بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة سنار

كلية التربية

قسم الفيزياء والرياضيات

الفصل الدراسي الرابع عام

محاضرات في /

النظرية الكهرومغناطيسية

اعداد أ /

الصديق محمد سليمان

2015م

بسم الله الرحمن الرحيم

النظرية الكهرومغناطيسية

من دراسة الكهروستاتيكية السابقة عرفنا أن القوة الكهروستاتيكية تحسب بعلاقة كولم:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_\circ r^2} \quad \rightarrow \quad (1)$$

حيث K تمثل ثابت كلوم وفي الفراغ يحسب بدلالة سما حية الفراغ $\epsilon_\circ = 8.85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ} = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$$

والمجال الكهربي لشحنة نقطية في الفراغ يحسب بالعلاقة

$$E = \frac{KQ}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ r^2} = \frac{F}{Q} \quad (N/C)$$

وبصورة عامة يكتب المجال بـــ

$$E = \lim_{Q\rightarrow 0} {}^{F_a}/_{Q}$$

أما الجهد لشحنة في الفراغ فيكتب بالصورة

$$V(r) = Er = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ r}$$

وأيضا العلاقة بين المجال الكهربي والجهد الكهربي تكون

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ r}\right) = -\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ r^2}\right) = -E$$

$$E = -\frac{dV(r)}{dr}$$

وكثافة الفيض الكهربي تكون من قانون جاوس في الصورة

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \rightarrow \quad D = \epsilon_\circ E$$

وكذلك كثافة التيار تحسب من علاقة جاوس في الصورة

$$J = \frac{dI}{dr} = \frac{dV\sigma}{dr} = \sigma \frac{dV}{dr} = \sigma E$$ حيث σ تمثل الموصلية

$$J = \sigma E = I/A = nev \quad \rightarrow \quad divJ = 0 \rightarrow (2)$$

ومن قوانين المغناطيسية نجد أن

$$F = \frac{\mu_\circ P_1 P_2}{4\pi r^2} \rightarrow (3)$$

حيث P_1, P_2 تمثل شدة كل من القطبين و$\mu_\circ$ تمثل النفاذية المغناطيسية وفي الفراغ

$$\mu_\circ = 4\pi \times 10^{-7} N/Amp^2$$

وتكون كثافة الفيض المغناطيسي في الفراغ على الصورة

$$B = \frac{\mu_\circ P}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad H = {}^{B}/_{\mu_\circ}$$

مثال (1)

موصل مقطعه $10cm$ تسري فيه شحنة بسرعة الضوء فإذا كان عدد الالكترونات التي تعبر في الثانية 10^{11} إلكترون جد كثافة التيار فيه إذا كانت شحنة الإلكترون $1.6 \times 10^{-19} C$ ثم جد مقدار التيار وقيمة المجال له إذا كانت موصليته 5.8×10^7

$$J = nev = 10^{11} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8 = 4.8\, Amp/m^2$$

$$I = JA = 4.8 \times 0.1 = 0.48 Amp$$

$$E = J/\sigma = \frac{0.48}{5.8 \times 10^7} = 0.08 \times 10^{-7}$$

تنبيه: من المتطابقات المتجهية نجد

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad \rightarrow (1)$$

$$\nabla . \varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = div\varphi \quad \rightarrow (2)$$

$$\nabla \times \varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \nabla \times \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)\hat{k} \rightarrow (3)$$

قوانين الأثر المغناطيسي للتيار الكهربي (الكهرومغناطيسية):

دع انه لدينا تيار كهربي يمر في موصل مستقيم به شحنة q وعدد الجسيمات الحاملة n , وإذا أخذنا وحدة طول صغيرة جدا dl حتما هذا التيار يولد مجالا مغنطيسيا :

وتكون القوة الكاملة المؤثرة علي الدائرة الكهربية في الموصل علي طول dl

$$\Delta F = IB\Delta L \sin\theta = IB \times \Delta L$$

وكحالة خاصة عندما يكون التيار عمودي علي المجال $(\theta = 90)$ هذا معناه أن القوة تأخذ أقصى قيمة لها:

$$\Delta F = IB\Delta L \sin 90 = IB\Delta L$$

وأيضا عندما يكون التيار مواز للمجال فان $(\theta = 0)$ وتكون عندها $F = 0$

$$\Delta F = IB\Delta L \sin 0 = 0$$

ولحساب القوة الكهربية على طول السلك (الموصل) فان:

$$dF = IB \times dL$$

ثم نجري التكامل $\int dF = \int I\, dL \times B$

ومن الشكل نجد أن كثافة الفيض المغناطيسي تتناسب طرديا مع التيار وعنصر الطول dL و $sino$ وعكسيا مع مربع بعد النقطة عن الموصل r

$$dB = \frac{k_m IdL \sin\theta}{r^2}$$

أما كثافة الفيض الكلية علي طول الجزء المقتطع من الموصل

$$B = \sum \frac{\mu I \Delta L \sin\theta}{4\pi r^2}$$

وبتحويل المجموع إلى تكامل نجد معادلة بايوت وسافارت المستنتجة لسلك مستقيم

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{IdL \times \vec{r}}{r^2}$$

معادلة الاستمرارية:

دع أنه لدينا وسط يحتوي على أكثر من نوع من ناقلات الشحنة فان:

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qNv.n\delta tda}{\delta t} = Nqv.nda$$

$$dI = \sum_{i=0}^{\infty} [N_i q_i v_i] nda$$

حيث $J = \sum [N_i q_i v_i]$

ومنها نجد $dI = J.nda$

وتؤول قيمة التيار المار خلال سطح s إلي الصيغة الاتية

$$I = -\int_s J.nda$$

وباستخدام نظرية التباعد $\oint_s Fn.da = \int_v divFdv$

$$\rightarrow I = -\int_{s} J.nda = -\int_{v} divJdv \quad \rightarrow (*)$$

لكن من معادلة التيار أيضا

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{v} \rho dv = \int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \rightarrow \quad (**)$$

وبمساواة المعادلتين (*)و(**) نجد

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\, divJ \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \, divJ = 0$$

والمعادلة السابقة تسمى بمعادلة الاستمرارية

معادلات ماكسويل

قانون جاوس:

إن المجال الكهربي الناتج عن شحنة نقطية q واقعة في نقطة الأصل عند نقطة محددة بالمتجه r يساوي

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{r}{r^3}$$

وبالتكامل السطحي لسطح مغلق يحيط بالشحنة نحصل على

$$\oint_s En.da = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ}\int \frac{r}{r^3}n.da$$

$$\rightarrow \oint_s En.da = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ}(4\pi) = \frac{q}{\epsilon_\circ}$$

لأن الزاوية المواجهة للمساحة da التي تقع على السطح الكروي S

$$\int \frac{r}{r^3}n.da = 4\pi$$

وإذا كان السطح المغلق به عدد من الشحنات يكون لديها:

$$\oint_s En.da = \frac{1}{\epsilon_\circ}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\epsilon_\circ}\int_v \rho dv \rightarrow \quad (1)$$

وباستخدام نظرية التباعد $\oint_s Fn.da = \int_v divFdv$

ومنها يمكن التعبير عن قانون جاوس بالصيغة

$$\oint_s En.da = \int_v divEdv \rightarrow (2)$$

وبمساواة المعادلتين (1) و(2)نجد

$$\int_v divE dv = \frac{1}{\epsilon_\circ}\int_v \rho dv$$

$$divE = \frac{1}{\epsilon_\circ}\rho$$

لكن $D = \epsilon_\circ E$ ومنها نجد $divD = \epsilon_\circ \; divE$

$$\rightarrow \quad divD = \rho \quad \rightarrow \quad (1*)$$

وهي إحدى معادلات ماكسويل التفاضلية

الفيض المغناطيسي:

لقد وجد فراداي تجريبيا أن الحث الكهرومغناطيسي (القوة الدافعة الكهربية المتولدة من مغناطيس) تعطى بالعلاقة

$$\exists = -\frac{d\emptyset}{dt} \qquad \& \qquad \exists = \oint E.dl$$

$$B = \frac{d\emptyset}{dA} \rightarrow \quad \emptyset = \int B.nda \quad \rightarrow \exists = -\frac{d\emptyset}{dt} = -\frac{d}{dt}\int B.nda$$

$$\rightarrow \oint E.dl = -\frac{d}{dt}\int B.nda$$

$$\oint F.dl = \int curlF.nda \qquad \text{ومن نظرية استوكس}$$

$$\rightarrow \oint E.dl = \int curlE.nda$$

$$\rightarrow \int curlE.nda = -\int \frac{\partial B}{\partial t}.nda$$

$$\rightarrow curlE = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \rightarrow (2*)$$

وهي تمثل معادلة ماكسويل التفاضلية الثانية

كثافة الفيض المغناطيسي :

بعد أن أكتشف أورستد أن التيارات تولد مجالات كهربية ومغناطيسية وضع أمبير نتائج لتجارب معملية كثيرة استفاد منها بايوت وسافارت في وضع علاقة كثافة الفيض المغناطيسي فمثلا بالنسبة لعنصر سلك متناهي الصغر dl ويحمل تيارا I فإن كثافة الفيض عند نقطة تبعد عنه r تتناسب طرديا مع التيار وعنصر الطول و $sin\theta$ وعكسيا مع مربع المسافة بين النقطة وعنصر الطول

$$B \propto \frac{\mu_\circ Idl \sin\theta}{4\pi r^2} \rightarrow \quad B = \frac{k_m Idl \sin\theta}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\oint \frac{Idl \times \underline{r}}{r^3}$$

وبالنسبة لدائرتين كهربيتين يولدان مجالان مغناطيسيان تصبح العلاقة السابقة وبأخذ مجموع كثافات الفيض لكل عنصر طول dL :

$$B(r) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\oint IdL \times \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}$$

والتوزيع المتصل للتيار لكل وحدة طول هو الكثافة $J(r)$ لكل وحدة حجم:

$$B(r) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_v J(r_1) \times \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} dv$$

$$\rightarrow divB(r) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_v div\left(J(r_1) \times \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}\right) dv$$

ومن المتطابقات المتجهية

$$div(A \times B) = -A.curlB + B.curlA$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_v -\left[J(r_1)curl\frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} + \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}.curlJ(r)\right] dv$$

لكن دائما $\mathrm{curl}\ J = 0$

$$\rightarrow divB(r) = \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_v -J(r_1)curl\frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} dv$$

لكن الكمية $\frac{(r_2-r_1)}{|r_2-r_1|^3}$ هي ميل الكمية $\frac{-1}{(r_2-r_1)}$ وبما أن إلتفاف أي ميل يساوي صفر نجد

$$divB(r) = 0 \quad \rightarrow (3*)$$

وهي تمثل معادلة ماكسويل التفاضلية الثالثة وهي تعني ضمنا أنه لا يمكن وجود قطب مغناطيسي منفرد

وأيضا من دراسة المغناطيسية وجدنا أن كثافة الفيض المغناطيسي تعطى بالعلاقة

$$B = {}^{\emptyset}/_{A} \rightarrow \frac{d\emptyset}{dA} = B \quad \rightarrow \emptyset = \oint_{s} Bn.da$$

ومن نظرية التباعد نجد $\rightarrow \ \emptyset = \int_{v} divBdv = 0$

إذا الفيض المغناطيسي خلال سطح مغلق يساوي صفرا ومنها يثبت أن الفيض المغناطيسي خلال دائرة كهربية لا يعتمد على السطح المستخدم

قانون أمبير وتيار الإزاحة :

من معادلة كثافة الفيض المغناطيسي

$$B(r) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_v \; J(r_1) \times \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} dv$$

وبأخذ التفاف المعادلة أعلاه وهي تتضمن أخذ التفاضل بالنسبة للمتجه r ولهذا ينحصر تأثير هذه العلمية على العامل

$$(r_2 - r_1)/|r_2 - r_1|^3$$

وواضح أن اخذ التفاضل بالنسبة لـ r يمكن استبداله بالنسبة للمتجه r على أن توضع إشارة سالب وحال إجراء هذا التغير في أخذ المشتقة يصبح بوسعنا إستخدام طريقة التكامل بالتجزيئة لنقل المشتقة الى عامل J(r) في حد واحد حيث تظهر علي شكل divJ(r) وبهذا تتلاشى قيمة التكامل للحد الأول أما تكامل الحد الثاني فيؤول إلي الأتي:

$$curlB = \mu_\circ J(r) \;\rightarrow\; (*)$$

وهذه المعادلة تمثل الصيغة التفاضلية لقانون أمبير ولكي تشمل جميع أنواع التيارات التي يمكنها أن تكون مجالا مغناطيسيا ويمكن أن تكتب هذه المعادلة في الصيغة

$$curlB = \mu_\circ(J + J_m)$$

لكن $J_m = curlM$

حيث M تمثل عامل التمغنط

$$\rightarrow curlB = \mu_\circ J + \mu_\circ curlM$$

$$curl\left(\frac{1}{\mu_\circ}B - M\right) = J$$

لكن شدة المجال المغناطيسي H

$$\left(\frac{1}{\mu_\circ}B - M\right) = H \rightarrow curlH = J$$

وبالرجوع للمعادلة (*) وباستخدام نظرية ستوكس

$$\int_{s} curlB \, . nda = \oint_{c} B \, . dL$$

وبالتعويض عن $curlB$ ينتج $\oint_{c} B \, . dL = \mu_{\circ} \int_{s} J \, . nda$

$\oint_{c} H \, . dL = \int_{s} J \, . nda \quad \rightarrow$ لكن $B/\mu_{\circ} = H$

حيث J تمثل كثافة التيار وnda عدد الجسيمات المشحونة لكل وحدة سطح وH شدة المجال المغناطيسي وبتطبيق قانون أمبير للدائرة للمنحنى المغلق والسطح S

$$\oint_{c} H \, . dL = \int_{s} J \, . nda = I$$

السطحان $S_1 ,_2$ يمثلان سطحا مغلقا (يلتقيان عند المنحني c)

يمكن أن نكتب المعادلة في الصيغة الآتية:

$$\int_{s_2} J \, . n_2 da + \int_{s_1} J \, . n_1 da \neq 0$$

$$\oint_{s_1 + s_2} J . nda \neq 0$$

وباستبدال $J = divJ$ حيث J متلاشي الأبعاد . لكن

$$divJ = \frac{\partial}{\partial x} \acute{J} \, \hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} J \, \hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} J \, \widehat{k} = 0$$

ومن التباعد $\oint_{s_1 + s_2} J . nda = \int_{v} divJ \; dv$

أفرض أن $(*) \rightarrow J + \alpha = \ddot{}$ وα متجها يجعلdivJ يساوي صفر

$$div\ddot{J} = divJ + div\alpha$$

ومن قانون الاستمرارية (حفظ الشحنة) يمكن استبدال

$$divJ = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

وبهذا يكون $div\ddot{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\alpha$

لكن كثافة الشحنة ترتبط بالإزاحة الكهربية بالعلاقة الآتية

$$divD = \rho \quad \rightarrow \quad div\ddot{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\alpha = 0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\partial D}{\partial t}$$

وبالرجوع للمعادلة (*) تصير على الصيغة

$$\ddot{J} = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

لكن $\ddot{J} = curlH$

$$\rightarrow curlH = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \rightarrow \quad (*\,4)$$

والحد $\partial D/\partial t$ يطلق عليه تيار الإزاحة وهو من إضافات ماكسويل الرئسية للكهرومغناطيسية وهذه إحدى معادلات ماكسويل التي تمثل تعميما لمشاهدات تجريبية وهي تطبق لمعظم الحالات الماكروسكوبية

وتكتب في الصورة العامة

$$curlH = J_{\text{عامة}} \quad \rightarrow \quad J = J_{\text{انتقال}} + J_{\text{إزاحة}}$$

$$J = \frac{dI}{dr} = \frac{dV\sigma}{dr} = \sigma\frac{dV}{dr} = \sigma E$$

معادلة الموجة

الموجات الكهرومغناطيسية هي موجات فيها المجال الكهربي والمجال المغناطيسي متعامدان ومعامدين لاتجاه انتشار الموجة k وتنتشر هذه الموجات في الفراغ والأوساط المادية ولها قمم وقيعان مثلها مثل موجات البحر ولذلك يحسب لها طول موجي وتردد وسرعة وتردد زاوي وغيرها من المعاملات الرئيسية للموجات

المعادلة الموجية الكلاسيكية:

لحل المعادلة التفاضلية الرئيسية $\varphi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\,\omega\sin(\omega t - kx) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A\,\omega^2\sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -A\,k\sin(\omega t - kx) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = A\,k^2\sin(\omega t - kx)$$

$$\rightarrow \ \sin(\omega t - kx) = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \& \quad \sin(\omega t - kx) = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \rightarrow\rightarrow \ (*)$$

والمعادلة السابقة تسمى المعادلة العامة للموجات وتكون كتابتها لثلاثة أبعاد في الصيغة

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \rightarrow \nabla^2\varphi = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \rightarrow (**)$$

من أهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلات الموجات الكهرومغناطيسية

ومن معادلة ماكسويل الرابعة $curlH = J + \dfrac{\partial D}{\partial t}$

وبأخذ التفاف الطرفين تصبح المعادلة أعلاه في الصورة

$$curlcurlH = curlJ + curl\frac{\partial D}{\partial t}$$

لكن $(D = \epsilon E)$ و $(J = \sigma E)$ حيث σ تمثل الموصلية الكهربائية وϵ وσ تمثل مقادير ثابتة

$$curlcurlH = \sigma curlE + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} curlE$$

وبفرض أن E دالة معرفة بشكل ملائم يمكننا إستبدال رتب مشتقات الزمن والمكان وباستخدام معادلة ماكسويل الثانية

$$curlE = -\frac{\partial \; B}{\partial t}$$

$$curlcurlH = \sigma(-\frac{\partial \; B}{\partial t}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial \; B}{\partial t})$$

لكن $B = \mu H \quad \leftarrow \quad curlcurlH = -\sigma\mu \frac{\partial \; H}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \; H}{\partial t^2}$

ومن المتجهات $curlcurlA = grad \; divA - \nabla^2 A$

$$\rightarrow grad \; divH - \nabla^2 H = -\sigma\mu \frac{\partial \; H}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \; H}{\partial t^2}$$

ومن معادلة ماكسويل $divB = 0$ نجد

$$div\mu H = divB = 0 \rightarrow divH = 0$$

$$\rightarrow grad \; divH - \nabla^2 H = -\sigma\mu \frac{\partial \; H}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \; H}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 H = -\sigma\mu \frac{\partial \; H}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \; H}{\partial t^2}$$

ومعادلة الموجة النهائية تصبح $\nabla^2 H - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \; H}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \; H}{\partial t} = 0$

وبالمماثلة وباستخدام المتطابقة المتجهية

$$curlcurlA = grad \; divA - \nabla^2 A$$

يمكننا برهان أن $\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \; E}{\partial t} = 0$

تعيين معادلات الموجة المشتقة أعلاه للمجال الكهرومغناطيسي في وسط مادي منتظم وخطى حيث تكون كثافة الشحنة مساوية للصفر ، سواء كان هذا الوسط موصل أم غير موصل ولذلك فان تحقق هذه المعادلة لا يعد كافيا وإنما يجب تحقق معادلات ماكسويل ، وعند حل معادلات الموجة يجب أن نركز اهتمامنا على إيجاد حلول لمعادلات ماكسويل وإحدى الطرق التي تعد مثالا جيدا هي إيجاد الشدة المجال الكهربي لموجات أحادية الطول ألموجي مستوية

معادلة ماكسويل للفراغ :

$$curlE = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow curlE = -\mu_\circ \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$curlH = \epsilon_\circ \frac{\partial E}{\partial t} \quad \rightarrow \quad (2)$$

وبأخذ التفاف الطرفين $curlEcurlE = -\mu_\circ \frac{\partial}{\partial t} curlH$

$$curlEcurlE = -\mu_\circ \frac{\partial}{\partial t} curlH = -\epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ومن المتطابقة المتجهية $curlcurlA = grad\ divA - \nabla^2 A$

$$grad\ divE - \nabla^2 E = -\epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

وتحقق الصورة العامة $\nabla^2 E = \epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

لأن $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}} \quad \rightarrow \quad \mu_\circ \epsilon_\circ = \frac{1}{v^2}$

انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في الفضاء الحر

الموجة الكهرومغناطيسية هي عبارة عن حقل كهربي وحقل مغناطيسي متعامدان ويعامدان لاتجاه انتشار الموجة ويسيران بسرعة الضوء

وبعد اشتقاق معادلة الموجة في الصورة العامة يمكن أن نطبق معادلات ماكسويل في إيجاد معادلة الموجة في الفضاء الحر ونقصر اهتمامنا فقط في الحل في إحداثيات كارتيزية (x, y, z) فرغم ذلك يظهر أننا نحل مسائل مختلفة في هذا الدرس ويحصل على الحلول أولا في حالات فضاء حر ثم لعوازل تامة ويلي ذلك للموصلات الجيدة ونؤكد الصفات المميزة الخاصة لانتشار الموجة في هذه الاوساط .

$$\nabla \times H = \epsilon_\circ \frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow (1)$$

$$\nabla \times E = -\mu_\circ \frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow (2)$$

$$\mathrm{divD} = \rho \rightarrow \nabla . E = 0 \rightarrow (3)$$

$$\mathrm{divB} = 0 \rightarrow \nabla . H = 0 \rightarrow (4)$$

المعادلة الأولى تدل على أن (E) متغير مع الزمن و(H) له التفاف عند تلك النقطة وهذا معناه أن H أيضا تتغير مع الزمن ولدينا هنا مجال كهربي E متغير وموجود على مسافة صغيرة بعيدا عن نقطة الاضطراب الاصلي .قد نخمن أن السرعة التي يتحرك بها التأثير بعيدا عن النقطة الاصلية هي سرعة الضوء ولكن أن يحقق بفحص كمي لمعادلات ماكسويل

نفرض أن مركبة ما مثل E_x معطاه بالصورة

$$E_x = E_0 cos(\omega t + \varphi) \rightarrow (5)$$

حيث E_0 دالة حقيقية في x, y, zوربما تكون دالة فيω ولكن ليس في الزمن و φ هي زاوية الطور التي يمكن أن تكون دالة في x, y, z, φ وباستخدام متطابقة أويلر

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

ندع حلا في الصورة

$$E_x = Re E_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = Re E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

حيث Re يعني أن يؤخذ الجزء الحقيقي للكمية الثانية وبإسقاط Re وحذف $e^{j\omega t}$ تصبح كمية المجال E_x كمية مركبة والتي نميزها بـ

$$E_{xs} = E_0 e^{j\varphi}$$

وS يمكن اعتبارها دالة في التردد المركب مع إننا سنعتبر فقط تلك الحالات التي فيها s تخيلية صرفة $s = j\omega$ ومن المعادلة (5) نجد

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} E_0 cos(\omega t + \varphi) = -\omega E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= Rej\omega e^{j\omega t}$$

من الواضح أن أخذ المشتقة الجزئية لأي كمية مجال بالنسبة للزمن تكافئ ضرب الطور المقابل في $j\omega$ وكمثال إذا كانت

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_\circ} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

وتكون معادلة الطور المقابلة

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_\circ} \frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

ويمكن أن يكون كل من H_{ys}, E_{xs} كميات مركبة ولذلك إذا أعطينا معادلة ماكسويل

$$\nabla \times H = \epsilon_\circ \frac{\partial E}{\partial t}$$

تكون العلاقة المقابلة بدلالة متجهات الطور

$$\nabla \times H_s = j\omega\epsilon_\circ E_s \quad \rightarrow (8)$$

$$\nabla \times E_s = -j\omega\mu_\circ H_s \quad \rightarrow (9)$$

$$\nabla . E_s = 0 \quad \rightarrow \quad (10)$$

$$\nabla . H_s = 0 \quad \rightarrow \quad (11)$$

والطريقة التي يمكن أن نحصل بها على معادلة الموجة يمكن استنتاجها من العلاقة

$$\nabla \times \nabla \times E_s = \nabla(\nabla . E_s) - \nabla^2 E_s = -\nabla^2 E_s$$

$$\rightarrow -j\omega\mu_\circ(\nabla \times H_s) = \omega^2 \mu_\circ\epsilon_\circ E_s$$

لأن $\nabla . E_s = 0$ و$j.j = -1$ عدد تخيلي

$$\nabla^2 E_s = -\omega^2 \mu_\circ\epsilon_\circ E_s \rightarrow (12)$$

والمعادلة (12) تعرف بمعادلة هلمهولتز المتجهة وعند فكها في الإحداثيات الكارتيزية وفي اتجاه x تصبح

$$\nabla^2 E_{xs} = -\omega^2 \mu_\circ\epsilon_\circ E_{xs} \rightarrow (13)$$

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_\circ\epsilon_\circ E_{xs} \rightarrow (14)$$

ويمكن أن نحل المعادلة (14) بفرض حل بسيط يكون ممكنا E_{xs} مع x أوy حتى تكون المشتقتين المقابلتين أصفارا

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_\circ\epsilon_\circ E_{xs} \rightarrow (15)$$

ويمكن كتابة حل للمعادلة السابقة في الصورة

$$E_{xs} = Ae^{-j\omega\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}z} \rightarrow (16)$$

وبإدخال العامل $e^{j\omega t}$ واختزاله الي صورة مثلثية ثم أخذ الجزء الحقيقي نجد

$$E_x = A\cos\omega\left(t - z\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}\right) \rightarrow (17)$$

حيث يمكن استبدال عامل الاتساع الاختياري بـ E_{x0} وهي قيمة E_x عند$z = 0$ و$t = 0$

$$E_x = E_{x0}\cos\omega\left(t - z\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}\right) \rightarrow (18)$$

وقبل أن نجد أي مركبات أخرى للمجال يجب أن نفهم الطبيعة الفيزيائية للمركبة المنفردة للمجال الكهربي التي حصلنا عليها في المعادلة (17) نرى أنها مركبة في x التي يمكن وصفها على أنها متجه إلى أعلى عند سطح أرض مستوية والكمية $\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}$ لها قيمة تقريبية وهي مقلوب سرعة الضوء في فضاء حر

$$\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ} = {}^{1}\!/_{3 \times 10^8 m/s}$$

دعنا أن نسمح للمحور z في اتجاه الشرق ونأخذ $z = 0$ يكون المجال معطي

$$E_x = E_{x0} cos(\omega t)$$

والتي هي تغير بسيط ومألوف مع الزمن ،شحنة حرة (ربما في هوائي استقبال رأسي) تعجل لأعلى ولأسفل $\omega/2\pi$ من المرات في الثانية ولفحص المجال في كل مكان عند $t = 0$

$$E_x = E_{x0} cos\left(-\omega z \sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}\right) = E_{x0} cos\left(-\frac{\omega z}{c}\right)$$

وباكتشاف تغيرا دوريا مع المسافة لهذه الموجة الجيب تمامية كما تقاس على المحور z تسمى الطول الموجة

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi \ \rightarrow c = \frac{\omega \lambda}{2\pi} \ \rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$$

عند أي نقطة نجد تغير جيبيا مع الزمن له مدة $T = 1/f$ نجد تغيرا جيبيا مع المسافة له طول موجي λ ونعرف العدد ألموجي من المعادلة $K = 2\pi/\lambda$ ويكون اتجاهه معامد للمجال الكهربي والمجال المغناطيسي

$$K = \omega \sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}$$

وألان دعنا نعتبر الاستجابة عندما يغير كل من الزمن والموقع، بالتأكيد يمكننا القول أن E_x لا تتغير إذا كانت زاوية الطور $\omega(t - z\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ})$ غير متغيرة أو قيمة ثابتة

وبأخذ التفاضل $\omega\left(dt - dz\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}\right) = 0$

ولذلك نجد (19) $\frac{dz}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}} = c \rightarrow$

وهي تسمي سرعة الطور لأنها تعرف نقطة ذات طور ثابت وهنا سرعة الطور تساوي سرعة الضوء c والمجال لذلك يتحرك في اتجاه z بسرعة الضوء c ولهذا يطلق عليها موجة منطلقة

والمعادلة (18) كانت أيضا حلا لمعادلة موجتنا وتمثل بوضوح موجة منتقلة في اتجاه $z -$ (أي غربا)

وبالعودة لمعادلة ماكسويل إذا أعطيت E_x فان H_s نتحصل عليها بكل سهولة من (9)

$$\nabla \times E_s = -\,j\omega\mu_\circ H_s$$

وباعتبار مركبة E_{xs} مفردة مع z

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -\,j\omega\mu_\circ H_s$$

وباستخدام الحل في المعادلة (16) مع أن $A = E_{x0}$ نحصل على

$$E_{xs} = Ae^{-j\omega\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}\,z}$$

$$H_{ys} = -\frac{1}{j\omega\mu_\circ}E_{x0}(-j\omega\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ})e^{-j\omega\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}\,z}$$

$$\rightarrow H_y = E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_\circ}{\mu_\circ}}\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right) \rightarrow (20)$$

ولذلك نجد أن المركبة الراسية لـE المنتقلة إلى الشرق تتحقق بمجال مغناطيسي أفقي (شمال - جنوب) ونسبة لذلك شدتي المجالين الكهربي والمغناطيسي المعطاة بقسمة (18) و(20) نجد

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_{x0}\cos\omega(t - z\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ})}{E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_\circ}{\mu_\circ}}\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_\circ}{\epsilon_\circ}}$$

ومنها يمكننا القول أن E_x وH_y في طور واحد وعلاقة الطور الواحد هذه تشير الى الفراغ وكذلك إلي الزمن وكل من (18) و(20) توضح أن القيمة العظمى لأي من E_x, H_y تحدث عندما يكون $\omega(t - z/c)$ مضاعفا صحيحا لـ $2\pi\ rad$ ولايكون أي من المجالين نهاية عظمي في كل مكان عند نفس اللحظة . حينئذ إن نسبة هاتين المركبتين يجب أن تكون ثابتة في كل مكان (وتمثل المعاوقة الذاتية ووحدتها الأوم)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

والمعاوقة الذاتية للفضاء الحر $\eta_\circ = 120\pi = 377\Omega$

وهذه الموجة تسمي موجة مستوية منتظمة لأن قيمتها منتظمة خلال أي مستوي (ثابت $z=$) وهي تعني انسياب الطاقة في اتجاه z الموجب. كل من المجالين الكهربي والمغناطيسي متعامد على اتجاه الانتشار (أوكلاهما يقع في مستوى مستعرض علي اتجاه الانتشار) الموجه المستوية المنتظمة هي موجة كهرومغناطيسية مستعرضة يرمز لها بالرمز(TEM).

لا يمكن أن توجد موجة مستوية منتظمة فيزيائيا تماما لأنها تمتد إلى ما لانهاية في بعدين علي الأقل وتمثل قدرا لا نهائيا من الطاقة،المجال البعيد لهوائي إرسال مع ذلك هو أساسا موجة مستوية منتظمة في منطقة محددة ومهما كان بعد مناطق الاستقبال عن الإرسال فهي تعتبر موجة مستوية منتظمة بالقرب من الهوائي ، وإشارة الرادار المصطدمة بهدف بعيد هي أيضا موجة مستوية منتظمة تقريبا

مثال (1):

موجة مستوية ومنتظمة وسعة المجال الكهربي لها $E_{x0} = 250v/m$ وتنتشر في إتجاه z عندما كانت $E = E_x a_x$ وترددها الزاوي $\omega = 1Mrad/s$ جد

(أ)التردد (ب) الطول ألموجي (ج) الزمن الدوري (د)العدد ألموجي (ه) سعة المجال المغناطيسي H

Solution

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^6}{6.28} = 159 \times 10^3 = 159KHz$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 10^8}{1 \times 10^6} = 1.88Km$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{1 \times 10^6} = 6.28 \times 10^{-6} = 6.28\mu s$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6.28}{1.88 \times 10^3} = 0.0033$$

$$\frac{E_{x0}}{H_{y0}} = \sqrt{\frac{\mu_\circ}{\epsilon_\circ}} = \eta_\circ \rightarrow H_{y0} = \frac{E_{x0}}{\eta_\circ} = \frac{250}{377} = 0.663A/m$$

مثال (2):

ادرس الموجة المستوية المنتظمة التي ترددها $30MHz$ تنتشر في الفراغ والتي تعطى بواسطة الحقل الكهربائي التالي

$$E = 5(\hat{a}_x + \sqrt{3}\hat{a}_y)\cos\left[6\pi \times 10^{7}\mathrm{t} - 0.05\pi(3\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\mathrm{y} + 2\mathrm{z})\right]\mathrm{v/m}$$

المقصود بدراسة الموجة إيجاد التردد والطول ألموجي والعدد ألموجي وحساب الحقل المغناطيسي المرافق للحقل الكهربي

Solution

بمقارنة الموجة المعطاة بالموجة المستوية بشكل عام

$$E_x = E_{x0}\cos\omega\left(t - z\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}\right)$$

$$E = E_0\cos(\,\omega t - K.r)$$ وفي الصوره العامه

ومن المقارنة نجد

$$E_0 = 5\left(\hat{a}_x + \sqrt{3}\hat{a}_y\right) \quad \& \quad K = 0.05\pi(3\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\mathrm{y} + 2\mathrm{z})$$

ويصبح $$\vec{K}.\vec{r} = 0.05\pi\left(3\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{y} + 2\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z}\right).\left(\mathrm{x}\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{x} + \mathrm{y}\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{y} + \mathrm{z}\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z}\right)$$

$$K = \left|\vec{K}\right| = 0.05\pi\left|3\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{y} + 2\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z}\right| = 0.05\pi\sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2 + (2)^2}$$

$$K = 0.05\pi\sqrt{16} = 0.2\pi$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10m$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{10} = 30MHz$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 3 \times 10^7 = 6\pi \times 10^7\ rad/s$$

لحساب معادلة المجال المغناطيسي

$$\frac{\vec{E}_0}{\vec{H}_0} = \sqrt{\frac{\mu_\circ}{\epsilon_\circ}} = \eta_\circ = \frac{\omega\mu_\circ}{K} \qquad \rightarrow \quad \vec{H}_\circ = \frac{1}{\omega\mu_\circ}\vec{K} \times \vec{E}_\circ$$

$$\vec{H}_\circ = \frac{1}{6\pi \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}} \left[0.05\pi(3\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}} + 2\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{z}}) \times 5\left(\hat{a}_x + \sqrt{3}\hat{a}_y\right)\right]$$

$$\vec{H}_\circ = \frac{0.05 \times 5\pi}{24\pi^2} \left[(3\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}} + 2\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{z}}) \times \left(\hat{a}_x + \sqrt{3}\hat{a}_y\right)\right]$$

$$\vec{H}_\circ = \frac{0.25}{24\pi} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 3 & -\sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{96\pi}\left[a_x\left(-2\sqrt{3}\right) + a_y(2) + a_z(3\sqrt{3} + \sqrt{3})\right]$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\left(-2\sqrt{3}\right)a_x + (2)a_y + \left(4\sqrt{3}\right)a_z\right] = 0.0066(-\sqrt{3}a_x + a_y + 2\sqrt{3}a_z)$$

$$\vec{H} = H_0 \cos\left[6\pi \times 10^7 t - 0.05\pi(3\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\mathrm{y} + 2\mathrm{z})\right]$$

$$= 0.0066(-\sqrt{3}a_x + a_y + 2\sqrt{3}a_z)\cos\left[6\pi \times 10^7 t - 0.05\pi(3\mathrm{x} - \sqrt{3}\,\mathrm{y} + 2\mathrm{z})\right]$$

و H تقاس بـ A/m

الحركة الموجية في العوازل

دعنا الآن نمدد دراستنا التحليلية للموجة المستوية المنتظمة في عاذل تام (عديم الفقد) والوسط موحد الخواص ومتجانس وتكون معادلتنا (12) في الصورة

$$\nabla^2 E = -\omega^2 \mu \epsilon E \rightarrow (1)$$

بالنسبة لـ E مع x أو y تكون المشتقتين المقابلتين أصفارا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \mathrm{z}^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_x \rightarrow (2)$$

دعنا نفرض حل أكثر تعميما ونستخدم (2) لتحديد قيم مناسبة لعوامل الموجة (ω, f, λ) المفترضة ونفرض حلا أسيا في الصورة

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z)$$

أو ما يكافئها من معادلة أويلر الآسية

$$e^{-j\beta z} = cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = E_{x0} e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

العامل الآسي الحقيقي يسمح لنا أن نعتبر حالات فيها يمكن للموجة أن توهن بينما تنتشر في اتجاه z بينما α يسمى عامل التوهن وبما أن وسطنا المفروض عديم العقد تكون $\alpha = 0$ وβ تسمى ثابت الطور ويقاس بالتقدير الدائري وفي الغالب نجمع α, β في ثابت الانتشار المركب γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

ويمكن أن نكتب $E_x = E_{x0} e^{-(\gamma)z}$

وبالتعويض في (2) نجد

$$\gamma^2 E_{x0} e^{-(\gamma)z} = -\omega^2 \mu \epsilon e^{-(\gamma)z}$$

ومنها نجد $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$

$$\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

ولهذا $\alpha = 0$ ومنها نجد

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \;\rightarrow\; \beta = 2\pi/\lambda$$

β هي نفسها العامل ألموجي K لكنها للعوازل

وبالنسبة للموجة المستوية المنتشرة في عاذل تام بسرعة v نجد

$$v = \frac{\omega}{\beta} \;\rightarrow\; v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \quad \& \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_\circ}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

وتكون شدة المجال المغناطيسي

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta}\cos(\omega t - \beta z)$$

حيث η تمثل المعاوقة الذاتية للوسط $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$

مثال (1):

موجة ترددها 300MHz منتشرة خلال ماء عذب وأقصى إتساع لها $0.1v/m$ ،سنمهل التوهين في هذا المثال $(s = 0)$ ولذلك $m = 1$ وأيضا $E = 78$ جد بقية عوامل الموجة ثم جد الحقل الكهربي والمغناطيسي

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{1\times78}} = 0.348\times10^8\ m/s$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.348\times10^8}{3\times10^8} = 0.113m$$

$$\beta = 2\pi/\lambda = \frac{6.28}{0.113} = 55.5rad/\ m$$

$$\eta\eta = \eta_\circ\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = 377\times\sqrt{\frac{1}{78}} = 42.7\Omega$$

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) = 0.1\cos(6\pi\times10^8 t - 55.5z)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = \frac{0.1\cos(6\pi \times 10^8 t - 55.5z)}{42.7}$$

$$H_y = 2.34 \times 10^{-3}\cos(6\pi \times 10^8 t - 55.5z)$$

تمرين:

موجة مستوية ومنتظمة وذات تردد $9.4GHz$ إذا كان أتساع شدة المجال المغناطيسي $7mA/m$ والمادة يفترض أنها عديمة الفقد جد:

(1)سرعة الانتشار (2)طول الموجة (3)ثابت الطور (4) المعاوقة الذاتية (5) أتساع المجال الكهربي

انتشار الموجات في الموصلات الجيدة

وأخيرا ندرس انتشار غير محدود وسنفحص تصرف موصل جيد عندما تنشأ فيه موجة مستوية منتظمة وإذا أخذنا منبع من النحاس وأطلقنا فيه الموجة ويجب أن تكون هناك موجة كهرومغناطيسية منشأة في عاذل خارجي يلاصق سطح الموصل . سنرى أن انتقال الطاقة المبدئي يجب أن يحدث في المنطقة خارج الموصل، لان كل المجالات المتغيرة مع الزمن توهن أو تضعف بسرعة جدا داخل موصل جيد.

الموصل الجيد له موصلية عاليه (G) وتيارات توصيل كبيرة لذلك تقل الطاقة الممثلة بالموجة المنتقلة خلال المادة عندما تنتشر الموجة بسبب فقد من المقاومة باستمرار ومن الدراسة السابقة لحالة الموجات في وسط ردئ التوصيل أن ثابت في الصورة العامة

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\,\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

ويمكن تبسيطها كالأتي $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\,\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$

ومن أويلر $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$

$$e^{-90j} = \cos 90 - j\sin 90 = -j$$

$$-j = A(-90) \rightarrow \sqrt{1(-90)} = A(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ولذلك نجد $\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$

$$\gamma = (j+1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi f\mu\sigma} = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \rightarrow (1)$$

ومنه نجد أن $\beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha \rightarrow (2)$

وبغض النظر عن عوامل الموصلية والنفاذية للموصل أو التردد . المجال المؤثر تكون g, وμمتساويتان

$$E_x = E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}\right) \rightarrow (3)$$

سنعتبر هذا المجال المنبع الذي ينشئ المجالات خلال الموصل حيث أن تيار الإزاحة مهمل ولذلك

$$J = \sigma E = \sigma E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}\right) \rightarrow (4)$$

المعادلتان (3) و(4) نجد منها أن الحد الآسي سالبا ،نجد تناقصا أسيا في كثافة تيار التوصيل وشدة المجال الكهربي مع التعمق داخل الموصل ((بعيدا عن المنبع)) العامل ألأسي = الوحدة(العنصر المحايد)

عند $z = 0$ وينقص إلي $e^{-1} = 0.368$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

والمسافة بين $z = 0$ إلي $\frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ يطلق عليها عمق الاختراق (العمق السطحيδ)

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$$

وهو من أهم العوامل في وصف تصرف موصل في مجالات كهرومغناطيسية

مثال:

جد العمق السطحي للنحاس ذو الموصلية $g = 5.8 \times 10^7$ عند تردد قوي $60\ Hz$

$$\delta_{cu} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 60 \times 5.8 \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 8.53mm$$

أو عند تردد قدره $10MHz$ يكون عمق الاختراق

$$\delta_{cu} = 6.61 \times 10^{-4}\ mm$$

وهو حوالي ثمن طول موجة الضوء المرئي

لذلك:عند هذا التردد كل المجالات في موصل جيد مثل النحاس تكون أساسا صفرا على مسافات أكبر من أعماق السطح .أي كثافة التيار أو شدة المجال الكهربي المنشاة عند سطح موصل جيد تضمحل بسرعة عندما تنعدم بداخل الموصل والطاقة الكهرومغناطيسية لا تنفذ إلي داخل الموصل بل تنتقل في المنطقة المحيطة به بينما الموصل يرشد الموجات فقط . التيارات المنشأة

على سطح الموصل تنتشر في داخل الموصل في اتجاه عمودي اتجاه كثافة التيار ويمكن أن نكتب السرعة والطول ألموجي داخل موصل جيد بالعلاقات التالية

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \& \quad \delta = \frac{1}{\beta} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \rightarrow \quad v = \omega\delta$$

لكي نحسب الحقل المغناطيسي نبدأ بالمعادلة

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

وإذا كانت $\omega t \ll \sigma$ يؤدي إلى:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{j2\pi f\mu}{\sigma}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{j\pi f\mu\sigma}{\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}\sqrt{j}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sigma\delta} + \frac{j}{\sigma\delta}$$

ولذلك يمكننا إعادة كتابة (3) في الصورة

$$E_x = E_{x0} e^{-z/\delta} cos\left(\omega t - z/\delta\right) \rightarrow (6)$$

$$E_x = \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2}} E_{x0} e^{-z/\delta} cos\left(\omega t - z/\delta - \pi/4\right) \rightarrow (6)$$

مثال:

جد التردد المؤثر والموصلية لمادة جيدة التوصيل لها سرعة الانتشار تساوي عشر في المائة من سرعة الضوء في فضاء حر والتي فيها طول الموجة $0.3mm$ أفترض أن المادة غير مغناطيسي.

الطاقة المختزنة في الحقل الكهربي والحقل المغناطيسي

الجهد :

في حقل كهربي ساكن هو الشغل المبذول لنقل الشحنات من موقع لأخر

(1)نقل شحنة من منطقة جهد مرتفع إلى جهد منخفض تكون هناك خسارة

(2)نقل شحنة من منطقة جهد منخفض إلى جهد مرتفع تكون هناك زيادة في الطاقة

ـ تكون القوة الكهربية صفر حسب قانون كولم إذا كانت المسافة بين الشحنتين مساوية ما لانهاية وتكون الشحنات في هذه الحالة في حالة توازن

ـ عند تقريب شحن إلى بعض فان الجهد المبذول يجب أن يكون بمقدار الشغل الذي أدى إلى ازدياد طاقة الجملة

فإذا كانت لدينا شحن نقطية لانهائية في فراغ لانهائي فان الطاقة المستهلكة بين الشحن

$$W_1 = Q_1 V_1^2 \quad \& \quad W_1 = Q_1 V_3^1$$

$$W_2 = Q_2 V_2^1 \quad \& \quad W_1 = Q_2 V_2^3$$

$$W_3 = Q_3 V_3^2 + Q_3 V_3^1$$

$$W_4 = Q_4 V_4^3 + Q_4 V_4^2 + Q_4 V_4^1$$

$$W_i = Q_i V_i^{\,1} + Q_i V_i^{\,2} + Q_i V_i^{\,3} + Q_i V_i^{\,4} + \cdots.$$

$$W_i = Q_i (V_i^{\,1} + V_i^{\,2} + V_i^{\,3} + V_i^{\,4} + \cdots)$$

وبتجميع المعادلات المماثلة

$$W_i = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} Q_i V_i^{\,j} \quad \rightarrow (1)$$

$$W_j = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} Q_j V_j^{\,i} \quad \rightarrow (2)$$

وبجمع المعادلتين أعلاه $$2W = \sum_{i=1}^{n} Q_i V_i^j$$

وبتحويل المجموع إلى تكامل

$$W = \frac{1}{2} \lim_{\Delta v \to 0} \sum (\rho \Delta V)\ V(x,y,z) = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$$

ومن معادلة ماكسويل التفاضلية $\nabla . D = \rho$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\nabla . D) V dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ (\nabla . E) V dV \quad \rightarrow (*)$$

ومن متطابقة المتجهات $\nabla . (VE) = E(\nabla . V) - V(\nabla . E)$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ (E(\nabla . V) - V(\nabla . E)) dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ \nabla . (\mathrm{VE}) dV - \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ \big(E(\nabla . V)\big) dV$$

ومن علاقات الكهربية $E = -dV/dr$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ \nabla . (\mathrm{VE}) dV + \frac{1}{2} \int_V \epsilon_\circ (E . E) dV \quad \rightarrow (**)$$

وبتحويل الطرف الأول من تكامل حجمي إلى سطحي

$$\int_V \nabla . (\mathrm{VE}) dV = \int_s VE\ . nda$$

في حالة الفراغ يكون السطح لانهائي أي أن $r \rightarrow \infty$

$$\int_s VE\,.nda = \lim \int \frac{Q}{4\pi\epsilon r}.\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.r\sin\theta\, d\theta d\emptyset dr = 0$$

وبالرجوع للمعادلة (**) نجد ما تبقى منها هو الحد الثاني

$$W = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_\circ(E.E)dV = \frac{1}{2}\epsilon_\circ\int_V \mathrm{E}^2 dV$$

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon_\circ \mathrm{E}^2$$

الطاقة المختزنة في الحقل المغناطيسي :

كما في حالة الحقل الكهربي وبنفس الطريقة يمكن مناقشة الطاقة المختزنة في الحقل المغناطيسي ولكن هنا يجب أن نبني تيارا كهربيا وليست نظاما من الشحنات ومنها سنجد أن الطاقة المختزنة تعطى بــ

$$W_{total} = \frac{1}{2}\mu_\circ \mathrm{H}^2$$

ولحساب معادلة الموجة ومتجه بوينتينغ :

نفترض أن الحقلين متغيرين مع الزمن ومن معادلات ماكسويل نجد

$$curlH = \epsilon\frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow (1) \quad \& \quad curlE = -\mu\frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow (2)$$

$$\epsilon divE = \rho \quad \rightarrow (3) \qquad \& \qquad divH = 0 \quad \rightarrow (4)$$

وبضرب(1) فيE قياسيا(5) $\rightarrow$

$$E.\nabla\times H = \epsilon E.\frac{\partial E}{\partial t}$$

ومن متطابقة المتجهات

$$\nabla.(E\times H) = H.(\nabla\times E) - E.(\nabla\times H)$$

نعوض في العلاقة أعلاه

$$H.(\nabla \times E) - \nabla.(E \times H) = \epsilon E.\frac{\partial E}{\partial t}$$

وبتعويض ماكسويل(2) $$H.\left(-\mu\ \frac{\partial H}{\partial t}\right) - \nabla.(E \times H) = \epsilon E.\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\epsilon E.\frac{\partial E}{\partial t} + \mu H.\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) + \nabla.(E \times H) = 0 \quad \rightarrow (6)$$

$$\frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\partial E.E}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial H.H}{\partial t}\right) + \nabla.(E \times H) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E^2 + \mu H^2) + \nabla.(E \times H) = 0 \quad \rightarrow (7)$$

ولكن نعلم أن طاقة الحقل الكهربي $W_e = {}^1/_2\ \epsilon E^2$ والحقل المغناطيسي $W_m = {}^1/_2 \mu H$

$$W = W_e + W_m = {}^1/_2\ \epsilon E^2 + {}^1/_2 \mu H$$

ولكن بتعويض الطاقة الكلية لابد لنا من تكامل الحد الثاني في المعادلة (7)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int_v \nabla.(E \times H) dV = 0$$

وباستخدام قانون جاوس لتحويل التكامل ألحجمي إلى سطحي

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int_s (\mathrm{E} \times H).\hat{r}\, dS = 0$$

حيث r هو متجه وحدة خارج ومتعامد مع السطح

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int_s (\vec{\mathrm{P}}).\hat{r}\, dS = 0 \quad \rightarrow (8)$$

حيث $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ يمثل متجه بوينتنغ وهو كثافة الطاقة التي تعبر السطح والمحمولة بواسطة الموجة الكهرومغناطيسية وإن قيمة الضرب القياسي للمتجه P هي قيمة الطاقة التي تعبر وحدة السطح في وحدة الزمن ب-الاتجاه المتعامد مع كل من E و H ولذلك يعرف **متجه بوينتنغ:**

هو معدل الطاقة المشعة المنتقلة مع الموجه والتي تعبر وحدة المساحة

والمعادلة السابقة تمثل قانون حفظ الطاقة وهي تدل على أن الطاقة الكلية المختزنة في الموجة الكهرومغناطيسية تتناقص مع الزمن

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_{s} (\vec{\mathrm{P}}).\hat{r}\,dS$$

ولنفرض أن اتجه الانتشار هو اتجاه x وليكن كل من E و H متعامدان مع هذا الاتجاه

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = E_y H_z - E_z H_y$$

لأن $E_x = H_x = 0$ ولأن الحقلين عمديين على جهة الانتشار وأيضا $\vec{P}$ ليست له مركبات على Z و Y

ملحقات

تحويل وحدة الحجم من الإحداثيات الكارتيزية إلى كروية

$$x = r\sin\theta\cos\emptyset \quad \& \quad y = r\sin\theta\sin\emptyset \quad \& \quad z = r\cos\theta$$

$$\frac{x}{z} = \frac{r\sin\theta\cos\emptyset}{r\cos\theta} = \tan\theta\cos\emptyset$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-z\cos\emptyset}{\cos^2\theta} = \frac{-r\cos\theta\cos\emptyset}{\cos^2\theta} = \frac{-r\cos\emptyset}{\cos\theta} \quad \rightarrow (1)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta\sin\emptyset}{r\sin\theta\cos\emptyset} = \tan\emptyset$$

$$\frac{dy}{d\emptyset} = x\frac{d}{d\emptyset}\tan\emptyset = x\left(\frac{-\sin^2\emptyset - \cos^2\emptyset}{\cos^2\emptyset}\right) = \frac{-x}{\cos^2\emptyset}$$

$$\frac{dy}{d\emptyset} = \frac{-r\sin\theta\ \cos\emptyset}{\cos\emptyset\cos\emptyset} = \frac{-r\sin\theta}{\cos\emptyset} \quad \to (2)$$

$$z = r\cos\theta \quad \to \quad dz = \cos\theta\, dr \quad \to (3)$$

$$d^3r = dxdydz = \frac{-r\cos\emptyset}{\cos\theta} d\theta \left(\frac{-r\sin\theta}{\cos\emptyset}\right) d\emptyset(\cos\theta)dr$$

$$d^3r = r^2\sin\theta\, drd\theta d\emptyset$$