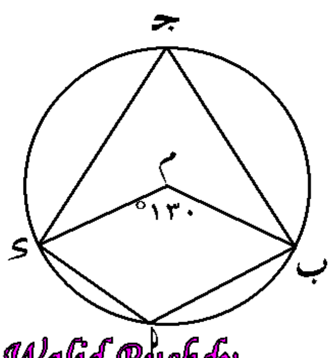


أ ب جـ △ مثلث مرسوم داخل الدائرة م ،

ق(∠ ب م جـ) = ١٣٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ أ ب جـ)

[٢٧] فى الشكل المقابل :

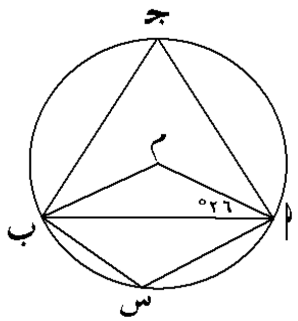


أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ،

ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

أوجد : ق(∠ ب جـ ء) ، ق(∠ ب أ ء)

✍ (٢٨) فى الشكل المقابل :



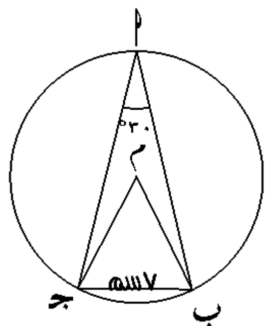
أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م ، م أ ، م ب نصفا قطرين فيها ،

ق(∠ م أ ب) = ٢٦° ، س ∈ أ ب (القوس)

أوجد : ق(∠ أ م ب)   ق(∠ أ جـ ب)

ق(∠ أ س ب)   ق(أ س ب (القوس))

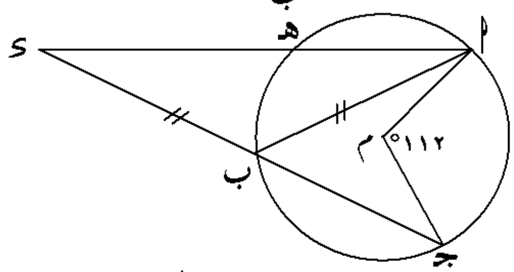
✍ (٢٩) فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ) = ٣٠° ، ب جـ = ٧سم

أوجد مساحة الدائرة م ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

✍ (٣٠) فى الشكل المقابل :

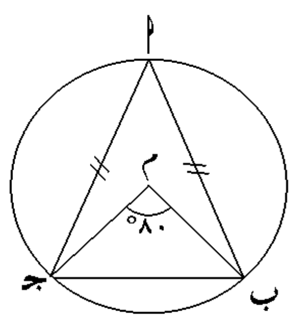


م دائرة ، ق(∠ أ م جـ) = ١١٢° ،

أ ب = ء ب ، ب ∈ ء جـ

أوجد : ق(∠ ء)

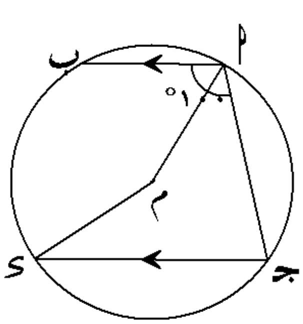
✍ (٣١) فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ ب جـ)

ق(ب جـ (القوس)) الأكبر .

✍ (٣٢) فى الشكل المقابل :

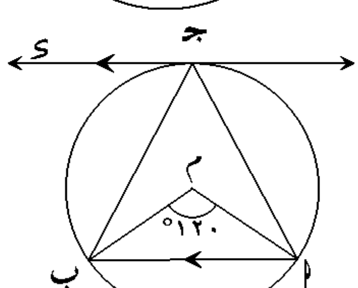


أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ،

ق(∠ ب أ جـ) = ١٠٠° ، أ ب // جـ ء

أوجد : ق(∠ أ م ء)

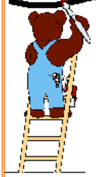
✍ (٣٣) فى الشكل المقابل :



جـ ء مماس للدائرة عند جـ ، جـ ء // أ ب

، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

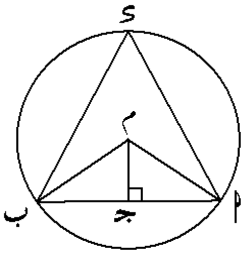
أثبت أن : △ جـ أ ب متساوى الأضلاع .



✍ (٣٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{\text{مجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

أثبت ان : ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ أ ء ب)

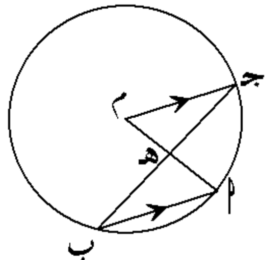


✍ (٣٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{\text{جـم}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ،

$\overline{\text{بجـ}} \cap \overline{\text{أم}}$ = { هـ }

أثبت أن : ب هـ > أ هـ

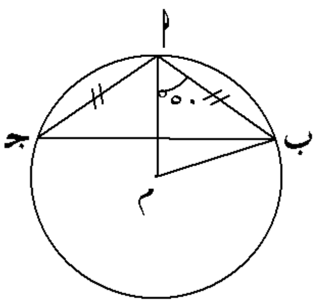


✍ (٣٦) فى الشكل المقابل :

م دائرة فيها أ ب = أ جـ

، ق(∠ م أ ب) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ م ب جـ)

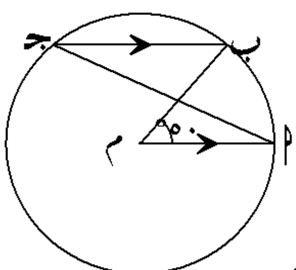


✍ (٣٧) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{أم}}$

، ق(∠ أ م ب) = ٥٠°

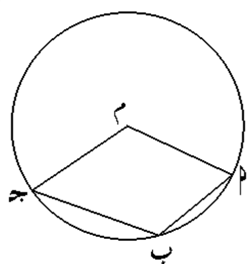
أوجد : ق(∠ أ جـ ب) ، ق(⌒أب) ، ق(⌒بجـ)



✍ (٣٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : م مركز دائرة ،

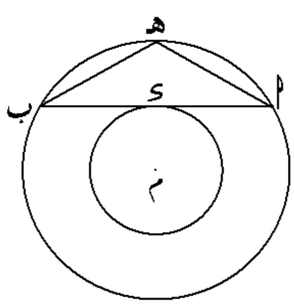
ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ ب) أوجد : ق(∠ ب)



✍ (٤٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز فى م طولا نصفى قطريهما نق ، ٢نق رسم $\overline{\text{أب}}$ وترا فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى في ء أوجد : ق(⌒أب الأكبر)

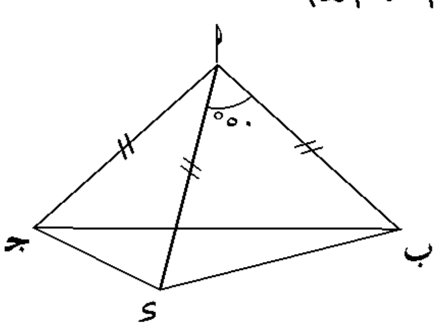
وإذا كانت : هـ ∈ ⌒أب أوجد : ق(∠ أ هـ ب) (إرشاد : ارسم $\overline{\text{أم}}$ ، $\overline{\text{بم}}$ ، $\overline{\text{مهـ}}$)



✍ (٤٣) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء = أ جـ ق(∠ ب أ ء) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ ب جـ ء)



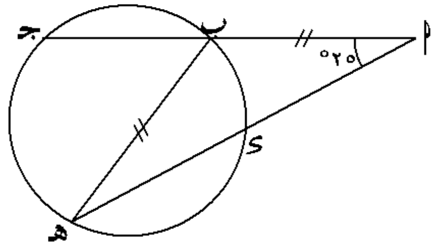
تمارين (٣) على تمارين مشهورة

(أ) أكمل ما يأتى

❶ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس القوس المقابل لها .

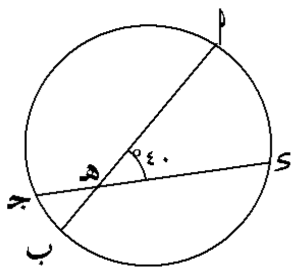
❷ قياس القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٤٠° يساوى ....°

❸ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون ....



❹ فى الشكل المقابل : أ ب = ب هـ ، ق(∠ هـ أ جـ) = ٢٥°

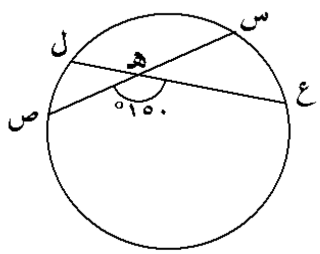
فان : ق(⌒جـ هـ) = ...°



❺ فى الشكل المقابل :

ق(⌒أ جـ) = ٥٠° ، ق(∠ أ هـ جـ) = ٤٠°

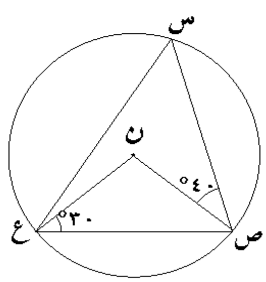
فان : ق(⌒ء ب) = ...°



❻ فى الشكل المقابل :

إذا : ق(∠ ع هـ ص) = ١٥٠°

فان : ق(⌒س ع) + ق(⌒ل ص) = ...°

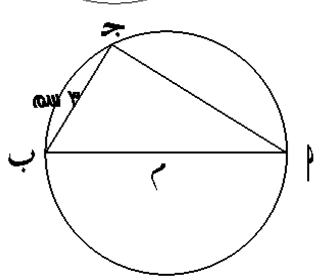


❼ فى الشكل المقابل: س ص ع △ مرسوم داخل دائرة ن ، ق(∠ س ص ن) = ٤٠°

، ق(∠ ن ع ص) = ٣٠°

(١) ق(∠ ن) = ... (٢) ق(∠ س) = ...

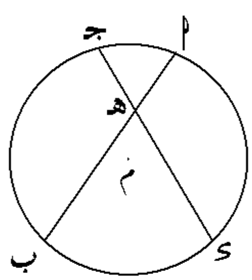
(٣) ق(⌒س ع) = ... (٤) ق(⌒س ص) = ...



❽ فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة م ،

طول نصف قطرها ٢,٥ سم فإذا كان : ب جـ = ٣ سم أكمل :

(١) محيط △ أ ب جـ = ...سم (٢) مساحة △ أ ب جـ = ...سم²

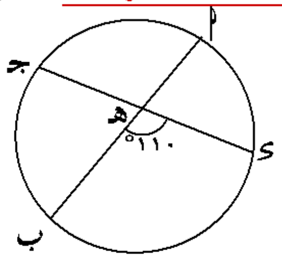


❾ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(⌒أ جـ) + ق(⌒ب ء) = ٨٠°

فان : ق(∠ أ هـ جـ) = ...°

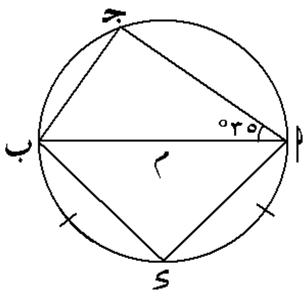
⑩ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق(∠ ء هـ ب) = ١١٠° ،

ق(⌒ب جـ) = ٧٠° فان : ق(⌒أ ء) = ...°

(٢) فى الشكل المقابل :

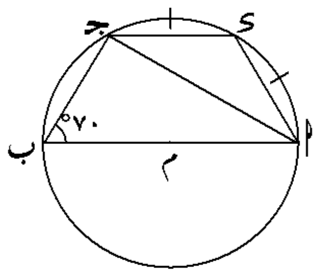


أ ب قطر فى لدائرة م ،

طول(⌒أ ء) = طول(⌒ب ء) ، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد : ق(∠ جـ ب ء)

(٣) فى الشكل المقابل :

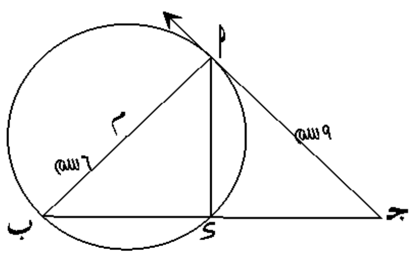


أ ب فى الدائرة م ، طول ⌒أ ء = طول ⌒ء جـ ،

ق(∠ أ ب جـ)= ٧٠°

أوجد كلا من : ق(∠ ء جـ أ) ، ق(∠ جـ أ ب)

(٤) فى الشكل المقابل :



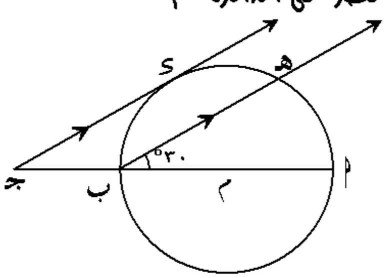
أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ تمس الدائرة عند أ

فإذا كان : أ جـ = ٩سم ، ب م = ٦سم

أوجد طول كلا من : ب جـ ، أ ء

(٥) ب جـ قطر فى دائرة م،سم لوتران ب ء ، ب هـ فى جهتين مختلفتين من ب جـ فإذا كان: ق(∠جـ ب هـ)=٥٢° ، ق(∠ ء ب جـ)= ٣٨° اوجد : ق(∠جـ هـ ب) ، ق(∠ ء جـ ب) اثبت أن : ء هـ قطر فى الدائرة م

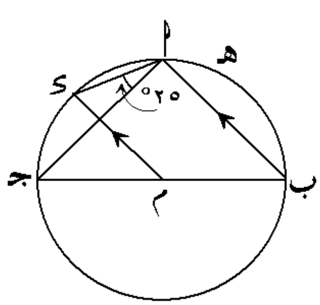
(٦) فى الشكل المقابل :



جـ ء مماس للدائرة م ، أ ب قطر فيها ،

جـ ء // ب هـ ، ق(∠ أ ب هـ) = ٣٠° اثبت أن : ق(⌒ب ء)

(٧) فى الشكل المقابل :

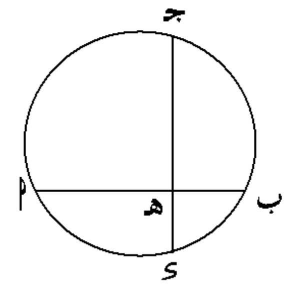


ب جـ قطر فى الدائرة م ، م ء // ب أ ،

ق(∠ جـ أ ء) = ٢٥°

أوجد : ق(∠ أ جـ ب)

(٨) في الشكل المقابل :

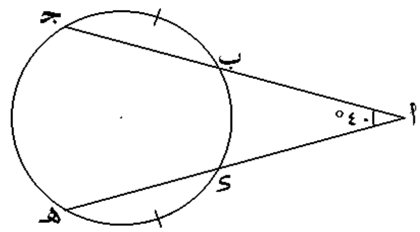


أ ب ، جـ ء وتران في الدائرة ، أ ب ∩ جـ ء = { هـ }

فإذا كان : ق(ب ء) = ٦٠° ، ق(أ ء) = ١٠٠° ، ق(أ جـ) = ١٢٠°

احسب : ق(جـ ب) ، ق(∠ جـ هـ ب)

(٩) في الشكل المقابل :



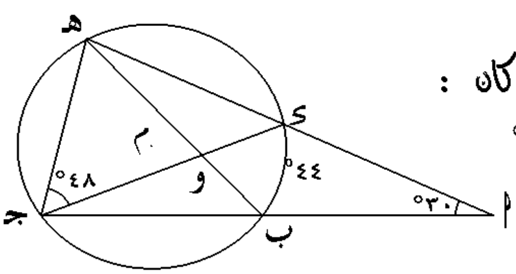
ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق(ب ء) = ٦٠°

، ق(ب جـ) = ق(ء هـ)

أوجد : ق(هـ جـ) ق(ب جـ)

(١٠) أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم أ جـ يقطع الدائرة في ب ، جـ رسم أ هـ يقطع الدائرة في ء ، هـ ، إذا كان : ق(∠ جـ م هـ) = ١٠٠° ، ق(∠ ب م ء) = ٤٠° أوجد : ق(∠ أ)

(١١) في الشكل المقابل :

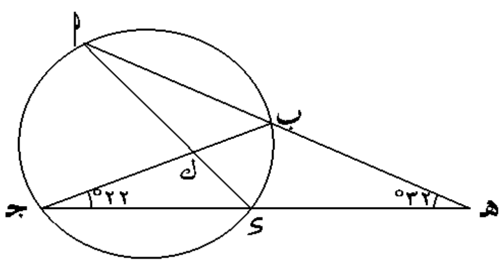


جـ ب ∩ هـ ء = { أ } ، ب هـ ∩ جـ ء = { و } فإذا كان :

ق(أ) = ٣٠° ، ق(ب ء) = ٤٤° ، ق(∠ ء جـ هـ) = ٤٨°

أوجد : ق(جـ هـ) ق(ب جـ)

(١٢) في الشكل المقابل :

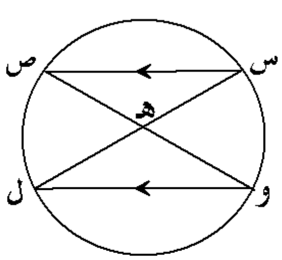


هـ نقطة خارج دائرة ، أ ء ، ب جـ وتران فيها متقاطعان في نقطة ك

بحيث : ق(∠ جـ) = ٢٢° ، ق(∠ هـ) = ٣٢°

أوجد : ق(∠ أ ك جـ)

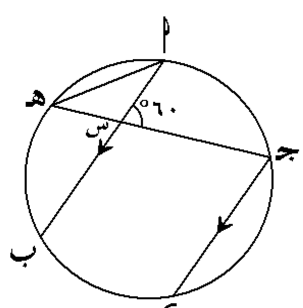
(١٣) في الشكل المقابل :



س ص // و ل ، و ص ∩ س ل = { هـ }

أثبت أن : ❶ س ل = و ص ❷ ق(∠ س هـ و) = ق(س و)

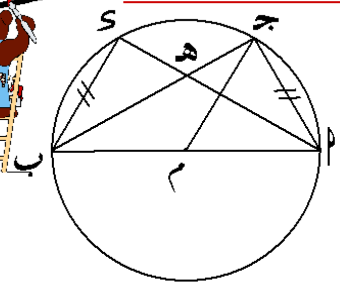
(١٤) في الشكل المقابل :



أ ب // جـ ء ، ق(أ س جـ) = ٦٠° ، ق(أ جـ) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ❶ ق(∠ أ هـ جـ) ❷ ق(ب ء) ❸ ق(ب هـ)

✍ [١٥] فى الشكل المقابل :

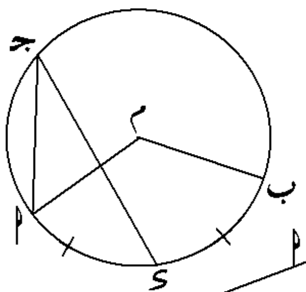


$\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ وتران متساويان فى الطول ،

$\overline{\text{أء}} \cap \overline{\text{بجـ}} = \{$ هـ $\}$

أثبت أن : ق(∠ أ م جـ) = ق(∠ أ هـ جـ)

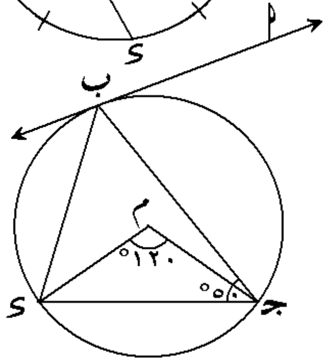
✍ [١٦] فى الشكل المقابل :



ء منتصف $\overset{\frown}{\text{أب}}$

أثبت أن : ق(∠ أ جـ ء) = $\frac{١}{٤}$ ق(∠ أ م ب)

✍ [١٧] فى الشكل المقابل :

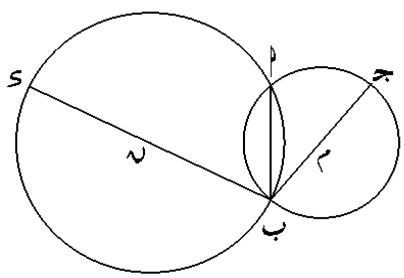


$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس لدائرة م عند ب ، طول نصف قطرها ٤,٥سم

، ق(∠ جـ م ء) = ١٢٠° ، ق(∠ ب جـ ء) = ٥٠° أوجد :

❶ ق($\overset{\frown}{\text{ب ء جـ}}$) ❷ طول ($\overset{\frown}{\text{ب ء جـ}}$)

✍ [١٩] فى الشكل المقابل :

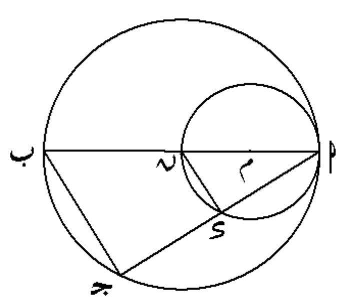


الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

فإذا كان : $\overline{\text{بجـ}}$ قطرا فى الدائرة م ، $\overline{\text{بء}}$ قطرا فى الدائرة ن

أثبت أن : النقط : جـ ، أ ، ء على استقامة واحدة

✍ [٢٠] فى الشكل المقابل :



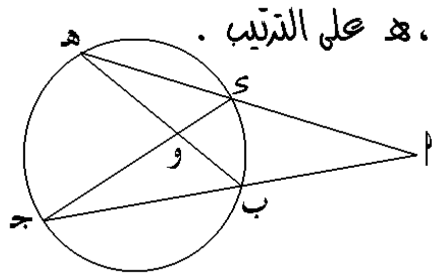
م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ ، الدائرة م تمر بمركز الدائرة ن ، $\overline{\text{أب}}$ فى الدائرة ن

، م تنتمى الى $\overline{\text{أب}}$ ، رسم $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ فقطع الدائرة ن فى جـ ، الدائرة م فى ء

أثبت أن Δ أ ء ن ~ Δ أ جـ ب

✍ [٢١] فى الشكل المقابل :

أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ يقطعان الدائرة فى ب ، جـ ، ء ، هـ على الترتيب .



فإذا كان : $\overline{\text{جـء}} \cap \overline{\text{بهـ}} = \{$ و $\}$

أثبت أن : ق(∠ أ) + ق(∠ ب و ء) = ٢ ق(∠ هـ ب جـ)

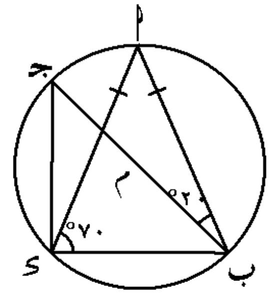
تمارين [٤] على الزوايا المحيطية المرسوم على نفس القوس

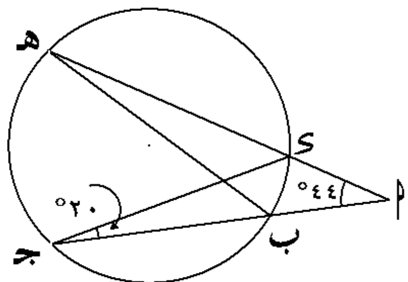
[١] اكمل ما يأتى

❶ الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة ....

❷ الزوايا المحيطية التى تحصر أقواس متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة ....

❸ إذا تقاطع وتران داخل دائرة فان حاصل ضرب طولى جزئى الوتر الأول يساوى ....



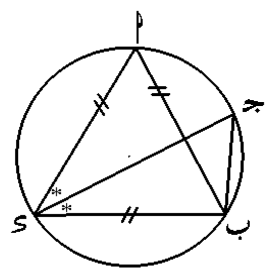


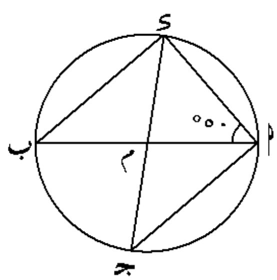
فان : ❶ ق(∠ جـ) = ...°

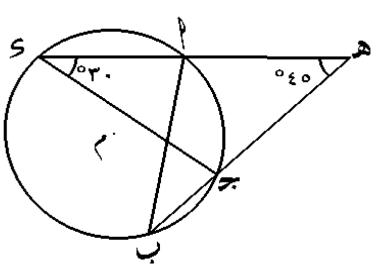
❷ ق(∠ ب ء جـ) = ...°

❶ ق(∠ ب هـ ء) = ...°

❷ ق(∠ أ ب هـ) = ...°







ق(∠ جـ) = ...°

ق(∠ جـ ب أ) = ...°

ق(∠ جـ) = ...°

ق(∠ ب ء جـ) = ...°

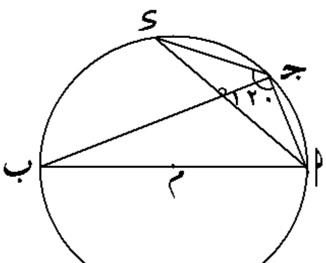
ق(∠ ب) = ...°

ق(∠ ء أ ب) = ...°

[٢] فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ جـ ء) = ١٢٠°

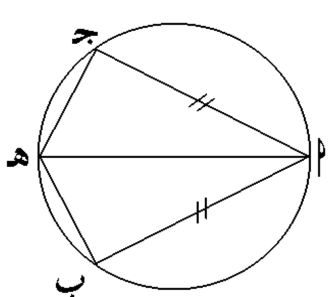
أوجد : ق(∠ ب أ ء)

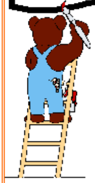


[٣] فى الشكل المقابل :

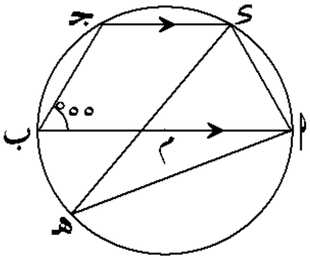
أ ب = أ جـ ، هـ ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$

اثبت ان : ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ هـ جـ)





(٤) فى الشكل المقابل :

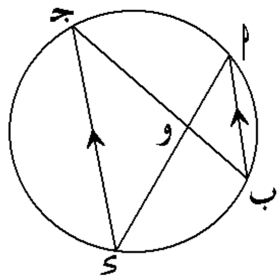


أ ب قطر فى الدائرة م ،

ء جـ // أ ب ، ق(∠ أ ب جـ) = ٥٥°

أوجد : ق(∠ أ هـ ء)

(٥) فى الشكل المقابل :

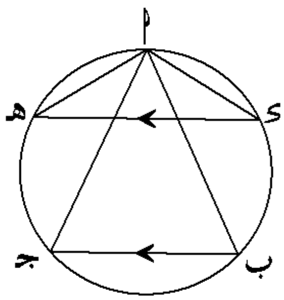


أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة ،

أ ء ∩ جـ ب = { و }

اثبت أن : أ و = وب

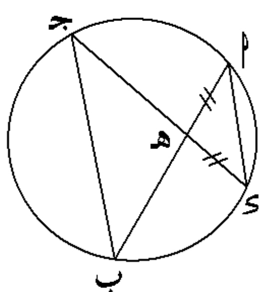
(٦) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ

اثبت أن : ق(∠ ء أ جـ) = ق(∠ ب أ هـ)

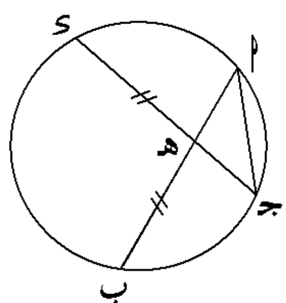
(٧) فى الشكل المقابل :



أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ، هـ أ = هـ ء

اثبت أن : هـ ب = هـ جـ

(٨) فى الشكل المقابل :

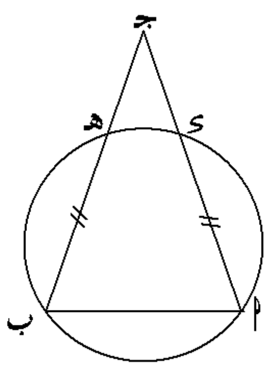


أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة ،

أ ب ∩ جـ ء = { هـ }

اثبت أن : △ أ جـ هـ متساوى الساقين

(٩) فى الشكل المقابل :

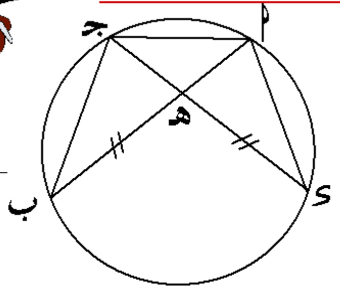


أ ء ، ب هـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة

، أ ء ∩ ب هـ = { جـ }

اثبت أن : جـ ء = جـ هـ

[١٠] فى الشكل المقابل :



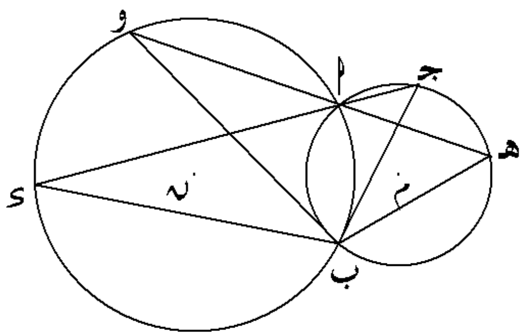
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{د جـ}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ ، أ هـ = جـ هـ

اثبت أن : ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ جـ أ د)

[١١]

$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة م ، ق(∠ أ ب جـ) = ٤٠° ، د ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$ اوجد : ق(∠ جـ د ب)

[١٢] فى الشكل المقابل :



م ، دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ،

$\overleftrightarrow{أ جـ}$ يقطع الدائرة م فى جـ ويقطع الدائرة ن فى د ،

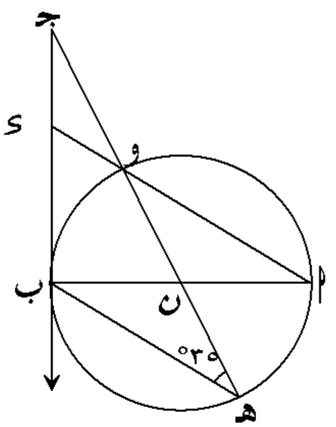
$\overleftrightarrow{أ هـ}$ يقطع الدائرة م فى هـ ويقطع الدائرة ن فى و

اثبت أن : ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ و ب د)

[١٣] $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ فإذا كانت أطوال : $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{جـ د}$ هى على الترتيب ٥سم ، ٦سم ، ١١,٥سم احسب طول كل من : $\overline{هـ جـ}$ ، $\overline{هـ د}$

[١٤] دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٤سم ، فرضت نقطة جـ حيث م جـ = ٦سم ، رسم من جـ قاطع للدائرة قطعها فى النقطتين أ ، ب حيث أ ∈ $\overline{جـ ب}$ فاذا كان : جـ أ = ٣سم أوجد طول : $\overline{أ ب}$

[١٥] فى الشكل المقابل :



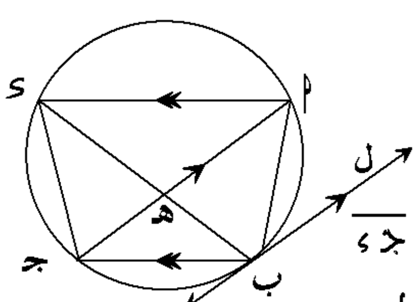
$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة مركزها ن ، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ مماس للدائرة عند ب

، رسم $\overrightarrow{جـ ن}$ فقطع الدائرة فى و ، هـ ورسم $\overrightarrow{أ و}$ فقطع $\overleftrightarrow{جـ ب}$ فى د

فإذا كان : ق(∠ ب هـ جـ) = ٣٥° أوجد :

❶ ق(∠ ب ن جـ) ، ❷ ق(∠ ب جـ ن) ، ❸ ق(∠ ب د أ)

[١٦] فى الشكل المقابل :

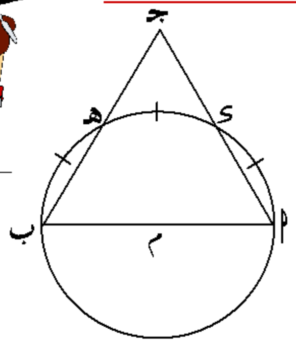


$\overline{ب جـ}$ // $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ جـ}$ ∩ $\overline{ب د}$ = {هـ} ، $\overleftrightarrow{ب ل}$ // $\overline{أ جـ}$ اثبت أن :

❶ $\overrightarrow{ب د}$ ينصف (∠ أ د جـ) ❷ ق(∠ جـ ب د) = ق(∠ جـ د ب)

[١٧] △ أ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة م ، رسم القطر $\overline{جـ د}$

اثبت أن : ق(∠ أ ب د) = ق(∠ جـ ب م) = ق(∠ أ جـ د)

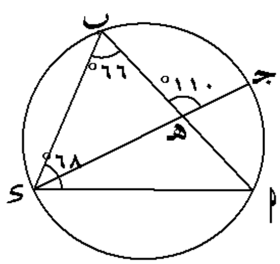


✍ (١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م حيث ء ، هـ تنتميان الى $\overset{\frown}{أب}$

ق ($\overset{\frown}{أء}$) = ق ($\overset{\frown}{ءهـ}$) = ق ($\overset{\frown}{هـب}$) ، $\overleftrightarrow{أء}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب هـ}$ = { جـ }

اثبت أن : ❶ جـ أ = جـ ب ثم اوجد : ❷ ق ($\overset{\frown}{ءهـب}$)

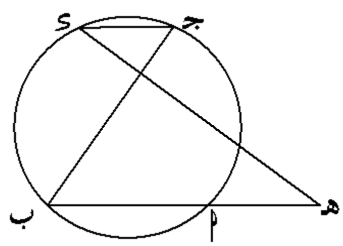


✍ (١٩) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = °٦٦ ، ق (∠ ب هـ جـ) = °١١٠ ،

ق (∠ أ ء ب) = °٦٨

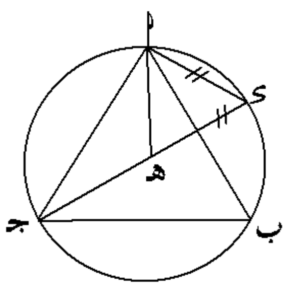
اثبت أن : $\overline{جـ ء}$ قطر فى الدائرة .



✍ (٢٠) 📖 فى الشكل المقابل :

هـ نقطة خارج الدائرة

اثبت أن : ق (∠ هـ) < ق (∠ ب جـ ء)

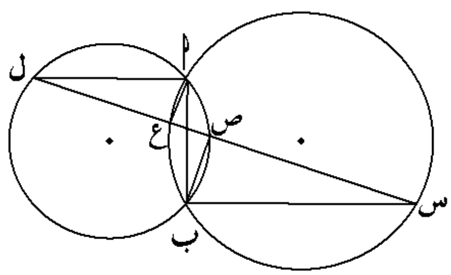


✍ (٢١) 📖 فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

، ء ∈ $\overset{\frown}{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{ء جـ}$ بحيث أ ء = ء هـ

اثبت أن : △ أ ء هـ متساوى الأضلاع .

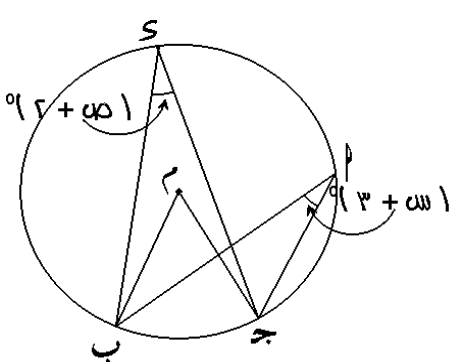


✍ (٢٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{س ل}$

فقطع الدائرة الأولى فى س ، ع والثانية فى ص ، ل

اثبت أن : ق (∠ ع أ ل) = ق (∠ س ب ص)



✍ (٢٣) فى الشكل المقابل :

م دائرة ، أ ، ء زاويتان محيطيتان

قياسهما (س + ٣)° ، (ص + ٢)° على الترتيب

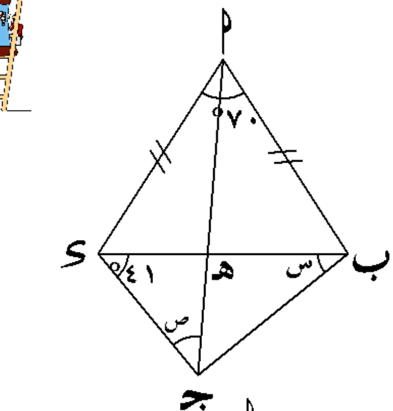
فإذا كان : ص² − س² = ٥٣ أوجد : ق (جـ م ب)

الوحدة الخامسة

١ الشكل الرباعى الدائرى

٢ خواص الشكل الرباعى الدائرى

تمارين على الرباعى الدائرى

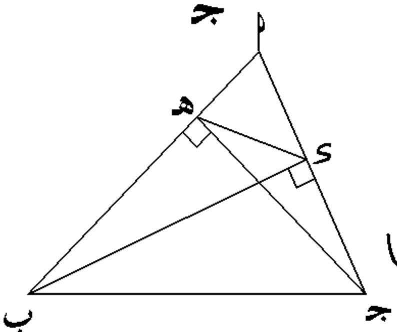


[١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، أ ب = أ ء

، ق(∠ ب أ ء) = ٧٠° ، ق(∠ ب ء جـ) = ٤١°

أوجد قيمة كل من : س ، ص

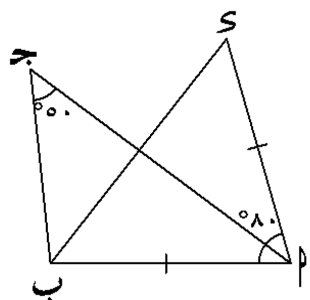


[٢] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه : ب جـ = ١٠سم

، رسم $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ فقطعه فى ء ، رسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فقطعه فى هـ

اثبت أن : ب ، جـ ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة و أوجد طول نصف قطرها

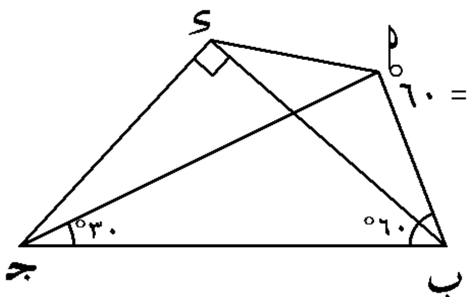


[٣] فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، ق(∠ أ) = ٨٠°

، ق(∠ جـ) = ٥٠°

اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تمر بها دائرة واحدة .

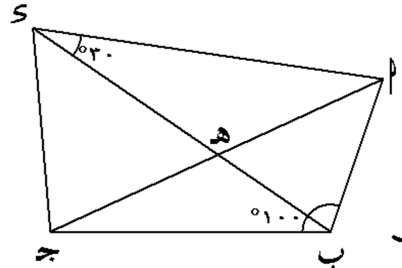


[٤] فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠° ، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠°

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

❷ أوجد : ق(∠ ب ء أ)



[٥] فى الشكل المقابل :

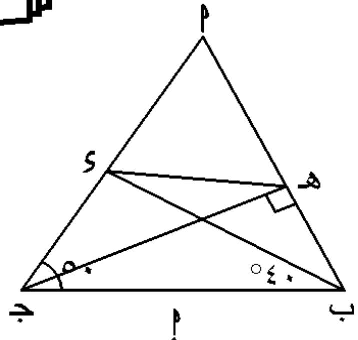
أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ أ ب جـ) = ١٠٠°

، $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = {هـ} فإذا كان : جا(∠ أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$

، ق(∠ أ ء ب) = ٣٠° اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

❷ ق(∠ ب ء جـ)

✍ (٦) فى الشكل المقابل :

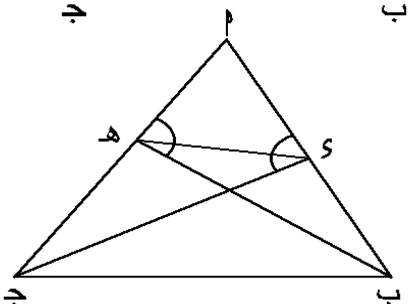


جـ هـ ⊥ أ ب ، ق(∠ أ جـ ب) = ٥٠°

، ق(∠ ء ب جـ) = ٤٠ أثبت أن : الشكل هـ ب جـ ء رباعى دائرى

أوجد : ق(∠ ء هـ جـ)

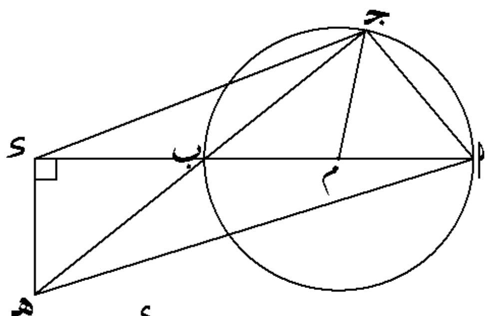
✍ (٧) فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ ء جـ) = ق(∠ أ هـ ب)

أثبت أن : ء ب جـ هـ رباعى دائرى

✍ (٨) فى الشكل المقابل :



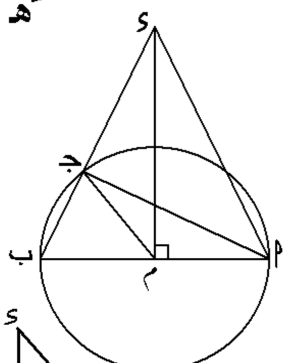
أ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ أ ب

، جـ ب ∩ ء هـ = {هـ}

أثبت أن : ❶ أ جـ ء هـ شكل رباعى دائرى .

❷ ق(∠ أ م جـ) = ٢ ق(∠ أ هـ جـ)

✍ (٩) فى الشكل المقابل :

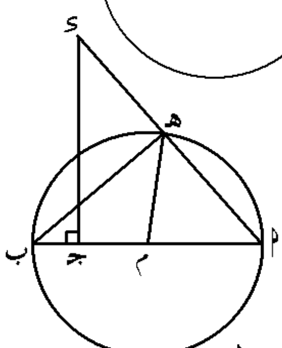


أ ب قطر فى الدائرة م ، ء م ⊥ أ ب حيث ء خارج الدائرة

أثبت أن : ❶ الشكل أ ء جـ م رباعى دائرى

❷ ق(∠ جـ م ب) = ٢ ق(∠ ب ء م)

✍ (١٠) 📖 فى الشكل المقابل :

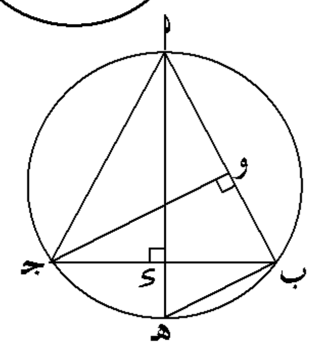


أ ب قطر فى الدائرة م ، أ هـ وتر فيها ، رسم جـ ء ⊥ أ ب فقطع أ هـ فى ء

أثبت أن : ❶ النقط ء ، هـ ، جـ ، ب تمر بها دائرة واحدة .

❷ ق(∠ أ م هـ) = ٢ق(∠ ء)

✍ (١١) فى الشكل المقابل :

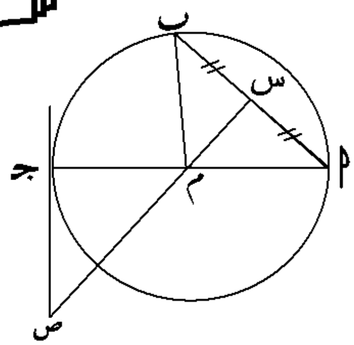


أ ء ⊥ ب جـ يقطعها فى ء ويقطع الدائرة فى هـ، جـ و ⊥ أ ب يقطعها فى و

أثبت أن : ❶ الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى

❷ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ ء و جـ)

(١٢) فى الشكل المقابل :



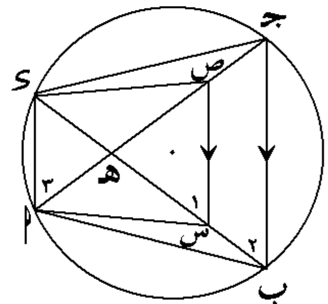
أ جـ قطر فى دائرة م ، س منتصف أ ب

، جـ ص مماس للدائرة قطع س م فى ص

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب جـ ص رباعى دائرى .

❷ ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ م ص جـ)

(١٣) فى الشكل المقابل :

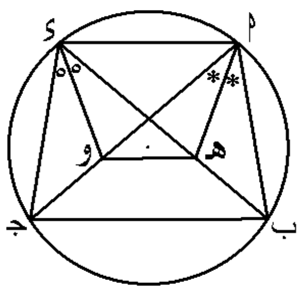


أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة قاطع قطره فى هـ

، س ∈ ب هـ بحيث س ص // ب جـ

اثبت أن : ❶ أ س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ ب أ س) = ق(∠ جـ ء ص)

(١٤) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

أ هـ ينصف (∠ ب أ جـ) ، ء و ينصف (∠ ب ء جـ)

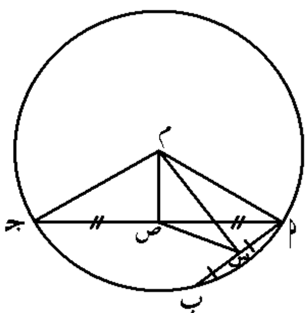
اثبت أن : ❶ أ هـ و ء شكل رباعى دائرى . ❷ هـ و // ب جـ

(١٥)

أ ب جـ ء مربع ، أ س ينصف (∠ ب أ جـ) ويقطع ب ء فى س ، ء ص ينصف (∠ جـ ء ب) ويقطع أ جـ فى ص

اثبت أن : ❶ الشكل أ س ص ء رباعى دائرى ❷ ق(∠ أ ص س) = ٤٥°

(١٦) فى الشكل المقابل :

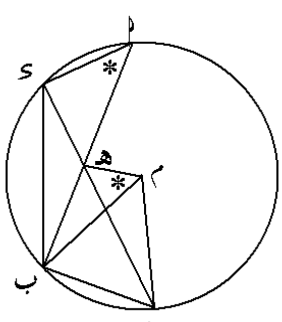


دائرة مركزها م حيث س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب . اثبت أن :

❶ الشكل أ س ص م رباعى دائرى ❷ ق(∠ م س ص) = ق(∠ م جـ ص)

❸ أ م قطر فى الدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص ، م

(١٧) فى الشكل المقابل :



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، أ ب ∩ جـ ء = {هـ} ،

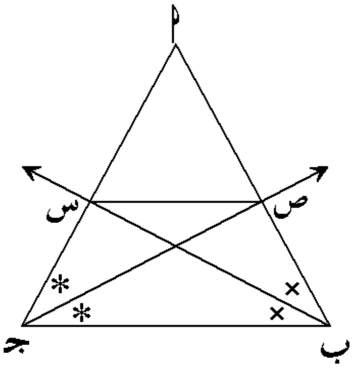
ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب م هـ) اثبت أن :

❶ الشكل م جـ ب هـ رباعى دائرى . ❷ ق(∠ جـ هـ ب) = ٢ ق(∠ جـ ء ب)

(١٨) △ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة ، س ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ حيث: ق($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$)

جـ س ∩ أ ب = { ء } ، ب ص ∩ أ جـ = { هـ }

❶ أثبت أن : الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى . ❷ ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠ س أ ب)



(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه : أ ب = أ جـ ، ب س ينصف (∠ ب) ويقطع أ جـ فى س ،

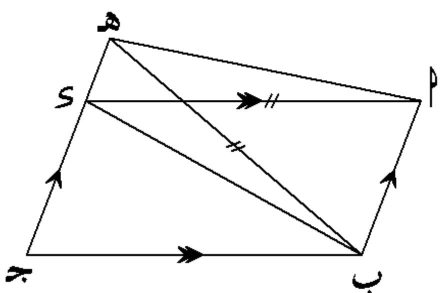
جـ ص ينصف (∠ جـ) ويقطع أ ب فى ص

أثبت أن : ❶ ب جـ س ص رباعى دائرى . ❷ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

(٢٠) :

△ أ ب جـ متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ ، ء منتصف ب جـ ، ب هـ ⊥ أ جـ

حيث ب هـ ∩ أ جـ = { هـ } أثبت أن : النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة .

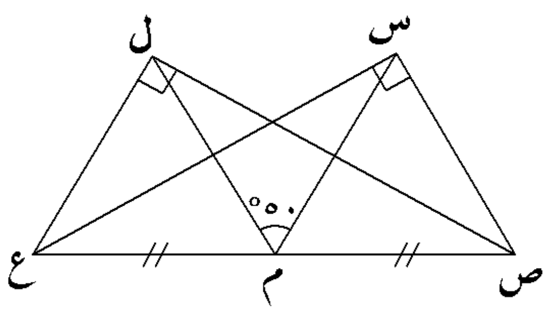


(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ جـ ء

حيث ب هـ = أ ء أثبت أن : الشكل أ ب جـ ء هـ رباعى دائرى

(٢٢) فى الشكل المقابل :



ق(∠ ص س ع) = ق(∠ ص ل ع) = ٩٠°

، م منتصف ص ع ، ق(∠ س م ل) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ س ص ل) بالدرجات ثم

أثبت أن : ق(∠ س ص ل) = ق(∠ س ع ل)

ق(∠ س م ع) = ق($\overset{\frown}{\text{س ل}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{ل ع}}$)

(٢٣) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب جـ ، أ جـ ∩ ب ء = { و } حيث و ب = و جـ

أثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢٤) أ ب قطر فى الدائرة م ، هـ ∈ م أ ، رسم هـ ء ⊥ أ ب بحيث ء تقع خارج الدائرة م

، ب ء فقطع الدائرة فى جـ أثبت أن : أ هـ جـ ء شكل رباعى دائرى

خواص الرباعى الدائرى

(١) اكمل ما يأتى :

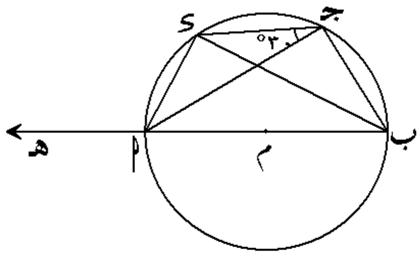
❶ إذا كان الشكل الرباعى دائريا فإن كل زاويتين متقابلتين فيه ....

❷ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى ....

❸ فى الشكل الرباعى الدائرى ا ب جـ ء ، إذا كان : ق(∠ جـ) = ١١٥°، فإن : ق(∠ ا) = ...°

❹ إذا كان ا ب جـ ء شكلا رباعيا دائريا ،ق(∠ ا) = ٦٠ °،فإن قياس الزاوية الخارجة عند الرأس جـ =.......°

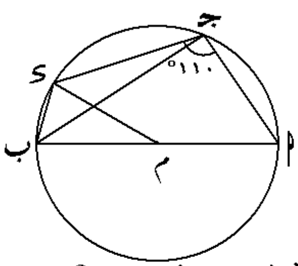
❺ فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م فإذا كان : ق(∠ ء جـ ا) = ٣٠ ° فإن

(١) ق(∠ ء ب ا) = ...°   (٢) ق(∠ ء ا هـ) = ...°

❻ فى الشكل المقابل :



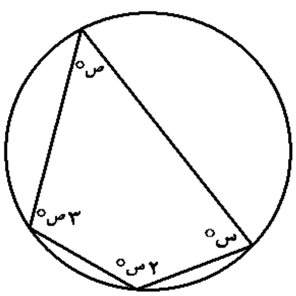
إذا كان : $\overline{\text{ا ب}}$ قطرا فى لدائرة م ، ق(∠ ا جـ ء) = ١١٠°

فإن : (١) ق(∠ ا ب ء) = ...°

(٢) ق(∠ ء جـ ب) = ...°   (٣) ق(∠ ء م ب) = ...°

❼ إذا كان : ا ب جـ ء شكلا رباعيا دائريا ، كان : ق(∠ ب) = $\frac{١}{٤}$ ق(∠ ء) فإن : ق(∠ ب) =.....°

❽ فى الشكل المقابل :



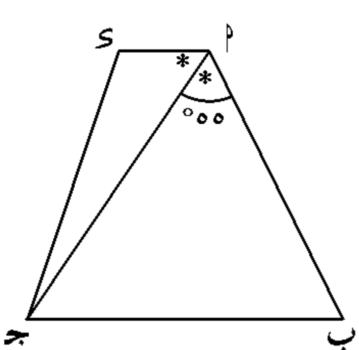
الشكل ا ب جـ ء رباعى دائرى

فإن : س = ...°   ، ص = ...°

❾ فى الشكل الرباعى الدائرى ا ب جـ ء ،

إذا كان : ق(∠ ا) = ٢ ق(∠ ب) = ٥ ق(∠ جـ) ، فإن : ق(∠ ء) =........°

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

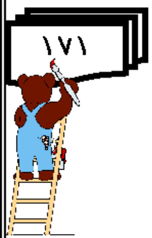


❶ فى الشكل المقابل : ا ب جـ ء رباعى دائرى فيه : $\overrightarrow{\text{ا جـ}}$ ينصف (∠ ب ا ء)

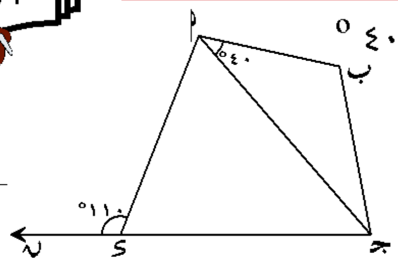
، إذا كان : ق(∠ ب ا جـ) = ٥٥° فإن : ق(∠ ب جـ ء) = ...

(١) ٥٥°   (٢) ٧٠°

(٣) ١١٠°   (٤) ١٢٥°



❷ في الشكل المقابل : أ ب جـ ء شكل رباعي دائرى ، ق(∠ ب أ جـ) = ٤٠° ، ق(∠ أ ء ن) = ١١٠° فان : ق(∠ ب جـ أ) = ...

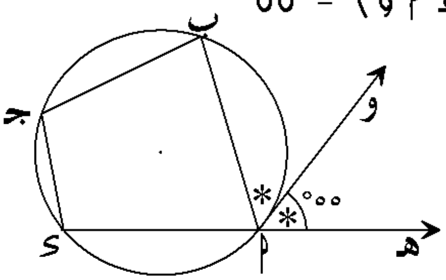


(١) ٣٠°   (٢) ٤٠°

(٣) ٤٥°   (٤) ١١٠°

❸ في الشكل المقابل : هـ ∈ ءأ ، أو ينصف ب أ هـ ، ق(∠ هـ أ و) = ٥٥°

فان : ق(∠ ب جـ ء) = ...



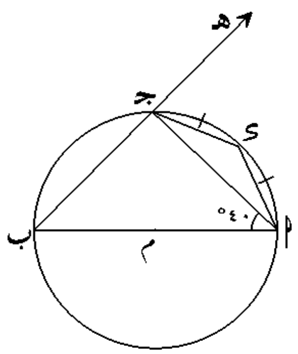
(١) ٥٥°   (٢) ١٠٠°

(٣) ١١٠°   (٤) ١٢٠°

❹ في الشكل المقابل : إذا كان : أب قطرا في الدائرة م ،

ق(∠ ب أ جـ) = ٤٠° ، ق(⌒أء) = ق(⌒ءجـ)

، هـ ∈ ب جـ فان : ق(∠ أ جـ ب) = ...



(١) ٢٥°   (٢) ٦٥°

(٣) ٩٠°   (٤) ١٣٠°

ق(∠ أ ء جـ) = ...

(١) ٢٥°   (٢) ٦٥°   (٣) ٩٠°   (٤) ١٣٠°

ق(∠ ء أ جـ) = ...

(١) ٦٥°   (٢) ٩٠°   (٣) ١٣٠°   (٤) ٢٥°

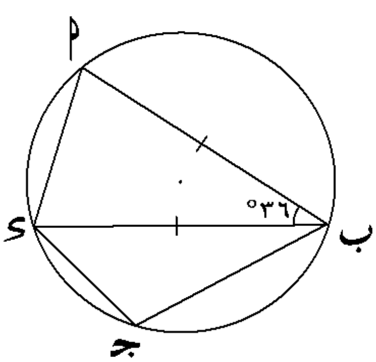
ق(∠ ء جـ هـ) = ...

(١) ٢٥°   (٢) ٦٥°   (٣) ٩٠°   (٤) ١٣٠°

❺ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = ب ء ، ق(∠ أ ب ء) = ٣٦°

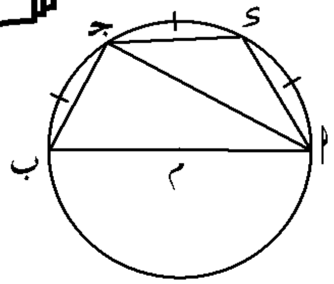
فان : ق(∠ جـ) = ...



(١) ١٤٠°   (٢) ٧٠°

(٣) ٥٤°   (٤) ١٠٨°

❻ في الشكل المقابل :



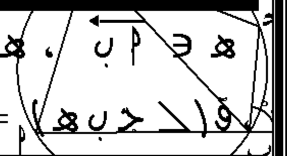
إذا كانت : م دائرة ، طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{أ د}}$

فإن : ق(∠ ب جـ د) = ...

(١) ٣٠°   (٢) ٦٠°

(٣) ١٠٠°   (٤) ١٢٠°

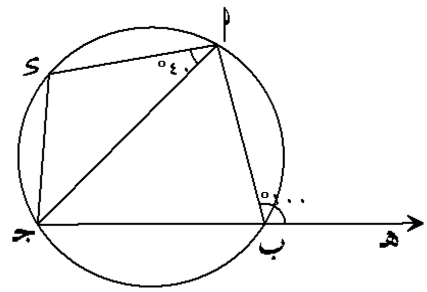
(٣) في الشكل المقابل :



هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١١٠°

، ق(∠ جـ ب هـ) = ٨٥°   أوجد : ق(∠ ب د جـ)

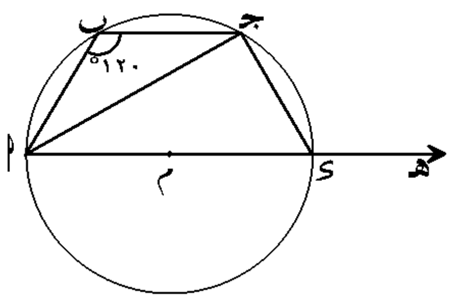
(٤) في الشكل المقابل :



ق(∠ أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق(∠ جـ أ د) = ٤٠°

أثبت أن : ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ د}}$)

(٥) في الشكل المقابل :



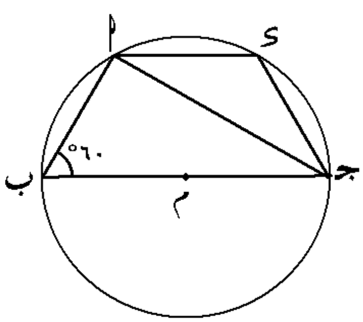
أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م فيه :

ق(∠ ب) = ١٢٠° ، $\overline{\text{أ د}}$ قطر في الدائرة ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

أوجد : ق(∠ جـ د هـ) ، ق(∠ جـ أ د)

إذا كان : د جـ = ٧سم   فأوجد : طول $\overset{\frown}{\text{أ د}}$ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٦) في الشكل المقابل :

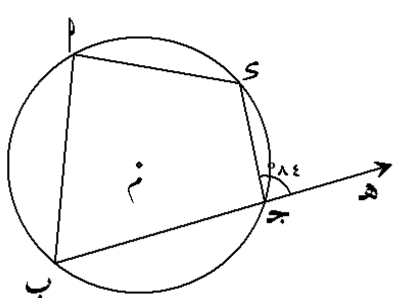


أ ب جـ د شكل رباعي دائرى ، $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر فيها

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠° ، طول $\overset{\frown}{\text{أ د}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ينصف (∠ د جـ ب)

(٧) في الشكل المقابل :

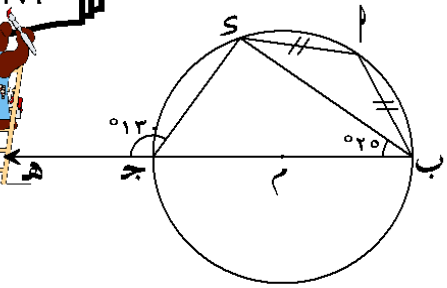


أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

، ق(∠ د جـ هـ) = ٨٤° ، ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ د)

أوجد : ق(∠ أ) ، ق(∠ ب)

(٨) في الشكل المقابل :

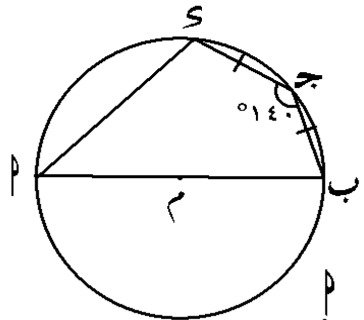


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب = أ ء

، ق(∠ جـ ب ء) = ٢٥° ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ هـ جـ ء) = ١٣٠°

أثبت أن : أ ء = ء جـ

(٩) في الشكل المقابل :

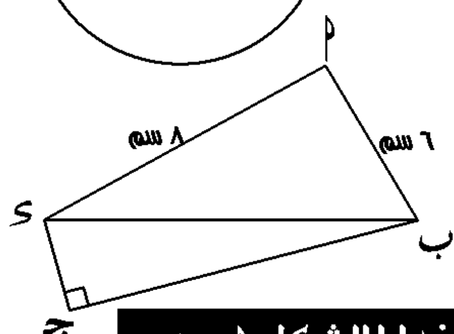


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

، م ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، جـ ب = جـ ء ، ق(∠ ب جـ ء) = ١٤٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ) ❷ ق(∠ ء)

(١٠) في الشكل المقابل :

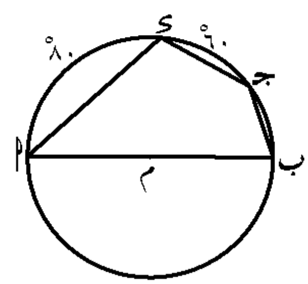


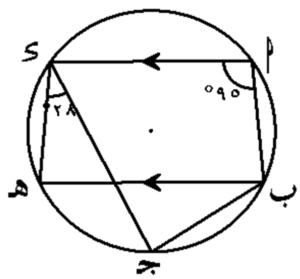
أ ب جـ ء شكل رباعي دائري فيه :

ق(∠ جـ) = ٩٠° ، أ ب = ٦سم ، أ ء = ٨سم

اوجد : ق(∠ أ ب ء)

(١١) في الشكلين المقابلين اوجد بالبرهان قياسات زوايا الشكل أ ب جـ ء :

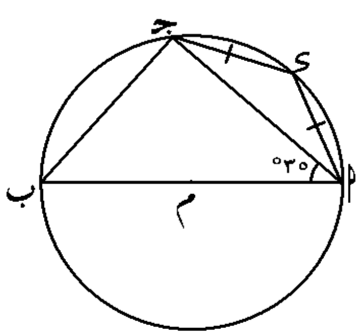




(١٢)
أ نقطة خارج دائرة ، رسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة في ب ، جـ على الترتيب ، رسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يقطع الدائرة في ء ، هـ على الترتيب ، فإذا كان : أ جـ = أ هـ

أثبت أن : ❶ $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$ ❷ ق($\frown{\text{ب جـ}}$) = ق($\frown{\text{ء هـ}}$)

(١٣) في الشكل المقابل :

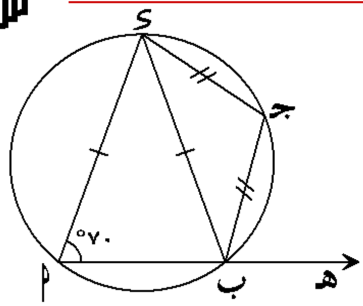


أ ب جـ ء شكل رباعي دائري ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها .

أ ء = ء جـ فإذا كان : ق(∠ ب أ جـ) = ٣٥°

فأوجد : ❶ ق(∠ ء) ❷ ق(∠ ب جـ ء)

(١٤) فى الشكل المقابل :

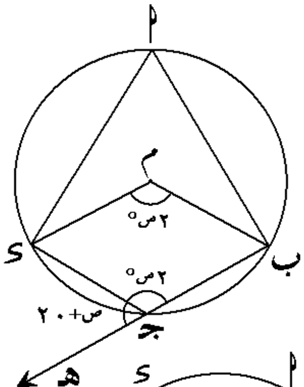


أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه : ق(∠ أ) = ٧٠°

، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، فإذا كان : جـ ء = جـ ب ، ء ب = ء أ

أوجد : ق(∠ هـ ب جـ)

(١٥) فى الشكل المقابل :

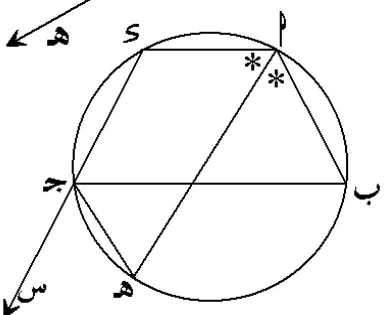


هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ ب م ء)= ق(∠ ب جـ ء) = ٢س°

، ق(∠ ء جـ هـ) = (ص + ٢٠)°

اوجد قيمة كل من : س ، ص

(١٦) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ،

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ أ) ويلاقى الدائرة فى النقطة هـ

اثبت أن : $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف (∠ س جـ ب)

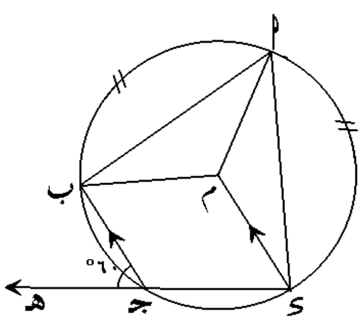
(١٧) أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ جـ) = ١٠٥°

أوجد : ❶ ق(∠ أ) ❷ ق(∠ ب)

(١٨) أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : أ ب = أ ء ، ق(∠ جـ) = ١٢٤° ، ق(∠ ب أ جـ) = ٣٦°

أوجد : ❶ ق(∠ أ جـ ء) ❷ ق(∠ أ ء جـ)

(١٩) فى الشكل المقابل :



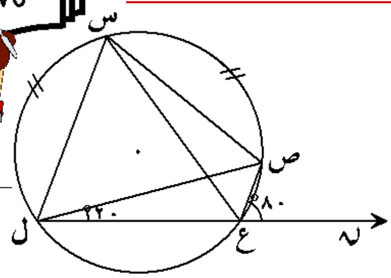
ق(∠ ب جـ هـ) = ٦٠° ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ء}}$ ، أ منتصف $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ الأكبر

اثبت أن : ❶ الشكل ب م ء جـ معين ❷ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فى الدائرة .

(٢٠) $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ب أ}}$ وتر فيها، ء ∈ $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ بحيث : ق(∠ أ ء جـ) = ١١٨° ،

رسم $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ ويقطع الدائرة فى هـ .

❶ أوجد : ق(∠ أ ب جـ) ❷ اثبت أن : ق(∠ أ جـ ء) = ق(∠ جـ ب هـ)



[٢١] فى الشكل المقابل :

س منتصف $\overset{\frown}{\text{ص ل}}$ ، ق(∠ ص ع ن) = ٨٠°

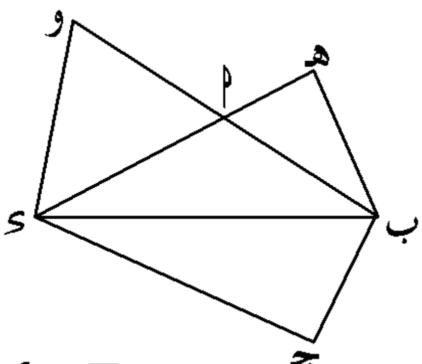
، ق(∠ ص ل ع) = ٢٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ع س ل)   ❷ ق($\overset{\frown}{\text{س ص ع}}$)

[٢٢]

أ ب جـ Δ حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، أ ء ⊥ ب جـ ليقطع ب جـ عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، رسم جـ و ⊥ أ ب ليقطع أ ب عند و

أثبت أن : ❶ الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى   ❷ ق(∠ ب و ء) = ق(∠ ب هـ ء)

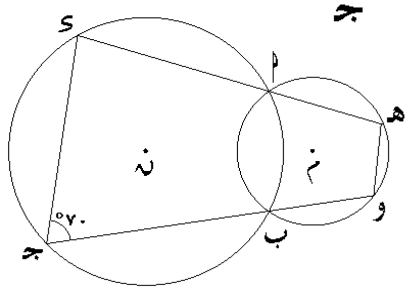


[٢٣] فى الشكل المقابل :

هـ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ،

و ب جـ ء شكل رباعى دائرى .

أثبت أن : الشكل هـ ب ء و رباعى دائرى



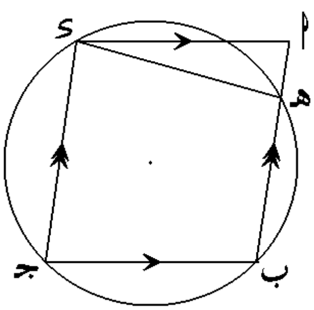
[٢٤] فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم ء أ يقطع الدائرة م

، فى هـ و الدائرة ن في ء ،رسم ب جـ يقطع الدائرة م في و

، الدائرة ن فى جـ ، ق(جـ) = ٧٠°

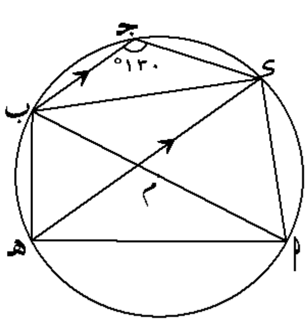
❶ أوجد : ق(∠ و)   ❷ أثبت أن : جـ ء // هـ و



[٢٥] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع، الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء

تقطع أ ب فى هـ   أثبت أن : أ ء = هـ ء



[٢٦] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، أ ب قطر فى الدائرة

، رسم ء هـ // ب جـ و يقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ب أ هـ)

إذا كان : ق(∠ جـ) = ١٣٠° فأوجد : ق(∠ أ هـ ء)

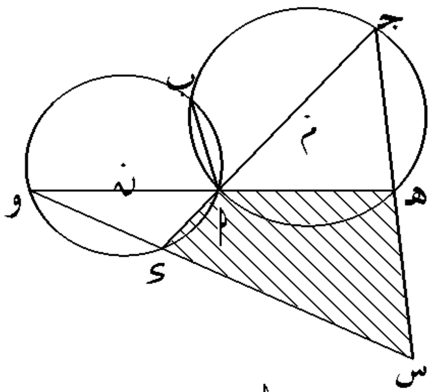
[٢٧] أ ب قطر في الدائرة ، ء ∈ أ ب ، رسم ء هـ ⊥ أ ب بحيث هـ خارج الدائرة ، ورسم هـ أ فقطع الدائرة في س ، رسم ء س فقطع الدائرة في ص

أثبت أن : ❶ الشكل هـ ب ء س رباعي دائرى . ❷ ب أ ينصف (∠ هـ ب ص)

[٢٨] أ ب ج ء هـ مخمس مرسوم في نصف دائرة قطرها أ ب

أثبت أن : ق(∠ أ هـ ء) + ق(∠ ب ج ء) = ٢٧٠°

[٢٩] في الشكل المقابل :



أ ب وتر مشترك للدائرتين م ، ن ، ج ∈ الدائرة م ، و ∈ الدائرة ن

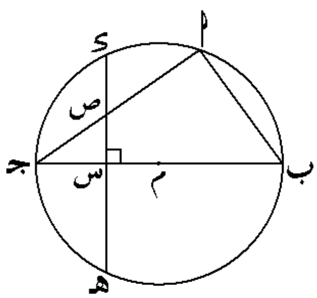
، فإذا كان: ج أ يقطع الدائرة ن في ء ، و أ يقطع الدائرة م في هـ

فإذا كان : ج هـ ∩ و ء = { س }

وكان الشكل أ هـ س ء رباعيا دائريا .

أثبت ان : ج ، ب ، و تنتمي لخط مستقيم واحد

[١] في الشكل المقابل :

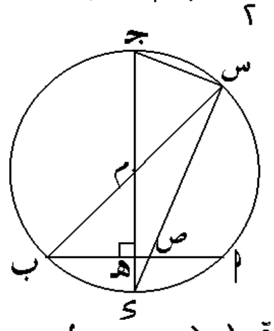


ب ج قطر الدائرة م ، أ ∈ ب ج ، ء هـ ⊥ ب ج

بحيث ء هـ ∩ ب ج = { س } ، ء هـ ∩ أ ج = { ص }

أثبت أن : ❶ الشكل أ ب س ص رباعي دائرى . ❷ ق(∠ ج ص س) = $\frac{1}{2}$ ق(أ ج)

[١٢] في الشكل المقابل :

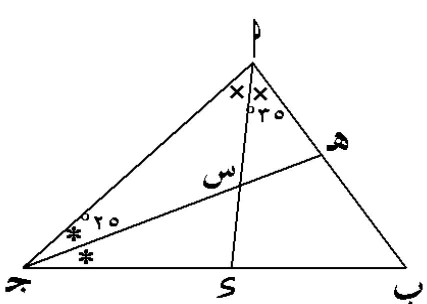


أ ب وتر في الدائرة م ، ج ء قطر عمودى على أ ب

ويقطعه في هـ ، ب م يقطع الدائرة في س ، س ء ∩ أ ب = { ص }

أثبت أن : ❶ الشكل س ص هـ ج رباعي دائرى ❷ ق(∠ ء ص ب) = ق(∠ ء ب س)

[٢] في الشكل المقابل :

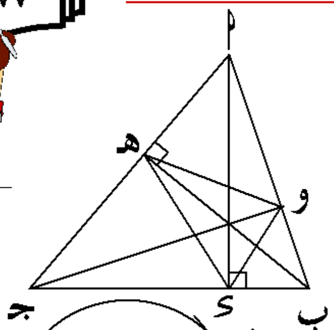


أ ء ينصف (∠ ب أ ج) ، ج س ينصف ∠ أ ج ب

، ق(∠ ب أ ء) = ٣٥° ، ق(∠ أ ج هـ) = ٢٥°

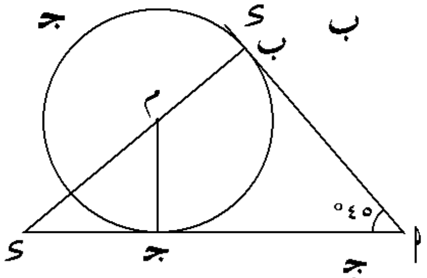
أثبت أن : الشكل ب هـ س ء رباعي دائرى

(٣) فى الشكل المقابل :



اثبت أن : القطع المستقيمة العمودية على أضلاع المثلث من الرؤوس المقابلة تتقاطع فى نقطة واحدة .

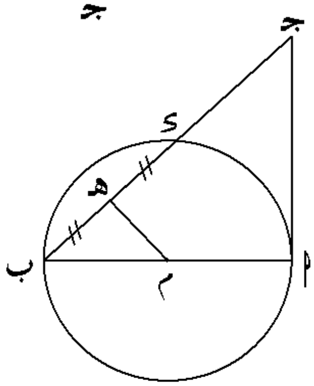
(٥) فى الشكل المقابل :



أ ب ، أ جـ تمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق (أ) = ٤٥° اثبت أن :

❶ الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى . ❷ المثلث م جـ د متساوى الساقين .

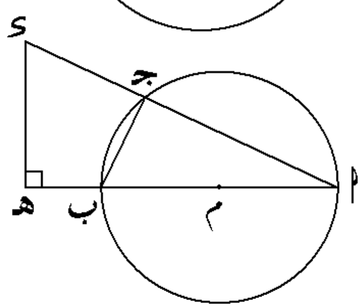
(٦) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى الدائرة م ، رسمت أ جـ تمس الدائرة فى أ ، ثم رسمت ب جـ فقطعت الدائرة فى د ثم نصفت ب د فى هـ

اثبت أن : الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى .

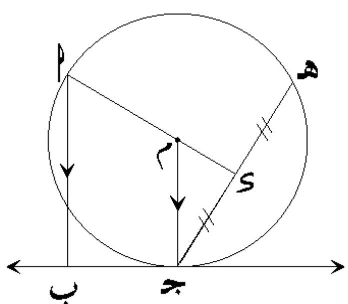
(٧) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى دائرة م ، د ∈ أ جـ رسم د هـ ⊥ أ ب

اثبت أن : الشكل ب هـ د جـ رباعى دائرى .

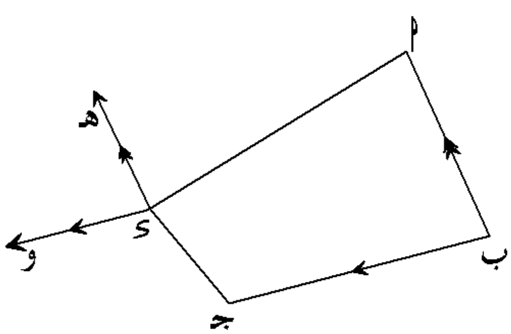
(٨) فى الشكل المقابل :



م دائرة ، د منتصف هـ جـ ، ب جـ مماس للدائرة م عند جـ ، أ ب // م جـ اثبت أن :

أ ب جـ د رباعى دائرى .

(١٠) فى الشكل المقابل :

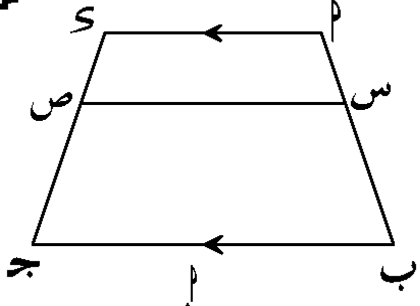


أ ب // د هـ ، ب جـ // د و ،

ق (∠ أ د هـ) + ق (∠ جـ د و) = ١٨٠

اثبت أن : الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(١١) في الشكل المقابل :

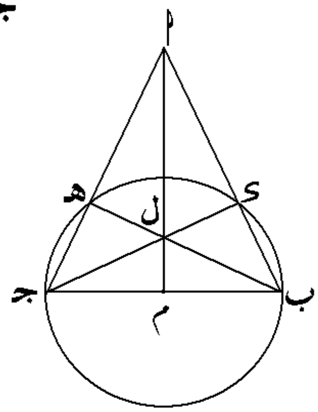


أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

، ص ∈ $\overline{\text{ء جـ}}$ ، فإذا علم أن الشكل أ س ص ء رباعي دائري .

فاثبت أن : الشكل س ب جـ ص رباعي دائري .

(١٣) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر في دائرة م ،

اثبت أن : الشكل ل م ب ء رباعي دائري .

(١٤) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتر فيها ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، رسم $\overleftarrow{\text{ء م}}$ فقطع الدائرة في هـ

، ورسم $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في و اثبت أن :

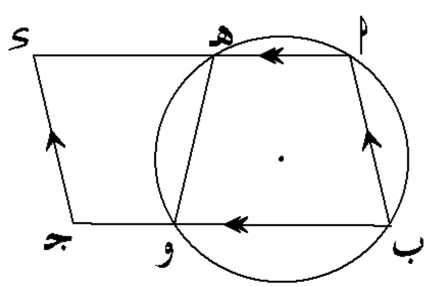
❶ الشكل م ب و ء رباعي دائري . ❷ ق(∠ و) = ٢ ق(∠ ب أ هـ)

(١٥) الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، جـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{ب أ}}$ ، رسم $\overleftarrow{\text{جـ س}}$

فقطع الدائرة م في س ، ص فإذا كانت ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{م ن}}$ = { ع }

اثبت أن : الشكل جـ ء م ع رباعي دائري .

(١٦) في الشكل المقابل :

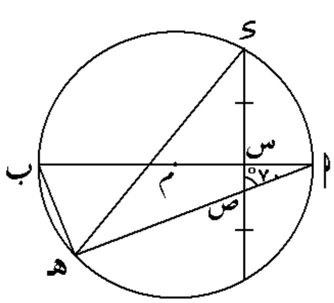


أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، رسمت دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب

فقطعت $\overline{\text{أ ء}}$ في هـ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ في و

اثبت أن : الشكل جـ ء هـ و رباعي دائري .

(١٧) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، س منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$ ، ق(∠ أ ص س) = ٧٠°

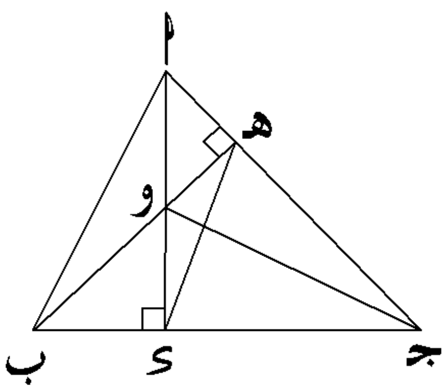
❶ اثبت أن : الشكل س ص هـ ب رباعي دائري

❷ أوجد : ق(∠ أ ء هـ)

[١٨] أ ب جـ ء شكل رباعي دائرى مرسوم داخل دائرة ى، و ∈ أ ب ، رسم و هـ // ب جـ
ويقطع جـ ء في هـ ، ء و ∩ جـ ب = { س }
اثبت أن : ❶ الشكل أ و هـ ء رباعي دائرى ❷ ق(∠ ب س و) = ق(∠ هـ أ ء)

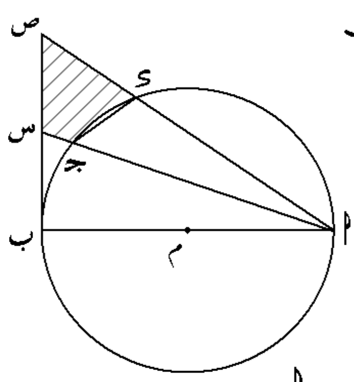
[١٩] أ ب جـ مثلث ، رسمت دائرة قطرها ب جـ وتقطع أ ب في نقطة ء ، أ جـ في نقطة هـ
، فإذا كان : ب هـ ∩ جـ ء = { و }
اثبت أن : ❶ أ ء و هـ رباعي دائرى ❷ ق(∠ ء أ و) = ق(∠ ب جـ ء)

[٢٠] أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب > أ جـ ، ء ∈ أ ب بحيث أ جـ = أ ء
، أ هـ ينصف (∠ أ) ويقطع ب جـ في هـ ويقطع الدائرة في و
اثبت أن : الشكل ب ء هـ و رباعي دائرى

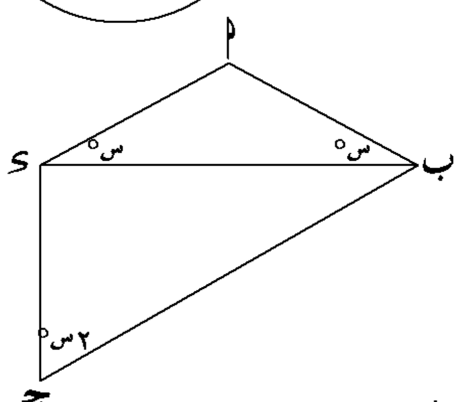


[٢١] في الشكل المقابل :
أ ب جـ Δ فيه : أ ء ⊥ ب جـ ، ب هـ ⊥ أ جـ
، أ ء ∩ ب هـ = { و }
اثبت أن : ق(∠ هـ جـ و) = ق(∠ هـ ب أ)

[٢٢] أ ب جـ Δ ، رسم أ ء ⊥ ب جـ قطعه في ء ، ثم رسم ء هـ ⊥ أ ب قطعه في هـ
، ء و ⊥ أ جـ قطعه في و اثبت أن : الشكل هـ ب جـ و رباعي دائرى

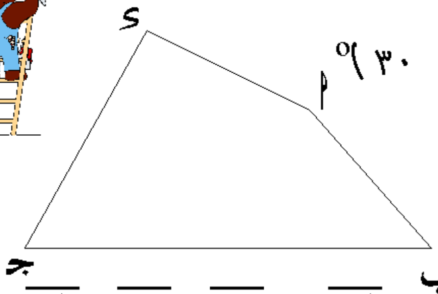


[٢٣] في الشكل المقابل :
أ ب قطر في دائرة م ، أ ء ، أ جـ وتران فيها وفي جهة واحدة من أ ب
، رسم من ب مماس للدائرة قطع أ جـ في س ، وقطع أ ء في ص
اثبت أن : الشكل س ص ء جـ رباعي دائرة .



[٢٤] في الشكل المقابل :
ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) = س°
، ق(∠ جـ) = ٢س°
اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى

(٢٥) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء رباعى دائرى ، ق(∠ أ) = ٧س° ، ق(∠ ب) = (٤س - ٣٠)°

، ق(∠ جـ) = ٢س° ، ق(∠ ء) = (٥س + ٣٠)°

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢٦) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ أ) = ٩٠° ، أطوال أضلاعه أ ب ، ب جـ ، ء جـ ، أ ء

على الترتيب ٨سم ، ٥ $\sqrt{3}$ سم ، ٥سم ، ٦سم

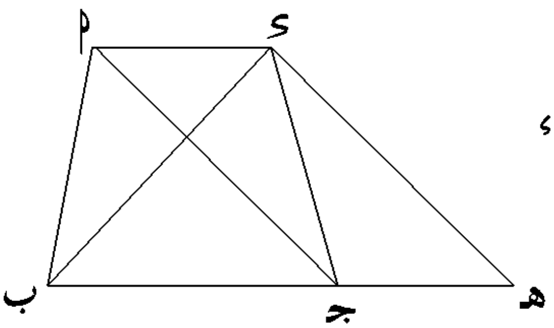
اثبت أن : الشكل رباعى دائرى وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها .

(٢٧) أ ب وتر فى الدائرة م ، جـ منتصف ⌒أ ب ، رسم من جـ الشعاعان جـ س ، جـ ص

فقطعا أ ب ، س ، ص على الترتيب وقطعا الدائرة فى ل ، ع على الترتيب

اثبت أن : س ص ع ل رباعى دائرى

(٢٨) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى ، جـ ∈ هـ ب ، Δ ء جـ هـ ~ Δ ب أ ء

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى . ء هـ // جـ أ

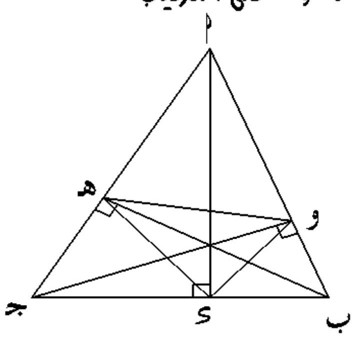
(٢٩)

أ ب قطر فى دائرة ، ل مستقيم يمس الدائرة عند ب ، فرضت النقطتان جـ ، ء على الدائرة فى جهتين

مختلفتين من أ ب ثم رسم أ جـ ، أ ء فقطعا المستقيم ل فى هـ ، و على الترتيب

اثبت أن : الشكل جـ ء و هـ رباعى دائرى .

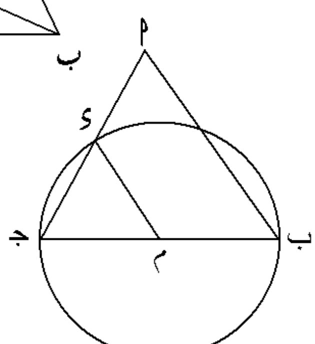
(٣٠) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ Δ فيه : أ ء ⊥ ب جـ ، ب هـ ⊥ أ جـ ، جـ و ⊥ أ ب

اثبت أن : ق(∠ هـ ء و) = ١٨٠° – ٢ ق(∠ أ)

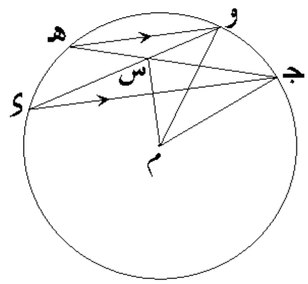
(٣٣) فى الشكل المقابل :



ب جـ قطر فى الدائرة م ، أ ب = أ جـ

برهن أن الشكل م ء أ ب رباعى دائرى

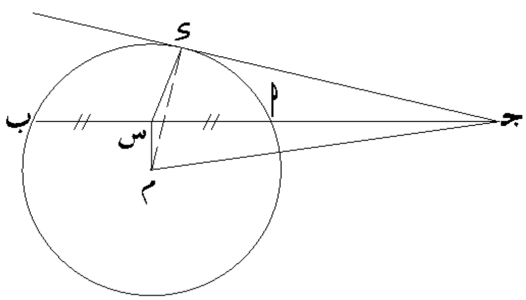
[٣٤] أ ب قطر فى الدائرة م ، جـ نقطة خارج الدائرة ، رسم جـ ء ⊥ أ ب
حيث جـ ء ⊥ أ ب يقطعه فى ء رسم أ جـ ليقطع الدائرة فى هـ، اثبت أن :
❶ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى ❷ إذا كانت ق(∠ هـ جـ ء) = ٣٠° أوجد ق(⌢ أ هـ)



[٣٥] فى الشكل المقابل :

جـ ء // و هـ ، و ء ∩ جـ هـ = { س }

اثبت أن : و جـ م س رباعى دائرى

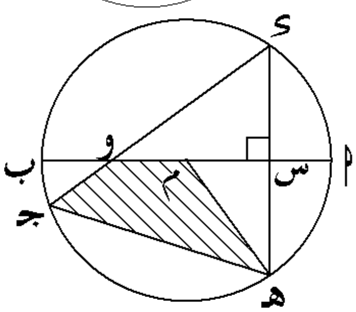


[٣٦] فى الشكل المقابل :

جـ ء قطعة مماسية للدائرة عند ء ، س منتصف أ ب

اثبت أن : الشكل م س ء جـ رباعى دائرى

(إرشاد : ارسم ء م)

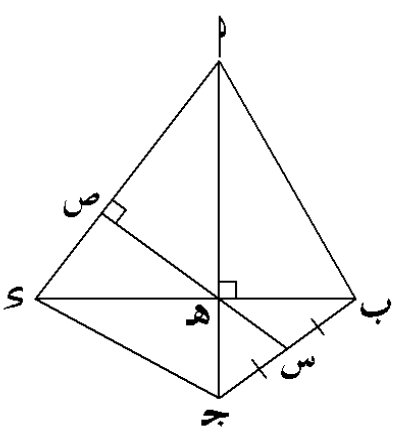


[٣٧] فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ أ ب

، ء هـ ∩ أ ب = { س }

اثبت أن : الشكل م هـ جـ و رباعى دائرى

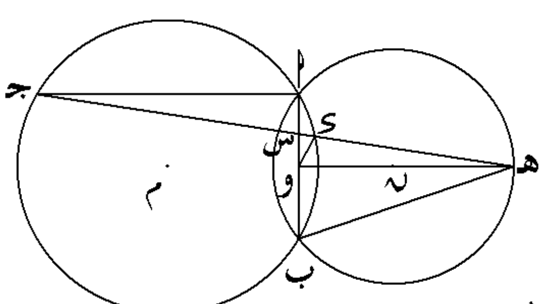


[٣٨] فى الشكل المقابل :

أ جـ ⊥ ب ء حيث أ جـ ∩ ب ء = { هـ }

، س منتصف ب جـ ، س هـ ⊥ أ ء يقطعه فى ص

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



[٣٩] فى الشكل المقابل :

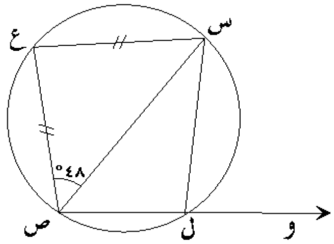
الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

، أ ب ∩ هـ جـ = { س }

، أ جـ // هـ و

اثبت أن : الشكل هـ ب و ء رباعى دائرى

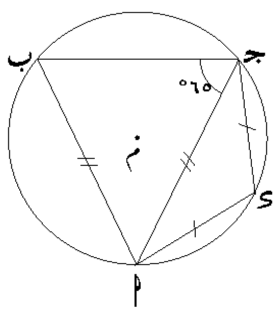
✍ [٤] فى الشكل المقابل :



ع س = ع ص ، ق(∠ س ص ع) = ٤٨°

أوجد : ق(∠ س ل و)

✍ [٥] فى الشكل المقابل :

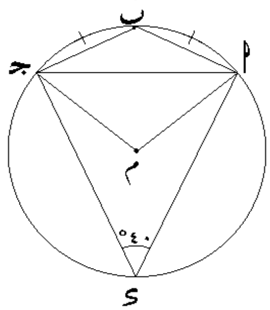


ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، ا ب = ا جـ ، ا ء = ء جـ ، ق(∠ ا جـ ب) = ٦٥°

أوجد : ق(∠ ء ا جـ)

✍ [٦] فى الشكل المقابل :

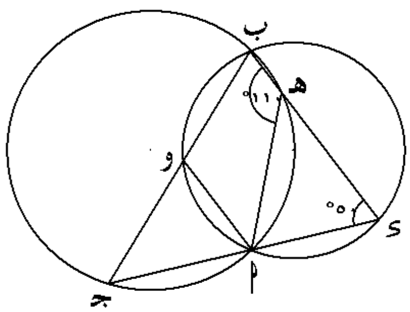


ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، ق(∠ ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ و) = ١١٠°

أثبت أن $\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

✍ [٧] فى الشكل المقابل :

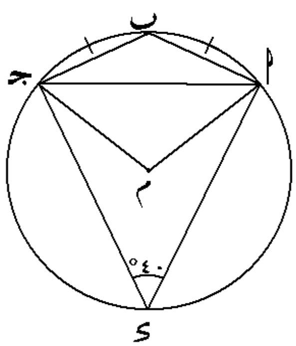


دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب

ق(∠ ب هـ ا) = ١١٠° ، ق(∠ ء) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ا و ب) ❷ ق(∠ جـ)

✍ [٨] فى الشكل المقابل :

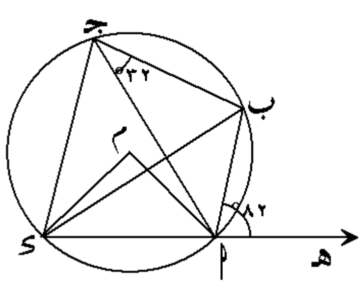


ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ، ب منتصف $\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$

، ق(∠ ء) = ٤٠° ❶ أوجد ق(∠ ا م جـ)

❷ ق(∠ ا ب جـ) ❸ ق(∠ ب ا جـ)

✍ [٩] فى الشكل المقابل :

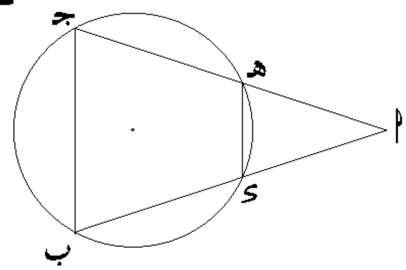


دائرة م ، ق(∠ هـ ا ب) = ٨٢° ، ق(∠ ا جـ ب) = ٣٢°

أوجد ❶ ق(∠ ا جـ ء) ❷ ق(∠ ا م ء)

، ❸ ق(∠ ا ب ء)

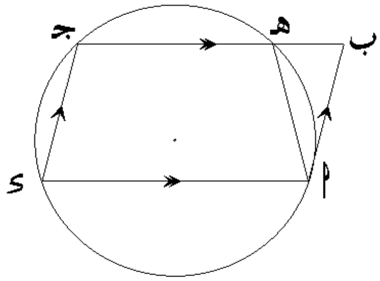
✍ (١٠) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ

أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

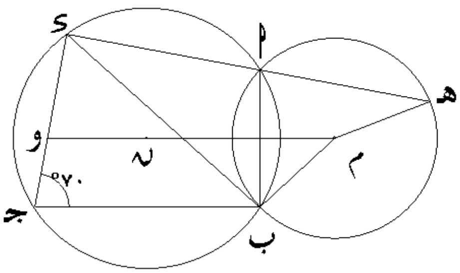
✍ (١١) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : أ ب = أ هـ

✍ (١٢) فى الشكل المقابل :

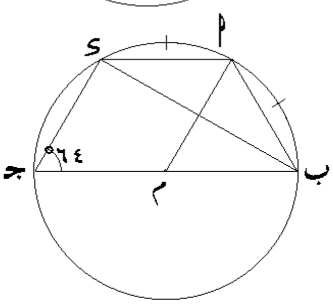


ق (∠ جـ) = ٧٠° ، طول $\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

أوجد بالبرهان ❶ ق (∠ ب ء جـ) ❷ ق (∠ ب م هـ)

❸ ق (∠ ب أ ء)

✍ (١٣) فى الشكل المقابل :

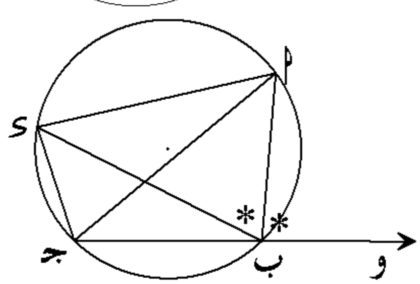


$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى دائرة م ، أ منتصف $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ ، ق (∠ جـ) = ٦٤°

أوجد : ❶ ق (∠ أ م ب) ❷ ق (∠ أ)

❸ ق (∠ ء ب جـ)

✍ (١٤) فى الشكل المقابل :

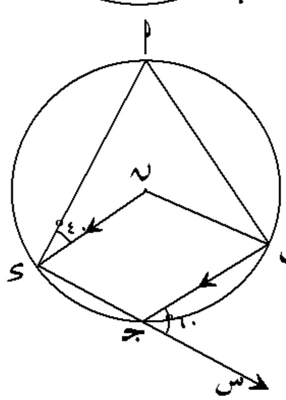


أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م

، $\overline{\text{أ ب}}$ ينصف ∠ ء ب و

أثبت أن : أ ء = أ جـ

✍ (١٦) فى الشكل المقابل :



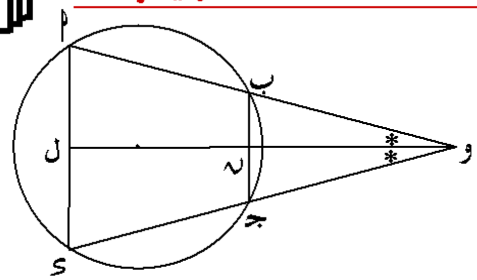
أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ن ، $\overline{\text{ن ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ق (∠ ب جـ س) = ٦٠° ، ق (∠ ن ء أ) = ٤٠°

❶ أثبت أن : الشكل ن ء جـ ب معين

❷ أوجد : ق (∠ أ ب ن)

(١٧) في الشكل المقابل :

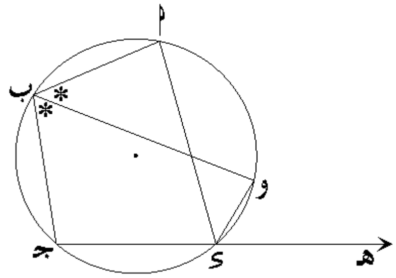


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، $\overline{\text{و ل}}$ ينصف ∠ أ و ء

أثبت أن : ق(∠ جـ ن ل) = ق(∠ ء ل ن)

(١٨) في الشكل المقابل :

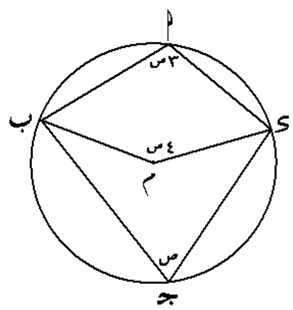


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، $\overline{\text{ب و}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

أثبت أن : $\overline{\text{ء و}}$ ينصف ∠ أ ء هـ

(١٩) في الشكل المقابل :

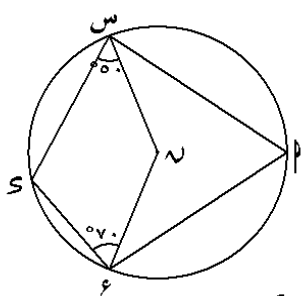


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، ق(∠ أ) = ٣س ، ق(∠ ء م ب) = ٤س°

، ق(∠ ء جـ ب) = ص° أوجد قيمة س ، ص

(٢٠) في الشكل المقابل :

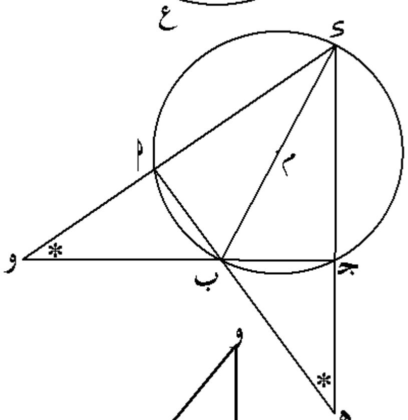


دائرة ن ، ق(∠ ن س ء) = ٥٠°

، ق(∠ ن ع ء) = ٧٠°

أوجد : ق(∠ أ)

(٢١) في الشكل المقابل :

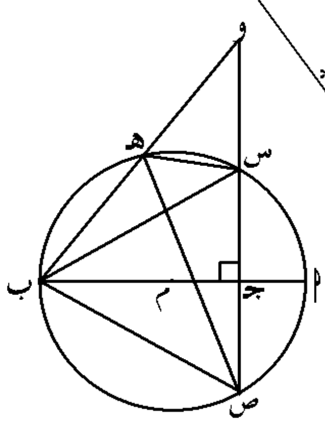


أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، ق(∠ هـ) = ق(∠ و)

أثبت أن : ❶ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ هـ جـ ب)

❷ $\overline{\text{ء ب}}$ قطر للدائرة

(٢٢) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه في جـ

أثبت أن : ❶ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب ص س)

❷ ق(∠ و هـ س) = ق(∠ ص هـ ب)

تمارين على اثبات أن الشكل رباعى دائرى

(١) أكمل ما يأتى

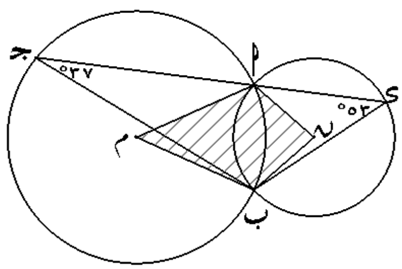
١ يكون الشكل رباعى دائريا فى الحالات الآتية .... ، .... ، ....

٢ إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعيا دائريا و كان ق (∠ أ) = ٧٠° فإن ق (∠ جـ) = ...°

٣ من الأشكال الرباعية الدائرية .... ، .... ، ....

٤ فى أى شكل رباعى إذا كان مجموع قياس زاويتين متقابلتين فيه = ١٨٠° كان الشكل ....

(٢) فى الشكل المقابل :

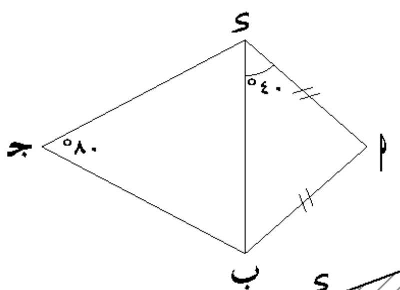


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

، ق (∠ أ ء ب) = ٥٣° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٧°

أثبت أن : الشكل أ ن ب م رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل :

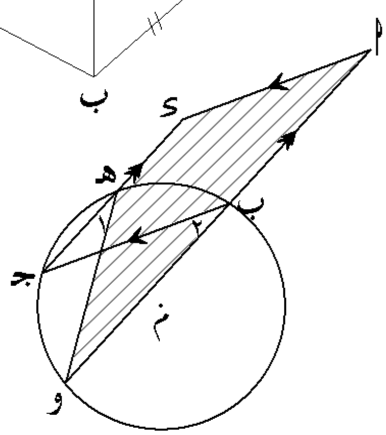


أ ب = أ ء ، ق (∠ أ ء ب) = ٤٠°

، ق (∠ جـ) = ٨٠°

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

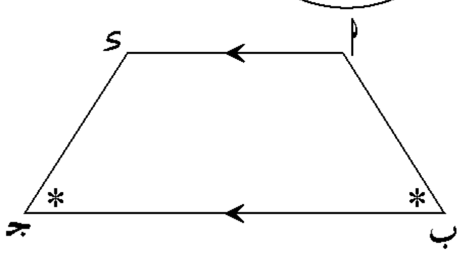
(٤) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع

أثبت أن : الشكل أ و هـ ء رباعى دائرى

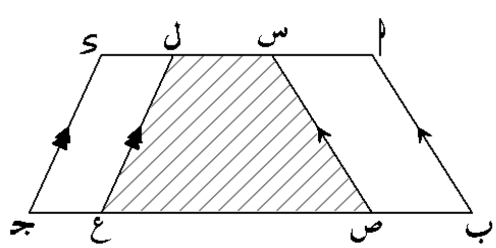
(٥) فى الشكل المقابل :



أ ء // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

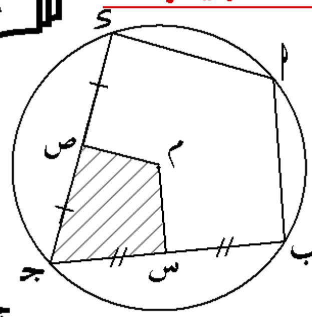
اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى .

(٦) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ل ع}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$

اثبت أن : الشكل س ص ع ل رباعى دائرى .

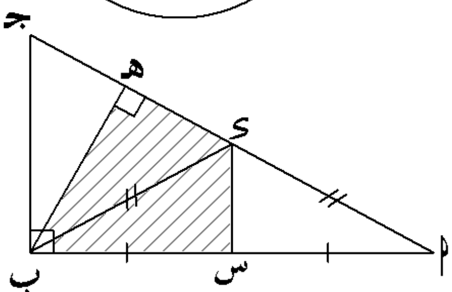


(٧) فى الشكل المقابل :

س منتصف ب جـ ، ص منتصف ء جـ ،

أثبت ان : ❶ الشكل م س جـ ص رباعى دائرى

❷ ق (∠ س م ص) = ق (∠ ب أ ء)

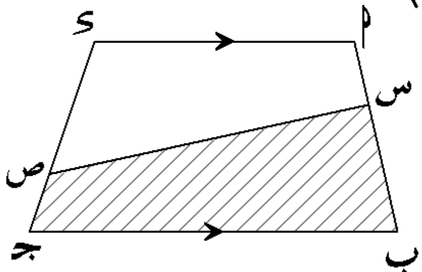


(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب ، ب هـ ⊥ أ جـ يقطعه فى هـ

، س منتصف أ ب ، أ ء = ب ء أثبت أن :

❶ الشكل ء س ب هـ رباعى دائرى ❷ ق (∠ س هـ ء) = ق (∠ أ)

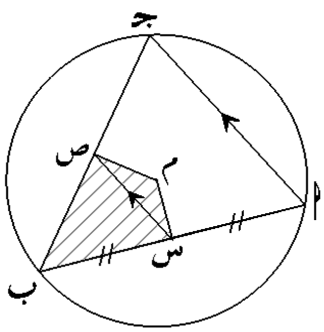


(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ء // ب جـ ، س ∋ أ ب ،

ص ∋ ء جـ فإذا كان الشكل أ س ص ء رباعى دائرى

أثبت أن : الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى

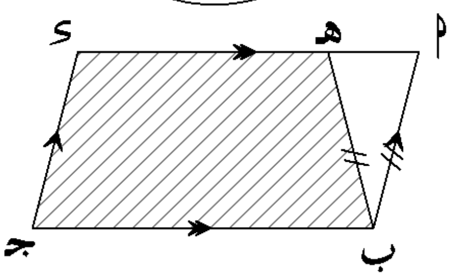


(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م ،

س منتصف أ ب ، أ جـ // س ص

أثبت أن : الشكل م س ب ص رباعى دائرى .

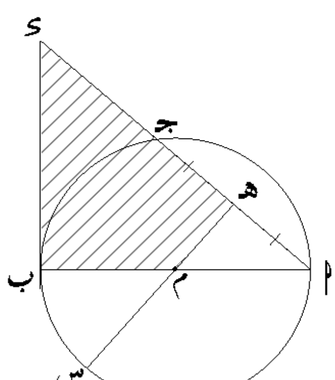


(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

، هـ ∋ أ ء حيث أ ب = ب هـ

أثبت أن : الشكل هـ ب جـ ء رباعى دائرى



(١٢) فى الشكل المقابل :

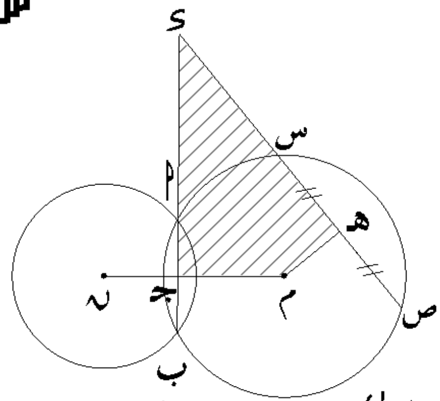
أ ب قطر فى الدائرة م، أ جـ وترا فيها، هـ منتصف أ جـ،رسم ب ء مماسا

للدائرة فقطع أ جـ فى ء ، ورسم هـ م فقطع الدائرة فى س

أثبت أن : ❶ الشكل م هـ ء ب رباعى دائرى

❷ ق (∠ ء) =٢ ق (∠ س أ ب)

✍ (١٣) فى الشكل المقابل :

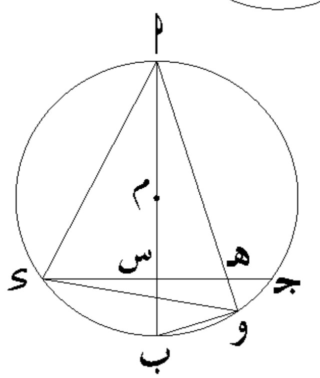


الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } ، ء ∈ ب أ

، هـ منتصف س ص

اثبت أن : الشكل ء هـ م جـ رباعيا دائريا

✍ (١٤) فى الشكل المقابل :



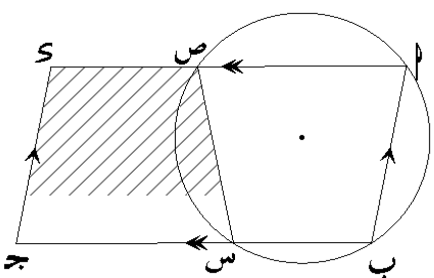
جـ ء وترا فى الدائرة م ، س منتصف جـ ء ، م س يقطع الدائرة فى أ ، ب

، هـ ∈ جـ س ، أ هـ يقطع الدائرة فى و اثبت أن :

❶ الشكل هـ و ب س رباعى دائرى

❷ ق (∠ أ هـ س) = ق (∠ أ ء و)

✍ (١٨) فى الشكل المقابل :

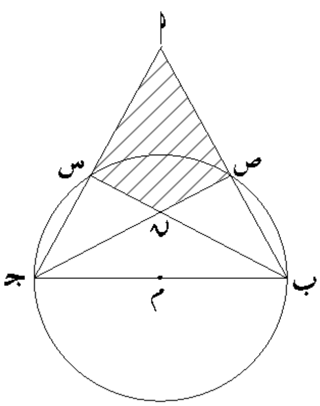


أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، أ ء يقطع الدائرة فى ص

، ب جـ يقطع الدائرة فى س

اثبت أن : الشكل ص س جـ ء رباعى دائرى

✍ (١٩) فى الشكل المقابل :



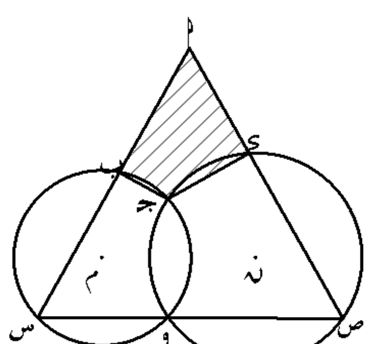
ب جـ قطر فى الدائرة م ، أ نقطة خارج الدائرة

، رسم أ ب فقطع الدائرة فى ص ، رسم أ جـ فقطع الدائرة فى س

اثبت أن : ❶ الشكل أ ص ن س رباعى دائرى

❷ ق (∠ س أ ن) = ق (∠ س ب جـ)

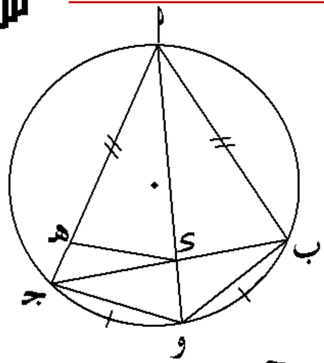
✍ (٢٠) فى الشكل المقابل :



الدائرة م ∩ الدائرة ن = { جـ ، و }

اثبت أن : أ ء جـ ب رباعى دائرى

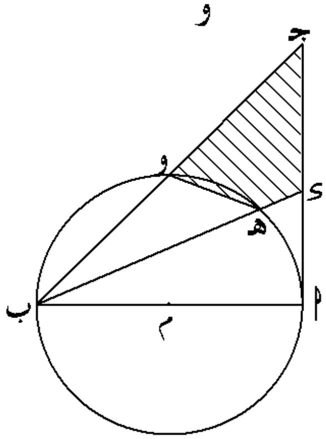
✍ (٢١) في الشكل المقابل :



أ ب = أ هـ ، ق($\overset{\frown}{\text{ب و}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{و جـ}}$)

أثبت أن : الشكل ء و جـ هـ رباعى دائرى

✍ (٢٢) في الشكل المقابل :

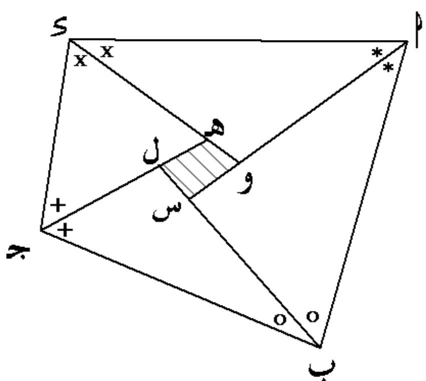


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة م عند أ

، ء ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، رسم $\overline{\text{ء ب}}$ فقطع الدائرة في هـ ، و ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى

✍ (٢٣) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{ب س}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$

ينصفان كل من ∠ أ ، ∠ ء ، ∠ ب ، ∠ جـ

أثبت أن : الشكل و س ل هـ رباعى دائرى

الوحدة الخامسة

❶ التماس فى الدائرة

❷ نظرية العلاقة بين مماسات الدائرة

❸ نظرية الزاوية المماسية

❹ عكس نظرية الزاوية المماسية

تمارين على التماس

(١) أكمل ما يأتى

❶ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ....

❷ المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يكونان ....

❸ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة يكونان ....

❹ الدائرة الداخلة للمثلث هى الدائرة التى ....

❺ مركز الدائرة الداخلة للمثلث هوى نقطة تلاقى ....

❻ إذا كانت : أ ب ، أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م عند ب ، جـ فان : ←أ م→ محور تماثل ....

❼ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الدخل = ...

❽ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

❾ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

❿ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

⓫ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتى المركز = ...

⓬ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

⓭ عدد المماسات المشتركة الداخلية للدائرتين المتقاطعتين = ...

⓮ المستقيم المار بمركز الدائرة ، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محور تماثل ....

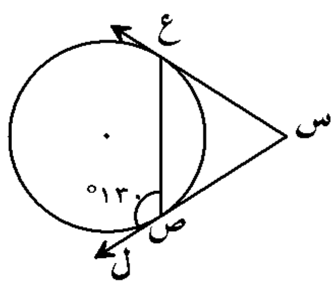
⓯ المستقيم المار بمركز الدائرة ، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف .... ، كما ينصف ....

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان عند نقطتى ب ، جـ لدائرة طول نصف قطرها ٢سم

فإذا كان طول أ ب = ٥سم فان : طول أ جـ = ... سم

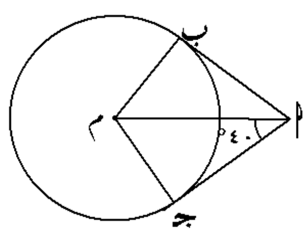
(١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٥ (٤) ٨



❷ فى الشكل المقابل : ←س ص ، ←س ع مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق (∠ ص ع) = ١٣٠° فان : ق (∠ س) = ...

(١) ٥٠° (٢) ٦٥° (٣) ٨٠° (٤) ١٠٠°



❸ فى الشكل المقابل : إذا كانت : أ ب ، أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م

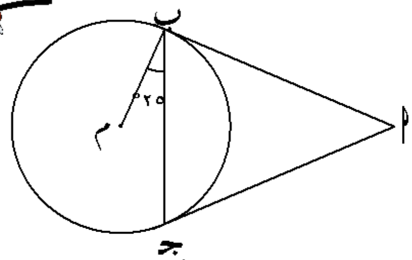
، ق (∠ م أ جـ) = ٤٠° فان : ق (∠ جـ أ ب) = ...

(١) ٨٠° (٢) ٥٠° (٣) ٤٠° (٤) ٢٠°

❹ في الشكل المقابل : إذا كان : أ ب ، أ جـ مماسين للدائرة م

، ق(جـ ب م) = ٢٥° فان : ق(ب أ جـ) = ...

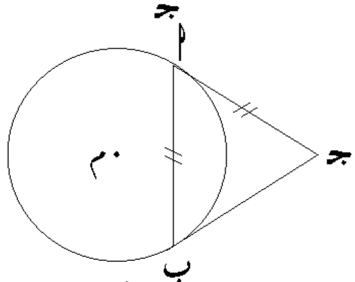
(١) ٧٥° (٢) ٥٠° (٣) ٢٥° (٤) ٣٠َ ١٢°



❺ في الشكل المقابل :

جـ ب ، جـ أ مماستان للدائرة م ، جـ ب = ب أ فان ق(∠ جـ) = ...

(١) ٦٠° (٢) ١٢٠° (٣) ٩٠° (٤) غير ذلك

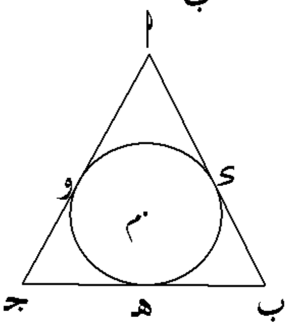


❻ في الشكل المقابل :

الدائرة م مماسه لأضلاع المثلث أ ب جـ فإذا كان : أ ء = ٨سم

، ب هـ = ٦سم ، جـ و = ٧سم فان محيط Δ أ ب جـ = ...

(١) ٢١سم (٢) ٤٢سم (٣) ٤٨سم (٤) ٢٨سم

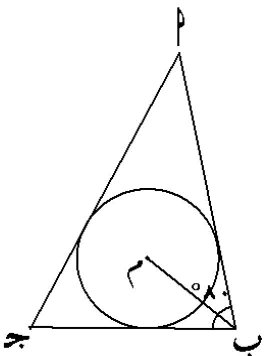


❼ في الشكل المقابل :

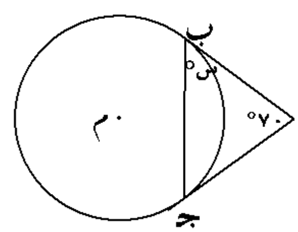
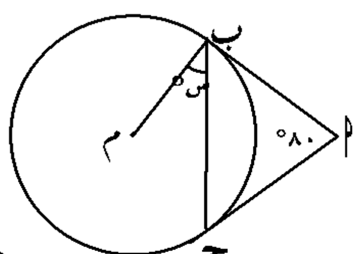
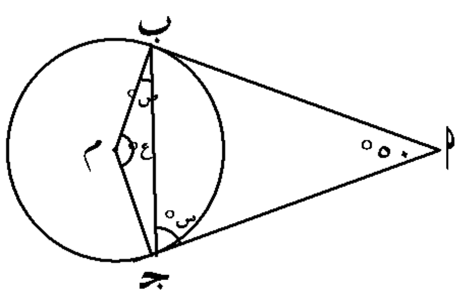
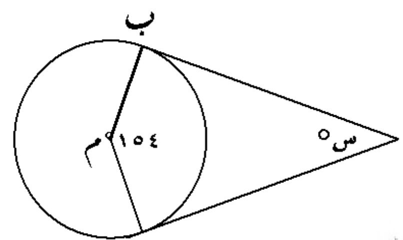
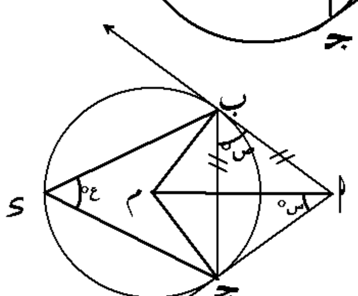
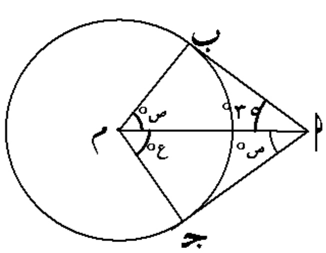
إذا كانت م هي مركز الدائرة الداخلة Δ أ ب جـ ، ق(∠ أ ب جـ) = ٨٠°

فان : ق(جـ ب م) = ...

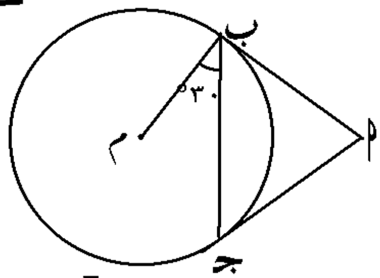
(١) ٤٠° (٢) ٨٠° (٣) ١٠٠° (٤) ٢٠°



[٣] في كل من الأشكال الآتية أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، اوجد قيمة س

[٤] فى الشكل المقابل :

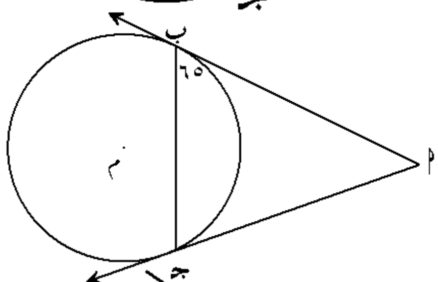


إذا كانت : أ ب ، أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق(∠ م ب جـ) = ٣٠°

اثبت أن : Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع .

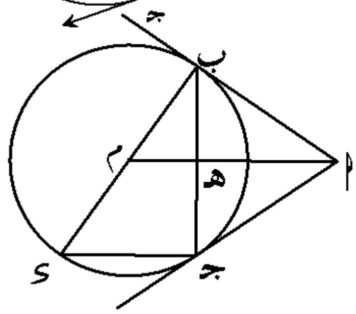
[٥] فى الشكل المقابل :



أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٥ احسب ق(∠ أ)

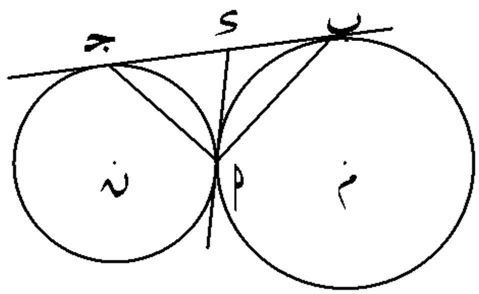
[٦] فى الشكل المقابل :



أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

رسم ب ء قطرا فى الدائرة اثبت أن أ م // جـ ء

[٧] فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ،

ب جـ مماس مشترك للدائرتين عند ب ، جـ على الترتيب

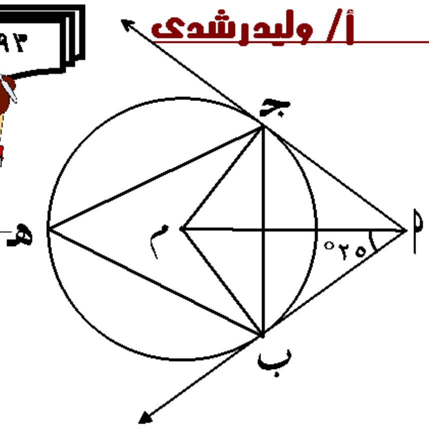
اثبت أن ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠°

ارشاد (ارسم مماس مشترك عند أ يقطع ب جـ فى النقطة ء)

[٨] م ، ن متماستان من الداخل فى ب ، أ ب مماس للدائرتين ، رسم أ ء مماسا للدائرة م عند ء ، ورسم أ جـ مماسا للدائرة ن عند جـ **اثبت أن** : أ ء = أ جـ

[٩] أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ فاذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى ١٠ سم ، ق(∠ ب أ جـ) = ٦٠° **فأوجد طول كل من** : ❶ م أ ❷ أ ب

[١٠] في الشكل المقابل :

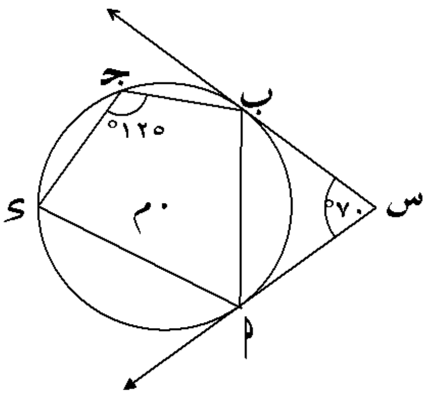


أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠ ب أ م) = ٢٥°

، هـ ∈ ⌒ب جـ الأكبر

أوجد : ❶ ق(∠ أ جـ ب) ❷ ق(∠ ب هـ جـ)

[١٢] في الشكل المقابل :



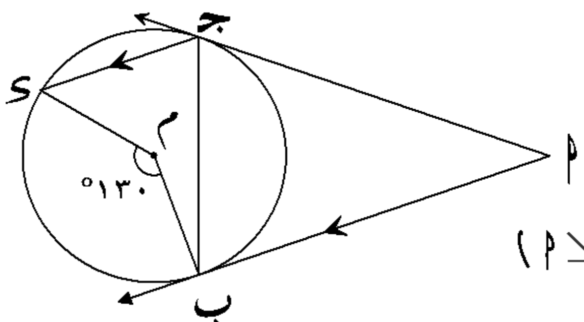
س أ ، س ب مماستان للدائرة عند أ ، ب

، ق(∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق(∠ ء جـ ب) = ١٢٥°

اثبت أن : ❶ أ ب ينصف (∠ ء أ س)

❷ أ ء // س ب

[١٣] في الشكل المقابل :

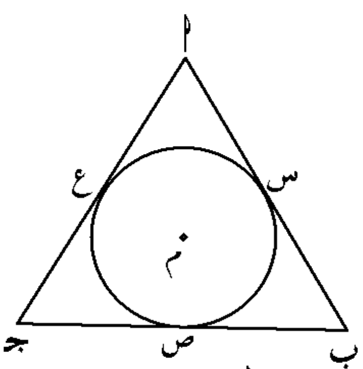


أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

، أ ب // جـ ء ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

اثبت أن : ❶ جـ ب ينصف أ جـ ء ❷ أوجد : ق(∠ أ)

[١٤] في الشكل المقابل :

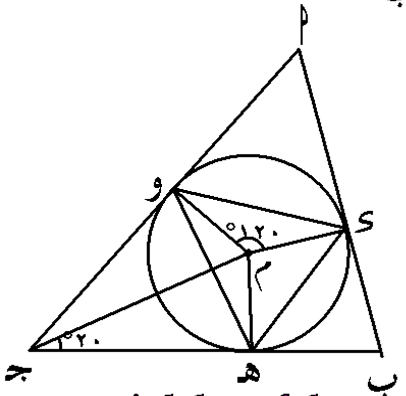


Δ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع .

فإذا كان محيط Δ أ ب جـ = ١٨سم ، أ س = ٢سم ، جـ ع = ٣سم

احسب طول : ب ص

[١٥] في الشكل المقابل :



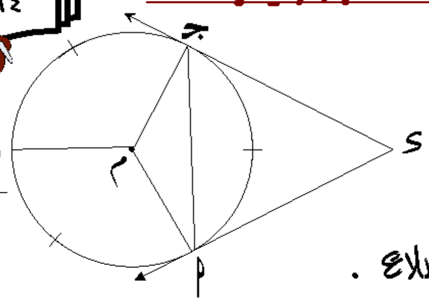
إذا كانت الدائرة م الداخلة Δ أ ب جـ تمس

أضلاعه أ ب ، ب جـ ، أ جـ في ء ، هـ ، و على الترتيب

، وكان ق(∠ ء م و) = ١٢٠° ، ق(∠ هـ جـ م) = ٢٠°

فأوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ

✍ (١٧) فى الشكل المقابل :



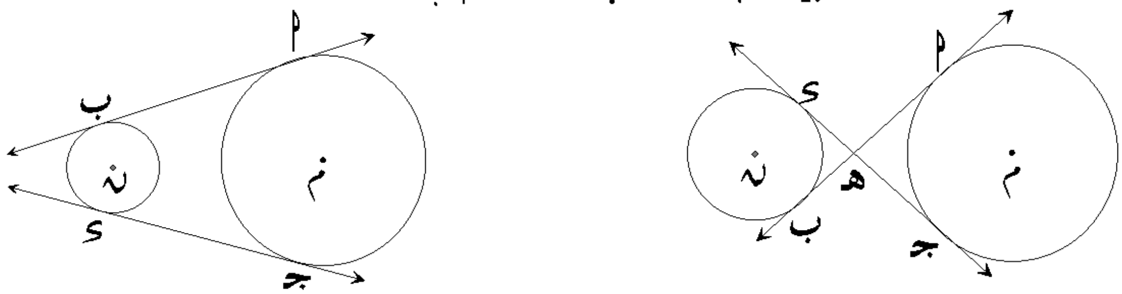
الدائرة م انقسمت الى ثلاثة أقواس متساوية فى الطول

، ء أ ، ء جـ يمسانها من ء أوجد : ق (∠ أ م ب) اثبت أن :

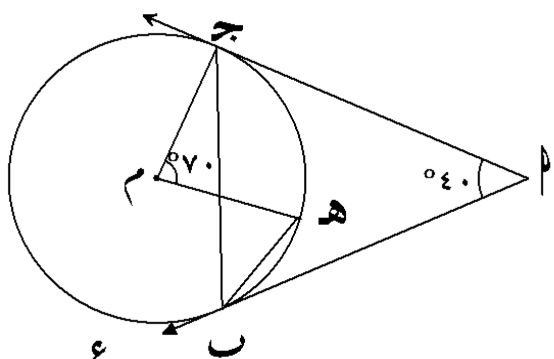
❶ الشكل أ م جـ ء رباعى دائرى . ❷ Δ أ جـ ء متساوى الأضلاع .

✍ (١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ ء مماسان للدائرتين م ، ن اثبت أن : أ ب = جـ ء



✍ (١٩) فى الشكل المقابل :

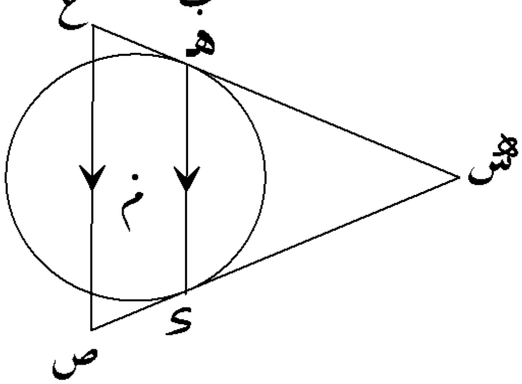


أ ب ، أ جـ يمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب

، ق (∠ ب أ جـ) = ٤٠° ، ق (∠ هـ م جـ) = ٧٠°

اثبت أن : ب هـ ينصف (∠ أ ب جـ)

✍ (٢٠) فى الشكل المقابل :

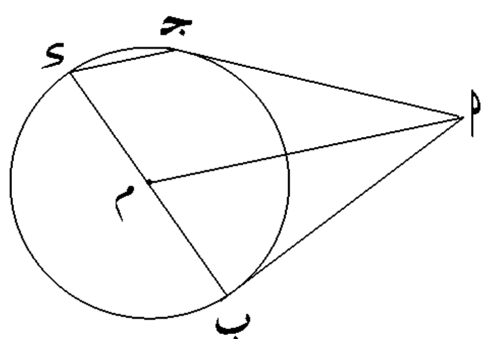


س ص ع Δ ، س ص ، س ع تمسان الدائرة م عند ء ، هـ

، فإذا كان : ء هـ // ص ع

اثبت أن : الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى .

✍ (٢٢) فى الشكل المقابل :



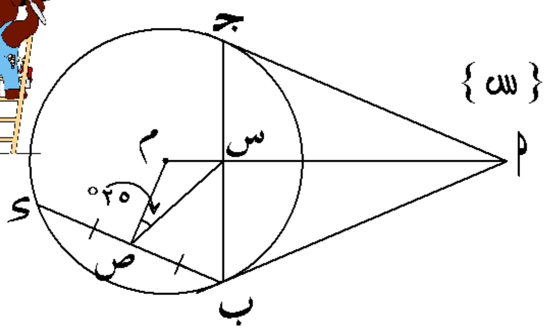
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

، ب ء قطر فى الدائرة

اثبت أن : أ م // جـ ء

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

[٢٩] فى الشكل المقابل :



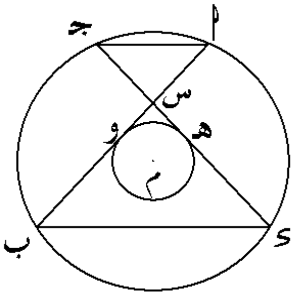
$\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{ﻫ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ ، $\overline{ﻫ م} \cap \overline{ب جـ} = \{ س \}$

، ص منتصف $\overline{ب ء}$ ، ق($\angle$ س ص م) = ٢٥°

❶ اثبت أن : الشكل س ب ص م رباعى دائرى .

❷ أوجد : ق($\angle$ ﻫ)

[٣٠] فى الشكل المقابل :

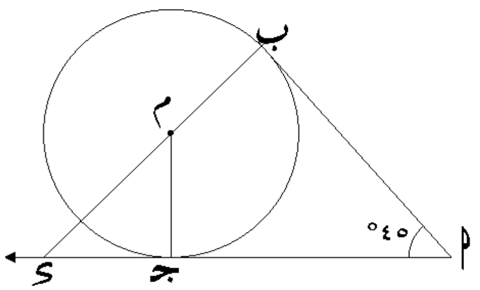


دائرتان متحدتى المركز م . رسم الوتران $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ فى الدائرة الكبرى متقاطعان فى س

و يمسان الدائرة الصغرى فى و ، ﻫ على الترتيب

اثبت أن ❶ $\triangle$ س ﻫ جـ متساوي الساقين ، ❷ $\overline{ﻫ جـ} \,/\!/\, \overline{ب ء}$

[٣٣] فى الشكل المقابل :



$\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{ﻫ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

، ق($\angle$ ﻫ) = ٤٥° ، $\overleftarrow{ب م} \cap \overleftarrow{ﻫ جـ} = \{ ء \}$

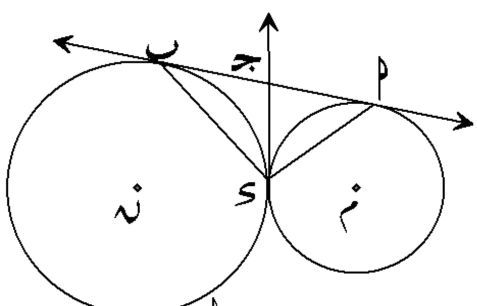
اثبت أن : ❶ الشكل ﻫ ب م جـ رباعى دائرى ❷ ﻫ ء = ﻫ ب + م ب

[٣٤] 📖 $\overline{ﻫ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ﻫ ب = ١٠سم ، جـ $\in$ الدائرة م ، رسم مماس للدائرة عند

جـ فقطع المماسين المرسومين لها عند ﻫ ، ب فى س ، ص على الترتيب حيث س ص = ١٣سم

❶ اثبت أن : $\overline{س م} \perp \overline{ص م}$ ❷ أوجد : مساحة الشكل ﻫ س ص ب

[٣٥] فى الشكل المقابل :

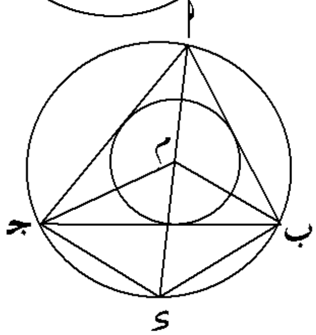


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ء ، $\overleftrightarrow{ﻫ ب}$ مماس مشترك

لهما عند ﻫ ، ب ، $\overleftarrow{ء جـ}$ مماس مشترك للدائرتين عند ء

اثبت أن : ❶ جـ منتصف $\overline{ﻫ ب}$ ❷ $\overline{ﻫ ء} \perp \overline{ب ء}$

[٣٩] فى الشكل المقابل :

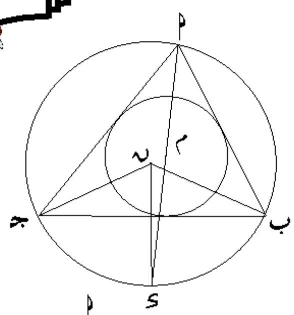


ﻫ ب جـ $\triangle$ رسمت الدائرة الداخلة م

، رسم $\overleftarrow{ﻫ م}$ فقطع الدائرة الخارجة للمثلث فى ء

اثبت أن ء مركز الدائرة الخارجة $\triangle$ م ب جـ

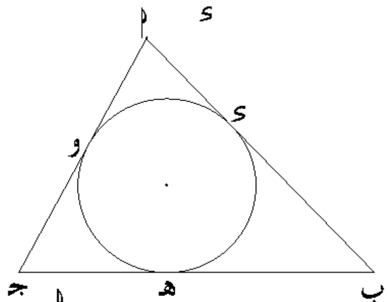
(٤٠) في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ رسمت الدائرة الداخلة م ، ن مركز الدائرة الخارجة △ أ ب جـ ،

رسم $\overrightarrow{\text{أ م}}$ فقطع الدائرة الخارجة للمثلث في ء اثبت أن $\overline{\text{ن ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

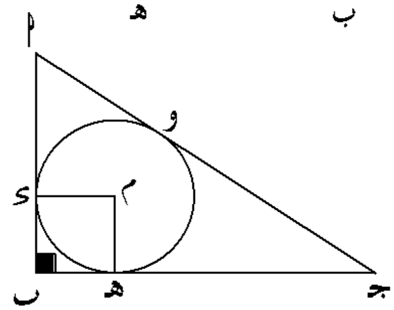
(٤١) في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ رسمت الدائرة م الداخلة تمس أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

في ء ، و ، هـ على الترتيب اثبت أن أ ب + جـ هـ = $\frac{1}{2}$ محيط △ أ ب جـ

(٤٢) في الشكل المقابل :

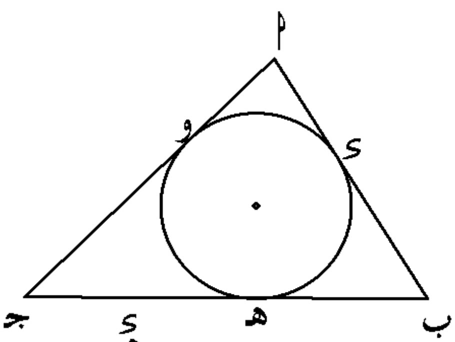


أ ب جـ △ قائم الزاوية في (ب) رسمت الدائرة م الداخلة

تمس أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ في ء ، و ، هـ على الترتيب

اثبت أن : ب ء م هـ مربع

(٤٥) في الشكل المقابل :



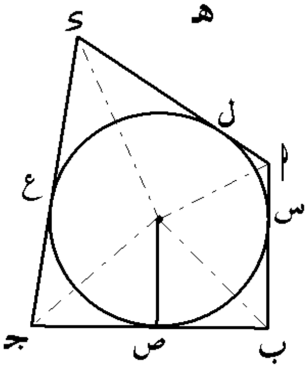
أ ب جـ △ أطوال أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ هي على الترتيب

٧سم ، ١٠سم ، ٨سم فإذا كانت الدائرةالداخلة له تمس الأضلاع

السابقة في ء ، هـ و على الترتيب اثبت أن :

❶ ب جـ + أ ء = أ جـ + ب ء ❷ طول كل من : $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

(٤٦) في الشكل المقابل :

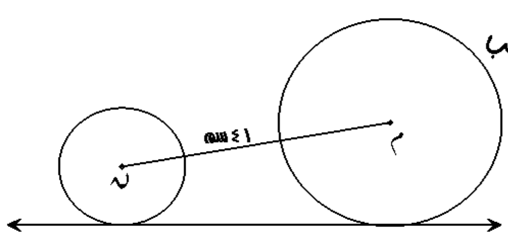


م دائرة داخلة للشكل الرباعي أ ب جـ ء

، طول نصف قطرها ٥سم ، أ ب = ٩سم ، جـ ء = ١٢سم

اوجد محيط الشكل أ ب جـ ء ثم احسب مساحته .

(٤٨) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن من الخارج عند أ ، ب على الترتيب

، طولا نصفي قطري الدائرتين ١٧سم ، ٨سم على الترتيب

م ن = ٤١سم أوجد طول : $\overline{\text{أ ب}}$

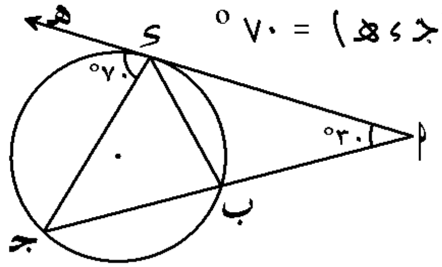
تمارين على الزاوية المماسية

[١] كمل ما يأتى

١ قياس الزاوية المماسية يساوى قياس .... المشتركة معها فى القوس .

٢ قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية .... المشتركة معها فى القوس

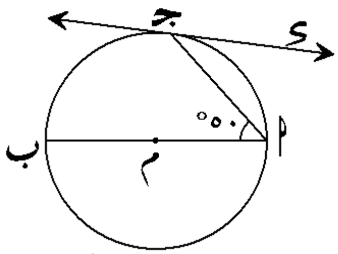
٣ فى الشكل المقابل : إذا كان أهـ يمس الدائرة فى ء ، ق(∠ جـ ء هـ) = ٧٠° ، ق(∠ أ) = ٣٠° ، فان :



(١) ق(∠ ء ب جـ) = ... ° (٢) ق(∠ أ ء ب) = ... °

(٣) ق(∠ ب جـ ء) = ... °

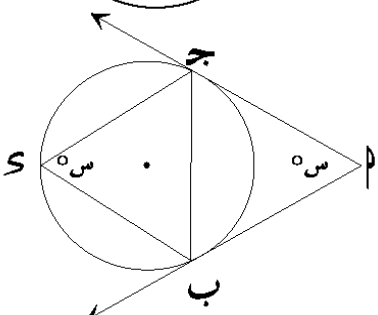
٤ فى الشكل المقابل : إذا كان أب قطرا فى الدائرة م ، ء جـ مماسا لها عند جـ ، ق(∠ أ) = ٥٠°



فان : (١) ق(ب⌢جـ) = ... ° (٢) ق(أ⌢جـ) = ... °

(٣) ق(∠ أ جـ ء) = ... °

٥ فى الشكل المقابل : أب ، أجـ مماسان للدائرة م ، ء نقطة على الدائرة ، فان : قيمة س = ... °

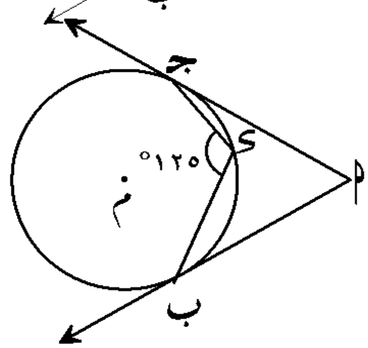


٦ فى الشكل المقابل :

أب ، أجـ مماسان للدائرة م ،

ء نقطة على الدائرة بحيث ق(∠ جـ ء ب) = ١٢٥°

فان : ق(∠ أ) = ... °



[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

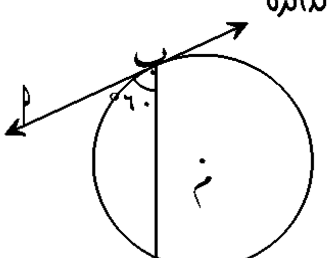
١ إذا كان قياس زاوية مماسية يساوى ٧٠° ، فان قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى

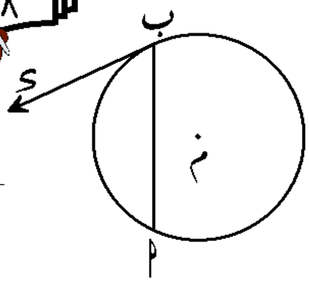
٧٠° ٣٥° ١٤٠° ٢١٠°

٢ فى الشكل المقابل : أب مماس لدائرة مركزها م عند ب ، ب جـ وتر فى الدائرة

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠° فان : ق(ب⌢جـ) = ...

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٩٠° (٤) ١٢٠°

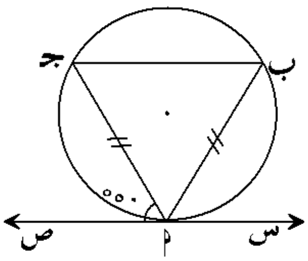




❸ فى الشكل المقابل : $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ يمس الدائرة ، ق ($\widehat{\text{أ ب}}$) = $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة

، فان : ق (∠ أ ب ء) = ...

① ٣٠° ② ٦٠° ③ ٩٠° ④ ١٢٠°

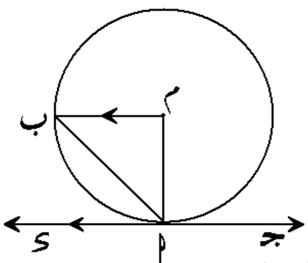


❹ فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = أ جـ ، ق(∠ ص أ جـ) = ٥٠°

، فان : ق ($\widehat{\text{ب جـ}}$) = ...

٥٠° ١٠٠° ٨٠° ١٦٠°



❺ فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{م ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ،

فان : ق(∠ ب أ ء) = ...

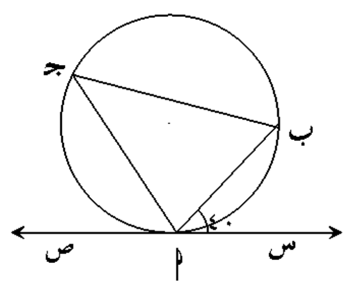
٣٠° ٤٥° ٦٠° ٩٠°

❻ $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة بحيث $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ = { ء } ،

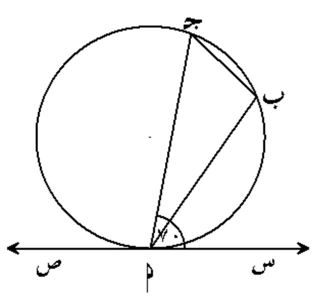
فإذا كان : أ ء = أ جـ فان ق(∠ أ ء جـ) = ...

٦٠° ١٥° ٣٠° ٤٥°

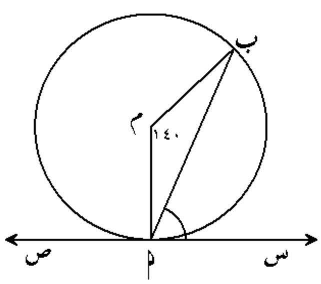
✍ [٣] فى الشكل المقابل :



احسب ق (∠ جـ)



احسب ق (∠ ب)

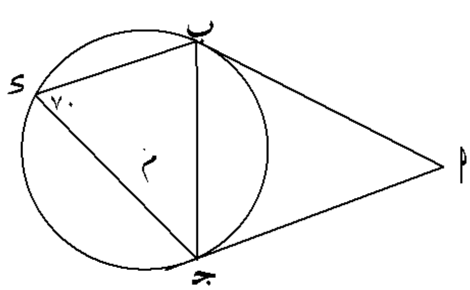


احسب ق (∠ س أ ب)

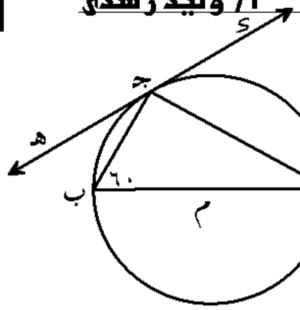
✍ [٤] فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠ ب ء جـ) = ٧٠° أوجد ق(∠ أ)



✍ (٥) فى الشكل المقابل :

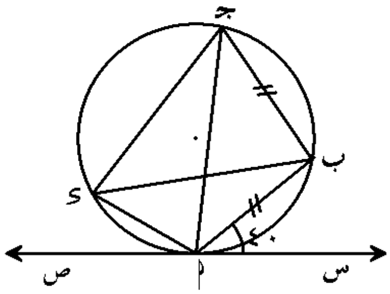


أ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ مماس للدائرة عند جـ

، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠°

أوجد ق(∠ ب جـ هـ)

✍ (٦) فى الشكل المقابل :

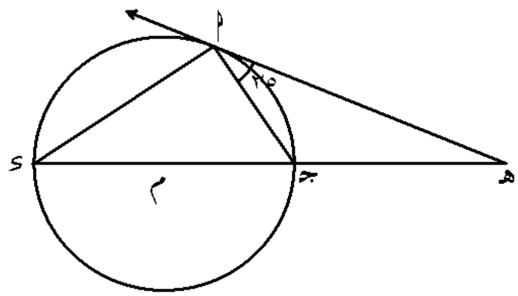


س ص مماس للدائرة عند أ

، أ ب = ب جـ ، ق(∠ س أ ب) = ٤٠°

احسب ق(∠ ء)

✍ (٧) فى الشكل المقابل :

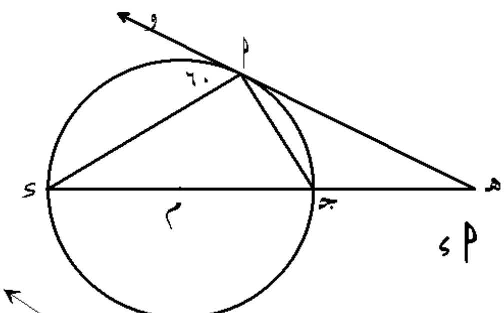


$\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ يمس الدائرة م عند أ

، ق(∠ هـ أ جـ) = ٣٥°

احسب ق(∠ أ هـ جـ)

✍ (٨) فى الشكل المقابل :

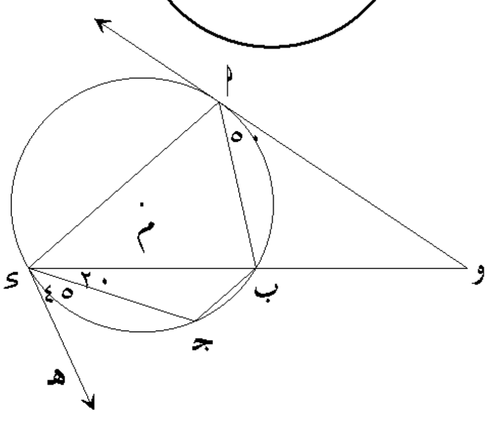


$\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ يمس الدائرة م عند أ

، ق(∠ و أ ء) = ٦٠°

اثبت أن ❶ أ جـ = جـ هـ ، ❷ أ هـ = أ ء

✍ (٩) فى الشكل المقابل :

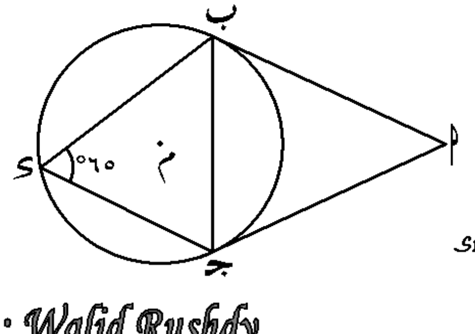


$\overleftarrow{\text{و أ}}$ يمس الدائرة م عند أ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ مماس للدائرة عند ء

، ق(∠ ب أ و) = ٥٠° ، ق(∠ هـ ء جـ) = ٤٥°

، ق(∠ ب ء جـ) = ٢٠° أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ ء

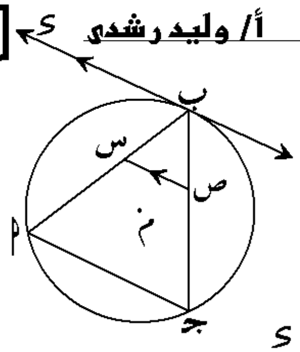
✍ (١٠) 📖 فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠ ب ء جـ) = ٦٥°

أوجد ق(∠ أ)

(١١) 📖 فى الشكل المقابل :

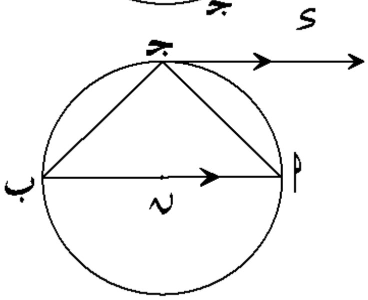


أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة ، ب ى ↔ مماس للدائرة عند ب

، س ∈ أ ب ، ص ∈ ب جـ حيث س ص // ب ى ↔

اثبت أن : الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى .

(١٢) 📖 فى الشكل المقابل :

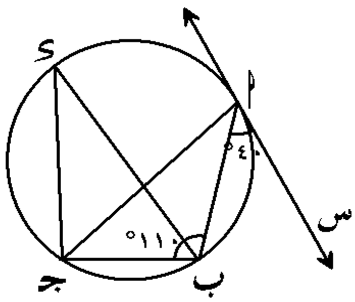


أ ب قطر فى دائرة ن محيطها ٤٤سم

، جـ ى مماس لها عند جـ ، جـ ى // ب أ

أوجد مع البرهان : ❶ ق(∠ ى جـ أ) ❷ طول ⌒ أ جـ

(١٣) فى الشكل المقابل :

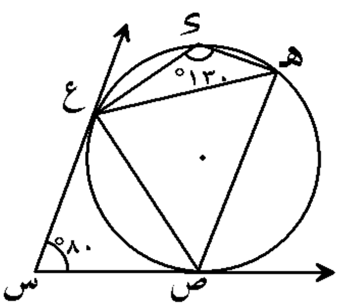


أ س ↔ مماس ، ق(∠ س أ ب) = ٤٠°

، ق(∠ أ ب جـ) = ١١٠°

أوجد : ق(∠ جـ ى ب)

(١٤) فى الشكل المقابل :

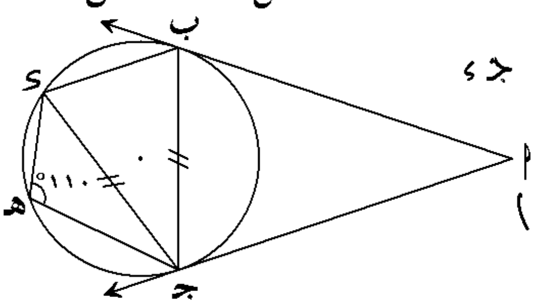


س ص ، س ع مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق(∠ ص س ع) = ٨٠° ، ق(∠ هـ ى ع) = ١٣٠°

اثبت أن : ❶ ع هـ = ع ص ❷ س ع // ص هـ

(١٥) فى الشكل المقابل :

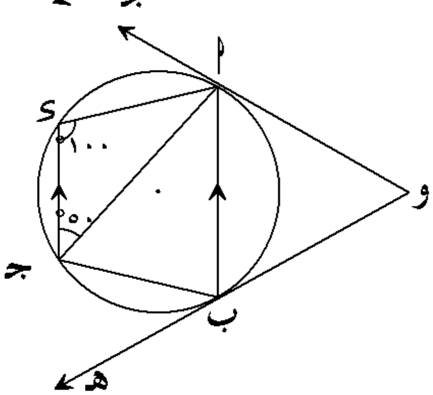


أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، إذا كان : جـ ب = جـ ى

❶ اثبت أن : ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ ى ب جـ)

❷ إذا كان : ق(∠ جـ هـ ى) = ١١٠° أوجد : ق(∠ أ)

(١٦) فى الشكل المقابل :



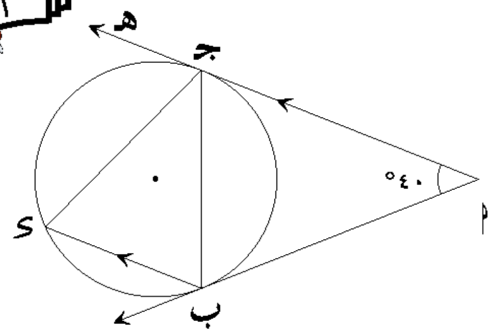
و أ ، و ب يمسان الدائرة عند أ ، ب ، أ ب // جـ ى

، ق(∠ أ ى جـ) = ١٠٠° ، ق(∠ أ جـ ى) = ٥٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ ب جـ) ❷ ق(∠ جـ ب هـ)

❸ ق(∠ أ و ب)

✍ (١٧) فى الشكل المقابل :



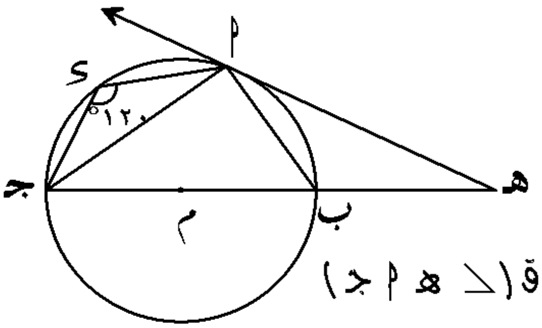
أب ، أجـ يمسان الدائرة عند ب، جـ

، أجـ // ب ء ، ق(∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ جـ ب) ❷ ق(∠ هـ جـ ء)

❸ اثبت أن : ب جـ = ء جـ

✍ (١٨) 📖 فى الشكل المقابل :

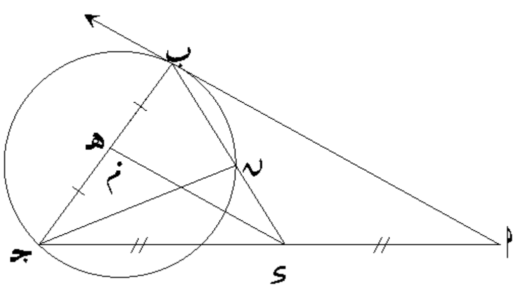


هـ أ مماس للدائرة م ، سم هـ م يقطع الدائرة فى ب ، جـ

، ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٠°

اثبت أن : ❶ أ ب = ب هـ ❷ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ هـ أ جـ)

✍ (١٩) 📖 فى الشكل المقابل :

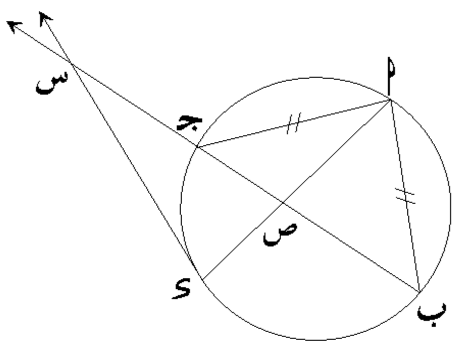


أ ب مماس للدائرة م ، أ جـ قاطع لها ،

ء منتصف أ جـ ، هـ منتصف ب جـ ،

اثبت أن : ❶ أ ب // ء هـ

❷ النقط ن ، ء ، جـ ، هـ يمر بها دائرة واحدة .

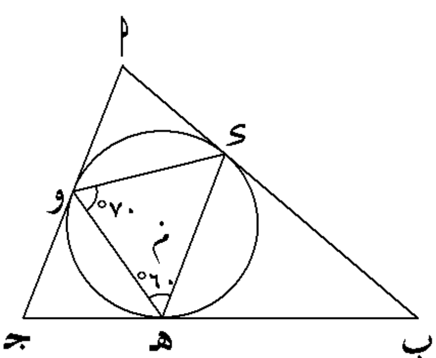


✍ (٢٠) 📖 فى الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب = أ جـ

، ء ∈ ب جـ ، سم ء س مماس للدائرة عند ء

اثبت أن : س ص = س ء



✍ (٢١) فى الشكل المقابل :

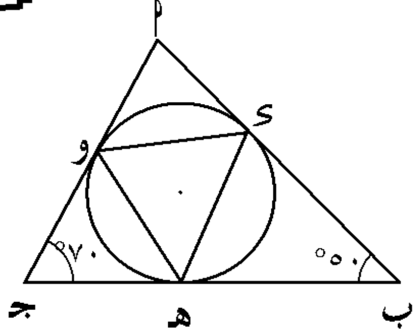
أ ب جـ Δ ، الدائرة الداخلة له تمس أضلاعه

أ ب ، ب جـ ، أ جـ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

فإذا كان : ق(∠ ء هـ و) = ٦٠° ، ق(∠ هـ و ء) = ٧٠°

فأوجد قياسات زواياه Δ أ ب جـ

✍ (٢٢) في الشكل المقابل :

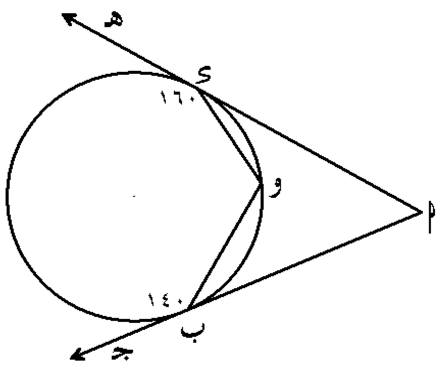


أ ب جـ △ رسمت الدائرة م الداخلة تمس أضلاعه أ ب ، أ جـ ، ب جـ

في ء ، و ، هـ على الترتيب بحيث ق(∠ ب) = ٥٠°

، ق(∠ جـ) = ٧٠° احسب قياسات زوايا △ ء و هـ

✍ (٢٣) في الشكل المقابل :

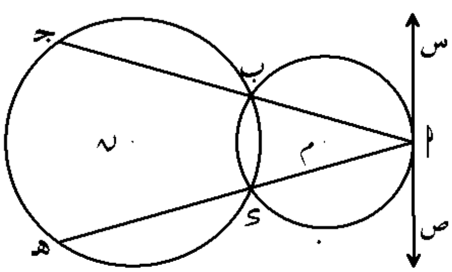


أ جـ ، أ هـ مماسان يمسان الدائرة م في ب ، ء على الترتيب

وكانت و ∈ ب ء بحيث ق(∠ جـ ب و) = ١٤٠°

، ق(∠ هـ ء و) = ١٦٠° احسب ق(∠ ب و ء) ، ق(∠ ب أ ء)

✍ (٢٤) في الشكل المقابل :

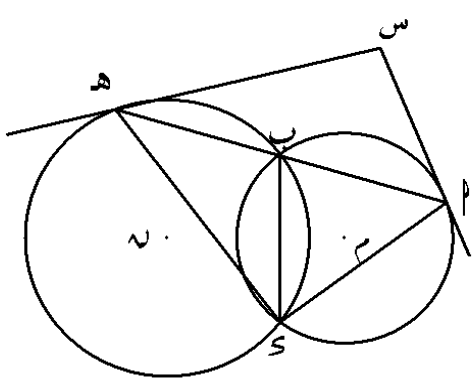


دائرتان م ، ن متقاطعتان في ب ، ء ، رسم أ ب يقطع الدائرة ن في جـ ،

رسم أ ء يقطع الدائرة ن في هـ فاذا كان أ جـ = أ هـ

اثبت أن أ ب = أ ء

✍ (٢٥) في الشكل المقابل :

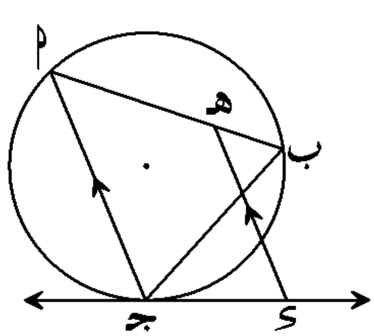


دائرتان م ، ن متقاطعتان في ب ، ء رسم أ ب يقطع الدائرة ن في هـ ،

رسم المماسان أ س ، هـ س يتقاطعان في س

اثبت أن الشكل هـ س أ ء رباعي دائري

✍ (٢٦) في الشكل المقابل :

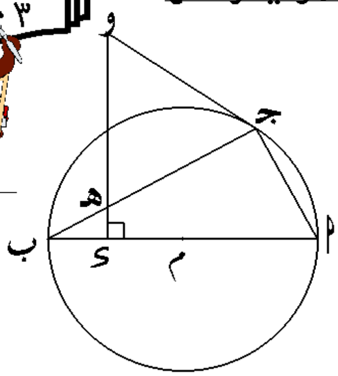


أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة ، جـ ء مماس للدائرة عند جـ

، رسم ء هـ // أ جـ قطع أ ب في هـ

اثبت أن : ب هـ جـ ء شكل رباعي دائري .

✍ (٢٧) فى الشكل المقابل :



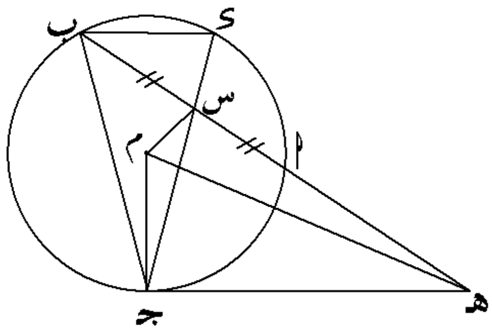
أ ب قطر فى نصف دائرة ، جـ و مماس لها عند جـ ، ء و ⊥ أ ب

اثبت أن : ❶ الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى

❷ Δ و جـ هـ متساوى الساقين

❸ عين مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل أ ء هـ جـ

✍ (٢٨) فى الشكل المقابل :

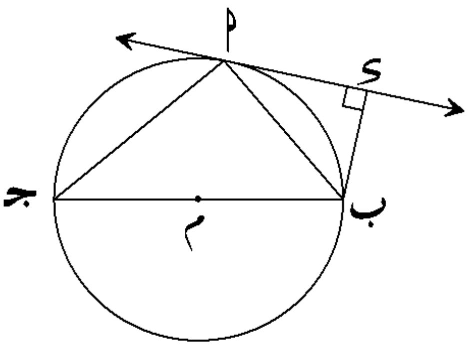


هـ جـ قطعة مماسه للدائرة م عند جـ ، س منتصف أ ب

اثبت أن : ❶ الشكل هـ جـ م س رباعى دائرى

❷ ق(∠ هـ م س) = ق(∠ جـ ب ء)

✍ (٢٩) فى الشكل المقابل :

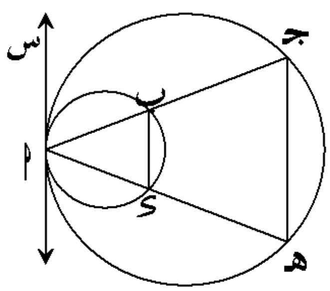


أ ء مماس للدائرة م عند أ

، ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب ء ⊥ أ ء

اثبت أن : ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ب جـ)

✍ (٣٠) 📖 فى الشكل المقابل :



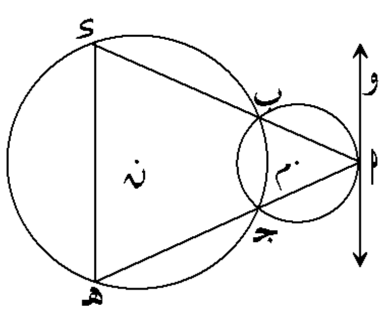
دائرتان متماستان من الداخل فى أ ،

أ س مماس مشترك لهما عند أ ، أ ب ، أ ء يقطعان الدائرة الصغرى

فى ب ، ء ويقطعان الدائرة الكبرى جـ ، هـ

اثبت أن : ء ب // هـ جـ

✍ (٣١) فى الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان فى ب ، جـ ، أ ∈ إحدى الدائرتين

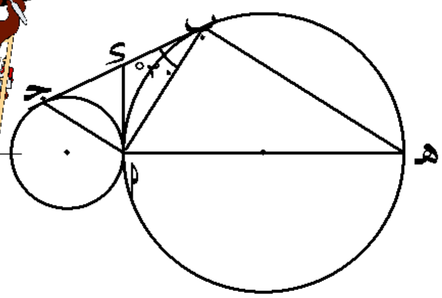
، رسم أ و مماس لها عند أ ثم رسم أ ب

، أ جـ يقطعان الدائرة الأخرى فى ء ، هـ

اثبت أن : أ و // ء هـ

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

(٣٢) فى الشكل المقابل :



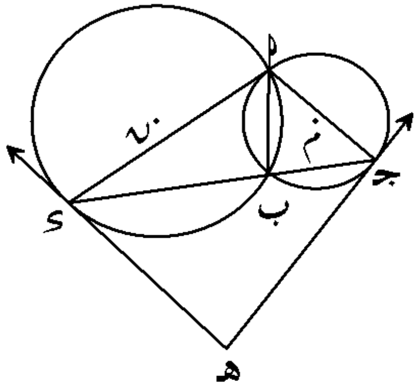
دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ مماس مشترك لهما ب، جـ

، رسم $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس مشترك لهم فى أ فقطع $\overline{\text{بجـ}}$ فى د

فإذا كان : ق(∠ أ ب جـ) = ٣٠°

أوجد : ❶ ق(∠ ب جـ أ) ❷ ق(∠ ب هـ أ)

(٣٣) فى الشكل المقابل :



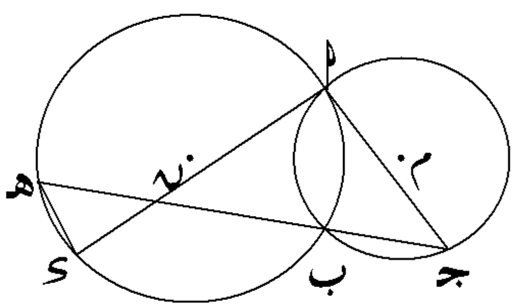
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، ب ∈ $\overline{\text{دجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـد}}$ مماسان

اثبت أن : ق(∠ هـ جـ د) + ق(∠ هـ د جـ) = ق(∠ جـ أ د)

الشكل أ جـ هـ د رباعي دائري .

(٣٤) فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطعة مماسه للدائرة ن

ويقطع الدائرة م فى جـ ، $\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسه للدائرة م

، وتقطع الدائرة ن فى د ، $\overrightarrow{\text{جـب}}$ يقطع الدائرة ن فى هـ

اثبت أن : $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$

(٣٥)

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماسا للدائرة الأولى فقطع الدائرة الثانية فى جـ ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{بد}}$ مماسا للدائرة الثانية ويقطع الدائرة الأولى فى د اثبت أن : $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{جـب}}$

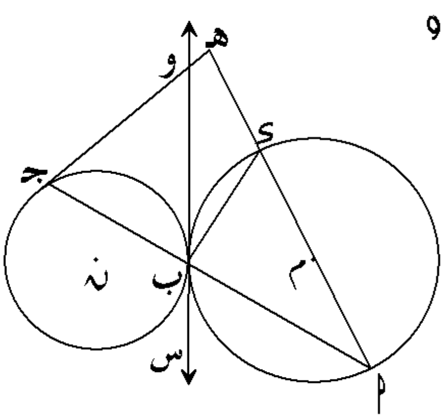
(٣٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ب ، جـ ∈ الدائرة ن ، $\overline{\text{جـهـ}}$ مماسة للدائرة ن عند جـ ، $\overline{\text{أد}}$ قطر فى الدائرة م ، المماس المشترك للدائرتين عند ب يقطع $\overline{\text{جـهـ}}$ فى و

اثبت أن : ❶ ق(∠ و ب جـ) = ق(∠ و جـ ب)

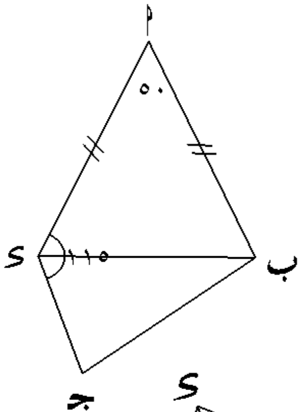
❷ الشكل ب د هـ جـ رباعي دائري

❸ $\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{هـجـ}}$



تمارين على عكس الزاوية المماسية

(١) فى الشكل المقابل :

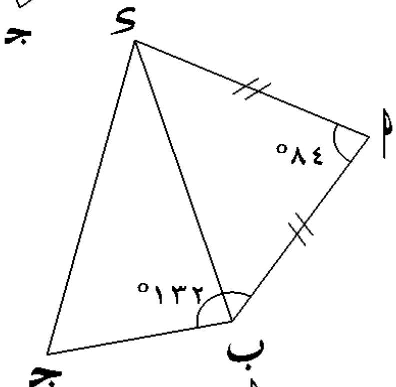


أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق(∠ أ) = ٥٠°

، ق(∠ أ ء جـ) = ١١٥°

، أ ب = أ ء اثبت أن ء جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

(٢) فى الشكل المقابل :

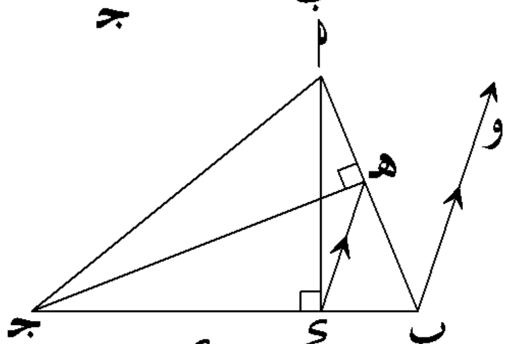


أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء ،

ق(∠ أ) = ٨٤° ، ق(∠ أ ب جـ) = ١٣٢°

اثبت أن : ب جـ مماسه للدائرة المارة بالنقطة أ ، ب ، ء

(٣) فى الشكل المقابل :

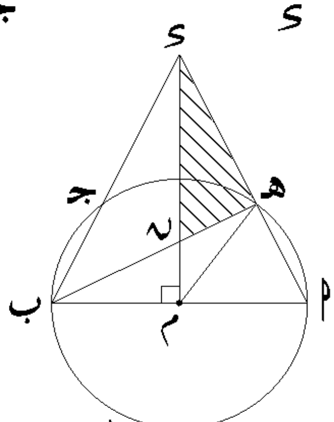


△ أ ب جـ ، رسم أ ء ⊥ ب جـ يقطعه فى ء

، رسم جـ هـ ⊥ أ ب يقطعه فى هـ ثم رسم ب و // ء هـ

اثبت أن : ب و مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ

(٤) فى الشكل المقابل :



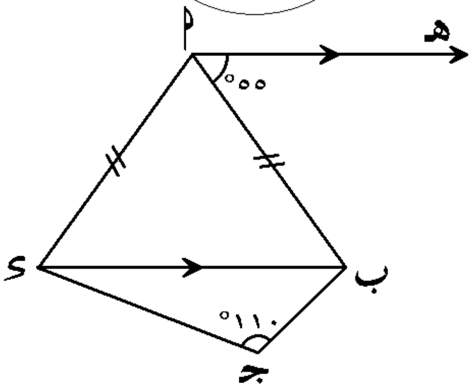
أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، م جـ ⊥ أ ب ، ء ∈ م جـ

، أ ء ∩ الدائرة م = { هـ } ، ب هـ ∩ م جـ = { ن }

اثبت أن : الشكل ء هـ م ب رباعى دائرى .

هـ م مماس للدائرة المارة برؤوس △ ن ء هـ

(٥) فى الشكل المقابل :



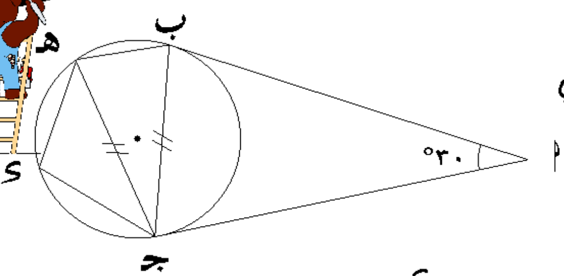
أ هـ // ء ب ، ق(∠ ب أ هـ) = ٥٥° ، ق(∠ جـ) = ١١٠°

، أ ب = أ ء اثبت أن :

❶ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى .

❷ أ هـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

(٦) في الشكل المقابل :



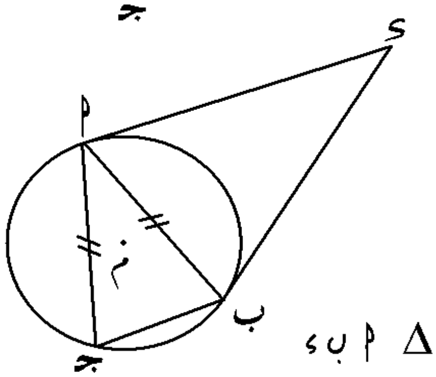
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب

، ق(∠ أ) = ٣٠° ، جـ ب = جـ هـ

أثبت أن : ❶ ب هـ // أ جـ ❷ ق(∠ جـ د هـ)

❸ جـ هـ مماسه للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

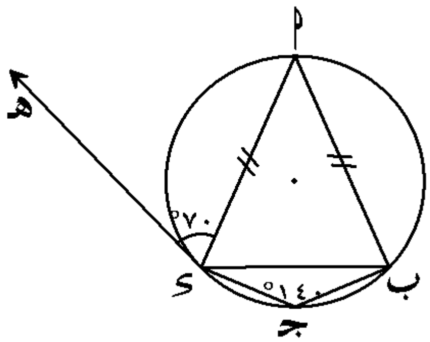
(٧) في الشكل المقابل :



د أ ، د ب قطعتان مماستان للدائرة م ،عند أ ، ب ، جـ ∈ الدائرة م

بحيث أ ب = أ جـ أثبت أن : أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب د

(٨) في الشكل المقابل :



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه

: أ ب = أ د ، ق(∠ جـ) = ١٤٠° ، ق(∠ أ د هـ) = ٧٠°

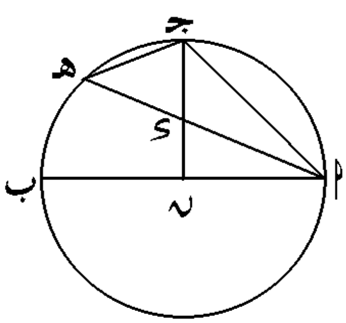
أثبت أن : د هـ مماس للدائرة عند د

(٩)

أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، هـ أ ، هـ ب مماسان للدائرة عند أ ، ب فإذا كان : ق(∠ أ هـ ب) = ٧٠° ، ق(∠ أ د جـ) = ١٢٥°

أثبت أن : ❶ أ ب = أ جـ ❷ أ جـ مماسا للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ

(١٠) في الشكل المقابل :

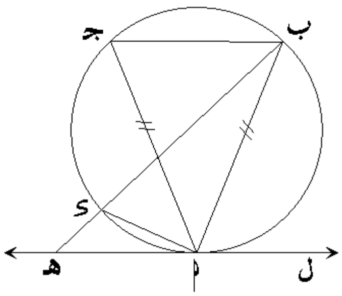


أ ب قطر فى الدائرة ن ، ن جـ ⊥ أ ب ، د ∈ ن جـ

، رسم أ د فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن أ جـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث جـ د هـ

(١١) في الشكل المقابل :

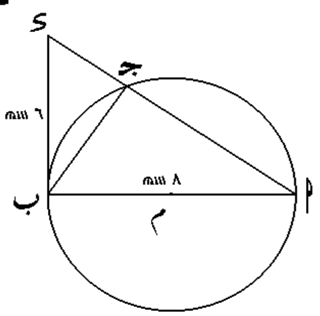


أ ب = أ جـ ، هـ ل مماس للدائرة عند أ

أثبت أن : ق(∠ ل أ ب) = ق(∠ أ ب جـ)

أ جـ مماس للدارة المارة برؤوس Δ أ د هـ

(١٢) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ب = ٨سم ، أ جـ وتر فيها

رسم ب ء مماس للدائرة يقطع أ جـ فى ء فإذا كان : ب ء = ٦سم

❶ اثبت أن : أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ جـ ب ء

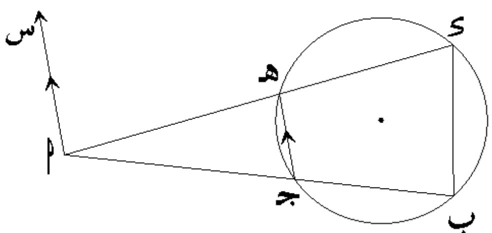
❷ أوجد : طول ب جـ

(١٣) أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ وتر فيها ، هـ منتصف أ جـ ، رسم ب ء مماسا للدائرة عند ب ويقطع أ جـ فى ء ، رسم هـ م يقطع الدائرة فى س

اثبت أن ❶ الشكل م هـ ء ب رباعى دائرى ❷ أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ب جـ ء

$$ق(\angle ب أ س) = \frac{1}{2} ق(\angle ء)$$

(١٤) فى الشكل المقابل :



الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى ، ء هـ ∩ ب جـ = {أ}

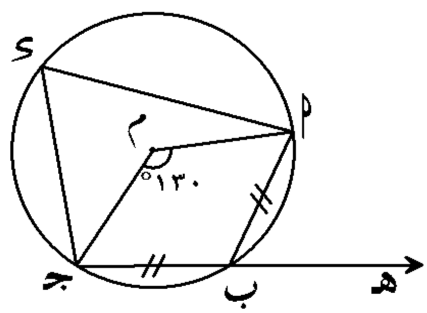
، أ س // جـ هـ

اثبت أن : أ س مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

(١٥) أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة يحصران زاوية حادة حيث ء منتصف ب جـ ، رسم ب س مماس للدائرة عند ب قطع أ ء فى س ، ب ء ∩ أ جـ = {ص}

اثبت أن : ❶ الشكل أ ب س ص رباعى دائرى ❷ س ص مماسا للدائرة الخارجة Δ أ ء ص

(١٦) فى الشكل المقابل :

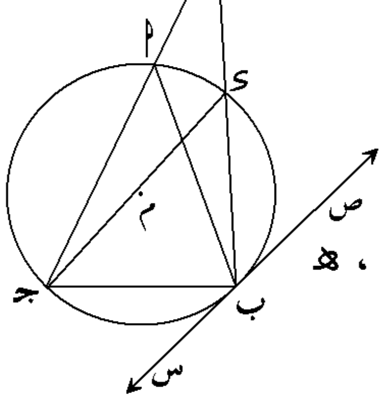


إذا كان : ق(∠ أ م جـ) = ١٣٠°

، أوجد : ق(∠ ء) ، ق(∠ أ ب هـ)

اثبت أن : جـ هـ يمس الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، م

(١٧) فى الشكل المقابل :

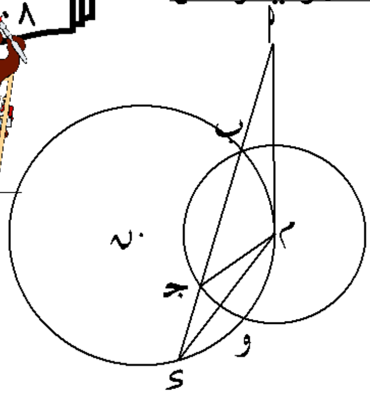


الدائر م خارجة عن Δ أ ب جـ الذى فيه :

أ ب = ب جـ ، ب ء يقطع الدائرة فى ء ، س ص مماس للدائرة عند ب

اثبت أن : ❶ ب س // جـ هـ ❷ ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط جـ ، ء ، هـ

(١٨) في الشكل المقابل :

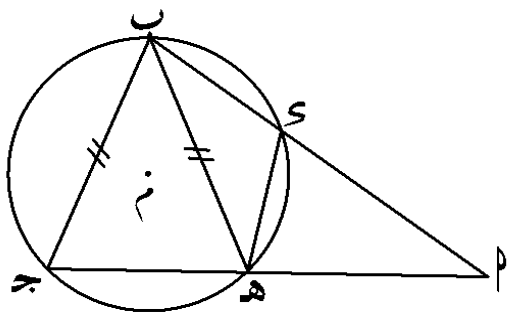


م ، ن دائرتان متقاطعتان في ب ، و ، م (مركز إحداهما) يقع على الدائرة ن

، أ م قطعة مماسة للدائرة ن

اثبت أن : م ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، م ، جـ

(١٩) في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج دائرة م ، أ ء يقطع الدائرة في ء ، ب

، أ هـ يقطع الدائرة في هـ ، جـ ، ثم رسم ء جـ ، ء هـ

فإذا كان : ب هـ = ب جـ

اثبت أن : ب هـ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ء هـ

(٢٠) Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، نقطة ء ∈ ب جـ حيث أ جـ = أ ء رسم ء هـ ⊥ ب جـ

قطع أ ب في هـ أ ء قطعة مماسية للدائرة المارة بالنقط ب ، ء ، هـ

(٢١) أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه في هـ ، رسم س ص مماسا للدائرة عند

جـ حيث س ص // ب ء

❶ اثبت أن : أ جـ ينصف ب أ ء ❷ ب جـ يمس الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب هـ

(٢٢) أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة ، أ ء مماس للدائرة عند أ ، س ∈ أ ب

، ص ∈ أ جـ حيث س ص // ب جـ ، اثبت أن : أ ء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ س ص

(٢٣) أ ب قطر في الدائرة م، جـ ∈ الدائرة م ، رسم جـ س ⊥ أ ب حيث جـ س ∩ أ ب = { س }

اثبت أن : أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ب س جـ

(٢٤) أ ب قطر في دائرة م ، س ∈ أ ب . رسم س جـ ⊥ أ ب قطع الدائرة في جـ ثم أخذت ء ∈ س جـ

ورسم أ ء قطع الدائرة في هـ **اثبت أن** : أ جـ قطعة مماسية للدائرة المارة بالنقط جـ ، ء ، هـ