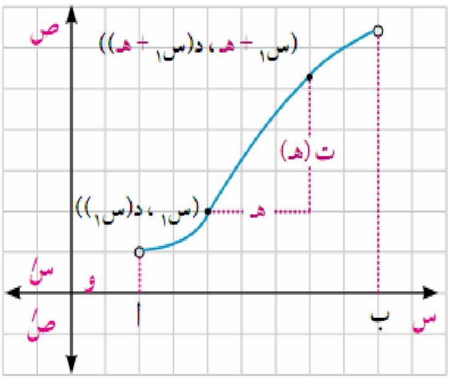
الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

٣ - ١ معدل التغير

✸ دالة التغير:

إذا كانت ص = د(س) فإن كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة واحدة للمتغير ص
وبالتالى فإنه إذا تغيرت قيمة س من س$_1$ الى س$_2$
فإن قيمة ص سوف تتغير من د(س$_1$) الى د(س$_2$)



ويرمز للتغير فى س بالرمز هـ او Δس (يقرأ دلتا س) وبالتالى فإن:

مقدار التغير فى س = Δس = س$_2$ − س$_1$

ومقدار التغير فى ص = Δص = د(س$_2$) − د(س$_1$)

∵ Δس = س$_2$ − س$_1$ او هـ = س$_2$ − س$_1$

∴ س$_2$ = س$_1$ + هـ

∴ لكل تغير فى الإحداثى السينى من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ يحدث تغير فى الإحداثى الصادى يتعين بالعلاقة:

ت(هـ) = د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$)

وتسمى الدالة ت(هـ) بدالة التغير فى د عند س = س$_1$

مثال ١:

إذا كانت د(س) = س^2 − س + ١ فأوجد دالة التغير عندما س = ٣ ثم احسب:

(أ) ت(٠,٢)   (ب) ت(−٠,٣)

الحل:

∵ د(س) = س^2 − س + ١ ، س$_1$ = ٣

∴ د(٣) = ٣^2 − ٣ + ١ = ٩ − ٣ + ١ = ٧

، د(٣ + هـ) = (٣ + هـ)^2 − (٣ + هـ) + ١

= ٩ + ٦هـ + هـ^2 − ٣ − هـ + ١ = هـ^2 + ٥هـ + ٧

∴ ت(هـ) = د(٣ + هـ) − د(٣) = هـ^2 + ٥هـ + ٧ − ٧

∴ ت(هـ) = هـ^2 + ٥هـ #

(أ) عندما هـ = ٠,٢

$\therefore$ ت(٠,٢) = $(٠,٢)^{٢}$ + ٥(٠,٢) = ٠,٠٤ + ١ = ١,٠٤

(ب) عندما هـ = −٠,٣

$\therefore$ ت(−٠,٣) = $(−٠,٣)^{٢}$ + ٥(−٠,٣) = ٠,٠٩ − ١,٥ = −١,٤١

٭ دالة متوسط التغير:

بقسمة دالة التغير ت(هـ) على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = $س_{١}$ ورمزها م(هـ)

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$$

تستخدم هذه الصورة لإيجاد دالة متوسط التغير

أو

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

تستخدم هذه الصورة لحساب قيمة متوسط التغير

مثـــال٢:

إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ + ٣س − ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم احسب م(٠,٢)

(ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

الحـــل:

$\because$ د(س) = $س^{٢}$ + ٣س − ١

(أ) عند س = ٢

$\therefore$ د(٢) = $٢^{٢}$ + ٣ × ٢ − ١ = ٤ + ٦ − ١ = ٩

، د(٢+هـ) = $(٢ + هـ)^{٢}$ + ٣(٢ + هـ) − ١

= ٤ + ٤هـ + $هـ^{٢}$ + ٦ + ٣هـ − ١ = $هـ^{٢}$ + ٧هـ + ٩

$\therefore$ ت(هـ) = د(٢ + هـ) − د(٢) = $هـ^{٢}$ + ٧هـ + ٩ − ٩ = $هـ^{٢}$ + ٧هـ

$\therefore$ دالة متوسط التغير = م(هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{هـ^{٢} + ٧هـ}{هـ}$

$\therefore$ م(هـ) = هـ + ٧ ، $\therefore$ م(٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢ #

(٤) عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

∴ $س_١ = ٤,٥$ ∴ $د(س_١) = د(٤,٥) = (٤,٥)^٢ + ٣(٤,٥) - ١ = ٣٢,٧٥$

، $س_٢ = ٣$ ∴ $د(س_٢) = د(٣) = (٣)^٢ + ٣(٣) - ١ = ١٧$

∴ $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣ - ٤,٥ = -١,٥$

، $\Delta ص = د(س_٢) - د(س_١) = د(٣) - د(٤,٥) = ١٧ - ٣٢,٧٥ = -١٥,٧٥$

∴ متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-١٥,٧٥}{-١,٥} = ١٠,٥$

✸ دالة معدل التغير:

بأخذ نهاية دالة متوسط التغير عندما هـ ← ٠ نحصل على دالة معدل التغير أى أن:

$$\text{دالة معدل التغير} = \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

مثال٣:

اوجد دالة متوسط التغير فى د حيث $د(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ +$ هـ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥

الحل:

∵ $د(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ∴ عندما $س = س_١$ فإن:

$$د(س_١ + هـ) - د(س_١) = \frac{٣}{س_١ + هـ - ٢} - \frac{٣}{س_١ - ٢}$$

$$= \frac{٣س_١ - ٦ - ٣س_١ - ٣هـ + ٦}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)} = \frac{-٣هـ}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$$

∴ دالة معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \times \frac{-٣هـ}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)} = \frac{-٣}{(س_١ - ٢)^٢}$$

عند س = ٥ ∴ $س_١$ = ٥ ∴ دالة معدل التغير $= \frac{-٣}{(٥-٢)^٢} = \frac{-٣}{٩} = \frac{-١}{٣}$

مثـــال٤:

اوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ ثم استنتج معدل التغير عندما س = ٩

الحـــل:

∵ د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ ∴مجال د(س) = [٥ ، ∞ [

∴ عند س = $س_١$ فإن: د($س_١$) = $\sqrt{س_١ - ٥}$ ، د($س_١$ + هـ) = $\sqrt{س_١ + هـ - ٥}$

∴ دالة متوسط التغير = م(هـ) = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} - \sqrt{س_١ - ٥}}{هـ}$

∴ دالة معدل التغير = $\lim_{هـ \leftarrow ٠}$ م(هـ) = $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} - \sqrt{س_١ - ٥}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} - \sqrt{س_١ - ٥}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥}}{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥}}$

$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{س_١ + هـ - ٥ - س_١ + ٥}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥})}$

$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١}{(\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥})} = \frac{١}{٢\sqrt{س_١ - ٥}}$ #

عند س = ٩ ∴ $س_١$ = ٩ ∴ دالة معدل التغير $= \frac{١}{٢\sqrt{٩ - ٥}} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$

مثـــال٥:

صفيحة على شكل مربع تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم.

الحـــل:

نفرض طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها = م $سم^٢$

∴ مساحة الصفيحة $م = د(س) = س^٢$

∴ عندما $س = س_١$ فإن:

$$د(س_١ + هـ) - د(س_١) = (س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢$$

∴ دالة متوسط التغير $= م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ}$

$$= \frac{س_١^٢ + ٢س_١هـ + هـ^٢ - س_١^٢}{هـ} = \frac{٢س_١هـ + هـ^٢}{هـ} = ٢س_١ + هـ$$

∴ عندما تتغير س من ٣ الى ٣,٤ ∴ $س_١ = ٣$ ، $هـ = ٣,٤ - ٣ = ٠,٤$

∴ متوسط التغير فى مساحة الصفيحة $= م(٠,٤) = ٢ \times ٣ + ٠,٤ = ٦,٤$ #

∴ دالة معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} (٢س_١ + هـ) = ٢س_١$

عند $س = ٥$ ∴ $س_١ = ٥$

∴ معدل التغير فى مساحة الصفيحة $= ٢س_١ = ٢ \times ٥ = ١٠$ #

مثـــال٦:

يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن (مقيسة بالدقائق) بالعلاقة $د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$ ملليجرام أوجد معدل النمو اللحظى للدالة د عندما $ن = ٥$.

الحـــل:

∵ $د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$

∴ معدل النمو اللحظى = دالة معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ن_١ + هـ) - د(ن_١)}{هـ}$

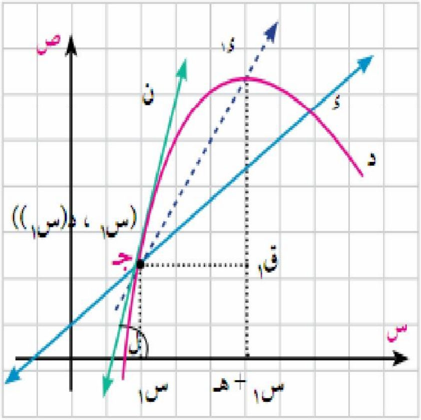
$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢(ن + هـ)^٣ + ١٠٠ - ٢ن^٣ - ١٠٠}{هـ}$$

$$= ٢ \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{(ن + هـ)^٣ - ن^٣}{هـ} = ٢ \times ٣ن^٢ = ٦ن^٢$$

عندما $ن = ٥$ ∴ معدل النمو اللحظى $= ٦ \times ٥^٢ = ١٥٠$ ملليجرام

٣ - ٢ الإشتقاق

مما سبق نعلم أنه إذا كانت ص = د(س) فإن معدل التغير عند النقطة $س_١$ هو:



$$\text{معدل التغير} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

وإذا كانت النقطة جـ($س_١$، د($س_١$)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د

وتحركت النقطة ء على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ

فإن $\overleftrightarrow{جـء}$ سيتحرك ويأخذ الوضع $\overleftrightarrow{جـن}$ ويصبح مماسا للمنحنى

ويكون ميل المماس عند جـ = ظال = $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

أى أن:

> ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة ($س_١$، د($س_١$))
> يساوى معدل التغير فى د عند س = $س_١$

مثـــال١:

اوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٣ - ٤$ عند النقطة أ(١، – ٣) ثم اوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

الحـــل:

∵ د(١) = $١^٣ - ٤ = -٣$ ∴ النقطة أ(١، – ٣) تنتمى لمنحنى د

∴ ميل المماس عند أ = معدل التغير فى د عند أ

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س_١ + هـ)^٣ - ٤ - س_١^٣ + ٤}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س_١ + هـ)^٣ - س_١^٣}{هـ} = ٣س_١^٢$$

عند أ(١، −٣) ∴ $س_١ = ٣$ ∴ ميل المماس عند أ = ٣ × $١^٢$ = ٣

ويكون ظال = ٣ ∴ ل = $ظا^{-١}(٣)$ = ٣٤ ٣٤ ١٧ ٥٧

✱ الدالة المشتقة:

إذا كانت ص = د(س) فإن معدل التغير يكون ايضا دالة فى س ولذلك
يسمى معدل التغير بالدالة المشتقة أو المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلى الأول

ويرمز لها بإحد الرموز الآتية: $د'(س)$ أو $ص'$ أو $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ء}{ءس}\{د(س)\}$

$$\boxed{\text{المشتقة الأولى للدالة} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}}$$

مما سبق نجد أن:

معدل التغير = ميل المماس = المشتقة الأولى للدالة = ظل زاوية المماس مع محور السينات الموجب

$$\boxed{\text{معدل التغير} = \text{ميل المماس} = ظال = \frac{ءص}{ءس} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}}$$

مثال٢:

إذا كانت $د(س) = ٣س^٢ + ٤س + ٧$ فأوجد مشتقة الدالة د مستخدما تعريف المشتقة،ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (−١، ٦).

الحل:

∵ $د(س) = ٣س^٢ + ٤س + ٧$

∴ $د(س + هـ) = ٣(س + هـ)^٢ + ٤(س + هـ) + ٧$

$= ٣س^٢ + ٦سهـ + ٣هـ^٢ + ٤س + ٤هـ + ٧$

∴ $د(س + هـ) - د(س) = \cancel{٣س^٢} + ٦سهـ + ٣هـ^٢ + \cancel{٤س} + ٤هـ + ٧ - \cancel{٣س^٢} - \cancel{٤س} - ٧$

∴ $د(س + هـ) - د(س) = ٣هـ^٢ + ٦سهـ + ٤هـ$

∵ $د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣هـ^٢ + ٦سهـ + ٤هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٣هـ + ٦س + ٤) = ٦س + ٤$

عند النقطة $(-١ ، ٦)$

$\because$ د$(-١) = ٣(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٧ = ٦$ $\therefore$ النقطة $(-١ ، ٦)$ تنتمى لمنحنى د

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $(-١ ، ٦) =$ د$'(-١) = ٦(-١) + ٤ = -٢$

✸ قابلية الدالة للإشتقاق عند نقطة:

يقال أن الدالة د قابلة للإشتقاق عند س $=$ أ (حيث أ تنتمى لمجال الدالة)

إذا وفقط إذا كانت د$'($أ$)$ لها وجود حيث $\text{د}'(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقط الفترة] جـ، ء [نقول أن الدالة د قابلة للإشتقاق فى هذه الفترة

ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للإشتقاق على ح

مثـــال٣: اثبت أن د$($س$) =$ س$^{٢} -$ س $+ ١$ قابلة للإشتقاق عند س $= ١$.

الحـــل:

$\because$ مجال د $=$ ح $\therefore$ د معرفة عند س $= ١$ ، د$(١) = ١^{٢} - ١ + ١ = ١$

$$\therefore \text{د}'(١) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(١ + \text{هـ})^{٢} - (١ + \text{هـ}) + ١ - ١}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ١ - \text{هـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} (١ + \text{هـ}) = ١ \in \text{ح}$$

$\therefore$ د$($س$)$ قابلة للإشتقاق عند س $= ١$

✸ المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى:

إذا كانت الدالة د معرفة عند س $=$ أ (حيث أ تنتمى لمجال الدالة)،وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فلبحث قابلية الإشتقاق عند س $=$ أ نتبع الآتى:

- نوجد المشتقة اليمنى ورمزها د$'($أ$^{+})$ حيث $\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$
- نوجد المشتقة اليسرى ورمزها د$'($أ$^{-})$ حيث $\text{د}'(\text{أ}^{-}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

وتكون الدالة د قابلة للإشتقاق عند س $=$ أ إذا وفقط إذا كان د$'($أ$^{+}) =$ د$'($أ$^{-})$

ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز د$'($أ$)$

مثـــال٤:

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢ حيث $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - 5 & \text{س} > 2 \\ 4\text{س} - 9 & \text{س} \le 2 \end{cases}$

الحـــل:

∵ مجال د = ح   ∴ د معرفة عند س = ٢ ، $\text{د}(2) = 4\times 2 - 9 = -1$

$$\therefore \text{د}'(2^+) = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{(2+\text{هـ})^2 - 5 - (-1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{4 + 4\text{هـ} + \text{هـ}^2 - 5 + 1}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{4\text{هـ} + \text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} (4 + \text{هـ}) = 4$$

$$\text{، } \therefore \text{د}'(2^-) = \lim_{\text{هـ}\to 0^-} \frac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^-} \frac{4(2+\text{هـ}) - 9 - (-1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{8 + 4\text{هـ} - 9 + 1}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{4\text{هـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0^+} 4 = 4$$

∵ $\text{د}'(2^+) = \text{د}'(2^-)$ ∴ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = ٢

✸الإشتقاق والإتصال:

✸نظرية:

إذا كانت ص = د(س) قابلة للإشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

أي أنه   اذا كانت $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\text{أ}}$ لها وجود $\Leftarrow$ الدالة متصلة عند س = أ

ملاحظات هامة جدا:

١) عكس النظرية السابقة غير صحيح دائما
اي انه إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس شرطا أن تكون قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة

٢) اذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة

٣) عند بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة فى مجالها يفضل بحث إتصالها عند هذه النقطة أولا فإن كانت متصلة نبحث الإشتقاق وإن كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للإشتقاق

مثـــال٥:

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ١ حيث $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & س \le ١ \\ ٢س + ١ & س > ١ \end{cases}$

الحـــل:

نبحث الاتصال اولا عند س = ١

١) $د(١) = ١^٢ + ٢ = ٣$

٢) $د(١^+) = \lim_{س \to ١} (س^٢ + ٢) = ١^٢ + ٢ = ٣$

٣) $د(١^-) = \lim_{س \to ١} (٢س + ١) = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

$\because$ $د(١) = د(١^+) = د(١^-) = ٣$　　　$\therefore$ الدالة د متصلة عند س = ١

$\therefore$ **نبحث قابلية الإشتقاق عند س = ١**

$\therefore د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{(١ + هـ)^٢ + ٢ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٢هـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} (٢ + هـ) = ٢$

، $\therefore د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢(١ + هـ) + ١ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٢ + ٢هـ - ٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٢هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} ٢ = ٢$

$\because د'(١^+) = د'(١^-)$　　　$\therefore$ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = ١

٣ - ٣ قواعد الإشتقاق

✸ مشتقة الدالة:

١ – مشتقة الدالة الثابتة:

إذا كان $\text{ص} = \text{جـ}$: $\text{جـ} \in \text{ح}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

اى أن: المشتقة الأولى للمقدار الثابت تساوى صفر

٢ – مشتقة الدالة $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{ن}}$:

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$: $\text{ن} \in \text{ح}$ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

اى انه لايجاد المشتقة الأولى للمتغير س مرفوع لأس معين: ننزل الاس وننقص من الاس واحد

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{س}$ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}}$: $\text{أ}،\text{ن} \in \text{ح}$ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}\,\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

أى أن المشتقة الأولى لمقدار ثابت × دالة تساوى الثابت × مشتقة الدالة

مثال١:

اوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى كل مما يأتى:

(أ) $\text{ص} = -\sqrt{٢}$ (ب) $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$ (جـ) $\text{ص} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$ (د) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}$

الحل:

(أ) $\because \text{ص} = -\sqrt{٢}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

(ب) $\because \text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣\text{س}^{٢} = ٤\pi\,\text{س}^{٢}$

(جـ) $\because \text{ص} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$ نرفع المتغير س إلى البسط مع تغيير إشارة الأس

$\therefore \text{ص} = -٤\text{س}^{-٥}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٤ \times (-٥\text{س}^{-٦}) = ٢٠\,\text{س}^{-٦}$

(د) $\because \text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}$ نحول الجذر الى اسس

$\therefore$ ص = س$^{\frac{٥}{٣}}$ $\qquad$ $\therefore$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥}{٣}$ س$^{\frac{٥}{٣}-١} = \frac{٥}{٣}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$

✸ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما:

إذا كان د(س) = ر(س) ± ق(س) ± هـ(س) ± ....

فإن د$'$(س) = ر$'$(س) ± ق$'$(س) ± هـ$'$(س) ± ....

اى أن

المشتقة الأولى لمجموع جبرى لعدد من الدوال تساوى المجموع الجبرى لمشتقات الدوال

فمثلا:

إذا كان د(س) = ٤س^{٣} − ٢س^{٢} + س $\quad$ فإن $\quad$ د$'$(س) = ١٢س^{٢} − ٤س + ١

وبالمثل د(س) = ٣س$^{-٣}$ − ٣س$^{-٢}$ + ٥ $\quad$ فإن $\quad$ د$'$(س) = −٩س$^{-٤}$ + ٦س$^{-٣}$

مثال٢: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فى كل مما يأتى:

(أ) ص = ٣س^{٨} − ٢س^{٥} + ٦س + ١ $\qquad$ (ب) ص = $\frac{٥}{\text{س}}$ + س$\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{٣}$ س − ٤

الحل:

(أ) $\because$ ص = ٣س^{٨} − ٢س^{٥} + ٦س + ١

$\therefore$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ × ٨س^{٧} − ٢ × ٥س^{٤} + ٦ = ٢٤س^{٧} − ١٠س^{٤} + ٦

(ب) $\because$ ص = $\frac{٥}{\text{س}}$ + س$\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{٣}$ س − ٤

$\therefore$ ص = ٥س$^{-١}$ + س × س$^{\frac{١}{٢}}$ + $\sqrt{٣}$ س − ٤ = ٥س$^{-١}$ + س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\sqrt{٣}$ س − ٤

$\therefore$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ × (−س$^{-٢}$) + $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{٣}{٢}-١}$ + $\sqrt{٣}$ = −٥س$^{-٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + $\sqrt{٣}$

✸ مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كان د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

ص = (د . ر)(س) $\quad$ فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (د . ر$'$)(س) + (ر . د$'$)(س)

أى أن: **مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى**

نتيجة:

إذ كان $\text{ص} = (\text{د} \cdot \text{ر} \cdot \text{ن})(\text{س})$ فإن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{د}' \cdot \text{ر} \cdot \text{ن})(\text{س}) + (\text{ر}' \cdot \text{د} \cdot \text{ن})(\text{س}) + (\text{ن}' \cdot \text{د} \cdot \text{ر})(\text{س})$$

أى أن:

مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الأولى×الثانية×الثالثة + مشتقة الثانية×الأولى×الثالثة+ مشتقة الثالثة×الأولى×الثانية

مثال٣:

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان $\text{ص} = (٤\text{س}^{٢} - ١)(٧\text{س}^{٣} + \text{س})$ ثم اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = ١$

الحل:

$\because \text{ص} = (٤\text{س}^{٢} - ١)(٧\text{س}^{٣} + \text{س})$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٤\text{س}^{٢} - ١) \times (٢١\text{س}^{٢} + ١) + (٧\text{س}^{٣} + \text{س}) \times ٨\text{س}$

$= (٤\text{س}^{٢} - ١)(٢١\text{س}^{٢} + ١) + ٨\text{س}\,(٧\text{س}^{٣} + \text{س})$

عندما $\text{س} = ١$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٤ - ١)(٢١ + ١) + ٨(٧ + ١) = ١٣٠$

✷مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كان د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س وكان:

$\text{ص} = \frac{\text{د}}{\text{ر}}(\text{س})$ حيث $\text{ر}(\text{س}) \neq ٠$ فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{د}' \cdot \text{ر})(\text{س}) - (\text{ر}' \cdot \text{د})(\text{س})}{[\text{ر}(\text{س})]^{٢}}$

أى أن:

$$\text{مشتقة خارج قسمة دالتين} = \frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

مثال٤:

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ٥}$

الحل:

$\because$ ص $= \dfrac{\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 5}$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{(3\text{س}^2 + 4\text{س})(\text{س} + 5) - 1 \times (\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 1)}{(\text{س} + 5)^2}$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{3\text{س}^3 + 15\text{س}^2 + 4\text{س}^2 + 20\text{س} - \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 1}{(\text{س} + 5)^2}$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{2\text{س}^3 + 17\text{س}^2 + 20\text{س} + 1}{(\text{س} + 5)^2}$

✱ مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة):

✱ نظرية:

إذا كانت ص = د(ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع وكانت ع = ر(س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن: ص = د(ر(س)) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ويكون:

$$\boxed{\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \dfrac{\text{ءع}}{\text{ءس}}}$$

وتعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة أو قاعدة التسلسل

📖 مثـــال٥:

اوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانِ ص $=$ ع^4 ، ع $=$ س$^3 - 3$س$^2 + 7$

✍ الحـــل:

$\because$ ص $=$ ع^4 $\Leftarrow$ $\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 4\text{ع}^3$

، $\because$ ع $=$ س$^3 - 3$س$^2 + 7$ $\Leftarrow$ $\therefore \dfrac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2 - 6\text{س}$

$\because \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \dfrac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ $\Leftarrow$ $\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{ع}^3 \times (3\text{س}^2 - 6\text{س})$ بالتعويض عن ع

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4(\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 7)^3(3\text{س}^2 - 6\text{س})$ #

✸ مشتقة الدالة $[\ د(س)\ ]^{ن}$:

إذا كانت ع = $[\ د(س)\ ]^{ن}$ حيث د قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى فإن:

$$\boxed{\frac{ءص}{ءس} = ن\,[\ د(س)\ ]^{ن-١} \times د'(س)}$$

اى انه لايجاد المشتقة الأولى لقوس مرفوع لأس معين:

ننزل الاس أمام القوس وننقص من أس القوس واحد ونضرب فى مشتقة مابداخل القوس

مثـــال٦: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = $(س^{٣} + ٤)^{٩}$

الحـــل:

$\because$ ص = $(س^{٣} + ٤)^{٩}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٩ \times (س^{٣} + ٤)^{٨} \times ٣س^{٢} = ٢٧س^{٢}(س^{٣} + ٤)^{٨}$

مثـــال٧:

إذا كان ص = $\left(\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right)^{٥}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــل:

$\because$ ص = $\left(\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right)^{٥}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٥ \times \left(\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right)^{٤} \times \left(\frac{٢س \times (س + ١) - ١ \times (س^{٢} - ٤)}{(س + ١)^{٢}}\right)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٥ \times \left(\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right)^{٤} \times \left(\frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{(س + ١)^{٢}}\right) = \frac{٥(س^{٢} + ٢س + ٤)(س^{٢} - ٤)^{٤}}{(س + ١)^{٦}}$

مثـــال٨:

أوجد قيم س التى تجعل د'(س) = ٧ إذا كان د(س) = $س^{٣} - ٥س + ٢$

الحـــل:

$\because$ د(س) = س^{3} − ٥س + ٢

$\therefore$ د$'$(س) = ٣س^{2} − ٥ ، $\because$ د$'$(س) = ٧

$\therefore$ ٣س^{2} − ٥ = ٧ $\therefore$ ٣س^{2} = ٧ + ٥ $\therefore$ ٣س^{2} = ١٢

$\therefore$ س^{2} = $\frac{١٢}{٣}$ $\therefore$ س^{2} = ٤ $\therefore$ س = ±٢

ملاحظة: يمكن أيجاد تفاضل دالة الدالة باستخدام تفاضل القوس أو قاعدة التسلسل

مثـــال٩:

إذا كان ص = ع^{5} + ع^{3} ، ع = ٣س^{2} + ٧ **أوجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحـــل:

أولا: باستخدام تفاضل القوس

$\because$ ص = ع^{5} + ع^{3} ، ع = ٣س^{2} + ٧ **نعوض عن ع في العلاقة الأولى**

$\therefore$ ص = (٣س^{2} + ٧)^{5} + (٣س^{2} + ٧)^{3}

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥×(٣س^{2} + ٧)^{4}×٦س + ٣×(٣س^{2} + ٧)^{2}×٦س

= ٣٠س(٣س^{2} + ٧)^{4} + ١٨س(٣س^{2} + ٧)^{2} #

ثانيا: باستخدام قاعدة التسلسل

$\because$ ص = ع^{5} + ع^{3} ⇐ $\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٥ع^{4} + ٣ع^{2}

، $\because$ ع = ٣س^{2} + ٧ ⇐ $\therefore$ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٦س

$\because$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٥ع^{4} + ٣ع^{2})×(٦س) **بالتعويض عن ع**

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٥(٣س^{2} + ٧)^{4} + ٣(٣س^{2} + ٧)^{2})×(٦س)

= ٣٠س(٣س^{2} + ٧)^{4} + ١٨س(٣س^{2} + ٧)^{2} #

٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية

✱ مشتقة دالة الجيب:

إذا كان: ص = جاس فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس

وبصفة عامة: إذا كانت ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإن:

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left[\text{جاع}\right] = \text{جتاع}\ \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

أى أنه لإيجاد تفاضل الدوال المثلثية فإننا نفاضل الدالة المثلثية ثم نضرب فى تفاضل الزاوية

مثـــال١: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتى:

(أ) ص = س^{٢} + جاس (ب) ص = جا$\frac{\pi}{٤}$ − ٧ جاس (ج) ص = ٥ جا(٣ − ٢س)

الحـــل:

(أ) ∵ ص = س^{٢} + جاس ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س + جتاس

(ب) ∵ ص = جا$\frac{\pi}{٤}$ − ٧ جاس ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ − ٧ × جتاس = −٧ جتاس

(ج) ∵ ص = ٥ جا(٣ − ٢س)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ جتا(٣ − ٢س) × (−٢) = −١٠ جتا(٣ − ٢س)

✱ مشتقة دالة جيب التمام:

إذا كان: ص = جتاس فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − جاس

✱ مشتقة دالة الظل:

إذا كان: ص = ظاس فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^{٢}س

مثـــال٢:

اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:

(أ) ص = ٢ ظا٣س (ب) ص = ٢ جتا(٤ − ٣س^{٢}) (جـ) ص = ٢ جاس جتاس

الحـــل:

(أ) ∵ ص = ٢ ظا٣س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × ٣ قا^{٢}٣س = ٦ قا^{٢}٣س

(ب) ∵ ص = ٢ جتا(٤ − ٣س^{٢})

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − ٢ جا(٤ − ٣س^{٢}) × (−٦س) = ١٢س جا(٤ − ٣س^{٢})

(جـ) ∵ ص = ٢ جاس جتاس → حاصل ضرب دالتين

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جاس × (−جاس) + جتاس × ٢ جتاس = ٢جتا^{٢}س − ٢جا^{٢}س

مثـــال٣:

اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى:

(أ) ص = ٢س ظا س (ب) ص = ظا^{٢} ٣س (جـ) ص = ظا ٤س^{٣}

الحـــل:

(أ) ∵ ص = ٢س ظا س → حاصل ضرب دالتين

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س × قا^{٢} س + ظا س × ٢ = ٢س قا^{٢} س + ٢ظا س

(ب) ∵ ص = ظا^{٢} ٣س = (ظا ٣س)^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢(ظا ٣س) × قا^{٢} ٣س × ٣ = ٦ظا ٣س قا^{٢} ٣س

(جـ) ∵ ص = ظا ٤س^{٣} ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} ٤س^{٣} × ١٢س^{٢} = ١٢س^{٢} قا^{٢} ٤س^{٣}

مثـــال٤:

إذا كانت ص = ٢س جاس جتاس فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = جا٢س + ٢س جا٢س

✍ الحـــل:

∵ ص = ٢س جاس جتاس ∴ ص = س × ٢ جاس جتاس = س جا٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ × جا٢س + ٢جتا٢س × س = جا٢س + ٢س جتا٢س

📖 مثـــال٥: أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

أ) ص = قاس ب) ص = قتا٤س جـ) ص = س^{٣} ظتا٢س

✍ الحـــل:

أ) ∵ ص = قاس ⇐ ∴ ص = $\frac{\text{١}}{\text{جتاس}}$ = (جتاس)$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −(جتاس)$^{-٢}$ × (−جاس) = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس × جتاس}}$ = قاس ظاس

ب) ∵ ص = قتا٤س ⇐ ∴ ص = $\frac{\text{١}}{\text{جا٤س}}$ = (جا٤س)$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١ × (جا٤س)$^{-٢}$ × (٤جتا٤س) = $\frac{\text{− ٤جتا٤س}}{\text{جا٤س×جا٤س}}$ = −٤ قتا٤س ظتا٤س

جـ) ∵ ص = س^{٣} ظتا٢س ∴ ص = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{ظا٢س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣س}^{٢} \times \text{ظا٢س} - (\text{٢قا}^{٢}\text{٢س}) \times \text{س}^{٣}}{(\text{ظا٢س})^{٢}}$ = $\frac{\text{٣س}^{٢} \times \text{ظا٢س}}{(\text{ظا٢س})^{٢}}$ − $\frac{\text{٢س}^{٣}\text{قا}^{٢}\text{٢س}}{(\text{ظا٢س})^{٢}}$

= $\frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{ظا٢س}}$ − $\frac{\text{٢س}^{٣}}{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}$ = ٣س^{٢}ظتا٢س − ٢س^{٣} قتا^{٢}٢س

📖 مثـــال٦:

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جاس + جا٢س **عند** س = $\frac{\pi}{٢}$

✍ الحـــل:

∵ ص = جاس + جا٢س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس + ٢جتا٢س

عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ ∴ **ميل المماس** = جتا$\frac{\pi}{٢}$ + ٢جتا٢ × $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ + ٢ × (−١) = −٢

مثـــال٧:

إذا كان ص = جا^{٢} س − جتا^{٢} س فاثبت أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جا٢س

الحـــل:

∵ ص = جا^{٢} س − جتا^{٢} س

∴ ص = −(جتا^{٢} س − جا^{٢} س) = − جتا٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −(− جا٢س) × ٢ = ٢جا٢س

مثـــال٨:

إذا كان ص = (جا س + جتا س)^{٢} فاثبت أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جتا٢س

الحـــل:

∵ ص = (جا س + جتا س)^{٢}

∴ ص = جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢جا س جتا س = ١ + جا٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ + (جتا٢س) × ٢ = ٢جتا٢س

مثـــال٩:

إذا كان ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$ فاثبت أن: (١ + جتا س)$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

الحـــل:

∵ ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$

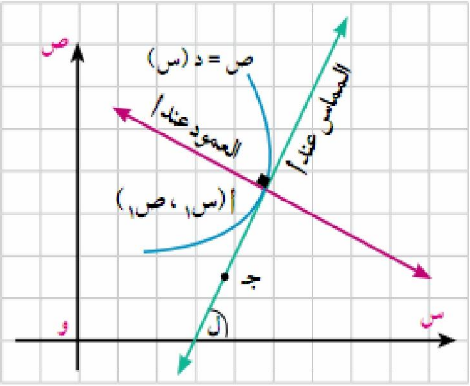
∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جتا س(١ + جتا س) − (− جا س)×جا س}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{جتا س + جتا}^{٢}\text{ س + جا}^{٢}\text{ س}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١ + جتا س}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{(١ + جتا س)}}$ ∴ (١ + جتا س)$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة

✱ميل المماس والعمودي على منحنى:

سبق أن علمنا أن المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة علية



أى أن

ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س)

عند النقطة أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه $= \left[\dfrac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

ويكون ظا ل $= \left[\dfrac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

حيث ل قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

> **تذكر أن:**
> إذا كان م١ ، م٢ ميلى مستقيمين معلومين ل١ ، ل٢ فإن:
> ➢ ل١ // ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ = م٢ (شرط التوازى)
> ➢ ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ × م٢ = −١ (شرط التعامد)

∴ ميل العمودى على المنحنى = سالب مقلوب ميل المماس

∴ ميل العمودى على المنحنى ص = د(س)

عند النقطة أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه $= \dfrac{-١}{\left[\dfrac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}}$

🕮 مثـــال١:

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س + ١ عند النقطة (١ ، −١)

✍ الحـــل:

∵ د(س) = س^{٢} − ٣س + ١ بالتفاضل ∴ د′(س) = ٢س − ٣

عند النقطة (١ ، −١) ∴ ميل المماس = د′(س)$_{(١ ، −١)}$ = ٢ × ١ − ٣ = ٢ − ٣ = −١

مثـــال٢:

أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ص = $س^٢$ − ٣س مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٢، − ٢) الواقعة عليه

الحـــل:

∵ ص = $س^٢$ − ٣س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س − ٣ عند النقطة (٢، − ٢)

∴ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}_{(٢،-٢)}$ = ٢ × ٢ − ٣ = ٤ − ٣ = ١ ∴ظا ل = ١ ∴ ل = ٤٥°

مثـــال٣:

أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^٢$ − ٤س + ٣ والتى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات

الحـــل:

∵ ص = $س^٢$ − ٤س + ٣

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س − ٤ ، ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ ميل المماس يساوى صفر

∴ ٢س − ٤ = ٠ ∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢ بالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ ص = $٢^٢$ − ٤ × ٢ + ٣ = ٤ − ٨ + ٣ = −١ ∴ النقطة هى (٢، −١)

مثـــال٤:

أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^٣$ − ٦س + ١ والتى يكون عندها المماس عمودى على المستقيم س − ٣ص + ٦ = ٠

الحـــل:

∵ ص = $س^٣$ − ٦س + ١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣$س^٢$ − ٦ ∴ ميل المماس = ٣$س^٢$ − ٦

، ميل المستقيم = $\frac{١}{٣}$ ∵ المماس عمودى على المستقيم ∴ ميل المماس = −٣

∴ ٣$س^٢$ − ٦ = −٣ ∴ $س^٢$ − ١ = ٠ ∴ س = ±١

عند س = ١ ∴ ص = $١^٣$ − ٦ × ١ + ١ = −٤ ∴ النقطة هى: (١، − ٤)

عند س = −١ ∴ ص = $(-١)^٣$ − ٦ × (−١) + ١ = ٦ ∴ النقطة هى: (−١، ٦)

✸ معادلتا المماس والعمودي لمنحنى:

١) معادلة المماس للمنحنى بمعلومية الميل (م) ونقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$ هي:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

٢) معادلة العمودى للمنحنى عند نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$ هي:

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$$

تذكر أن :

١) ميل المماس للمنحنى عند اى نقطه = المشتقة الاولي للمنحنى عند نفس النقطه

٢) اذا كان المماس يصنع زاوية قياسها ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن: ميل المماس $=$ ظا ل

٣) اذا كان المماس يمر بالنقطتين $(س_١،ص_١)$ ، $(س_٢،ص_٢)$ فإن: ميل المماس $= \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

٤) اذا كان المماس يوازى المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ فإن: ميل المماس $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

٥) اذا كان المماس عمودى على المستقيم فإن: ميل المماس = – مقلوب ميل المستقيم

٦) اذا كان المماس يوازى محور السينات فإن: ميل المماس = صفر اى أن بسط الميل = صفر

٧) اذا كان المماس يوازى محور الصادات فإن:

ميل المماس = غير معرف أى أن مقام الميل = صفر

ملاحظات هامة :

١) لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ونحسب قيم س

٢) لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادت نضع س = ٠ ونحسب قيم ص

٣) لإيجاد نقط تقاطع منحنى مع مستقيم نحل معادلتى المنحنى والمستقيم جبريا

٤) المنحنيان يتماسان اي يكون لهما مماس مشترك اذا كان:

ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثاني

٥) إذا وقعت نقطة علي المنحنى فهى تحقق معادلة المنحنى

مثـــال٥:

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = س^{٢} - ٣س + ٢$ عند نقط تقاطعه مع محور السينات

الحـــل:

$ص = س^{٢} - ٤س - ٥$ بالتفاضل $\therefore ص' = ٢س - ٤$

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع $ص = ٠$

$\therefore س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠ \quad \therefore (س + ١)(س - ٥) = ٠ \quad \therefore س = -١$ أو $س = ٥$

نقط التقاطع هى $(-١،٠)$ ، $(٥،٠)$

عند النقطة $(-١،٠)$ $\therefore$ ميل المماس $= ص'_{(-١،٠)} = ٢ \times -١ - ٤ = -٢ - ٤ = -٦$

عند النقطة $(٥،٠)$ $\therefore$ ميل المماس $= ص'_{(٥،٠)} = ٢ \times ٥ - ٤ = ١٠ - ٤ = ٦$

مثـــال٦:

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $ص = \frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى $= ١$ ، هل النقطة أ $(-٣،٤)$ تقع على المماس؟

الحـــل:

$\because ص = \frac{س + ٣}{س + ١}$ وعند $س = ١$ $\therefore ص = \frac{١ + ٣}{١ + ١} = ٢$ $\therefore$ النقطة هى: $(١،٢)$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١ \times (س + ١) - ١ \times (س + ٣)}{(س + ١)^{٢}} = \frac{س + ١ - س - ٣}{(س + ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(س + ١)^{٢}}$$

عند النقطة هى: $(١،٢)$ $\therefore$ ميل المماس $م = \frac{-٢}{(١ + ١)^{٢}} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\because$ معادلة المماس هى: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$\therefore ص - ٢ = \frac{-١}{٢}(س - ١) \quad \therefore ٢ص - ٤ = -س + ١ \quad \therefore س + ٢ص - ٥ = ٠$

، $\because$ معادلة العمودى هى: $ص - ص_{١} = \frac{-١}{م}(س - س_{١})$

$\therefore ص - ٢ = ٢(س - ١) \quad \therefore ص - ٢ = ٢س - ٢ \quad \therefore ٢س - ص = ٠$

بالتعويض بالنقطة أ $(-٣،٤)$ فى معادلة المماس

الطرف الأيمن $= -٣ + ٢ \times ٤ - ٥ = ٨ - ٨ = ٠$ $\therefore$ النقطة تقع على المماس لأنها تحقق معادلته

مثـــال٧:

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = س جا٢س عند النقطة $(\frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{4})$

الحــل:

∵ ص = س جا٢س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ × جا٢س + (٢جتا٢س) × س = جا٢س + ٢س جتا٢س

عند النقطة $(\frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{4})$ ∴ ميل المماس م = جا٢ × $\frac{\pi}{4}$ + ٢ × $\frac{\pi}{4}$ جتا٢ × $\frac{\pi}{4}$ = ١

∵ معادلة المماس هى: ص − ص١ = م(س − س١)

∴ ص − $\frac{\pi}{4}$ = ١ × (س − $\frac{\pi}{4}$) ∴ ص − $\frac{\pi}{4}$ = س − $\frac{\pi}{4}$ ∴ س − ص = ٠

، ∵ معادلة العمودى هى: ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$(س − س١)

∴ ص − $\frac{\pi}{4}$ = −١ × (س − $\frac{\pi}{4}$) ∴ ص − $\frac{\pi}{4}$ = −س + $\frac{\pi}{4}$ ∴ س + ص − $\frac{\pi}{2}$ = ٠

مثـــال٨:

أوجد قيمة كل من الثابتين أ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أس + ب عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه يساوى ٥

الحــل:

ص = س^{٢} + أس + ب ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + أ ∴ ميل المماس = ٢س + أ

∵ النقطة (١، ٣) تقع على المنحنى ∴ هى تحقق معادلته

∴ ٣ = ١^{٢} + أ × ١ + ب ∴ أ + ب = ٢ (١)

∵ عند النقطة (١، ٣) ميل المماس = ٥ ∴ ٢ × ١ + أ = ٥ ∴ أ = ٣

بالتعويض فى (١) ∴ ٣ + ب = ٢ ∴ ب = −١

مثـــال٩:

أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى ص = س^{٢} − ٨س + ١٩ عند النقطة (٥، ٤) الواقعة عليه

الحـــل:

∵ ص = $\text{س}^{٢}$ − ٨س + ١٩

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س − ٨

عند النقطة (٥، ٤) ∴ ميل المماس م = ٢ × ٥ − ٨ = ٢

∵ معادلة المماس هى: ص − $\text{ص}_{١}$ = م(س − $\text{س}_{١}$)

∴ ص − ٤ = ٢(س − ٥) ∴ ص − ٤ = ٢س − ١٠ ∴ ٢س + ص − ٦ = ٠

، ∵ معادلة العمودى هى: ص − $\text{ص}_{١}$ = $\frac{-١}{\text{م}}$(س − $\text{س}_{١}$)

∴ ص − ٤ = $\frac{-١}{٢}$(س − ٥) ∴ ٢ص − ٨ = −س + ٥ ∴ س + ٢ص − ١٣ = ٠

نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠ ∴ ٢س − ٦ = ٠ ∴ س = ٣

نقطة تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠ ∴ س − ١٣ = ٠ ∴ س = ١٣

∴ طول قاعدة المثلث = ١٣ − ٣ = ١٠

، إرتفاع المثلث = الإحداثى الصادى للنقطة الواقعة على المنحنى = ٥

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مساحة

٣ - ٦ التكامل

✸ المشتقة العكسية:

أذا كانت ص = د(س) فإن عملية التفاضل هى إيجاد المشتقة الأولى للدالة أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

والعكس هو: إذا كان المعلوم هو المشتقة الأولى للدالة أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

فإن عملية إيجاد الدالة الأصلية ص تسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية

أى أن:

$$\text{د(س)} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \text{دَ(س)} \qquad \text{دَ(س)} \xrightarrow{\text{تكامل}} \text{د(س)}$$

فمثلا:

س^{٢} هى مشتقة عكسية للدالة ٢س

ونلاحظ أن الدالة ٢س لها مشتقات عكسية كثيرة مثل س^{٢} + ١ ، س^{٢} − ٣ ، س^{٢} + ث حيث

ث ∈ ح وذلك لأن مشتقة هذه الدوال جميعا هى ٢س

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(س^{٢} + ث) = ٢س وسبب إضافة الثابت ث هو أن تفاضل المقدار الثابت يساوى صفر

✸ تعريف:

يقال أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كان تَ(س) = د(س) لكل س فى مجال د

مثـــال١:

اثبت أن الدالة ت حيث ت(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{٥}

الحـــل:

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون:

$$\text{تَ(س)} = \frac{١}{٢} \times ٦\text{س}^{٦-١} = ٣\text{س}^{٥}$$

∴ تَ(س) = د(س) ∴ الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

✸ التكامل غير المحدد:

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة

ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ءس (ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س)

✸ تعريف:

إذا كان تَ(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ءس = ت(س) + ث حيث ث ثابت التكامل

فمثلا:

$\frac{ء}{ءس}$(س^{٣} + ٢) = ٣س^{٢} ∴ $\int$ ٣س^{٢}ءس = س^{٣} + ث

، $\frac{ء}{ءس}$(س^{٥} − ٤) = ٥س^{٤} ∴ $\int$ ٥س^{٤}ءس = س^{٥} + ث

، $\frac{ء}{ءس}$(٢س^{٧}) = ١٤س^{٦} ∴ $\int$ ١٤س^{٦}ءس = ٢س^{٧} + ث

مثال٢:

تحقق من صحة كل مما يأتى:

(أ) $\int$ س$^{-٤}$ءس = $\frac{-١}{٣}$س$^{-٣}$ + ث

(ب) $\int$ س$\sqrt{١ + س^{٢}}$ءس = $\frac{١}{٣}$(١ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

الحـــل:

للتحقق من الصحة نفاضل الطرف الأيسر

(أ) ∵ $\frac{ء}{ءس}$($\frac{-١}{٣}$س$^{-٣}$ + ث) = $\frac{-١}{٣}$ × (−٣س$^{-٤}$) + ٠ = س$^{-٤}$

∴ $\int$ س$^{-٤}$ءس = $\frac{-١}{٣}$س$^{-٣}$ + ث

(ب) ∵ $\frac{ء}{ءس}$($\frac{١}{٣}$(١ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث) = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$(١ + س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ × ٢س

= س(١ + س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ = س$\sqrt{١ + س^{٢}}$

∴ $\int$ س$\sqrt{١ + س^{٢}}$ءس = $\frac{١}{٣}$(١ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

قاعدة:

$$\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$$

أى أنه لتكامل متغير مرفوع لأس يتم زيادة الأس بمقدار واحد ثم نقسم على الأس الجديد

حيث ث ثابت التكامل ، ن عدد نسبى $\neq -1$

مثـــال٣:

أوجد:

(أ) $\int س^{8}\,ءس$ (ب) $\int س^{\frac{2}{3}}\,ءس$ (جـ) $\int \sqrt[7]{س^{5}}\,ءس$ (د) $\int 7س^{\frac{7}{9}}\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int س^{8}\,ءس = \frac{س^{8+1}}{8+1} + ث = \frac{1}{9}س^{9} + ث$

(ب) $\int س^{\frac{2}{3}}\,ءس = \frac{س^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + ث = \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} + ث$

(جـ) $\int \sqrt[7]{س^{5}}\,ءس = \int س^{\frac{5}{7}}\,ءس = \frac{س^{\frac{5}{7}+1}}{\frac{5}{7}+1} + ث = \frac{7}{12}س^{\frac{12}{7}} + ث$

(د) $\int 7س^{\frac{7}{9}}\,ءس = \frac{7س^{\frac{7}{9}+1}}{\frac{7}{9}+1} + ث = \frac{63}{16}س^{\frac{16}{9}} + ث$

✱ خواص التكامل:

إذا كان كل من د ، ر دالة قابلة للإشتقاق على فترة ما فإن:

١- $\int أ\,د(س)\,ءس = أ\int د(س)\,ءس$ حيث أ ثابت $\neq 0$

٢- $\int (د(س) \pm ر(س))\,ءس = \int د(س)\,ءس \pm \int ر(س)\,ءس$

مثـــال٤:

أوجد:

(أ) $\int (٢ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})\,ءس$ (ب) $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ٣)\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int (٢ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})\,ءس = \int (٢ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{-١}{٢}})\,ءس$

$= ٢س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث = ٢س + \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٢}} + ٢\sqrt{س} + ث$

(ب) $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ٣)\,ءس = \int (س^{-٢} + س^{\frac{١}{٢}} + ٣)\,ءس$

$= -س^{-١} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س + ث = \frac{-١}{س} + \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + ٣س + ث$

*** بعض قواعد التكامل:**

١- $\int (أس + ب)^{ن}\,ءس = \frac{١}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١} + ث$

اى أنه لتكامل مقدار من الدرجة الأولى مرفوع لأس نقسم على معامل س و نزيد على الأس واحد و نقسم على الأس الجديد

٢- $\int (د(س))^{ن}\, د'(س)\,ءس = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١} + ث$

اى أنه لتكامل قوس مرفوع لأس مضروب فى مشتقة مابداخل القوس نزيد على اس القوس واحد و نقسم على الأس الجديد

حيث ث ثابت التكامل ، ن عدد نسبى $\neq -١$

مثـــال٥:

أوجد:

(أ) $\int (٣س + ٥)^{-٩}\,ءس$

(ب) $\int (س + ١)(س + ٣)^{٧}\,ءس$

(جـ) $\int (س^{٢} + ٣س - ٢)^{٩}(٢س + ٣)\,ءس$

(د) $\int س(٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٥}(٢س - ١)\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int (٣س + ٥)^{-٩}\,ءس = \frac{١}{٣} \times \frac{(٣س + ٥)^{-٨}}{-٨} + ث = \frac{-١}{٢٤}(٣س + ٥)^{-٨} + ث$

(ب) $\int (\text{س}+١)(\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس} = \int (\text{س}+٣-٢)(\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+٣)(\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس} - ٢\int (\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+٣)^{٨}\,\text{ءس} - ٢\int (\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس} = \frac{١}{٩}(\text{س}+٣)^{٩} - \frac{١}{٤}(\text{س}+٣)^{٨} + \text{ث}$

(ج) $\int (\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)^{٩}(٢\text{س}+٣)\,\text{ءس}$

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢) = ٢\text{س}+٣$

$\therefore \int (\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)^{٩}(٢\text{س}+٣)\,\text{ءس} = \frac{١}{١٠}(\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)^{١٠} + \text{ث}$

(د) $\int \text{س}(٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٥}(٢\text{س}-١)\,\text{ءس}$

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤) = ١٢\text{س}^{٢}-٦\text{س}$

$\therefore \int \text{س}(٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٥}(٢\text{س}-١)\,\text{ءس} = \int (٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٥}(٢\text{س}^{٢}-\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٦}\int (٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٥}(١٢\text{س}^{٢}-٦\text{س})\,\text{ءس} = \frac{١}{٣٦}(٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٦} + \text{ث}$

✱ تكامل بعض الدوال المثلثية:

١− $\int \text{جاس}\,\text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{ث}$

٢− $\int \text{جتاس}\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{ث}$

٣− $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{ث}$ حيث ث ثابت إختيارى

مثال٦:

أوجد: (أ) $\int (\text{س} - \text{جاس})\,\text{ءس}$ (ب) $\int \left(٤\text{جتاس} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + ١\right)\text{ءس}$

الحل:

(أ) $\int$ (س − جاس) ءس = $\frac{1}{2}$ س^{2} + جتاس + ث

(ب) $\int$ (٤جتاس + $\frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$ + ١) ءس = $\int$ (٤جتاس + قا^{2}س + ١) ءس = ٤جاس + ظاس + س + ث

✸ نتائج هامة:

١ − $\int$ جا(أس + ب) ءس = $\frac{-1}{أ}$ جتا(أس + ب) + ث

٢ − $\int$ جتا(أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ جا(أس + ب) + ث

٣ − $\int$ قا^{2}(أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ ظا(أس + ب) + ث حيث ث ثابت إختيارى

علاقات هامة:

١) $\boxed{\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = 1}$

٢) ١ + ظا^{2}س = قا^{2}س ومنها $\boxed{\text{ظا}^{2}\text{س} = \text{قا}^{2}\text{س} - 1}$

٣) $\boxed{\text{٢جاس جتاس} = \text{جا٢س}}$

٤) $\boxed{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س} = \text{جتا٢س}}$

ومنها $\boxed{\text{جا}^{2}\text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا٢س}}$ ، $\boxed{\text{جتا}^{2}\text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا٢س}}$

مثـــال٧:

أوجد: (أ) $\int$ جا(٣س − ٥) ءس (ب) $\int$ جتا($\frac{\text{س}}{3}$ − ٢) ءس

(ج) $\int$ (٣ + ٤ظا^{2}س) ءس (د) $\int$ (قا^{2} $\frac{\text{س}}{2}$ − جا($\frac{\pi}{4}$ − س)) ءس

الحـــل:

(أ) $\int \text{جا}(٣\text{س} - ٥)\,\text{ءس} = \frac{-١}{٣}\,\text{جتا}(٣\text{س} - ٥) + \text{ث}$

(ب) $\int \text{جتا}(\frac{\text{س}}{٣} - ٢)\,\text{ءس} = \frac{١}{\frac{١}{٣}}\,\text{جا}(\frac{\text{س}}{٣} - ٢) + \text{ث} = ٣\,\text{جا}(\frac{\text{س}}{٣} - ٢) + \text{ث}$

(جـ) $\int (٣ + ٤\,\text{ظا}^٢\text{س})\,\text{ءس} = \int (٣ + ٤(\text{قا}^٢\text{س} - ١))\,\text{ءس} = \int (٣ + ٤\,\text{قا}^٢\text{س} - ٤)\,\text{ءس}$

$= \int (٤\,\text{قا}^٢\text{س} - ١)\,\text{ءس} = ٤\,\text{ظاس} - \text{س} + \text{ث}$

(د) $\int (\text{قا}^٢\frac{\text{س}}{٢} - \text{جا}(\frac{\pi}{٤} - \text{س}))\,\text{ءس} = ٢\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} - \text{جتا}(\frac{\pi}{٤} - \text{س}) + \text{ث}$

مثال٨:

أوجد:

(أ) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^٢\,\text{ءس}$ (ب) $\int (١ + \text{جتاس})^٢\,\text{ءس}$ (جـ) $\int (٤ - \text{جا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

(أ) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^٢\,\text{ءس} = \int (\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} + ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + \text{جا}٢\text{س})\,\text{ءس} = \text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{ث}$

(ب) $\int (١ + \text{جتاس})^٢\,\text{ءس} = \int (١ + ٢\,\text{جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + ٢\,\text{جتاس} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس} = \int (\frac{٣}{٢} + ٢\,\text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث} = \frac{٣}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} + \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$

(جـ) $\int (٤ - \text{جا}^٢\text{س})\,\text{ءس} = \int (٤ - (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}))\,\text{ءس} = \int (\frac{٧}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{٧}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث} = \frac{٧}{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$