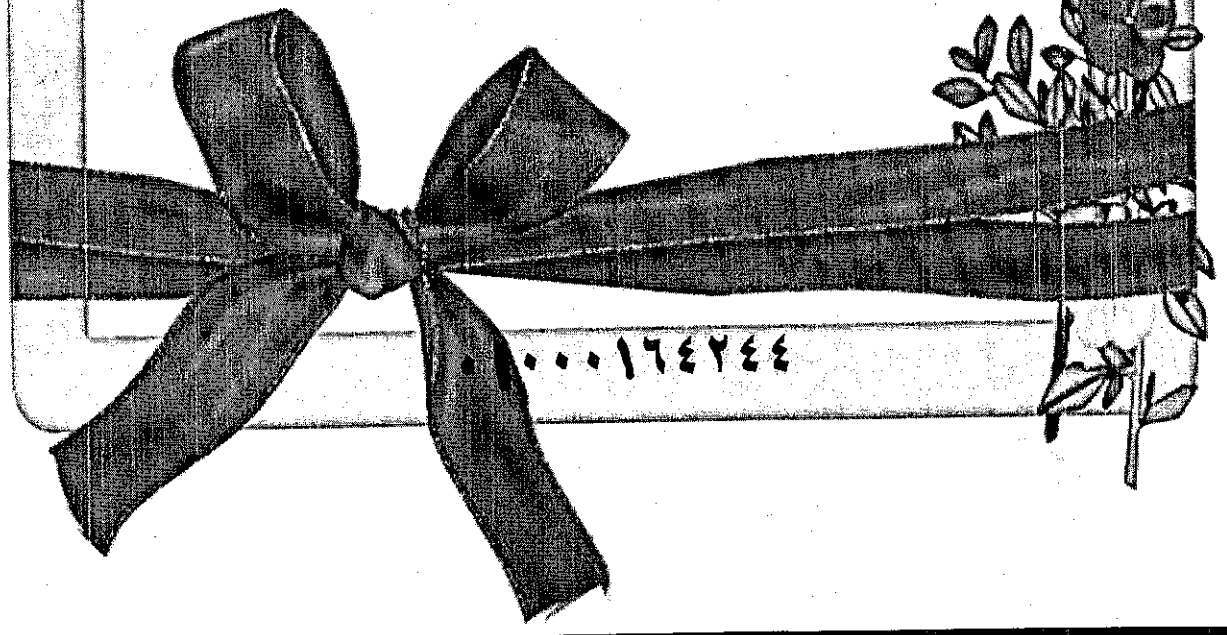
مذكرة الجبر

الصف الثاني الثانوي

الترم الثاني

إعداد

م / ناصر أبوزيد



٠٠١٦٤٢٤٤

المتتابعات والمتسلسلات

أولاً : المتتابعة

هى دالة مجالها ص+ أو جزئية منه ومداها جزء من ح

مثل

(٢، ٥، ٨، ١١، ...) ، (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...)

حيث ق(ن) = (ق١، ق٢، ... ق ن)

* المتتابعة المنتهية : عدد حدودها معلوم مثل (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠)

* " غير المنتهية : عدد حدودها غير معلوم مثل (١، ٤، ٧، ...)

مثال ١

اكتب حدود المتتابعات الآتية حدودها النونى يحقق العلاقة :

أ ق ن = ن٢ - ١ ب الخمس حدود بداية من الأول

ج ق ن = $\frac{(-1)^{ن}}{1+ن٢}$ د عدد غير منته من الحدود وبداية من الثانى

الحل

أ ق١ = ١ - ١ = صفر ، ق٢ = ٤ - ١ = ٣

ق٣ = ٩ - ١ = ٨ ، ق٤ = ١٦ - ١ = ١٥

ق٥ = ٢٥ - ١ = ٢٤

(ق ن) = (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤)

ب ق١ = $\frac{-1}{1+2}$ = $\frac{-1}{3}$ ، ق٢ = $\frac{1}{1+4}$ = $\frac{1}{5}$

ق٣ = $\frac{-1}{1+6}$ = $\frac{-1}{7}$ ، ق٤ = $\frac{1}{1+8}$ = $\frac{1}{9}$

∴ ق ن = ($\frac{-1}{3}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{-1}{7}$، $\frac{1}{9}$، ...)

تصويب

اكتب الخمس حدود الأولى للمتتابعة ق ن = ط $\frac{π}{ن}$

أكد العام للمتتابعة

أولاً: النوع الأول

١) (٢، ٦، ٢٤، ٢٨، ٦٢، ـــ) اعداد زوجية ← $ع_ن = ٢ن$

٢) (١، ٢، ٥، ٧، ١٠، ـــ) فردية ← $ع_ن = ٢ن - ١$

٣) (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ـــ) مربعات الاعداد ← $ع_ن = ن^٢$

٤) (٢، ٩، ٢٨، ٦٥، ١٢٦، ـــ) ← $ع_ن = ٣^ن + ١$

ثانياً

مثال: اضافة أو طرح عدد ثابت (أ)

يكون حدها العام $ن$ وتطرح اول حد من أ فتكون أكد الحاكم

١) (٦، ١١، ١٨، ٢٧، ٣٨، ـــ) $أ = ٣$ مقدار الزيادة

$ع_ن = ٣ن + ٣$ ثم $٥ - أ = ٢$ (أكد الحاكم)

٢) (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ـــ) $أ = ٤$ مقدار الزيادة

$ع_ن = ٤ن - ١$ أو $٤ن - ٤ + ٣ = ٤ن - ١$

٣) (١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ـــ) ← $ع_ن = ٥ن$ أو $٥ن + ٠$

ثالثاً

مثال: الضرب أو القسمة على عدد ثابت (أ)

يكون أكد الحاكم دالة أسية $أ^ن \times$ (أ)

١) (٣، ٦، ١٢، ٢٤، ـــ) $أ = ٢$ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{١٤}{٨} = \frac{٢}{١}$

← $ع_ن = \frac{٣}{٢}(٢)^ن$

٢) (٤، ١٢، ٣٦، ١٠٨، ـــ) $أ = ٣$ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{١٤}{٨} = \frac{٤}{٣}$

← $ع_ن = \frac{٤}{٣}(٣)^ن$

رابعاً

مثال: المتتابعة الكسرية توجد متتابعة البسط والمقام كلاً على حده

١) اذا كانت اشارة الحدود + ، − ، + ، − ، ... $ن+١$

نضع $(-١)^ن$ × (أكد العام) واذا بدأنا + ، − نكون (-١)

تابع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ أكد النوع

مثال ١

* أكد العام للمتتابعة (٢، ٤، ٦، ٨، ...) هو $ح_ن = ٢ن$
* " " " (١، ٣، ٥، ٧، ...) هو $ح_ن = ٢ن - ١$
* " " " (١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...) هو $ح_ن = ن^٣$
* " " " $(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٥}، \frac{١}{٧}، \frac{١}{٩}، ...)$ هو $ح_ن = \frac{١}{٢ن+١}$

وهكذا ـــــــ

مثال ٢ ـــــ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة المعرفة كالآتى : $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ٣ح_ن$ حيث $ن \leq ١٢$

الحل

أكد العام $ح_ن = ٢ \times ٣^{ن-١}$ بوضع $ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥$

* $ن = ١ \Leftarrow ح_٢ = ٣ح_١ = ٣ \times ٢ = ٦$
* $ن = ٢ \Leftarrow ح_٣ = ٣ح_٢ = ٣ \times ٦ = ١٨$
* $ن = ٣ \Leftarrow ح_٤ = ٣ح_٣ = ٣ \times ١٨ = ٥٤$
* $ن = ٤ \Leftarrow ح_٥ = ٣ح_٤ = ٣ \times ٥٤ = ١٦٢$

$\therefore (ح_ن) = (٢، ٦، ١٨، ٥٤، ١٦٢)$

وأكد العام $= ح_ن = ن^٢$ فمثلاً $ح_٧ = ٧^٢ = ١٤٩$

مثال ٣ اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_{ن+١} = ح_{ن+٢} - ح_ن$ ، $ح_١ = ٢، ح_٢ = ٣$

الحل

$ح_٣ = ح_{١+١} = ح_{٢+١} - ح_١ = ٣ - ٢ = ١$

$ح_٤ = ح_{٢+١} = ح_{٣+١} - ح_٢ = ١ - ٣ = -٢$

$ح_٥ = ح_{٣+١} = ح_{٤+١} - ح_٣ = -٢ - ١ = -٣$

$ح_٦ = ح_{٤+١} = ح_{٥+١} - ح_٤ = -٣ - (-٢) = -١$

$\therefore (ح_ن) = (٢، ٣، ١، -٢، -٣، -١)$

* $ن = ٢ \Leftarrow ح_٢ = ح_٤ - ح_٢ \Rightarrow ح_٤ = ٥ + ٢ = ٨$
* $ن = ٣ \Leftarrow ح_٤ = ح_٥ - ح_٣ \Rightarrow ح_٥ = ٨ + ٥ = ١٣$
* $ن = ٤ \Leftarrow ح_٥ = ح_٦ - ح_٤ \Rightarrow ح_٦ = ١٣ + ٨ = ٢١$

∴ تتتابع الفيبوناتشى هكذا $ن = ٥ ، ن = ٦$

∴ $(ح_ن) = (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ٢١ ، \ldots)$

تمرين: اكتب الحد العام للمتتابعة

$(ح_ن) = (٠ ، ٧ ، ٦ ، ٢٤ ، ٦٢ ، \ldots)$

ثم اوجد $ح_٦$

س: متى تكون المتتابعة تزايدية ومتى تكون تناقصية

* اذا كان $ح_{ن+١} > ح_ن \longrightarrow (ح_ن)$ تزايدية
* اذا كان $ح_{ن+١} < ح_ن \longrightarrow (ح_ن)$ تناقصية

مثال ٤

بين أياً من المتتابعات الآتية تزايدية وأيها تناقصية

أ $ح_ن = ٢ن + ٥$ ب $ح_ن = \frac{١}{١ - ٢ن}$ مرفوعة للأس

ج $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢^ن} + ٣$

الحل

أ $ح_{ن+١} = ٥ + (ن+١)٢ = ٥ + ٢ن + ٢ = ٢ن + ٧$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_ن = ٢ن + ٧ - ٢ن - ٥ = ٢ > ٠$

$\therefore (ح_ن)$ تزايدية

ب $ح_{ن+١} = \frac{١}{١ - ٢(ن+١)} = \frac{١}{١ - ٢ن - ٢} = \frac{١}{-١ - ٢ن} = \frac{١}{٢ن + ٣}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{٢ن + ٣} - \frac{١}{١ - ٢ن}$

$= \frac{١ - ٢ن - ٢ن - ٣}{(١ - ٢ن)(٢ن + ٣)} = \frac{-٤ن - ٢}{(١ - ٢ن)(٢ن + ٣)} < ٠$ صفر

المفهوم

١ بين نوع المتتابعة الآتية من حيث كونها تزايدية أم تناقصية

★ $ح_ن = ٥ - ٢ن$

★ $ح_ن = \frac{٥}{ن+١}$

٢ اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة الآتية

★ $(٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)$

★ $(٦ ، ١٨ ، ٣٥ ، ... ، ٦٠)$

★ $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٤} ، \frac{٣}{٨} ، \frac{٤}{١٦} ، ...)$

★ $(٥ ، \frac{٩}{٦} ، \frac{١٣}{٩} ، \frac{١٧}{١٢} ، ...)$

★ $(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...)$

★ $(٣ ، -١٠ ، ٢٩ ، -٦٦ ، ...)$

★ $(٩ ، ٩٩ ، ٩٩٩ ، ٩٩٩٩ ، ...)$

٠١٠٠٠١٦٤٢٤٤

مثال ٥

متتابعة حسابية فيها $ح_١ = ٩$ ، $ح_٢ = ٢٦$

أوجد $ح_ن$ بدلالة $ن$

الحل

$ح_{ن+١} = ح_ن + ن س$

بوضع $ن = ١$

$ح_٢ = ح_١ + س$

$٢٦ = ٩ + س$

$س = ١٧$ ← ①

بوضع $ن = ٢$

$ح_٣ = ح_٢ + ٢س$

$٣٦ = ٢٦ + ٢س$ ← ②

من ① في ②

$٣٦ = ٩ + س + ٢س$

$٢٧ = ٣س$

$س = ٩$

تصحيح أوجد الحد العام

$(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)$

$ح_ن = ٣ \times ٢^{ن-١}$

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٣٨٤

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

ثانيا : المتسلسلات

وهى المجموع حدود المتتابعة مثل $٢+٤+٦+٨+\cdots$
ورمزها سيجما Σ

* المتسلسلة الحسابية :

$ن \in ط^+$: $ح_ن$ ، $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $\cdots$ ، $ح_ن$

مثال المتسلسلة الحسابية $٣+٦+٩+١٢+\cdots+٣ن$

يمكن كتابتها بالصورة

$\sum_{ر=١}^{ن} (٣ر)$ وتقرأ مجموع $٣ر$ من $ر=١$ إلى $ر=ن$

مثال ① اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم اوجد مجموع المفكوك

ⓐ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$ ⓑ $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر+١)$

الحل

ⓐ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢) = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ =$ **٣٠**

ⓑ $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر+١) = ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥$

$=$ **٩١**

مثال ② اكتب مفكوك $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right)$ ثم اوجد مجموعه

الحل

$\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right) = \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) + \cdots + \left(\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١}\right)$

$= ١ - \frac{١}{ن+١} =$ **$\frac{ن}{ن+١}$** (بحذف كل عدد وعكسه)

إعداد أ/ ناصر أبوزيد
ت/ ٠١١ ١٥ ١٥ ٦٢ ٣٢

لتعويض: اكتب المتسلسلة من كل مما يأتى واوجد مجموعها

① $\sum_{r=1}^{5}(1+r^2)$ ② $\sum_{r=1}^{\infty}(2r+2)$

المتسلسلة غير المنتهية

يمكن حصر عدد حدودها اى ليه عدد حدودها عدد لانهائى

★ مثل $-2+9-27+81-243+\cdots$

يمكن كتابتها $\sum_{r=1}^{\infty}(-2)^r$

مثال ①

★ استخدم رمز التجميع فى كتابة المتسلسلة

$(1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots)$

الحل

الحد العام هو $u_r = r(r+1)$ ∴ المتسلسلة $= \sum_{r=1}^{\infty} r(r+1)$

مثال ②

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة

$\frac{2}{1}\times2+\frac{3}{2}\times3+\frac{4}{3}\times4+\frac{5}{4}\times5+\cdots$

الحل

الحد العام هو $u_r = \frac{r+1}{r}(r+2)$

∴ $\frac{2}{1}\times2+\frac{3}{2}\times3+\frac{4}{3}\times4+\frac{5}{4}\times5+\cdots = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+1)(r+2)}{r}$

مثال ③

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة

$2\times4\times5+5\times6\times7+8\times8\times9+\cdots$

الحل

الحد العام $u_r = (r+2)(r+3)(r+4)$ ∴ المتسلسلة $= \sum_{r=1}^{\infty}(r+2)(r+3)(r+4)$

الخواص الجبرية للتجميع

١ اذا كانت $(ع_ر)$ ، $(ج_ر)$ متتابعتين ، $ن \in ط^+$ ، $ج \neq$ ثابت

① $\sum_{ر=١}^{ن} ج = ج ن$

مثال $\sum_{ر=١}^{٥} ٤ = ٤ \times ٥ = ٢٠$

② $\sum_{ر=١}^{ن} ج ع_ر = ج \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر$

مثال $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ ر^٢ = ٢ \sum_{ر=١}^{٥} ر^٢ = ٢ (١+٤+٩+١٦+٢٥) = ٢ \times ٥٥ = ١١٠$

③ $\sum_{ر=١}^{ن} (ع_ر \pm ج_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ج_ر$

مثال $\sum_{ر=١}^{ن} (ر^٢ + ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} ر$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

مثال ① اوجد ناتج $(١ + ٢ + ٣ + ٤ + \cdots + ٢٠)$

الحل

$= \sum_{ر=١}^{٢٠} ر = \frac{٢٠(٢٠+١)}{٢} = ٢١٠$ حيث $ن = ٢٠$

مثال ② اوجد ناتج $(١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \cdots + ١٠٠)$

الحل

$= \sum_{ر=١}^{١٠} ر^٢ = \frac{١٠(١٠+١)(٢٠+١)}{٦} = \frac{١٠ \times ١١ \times ٢١}{٦} = ٣٨٥$

مثال ③ اوجد بطريقتين مختلفتين $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ - ٣ر + ر^٢)$

الحل

* الطريقة الأولى (التعويض المباشر) $= ٢ + ٢ + ٦ + ١١ = ٢٢$

الطريقة الثانية (باستخدام القوانين)

$$\sum_{r=1}^{4} r^2 + \sum_{r=1}^{4} r + \sum_{r=1}^{4} 3 = \frac{4\times5\times9}{6} + \frac{4\times5}{2} + 4\times3$$

$$= 30 + 10 - 12 = 28$$

باستخدام القوانين أوجد قيمة

(1) $\sum_{r=8}^{12} 2(r+5)$

(2) $\sum_{r=5}^{8} (2r^2 - 2r)$

الحل

$$\sum_{r=8}^{12} 2(r+5) = \sum_{r=1}^{12} 2(r+5) - \sum_{r=1}^{7} 2(r+5)$$

$$= \sum_{r=1}^{12} 2r + 10 - \sum_{r=1}^{7} 2r + 10$$

$$= \sum_{r=1}^{12} 2r + 10 - \left[\sum_{r=1}^{7} 2r + 10\right]$$

$$= 2\times\frac{12\times13}{2} + 10\times12 - \left[2\times\frac{7\times8}{2} + 10\times7\right]$$

$$= 156 + 120 - 56 - 70 = 150$$

---

(2) مترك للطالب

المتتابعة الحسابية

تعريف

$(ح_ن)$ تسمى متتابعة حسابية
اذا كان $ح_{ن+1} - ح_ن =$ ثابت
والمقدار الثابت يسمى الأساس
ويرمز له بالرمز $ء$

مثال

★ $(2، 7، 12، 17، ــــ)$
الأساس هو $ء = 5$

★ $(27، 24، 21، 18، ــــ)$
$ح_ن$ أساسها -3

★ $(\frac{1}{9}، \frac{1}{7}، \frac{1}{5}، ــــ)$
$ح_ن$ أساسها $\frac{2}{35}$

بين أى من الآتى متتابعة حسابية

[1] $ح_ن = 2ن - 3$
$= 2(ن+1) - 3 - (2ن - 3)$
$= 2ن + 2 - 3 - 2ن + 3 = 2$

[2] $ح_ن = ن^2$
$ح_{ن+1} - ح_ن = (ن+1)^2 - ن^2$
$= ن^2 + 2ن + 1 - ن^2 = 2ن + 1$
ليس ثابتاً
$\therefore ح_ن$ ليست حسابية

[3] $ح_ن = 2^ن$
$ح_{ن+1} - ح_ن = 2^{ن+1} - 2^ن$
$= 2^ن (2 - 1) = 2^ن$
وهذا ليس مقدار ثابت
$\therefore ح_ن$ ليست حسابية

[4] $ح_ن =$ ٢ مقدار ثابت $\therefore ح_ن$ حسابية
$ح_{ن+1} - ح_ن = 2 - 2 = 0$

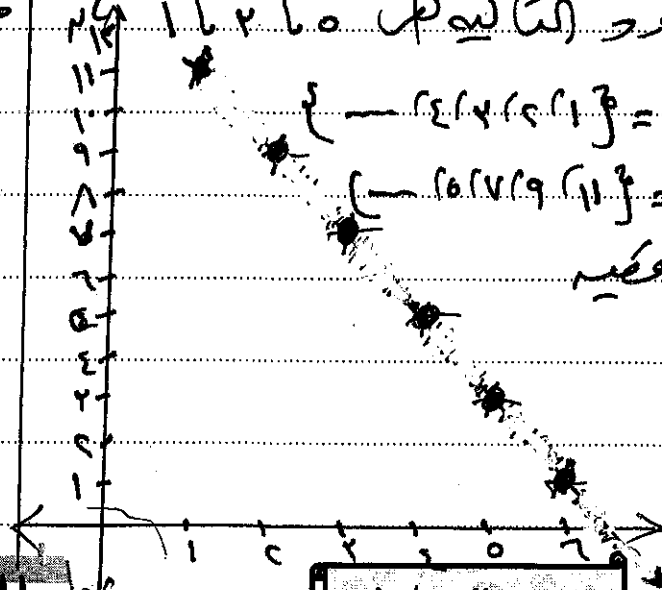
ملحوظة

متتابعة الحسابية هى
متتابعة (دالة) من الدرجة
الأولى أساسها معامل $ن$

★ تكون المتتابعة تزايدية
اذا كان $ء > 0$
★ تكون المتتابعة تناقصية
اذا كان $ء < 0$
★ لإيجاد أساس المتتابعة $ح_ن = 5 - 2ن$

* اكد لهام ح المتتابعه الحسابيه
ح$_ن$ = أ + (ن-١) د
حيث أ اكد الاول ، ن رتبه اكد
مثال
ح$_٥$ = أ + ٤ د
ح$_٧$ = أ + ٦ د
* اكد الاصغر ح المتتابعه الحسابيه
ل = أ + (ن-١) د
حيث ن عدد حدود المتتابعه
* شكل المتتابعه
(أ ، أ+د ، أ+٢د ، ... ، ل-٢د ، ل-د ، ل)

مثال ١
اوجد اكدد المثلثيه
للمتتابعه الحسابيه (١١ ، ٩ ، ٧ ، ...)
ثم مثل اكدد بيانيا
الحل
د = ٩ - ١١ = -٢
اكدد المتتابيه ص = ٥ ، ٢ ، ١ ، ح$_ن$
المثلثي = {١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ...}
المدى = {١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ...}
متناقصيه



مثال ح المتتابعه
(١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، -٦١)
اوجد ح$_{١٥}$ ثم اوجد عدد اكدود
الحل
* ح$_{١٥}$ = أ + ١٤ د
د = ١٥ - ١٩ = -٤
∴ ح$_{١٥}$ = ١٩ + ١٤ × -٤
= ١٩ - ٥٦ = -٣٧
* اكد الاخير = -٦١
∴ -٦١ = أ + (ن-١) د
∴ -٦١ = ١٩ + (ن-١) × -٤
-٦١ = ١٩ - ٤ن + ٤
∴ ٤ن = ٢٢ + ٦١
∴ ٤ن = ٨٤
∴ ن = ٢١

مثال ٢ اوجد ح$_{٢٠}$ ، س المتتابيه
ض (٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٦٥)
الحل
نعكس المتتابعه
(٦٥ ، ٦٢ ، ... ، ١١ ، ٩ ، ٧)
د = -٣
∴ ح$_{١٠}$ = أ + ٩ د
= ٦٥ + ٩ × -٣ = ٣٨

مثال ٤

اوجد متتابعة حسابية ان
حدها الثالث ١١ ومجموع حدين
الاول والرابع ٤٢

الحل

* $ح_٣ = ١١ \leftarrow ١ + ٢د = ١١$ ①

* $ح_١ + ح_٧ = ٤٢$

$\therefore ١ + ٥د + ١ + ٦د = ٤٢$

$\therefore ٢ + ١١د = ٤٢$ ②

بطرح ① من ② $\therefore ٩د = ٣٢$

$\therefore ٧د = ٤٢ \leftarrow د = ٦$

بالتعويض فى ①

$\therefore ١ + ٢(٦) = ١١ \leftarrow ١ = ٥$

$\therefore$ المتتابعة هى

(٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ٣٥، ٤١، ٤٧، ٥٣، ٥٩، ٦٥)

ملاحظات هامة جداً

* لايجاد رتبة اكبر الذى قيمته س

تضع $ح_ن = س$

* لايجاد رتبة اكبر الذى قيمته
اصغر من س تضع $ح_ن < س$

* لايجاد رتبة اكبر الذى قيمته
اقل من س تضع $ح_ن \leq س$

* لايجاد رتبة اول حد موجب
تضع $ح_ن > ٠$

* لايجاد رتبة اول حد موجب
تضع $ح_ن \geq ٠$

* اذا علم ثلاثة اعداد تكون $ح_ن$
نفرض الاعداد هى $(١ - د، ١، ١ + د)$

* اذا علم اربعة اعداد تكون $ح_ن$
نفرض الاعداد كالآتى
$(٣ - ٣د، ١ - د، ١ + د، ٣ + ٣د)$

مثال ٥ اذا كانت $ح_ن$

$(٩٥، ٢٧، ٢٩، ٢٦، ٢٣، ٢٠، ١٧، ١٤، ١١، ٨، ٥)$

اوجد عدد حدودها ثم اوجد
رتبة اكبر الذى قيمته ٥٥

الحل

$\therefore ٢٩ - ٣س = ٩٥ - ٢س$

$\therefore س = ٩٥ + ٢٩ = ١٢٤ \leftarrow س = ٢١$

$\therefore ن = ٢١ - ٢٩ = ٨$

* $٩٥ = ٢٩ + (ن - ١) \times ٣$

$٩٥ = ٢٩ + ٣ن - ٣$

$\therefore ٣ن = ٦٨ \leftarrow ن = ٢٤$

* $ح_ن = ٥٥$

$\therefore ٢٩ + (ن - ١) \times ٣ = ٥٥$

$\therefore ٣ن - ٣ = ٢٦ \leftarrow ن = ١٤$

مثال ٦

اوجد عدد حدود السابقه
ح المتتابعه (-٤٧، -٤٢، -٣٧، ...)

الحل

* $S = -٤٢ - (-٤٧) = ٥$
* لنوجد رتبه أول حد موجب
$ح_ن > ٠$
$\therefore -٤٧ + (ن-١) \times ٥ > ٠$
$\therefore ٥ن - ٥ > ٤٧$
$\therefore ٥ن > ٥٢ \Leftarrow ن > ١٠,٤$
$\therefore ح_{١١}$ هو اول حد موجب
$\therefore$ عدد حدود السابقه = [١٠] حدود

مثال ٧ ($ح_ن$) متتابعه حسابيه
فيها $ح_٣ - ح_٥ = ٦$ ، $ح_٤ = ١٦$
اوجد اكبر (عدد) رتبه وقيمته
اول حد سالب فيها

الحل

* $أ + ٢S - (أ + ٤S) = ٦$
$أ + ٢S - أ - ٤S = ٦$
$\therefore -٢S = ٦ \Leftarrow$ [$S = -٣$]
* $ح_٤ = ١٦$
$\therefore أ + ٣S = ١٦$
$\therefore أ - ٩ = ١٦ \Leftarrow$ [$أ = ٢٥$]

$\therefore$ المتتابعه هى
(٢٥، ٢٢، ١٩، ...)
* اكبر (عدد) رتبه
$ح_ن = أ + (ن-١)S$
$= ٢٥ + (ن-١) \times -٣$
$= ٢٥ - ٣ن + ٣$
$\therefore ح_ن =$ [$-٣ن + ٢٨$]
* رتبه اول حد سالب
$ح_ن < ٠$
$\therefore -٣ن + ٢٨ < ٠$
$\therefore -٣ن < -٢٨ \Leftarrow ن > ٩,٣$
$\therefore ن = ١٠$ $\therefore ح_{١٠}$ اول سالب
* $ح_{١٠} = -٣ \times ١٠ + ٢٨$
$= -٣٠ + ٢٨ = -٢$
ـــ وهذا التحقيق من $ح_ن$

مثال ٨ اذا كانت
(س، ص، ع) ـــ ح م
ثابت $ص^٢ = س ع$

الحل

$\therefore لو ص - لو س = لو ع - لو ص$
$\therefore لو \frac{ص}{س} = لو \frac{ع}{ص}$
$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ع}{ص}$
$\therefore ص^٢ = س ع$

مثال ⑨

متتابعه حـ حيث حـ$_{م}$ + حـ$_{ع}$ = ٤٢
حـ$_{٢}$ × حـ$_{٥}$ = ٢١٥ اوجد المتتابعه

الحل

★ ا + ٤د + ا + د = ٤٢
∴ ٢ا + ٥د = ٤٢ ÷ ٢
∴ ا + ٢٫٥د = ٢١ ← ①
★ حـ$_{٢}$ × حـ$_{٥}$ = ٢١٥
∴ (ا + د)(ا + ٤د) = ٢١٥
∴ (ا + ٢٫٥د)(ا + ٢٫٥د + ١٫٥د) = ٢١٥
∴ ١٢ × (١٢ + ١٫٥د) = ٢١٥
∴ ١٢ + ١٫٥د = ١٥
∴ ١٫٥د = ٦ ← د = ٤
بالتعويض فى ①
∴ ا = ٢١ ← ا = ٢٧
∴ المتتابعه هى
(٢٧ ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ٧ ، ٣ ، ...)

مثال ⑩

اذا كان مجموع ثلاثة اعداد تكون متتابعه حسابيه هو ٢٢
حاصل ضربهم ٧٩٢ اوجد الاعداد

الحل

نفرض الاعداد هى
★ ا - د ، ا ، ا + د
∴ ا - د + ا + ا + د = ٢٢
∴ ٣ا = ٢٢ ← ا = ١١
ـ ظل با الله ا ليه اكبر الاصل ـ
★ (١١ - د) × ١١ × (١١ + د) = ٧٩٢
∴ (١١ + د)(١١ - د) = ٧٢
∴ ١٢١ - د^{٢} = ٧٢
∴ د^{٢} = ٤٩ ← د = ± ٧
عند د = ٧
الاعداد هى ١٨ ، ١١ ، ٤
عند د = -٧
الاعداد هى ٤ ، ١١ ، ١٨

تصور ثم

① اوجد رتبه وقيمه اول حد
وقيمه اكبر من ٢٠٠ فى المتتابعه
(٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...)
② م ع فيه حـ$_{ع}$ = ٥ حـ$_{٦}$ مجموع حدين
حديه الاول والرابع ٤٠٥ اوجد المتتابعه

الوساط الحسابيه

★ اذا كان ب وسط حسابى بين ا ، حـ
فان ٢ب = ا + حـ
★ عند ادخال ن من الاوساط بين
ا ، ل فان عدد حدود المتتابعه = ن + ٢

* الوسط الاول = ح١
* الوسط الاخير = ل - د

مثال ①

اذا كانت (٢س) ، (س+٤) ، (٥س-١) حدود متتابعة حسابية اوجد قيمة س

الحل

حيث الوسط = الاول + الثالث

∴ ٢س+٤ = ٢س + ٥س - ١

∴ ٢س٢ - ٧س + ٢ = ٠

(٢س - ١)(س - ٢) = ٠

∴ س = ½ او س = ٢

مثال ②

أوجد ٨ اوساط حسابية بين ٢ ، ١٠٢٤

الحل

ن = ١٠ ، ح١ = ٢ ، ل = ١٠٢٤

∴ ١٠٢٤ = ٢ + ٩د

∴ ٩د = ١٠٢٤ - ٢

∴ ٩د = ١٠٢٢

∴ د = ٢

الاوساط هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨)

مثال ③

أوجد الحد العشرون حسابياً بين ٥ ، -١١

الحل

ن (عدد الحدود) = ١٣

ح١ = ٥ ، ل = -١١ = ح١٣

∴ -١١ = ٥ + ١٢د

∴ ١٢د = -١٦

∴ د = -٣

∴ الاوساط هى (٢ ، -١ ، -٤ ، ... -٣٥)

مثال ④

اذا اوجدنا عدد أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسطية الثانى والاخير هى ١ : ٢ اوجد عدد الاوساط

الحل

ح١ = ٢ ، ل = ٤٧ ، ن = ؟؟

ح٢ = ح١ + د ، الوسط الاخير = ل - د

∴ $\frac{ح١ + د}{ل - د} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٢ + د}{٤٧ - د} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ + د = ٤٧ - د

∴ ٢د = ٤٥ ⇐ د = ٢

سبحانه الله والحمد لله سبحانه الله العظيم

∴ ل = ٤٧

∴ ٢ + (ن - ١) × ٢ = ٤٧

∴ ٢ن - ٢ = ٤٥

∴ ٢ن = ٤٨ ⟸ ن = ١٦

∴ عدد الأوساط هى ١٤

طريقة ثانية

عدد الأوساط = ن - ٢

∴ ٢ن - ٢ = ٢٠

∴ ٢ن = ٢٢ ⟸ ن = ١١

∴ عدد الأوساط = ٩

تعويض

١ الوسط الحسابى لعددين هو ٥ والوسط الحسابى لضعف أحدهما ومثلاثة أمثال الآخر = ١١ أوجد العددين

٢ أدخل ١٥ وسطاً حسابياً بين العددين ٤٥ ، ١٩

الواجب

١ أكمل

① الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٦ ، ٨ ، ٢ ، ...) هو ـــــ

② الحد الأول فى متتابعة حسابية ح ن = ٢ن - ٥ هو ـــــ

③ إذا كان الوسط الحسابى بين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س = ـــــ

④ إذا كان ٢ أ + ١ ، ٥ أ - ١ ، ٦ أ + ٢ تكوين متتالية حسابية فإن أ = ـــــ

مثال ⑤

إذا أدخلنا عدد أوساط حسابية بين ٣ ، ٦ وكان مجموع الأوساط العددية الى مجموع الأوساط الأطرافية كنسبة ١ : ٣ فما عدد الأوساط

الحل

أ = ٦ ، ل = ٣٦

∴ $\frac{٦ + ٥ء + ٦ + ٥ء٢}{٦ - ٢٦ + ٥ء - ٥ء٢} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{١٢ + ٥ء٢}{٢٧ - ٥ء٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢٦ + ٥ء٩ = ٢٧ - ٥ء٢

∴ ١٢ء = ٢٦ ⟸ ء = ٢

* ل = ٢٦

∴ ٢٦ = ٦ + (ن - ١) × ٢

١) اوجد ح٢٠ من المتتابعة الحسابية (٢، ٨، ١٤، ... ، ٨٠)
وكذلك عدد حدودها

٢) اوجد رتبة وقيمة اول حد سالب من المتتابعة الحسابية
(٦٧، ٦٤، ٦١، ...)

٣) اذا كان ح ن = ٢ + ٥ن فى المتتابعة ثم اوجد
رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ ثم اوجد رتبة اول حد قيمته ١٠٠

٤) متتابعة حسابية حدها الاول = ٣ ، ح ن = ٢٩ ، ع ن = ٧٩
حيث قيمة ن ثم اوجد المتتابعة

٥) متتابعة حسابية حدها الخامس = ١٢ ، حدها العاشر
= ثلاثة امثال حدها الثانى اوجد المتتابعة

٦) متتابعة حسابية عدد حدودها ١٢ حداً وحدها الاوسط
هو ٣٢ ومجموع حدودها الثلاثة الاخيرة يساوى ١٧٧ اوجد المتتابعة

٧) متتابعة حسابية تزايدية مجموع حدى الثانى والثالث يساوى ١٥
ومربع حدها الخامس يساوى ٢٢٥ اوجد المتتابعة

٨) اذا اوصلنا عدد اوساط حسابية بين ٢٠، ١٧٠ فكان
مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين يساوى امثال
الوسط الخامس فما عدد الاوساط

المتسلسلة الحسابية

تعريف

المقصود بالمتسلسلة الحسابية هو مجموع حدود المتتابعة

مثال

مجموع ٢٠ حداً من المتتابعة
(٢، ٤، ٦، ٨، ...)
هو (٢+٤+٦+٨+ ...)

$$= \frac{20}{2}(2 \times 2 + (20-1)2)$$

$$= 10(4 + 38) = 10 \times 42 = 420$$

لحساب مجموع ن من الحدود

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

مثال

أوجد مجموع ١٥ حداً الأولى من المتتابعة
(٤، ٧، ١٠، ...)

الحل

$$a = 4, \quad d = 7 - 4 = 3$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}[8 + 14 \times 3]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \times 50$$

$$S_{15} = 15 \times 25$$

$$= 375$$

ملاحظة

إذا علم الحد الأخير فإنه

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

مثال

أوجد مجموع ٢٠ حداً الأولى من المتتابعة التي حدها الأول ٥ وحدها الأخير ٣٢

الحل

$$a = 5, \quad l = 32$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[5 + 32]$$

المتتابعة التي

$$S_{10} = 10[37]$$

$$S_{10} = 370$$

ملاحظات هامة

* $d_n = S_n - S_{n-1}$

مثال $S_{10} - S_9 = d_{10}$

* عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود الموجبة

* عدد الحدود التي تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود السالبة

* لمعرفة عدد حدود المتتابعة نوجد

مثال ①

اوجد مجموع المتتابعة الحسابية
(٦ ، ٩ ، ١٢ ، ... ، ٢٢٦)

الحل

نوجد ن اولاً من الحد الاخير
حيث أ = ٦ ، د = ٣
∴ ٢٢ = أ + (ن - ١) د
∴ ٢٢ = ٦ + (ن - ١) × ٢
∴ ٢٧ = ٢ن - ٣
∴ ٢ن = ٣٠ ⟸ ن = ١٥
∴ $ص_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ [٢ أ + (ن - ١) د]
$= \frac{١٥}{٢}$ (٢ × ٦ + ١٤ × ٣)
$= \frac{١٥}{٢}$ (١٢ + ٤٢)
$= \frac{١٥}{٢} \times ٥٤$
$ص_{١٥} = ٤٠٥$

مثال ②

اوجد عدد الحدود التى يجب اخذها من المتتابعة الحسابية
(٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) ابتداء من الحد الاول لتكون المجموع ١٦٥

الحل

أ = ٢ ، د = ٤
∴ ١٦٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢ + (ن - ١) ٤]
∴ ٣٣٠ = ن (٤ + ٤ن - ٤)
∴ ٣٣٠ = ٤ن + ٤ن٢
∴ ٤ن٢ + ٤ن - ٣٣٠ = صفر
∴ ٢ن٢ + ن - ١١٥ = صفر
(ن + ١١)(ن - ١٠) = صفر
مرفوض ∴ ن = ١٠

مثال ③

اوجد اكبر مجموع للمتتابعة الحسابية (٢٧ ، ٤١ ، ٥٤ ، ...)

الحل

اى نوجد مجموع الحدود الموجبة
∴ ن ∈ ص
∴ ٢ + (ن - ١) ٤ > ٠
∴ ٥٤ + (ن - ١) × -٤ > ٠
∴ ٥٤ - ٤ن + ٤ > ٠
∴ ٥٩ > ٤ن
∴ ن < ١٤ $\frac{١}{٤}$
∴ ن = ١٤
∴ عدد الحدود الموجبة = ١٤
اكبر مجموع = $ص_{١٤}$
∴ $ص_{١٤} = \frac{١٤}{٢}$ [٢ × ٥٤ + ١٣ × -٤]
$ص_{١٤} = ٧٥٦$

تقويم

متتابعة حسابية فيها
أ = ٢٨ ، د = -٣ ، ن = ٤٥
اوجد مجموع ١٥ حداً الاول فقط

مثال ٤

(ح ن) متتابعة حسابية فيها
ح٢ + ح٤ = ١٢ ، ح١٠ = ٢١
أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع
العشرين حداً الأولى منها

الحل

أ + ٤ د + أ + ٢ د = ١٢

∴ ٢ أ + ٦ د = ١٢ ← (١)

ح١٠ = ٢١

∴ أ + ٩ د = ٢١

∴ أ = ٢١ − ٩ د ← (٢)

بالتعويض فى (١)

∴ ٢ − ١٨ د + ٦ د = ١٢

∴ − ١٥ د = ٢٠ −

∴ د = ٤ بالتعويض فى (٢)

∴ أ = ٢١ − ١٨

∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى

(٣ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ٧٩)

ن = ٢٠

∴ مج٢٠ = ٢٠/٢ [٦ + ١٩ × ٤]

مج٢٠ = ١٠ × ٤٤

∴ مج٢٠ = ٤٤٠

مثال ٥

مجموع العشرين حداً الأولى
من متتابعة حسابية = ٨٦٠
ومجموع حدين الثالث والرابع
يزيد عن ضعف الحد الأول
بمقدار ٥ أوجد المتتابعة

الحل

∴ مج٢٠ = ٨٦٠

∴ ٢٠/٢ [٢ أ + ١٩ د] = ٨٦٠

∴ ٢ أ + ١٩ د = ٨٦ ← (١)

∴ ح٣ + ح٤ − ٢ ح١ = ٥

∴ أ + ٢ د + أ + ٣ د − ٢ أ = ٥

∴ ٥ د = ٥ ∴ د = ١ بالتعويض فى (١)

∴ ٢ أ + ١٩ = ٨٦

∴ ٢ أ = ٦٧

∴ أ = ٣٣/٢

∴ المتتابعة هى

(٣٣/٢ ، ٣٥/٢ ، ... ، ٧٣/٢)

تعويم

متتابعة حسابية مج = ٩٦٠
وحدها الأول = ١٠ وأساسها
٤٠ أوجد ن

الجواب ن =

مثال ⑥

مجموع الحد الثالث والخامس من متتابعة حسابية هو ٤٢
ومربع حدها الأوسط يساوى ٢٤ أمثال متتابعة ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها

الحل

$ح_٢ + ح_٥ = ٤٢$

$\therefore أ + ٢د + أ + ٤د = ٤٢$

$\therefore ٢أ + ٦د = ٤٢$

$\therefore أ + ٣د = ٢١$

ومنها $أ = ٢١ - ٣د$ ← ①

$(ح_٦)^٢ = ٢٤ ح_١$ بالتعويض

$\therefore ح_٦^٢ = ١٨$

$\therefore أ + ٥د = ١٨$ ← ②

بالتعويض من ① فى ②

$\therefore ٢١ - ٣د + ٥د = ١٨$

$\therefore ٢د = ٣$

$\therefore د = ٣$

بالتعويض فى ①

$\therefore أ = ٢١ - ٩$

$\therefore أ = ١٢$

$\therefore مج_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢(١٢) + ٩(٣)]$

$مج_{١٠} = ٥[٢٤ + ٢٧]$

$مج_{١٠} = ٥ \times ٥١$

$مج_{١٠} = ٢٥٥$

مثال ⑦

أوجد المتتابعة التى مجموع أول عشرة حدود الأولى منها = ١٢٠ ومجموع العشرة حدود التالية لها = ٦٨١

الحل

$مج_{١٠}$ الأولى $= ١٢٠$

$\therefore \frac{١٠}{٢}[٢أ + ٩د] = ١٢٠$

$\therefore ٥(٢أ + ٩د) = ١٢٠ \div ٥$

$\therefore ٢أ + ٩د = ٢٤$ ← ①

ظل بالك

$مج_{١٦}$ الأولى $= ١٢٠ + ٦٨١$

$= ٨٠١$!!؟

$\therefore \frac{١٦}{٢}[٢أ + ١٥د] = ٨٠١$

$\therefore ٨(٢أ + ١٥د) = ٨٠١$ ÷ ٨

$\therefore ٢أ + ١٥د = ٢٦$ ← ②

بطرح ① من ②

$\therefore ٦د = ١٢$ ← $د = ٢$

بالتعويض فى ①

$\therefore ٢أ + ١٨ = ٢٤$ ← $أ = ٣$

$(ح_{١٠}) = (٣ + ٩ \times ٢) = ٢١$

مثال ① ع المتتابعة
(٢٦، ٢٢، ١٨، ١٤ ـــ)
اوجد ح١٠ الاول ثم اوجد ح١٠ التالية
ثم اوجد كم حداً يلزم اخذه
ابتداء من الاول ليكون
المجموع ١٧٦ (غير الكتاب)

الحل

$أ = ٢٦$ ، $د = -٤$

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢(٢٦) + ٩(-٤)]$

$= ٥(٢٦) = ١٨٠$

ايجاد $ح_{١٠}$ التالية

$ح_{١١} = ح_{١٠} + د$

$= ٢٦ + ١٠(-٤) = -١٤$

$\therefore ح_{١٠}$ التالية

$= \frac{١٠}{٢}[٢ح_{١١} + ٩د]$

$= ٥[٢(-١٤) + ٩(-٤)]$

$= ٥(-٢٨ - ٣٦) = -٣٢٠$

★

$مـ_ن = ١٧٦$

$\therefore ١٧٦ = \frac{ن}{٢}[٢(٢٦) + (ن-١)(-٤)]$

$١٧٦ = \frac{ن}{٢}[٥٢ + (ن-١)(-٤)]$

$\therefore ٣٥٢ = ن[٥٢ - ٤ن + ٤]$

$\therefore ٣٥٢ = ٥٦ن - ٤ن^{٢}$

$\therefore ن^{٢} - ١٤ن + ٨٨ = ٠$

$\therefore (ن - ٨)(ن - ١١) = ٠$

$\therefore ن = ٨$ أو $ن = ١١$

والتفسير هو

$ح_{٩} + ح_{١٠} + ح_{١١} = صفر$

مثال ② اوجد مجموع
٢٠ حداً الاولى من المتتابعة

$ح_{ن} = \begin{cases} ٥ + ٢ن & : ن \text{ زوجى} \\ ١ + ٢ن & : ن \text{ فردى} \end{cases}$

الحل

عندما ن فردى

$ح_{١} = ١ + ١(٢) = ٤$

$ح_{٣} = ١ + ٢(٢) = ١٠$

$ح_{٥} = ١ + ٥(٢) = ١٦$

$مـ_{١} = (٤، ١٠، ١٦ ـــ)$

عندما ن زوجى

$ح_{٢} = ٥ + ٢(٢) = ٩$

$ح_{٤} = ٥ + ٤(٢) = ١٢$

$ح_{٦} = ٥ + ٦(٢) = ١٧$

$مـ_{٢} = (٩، ١٢، ١٧ ـــ)$

نوجد $صـ_{١٠}$ من الفردية + $صـ_{١٠}$ من الزوجية

$صـ_{١} = \frac{١٠}{٢}[٢(٤) + ٩(٦)]$

$= ٥(٦٢) = ٣١٠$

نوجد $صـ_{٢}$ الزوجية

$ص_{ب} = \frac{ب}{٢}[٢ \times ٩ + ٩ \times ٤]$

$= ٥٤ \times ٥ = ٢٧٠$

$\therefore ص_{ب} = ص_{١} + ص_{٢}$

$= ٢١٠ + ٢٧٠ = ٥٨٠$

مثال (١٠) اذا كانه مجموع $ن$ حدا من متتابعه حسابيه يعطى $ص_{ن} = ٢ن^{٢} + ن$

اوجد المتتابعه ومجموع ٢٠ حدا الاول منها

الحل

$\star ص_{١} = ٢(١)^{٢} + ١ = ٣$ وهو $ح_{١}$

$\star ص_{٢} = ٢(٢)^{٢} + ٢ = ١٠$

$\therefore ح_{٢} = ص_{٢} - ص_{١} = ١٠ - ٣ = ٧$

$\therefore ح_{ن} = ١٢$

$\star ص_{٣} = ٢(٣)^{٢} + ٣ = ٢١$

$\therefore ح_{٣} = ص_{٣} - ص_{٢}$

$\therefore ح_{٣} = ٢١ - ١٠ = ١١$

$\therefore$ المتتابعه هى

$(٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٢ ، ــــ)$

$ص_{ب} = \frac{ب}{٢}[٢ \times ٣ + (ب-١) \times ٤]$

$ص_{١٠} = ٥(٦ + ٣٦)$

$ص_{١٠} = ٥ \times ٩٢$

$ص_{١٠} = \boxed{٤٦٠}$

مثال (١١) اوجد المتتابعه الحسابيه التى فيها $ح_{١} = ١١$ ، $ح_{ن} = ٨٧$ ، $ص_{ن} = ٩٨٠$

الحل

$\star$ نعوض بالملاحظه $ح_{ن} = ل = ٨٧$

$\therefore ص_{ن} = \frac{ن}{٢}[ا + ل]$

$\therefore ٩٨٠ = \frac{ن}{٢}[١١ + ٨٧]$

$\therefore ٩٨٠ = \frac{ن}{٢} \times ٩٨$

$\therefore ن = \frac{٢ \times ٩٨٠}{٩٨} = \boxed{٢٠}$ حدا

لايجاد د

$\therefore ح_{ن} = ٨٧$

$\therefore ١١ + ١٩د = ٨٧$

$\therefore ١٩د = ٧٦ \Leftarrow \boxed{د = ٤}$

$\therefore$ المتتابعه هى

$(١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ــــ)$

تمثيل

اوجد المتتابعه الحسابيه التى فيها $ح_{١} = ١١$ ، $ح_{ن} = ٨٧$ ، $ص_{ن} = ٩٨٠$

الحل

$\star$ نعوض بالملاحظه $ح_{ن} = ل = ٨٧$

$\therefore ص_{ن} = \frac{ن}{٢}[ا + ل]$

$\therefore ٩٨٠ = \frac{ن}{٢}[١١ + ٨٧]$

$\therefore ٩٨٠ = \frac{ن}{٢} \times ٩٨$

$\therefore ن = \frac{٢ \times ٩٨٠}{٩٨} = \boxed{٢٠}$ حدا

لايجاد د

$\therefore ح_{ن} = ٨٧$

$\therefore ١١ + ١٩د = ٨٧$

$\therefore ١٩د = ٧٦ \Leftarrow \boxed{د = ٤}$

$\therefore$ المتتابعه هى

$(١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ــــ)$

تمرين

متتابعه حسابيه مجموع اسبعه حدود الاول منها $= ٥٤٥$

ومجموع السبعه حدود التاليه لها $= ٩٨$ اوجد المتتابعه

$\therefore$ نعوض بالملاحظه $ص_{١٤} = ٥٤٥ + ٩٨$

مثال (١٢) متتابعة حسابية مكونة من ١٩ حداً وحدها الأوسط = ٢٠
ومجموع الحدود السابقة له = $\frac{1}{2}$ مجموع الحدود التالية له
أوجد المتتابعة

الحل

ن = ١٩ ← الحد الأوسط هو ١٠

∴ أ + ٩ د = ٢٠

ومنها $\boxed{أ = ٢٠ - ٩د}$ ←①

$\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) د] = $\frac{١}{٢}$ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) د] ابتداء من ١١

∴ [٢أ + ٨د] = $\frac{١}{٢}$ [٢أ + ١٨د]

∴ ٢أ + ٨د = $\frac{١}{٢}$ (٢أ + ٢٠د + ٢د)

∴ ٢أ + ٨د = أ + ١٠د + د

∴ ٢أ + ٨د = أ + ١١د

∴ أ = ٣د ←②

بالتعويض في ①

∴ أ = ٢٠ - ٩د

∴ ٣د = ٢٠ - ٩د

∴ ١٢د = ٢٠

∴ $\boxed{د = ٢}$

بالتعويض في ② ∴ $\boxed{أ = ٦}$

∴ المتتابعة هي

(٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠، ٢٢، ٢٤، ٢٦، ٢٨، ٣٠، ٣٢، ٣٤، ٣٦، ٣٨، ٤٠، ٤٢، ٤٤، ٤٦، ٤٨، ٥٠، ٥٢، ٥٤، ٥٦، ٥٨، ٦٠، ٦٢، ٦٤، ٦٦، ٦٨، ٧٠، ٧٢، ٧٤، ٧٦، ٧٨، ٨٠، ٨٢، ٨٤، ٨٦،

(ع_ن) ← م هـ إذا كان $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ = ثابت (م)

مثل (٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...)

* الحد العام $ع_ن = أ م^{ن-1}$

$ع_٥ = أ م^٤ = ٢ \times ٣^٤ = ١٦٢$

$ع_٦ = أ م^٥ = ٢ \times ٣^٥ = ٤٨٦$

مثال ① ع متتابعة

(ع_ن) = (٤، ١٢، ٣٦، ٢٧، ...)

أوجد ع_٥ ورتبة الحد

الذي قيمته ٨٧٤٨

الحل

$أ = ٤ \quad م = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$ع_٥ = أ م^٤ = ٤ \times ٣^٤ = ٣٢٤$

$٨٧٤٨ = أ م^{ن-1}$

$٨٧٤٨ = ٤ \times ٣^{ن-1}$

$٣^{ن-1} = \frac{٨٧٤٨}{٤} = ٢١٨٧$

$٣^{ن-1} = ٣^٧$

$ن - 1 = ٧$

$ن = ٨$

(أ، أم، أم^٢، أم^٣، ... أم^{ن-1})

مثال ② ع_ن = ٣ن - ١ هل متتابعة

ع_ن = $\frac{٣}{٨}$ × (٣)^ن هل متتابعة

هندسية ثم أوجد حدها

الثامن وترتيب الحد الذي قيمته ٧٦٨

الحل

$\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = \frac{\frac{٣}{٨} \times (٣)^{ن+1}}{\frac{٣}{٨} \times (٣)^ن}$

$= ٣ = ثابت$

∴ المتتابعة هندسية

$ع_٨ = \frac{٣}{٨} \times ٣^٨ = ٩٦$

$٧٦٨ = \frac{٣}{٨} (٣)^ن$

$٧٦٨ \times \frac{٨}{٣} = ٣^ن$

$٣^ن = ٣^٦ \times ٤$

$٣^ن = ٣^٦ \times ٣^٢$

$ن = ٨$

مثال ③ حد ترتيبه وقيمته أول

حد تزيد قيمته عن ٢٠٠

في متتابعة الهندسية

(٦، ١٢، ٢٤، ...)

$أ = ٦ ، ر = ٢$

$ع_ن < ٢٠٠$

$٦ × ٢^{ن-١} < ٢٠٠$

$٢^{ن-١} < ٢٢,٢$

$\because ٢^{ن-١} < ٢^{٥}$

$ن - ١ < ٥$

$ن < ٦$

$\boxed{ن = ٧}$

$ع_٧ = ٦ × ٢^{٦} = ٣٨٤$

مثال ٤ أوجد الحد الذي يساوي ١٨ من المتتابعة الهندسية التي فيها $ع_٤ - ع_٢ = ١٨$ ، $ع_٥ - ع_٣ = ٩$

الحل

$أ ر^{٤} - أ ر^{٢} = ١٨$

$أ ر^{٢} (ر^{٢} - ١) = ١٨$ ..... (١)

$أ ر^{٥} - أ ر^{٣} = ٩$

$أ ر^{٣} (ر^{٢} - ١) = ٩$ ..... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$ر = ٢$

بالتعويض في (٢)

$أ (٨ - ٢) = ٩$

$٦ أ = ٩$

$\boxed{أ = ٣/٢}$

إذن الحد المطلوب

$ع_ن = ٣/٢ × ٢^{ن-١} = ٣ × ٢^{ن-٢}$

$٣ × ٢^{ن-٢} = ٣٨٤$

$٢^{ن-٢} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

$ن - ٢ = ٧$

$\boxed{ن = ٩}$

مثال ٥ أوجد الحد الذي يساوي ٣٢٠ من المتتابعة الهندسية التي فيها $ع_٦ = ٤ ع_٤ + ٢ ع_٣$

$ع_٦ = ٤ ع_٤ + ٢ ع_٣$

$٣٢٠ = ٧ ع$

$أ ر^{٦} = ٣ أ ر^{٣} + ٢ أ ر^{٢}$

بالقسمة على $أ ر^{٢}$

$ر^{٤} = ٣ ر + ٢$

$ر^{٤} - ٣ ر - ٢ = ٠$

$(ر + ١)(ر + ١)(ر - ٢) = ٠$

$ر = -١$ مرفوضة ، $\boxed{ر = ٢}$

$ع_٧ = ٣٢٠ \therefore أ ر^{٦} = ٣٢٠$

$أ × ٢^{٦} = ٣٢٠ \leftarrow \boxed{أ = ٥}$

ت/ ٠١١ ١٥ ١٥ ٦٢ ٣٢

مثال ٦

متتابعة هندسية تزايدية فيها الحد الثالث يزيد عن مجموع الحدين الأول والثاني بمقدار ١٠ والحد الثاني ينقص عن مجموع الحد الأول والثالث بمقدار ١٤

الحل

$$ح_٣ - (ح_١ + ح_٢) = ١٠$$

$$أ ر^٢ - أ - أ ر = ١٠$$

$$أ (ر^٢ - ١ - ر) = ١٠$$

$$أ (ر^٢ - ر - ١) = ١٠ \quad ①$$

$$ح_٢ - (ح_١ + ح_٣) = ١٤$$

$$أ ر - أ - أ ر^٢ = ١٤$$

$$أ (ر - ١ - ر^٢) = ١٤ \quad ②$$

بقسمة ① ÷ ②

$$\frac{ر^٢ - ر - ١}{ر - ١ - ر^٢} = \frac{١٠}{١٤}$$

$$١٤ ر^٢ - ١٤ ر - ١٤ = ١٠ ر - ١٠ ر^٢$$

$$٢٤ ر^٢ - ٢٤ ر - ١٤ = ٠$$

$$١٢ ر^٢ - ١٢ ر - ٧ = ٠$$

$$(ر - ٢)(٢ر + ١) = ٠$$

$$ر = ٢ \quad ، \quad ر = -\frac{١}{٢}$$

مرفوضة

بالتعويض في ①

$$أ (٤ - ٢ - ١) = ١٠$$

$$أ = ١٠$$

$$ح_١ = ١٠$$

المتتابعة

$$١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ...$$

مثال ٧

مجموع الحدود الثلاثة الأولى من $ح_ن$ هو ٢٦ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها ٧٠٢

أوجد المتتابعة

الحل

$$أ + أ ر + أ ر^٢ = ٢٦$$

$$أ (١ + ر + ر^٢) = ٢٦ \quad ①$$

$$أ ر^٣ + أ ر^٤ + أ ر^٥ = ٧٠٢$$

$$أ ر^٣ (١ + ر + ر^٢) = ٧٠٢ \quad ②$$

بقسمة ② ÷ ①

$$ر^٣ = \frac{٧٠٢}{٢٦}$$

$$ر^٣ = ٢٧$$

$$ر = ٣$$

بالتعويض في ①

$$أ (١ + ٣ + ٩) = ٢٦$$

$$أ = ٢$$

$$ح_١ = ٢$$

المتتابعة

$$٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ...$$

مثال ①
متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث يساوي ١٢
حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوي ٢٧

الحل
$\star\ أ_١ + أ_٢ = ١٢$
$أ_١ (١ + ر) = ١٢$ ← ②
$\star\ أ_١ \times أ_٣ = ٢٧$ ← ③
بتعويض ① في ③
$\frac{أ_١^٢ (١+ر)^٢}{أ_١ ر^٢} = \frac{١٤٤}{٢٧}$
$\frac{(١+ر)^٢}{ر} = \frac{١٦}{٣}$
$٣ + ٦ر + ٣ر^٢ = ١٦ر$
$٣ر^٢ - ١٠ر + ٣ = ٠$
$(٣ر - ١)(ر - ٣) = ٠$
$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = ٣$
بالتعويض في ②
$أ_١ \times \frac{١}{٣} = ٢٧$
$أ_١ = ٨١$
$\therefore$ المتتابعة هي
(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ....)

أو عندما $ر = ٣$
$أ_١ \times ٢٧ = ٢٧$
$أ_١^٢ = ١$
$أ_١ = ١$ والسالب مرفوض
(١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ....)

ظل معكم
$١ + ر + ر^٢ + ر^٣$
$= (١ + ر + ر^٢)(١ - ر + ر^٢)$

مثال ② مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية = ٧ ومجموع مربعاتهم = ٢١
أوجد هذه الحدود

الحل
$أ_١ + أ_١ ر + أ_١ ر^٢ = ٧$
$أ_١^٢ + أ_١^٢ ر^٢ + أ_١^٢ ر^٤ = ٢١$
$\frac{م}{ن} أ_١ (١ + ر + ر^٢) = ٧$

$أ_{ن+1} = (ن+1)^2 = 49$ ← (1)

من (1) نجد أن

$أ_{ن+2} = (ن+2)^2 = 81$

بالطرح

$أ_{ن+2} - أ_{ن+1} = (ن+2)^2 - (ن+1)^2 = 81 - 49$

$(أ_{ن+2} - أ_{ن+1})(أ_{ن+2} + أ_{ن+1}) = 32$ ← (2)

بقسمة (2) ÷ (1)

$\frac{أ_{ن+2} + أ_{ن+1}}{أ_{ن+1}} = \frac{32}{49}$

$\frac{أ_{ن+2}}{أ_{ن+1}} + 1 = \frac{32}{49}$

$\frac{أ_{ن+2}}{أ_{ن+1}} = -\frac{17}{49}$

$ر = -\frac{17}{49}$

$أ_{ن+1} = أ_ن ر$

$49 = أ_ن (-\frac{17}{49})$

$أ_ن = -\frac{49^2}{17}$

$أ_1 = -\frac{49^2}{17^{ن-1}}$

الوسط الهندسي

$أ_ن ، ص ، أ_{ن+2}$

$ص^2 = أ_ن \times أ_{ن+2}$

$ص^2 = 49 \times 81$

$ص = \pm\sqrt{49 \times 81}$

أوجد الوسط الهندسي بين 9 ، 16

الحل

$\pm\sqrt{9 \times 16} = \pm 12$

ملاحظة

الوسط الحسابي لعددين هو نصف مجموعهما

مثال أوجد ستة أوساط حسابية بين $\frac{1}{4}$ ، 32

الحل

$أ_1 = \frac{1}{4}$ ، $أ_{ن+2} = 32$ ، $ن = 8$

$ل = أ_1 + (ن-1)ء$

$32 = \frac{1}{4} + 7ء$

$7ء = 128 - \frac{1}{4}$

$ء = 18\frac{3}{4}$

$أ_2 = \frac{1}{4} + 18\frac{3}{4} = 19$

$أ_3 = 19 + 18\frac{3}{4} = 37\frac{3}{4}$

$أ_4 = 37\frac{3}{4} + 18\frac{3}{4} = 56\frac{1}{2}$

$أ_5 = 56\frac{1}{2} + 18\frac{3}{4} = 75\frac{1}{4}$

$أ_6 = 75\frac{1}{4} + 18\frac{3}{4} = 94$

∴ الأوساط هي

$(19 ، 37\frac{3}{4} ، 56\frac{1}{2} ، 75\frac{1}{4} ، 94)$

ملاحظة

عدد الأوساط = عدد الحدود − 2

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم

مثال ٥

إذا أدخلنا عدد أوساط هندسية بين ٣، ٣٨٤ بحيث كان حاصل ضرب الوسط الثاني والأخير يساوي ٢٠٤ أوجد عدد الأوساط

الحل

$أ_1 = 3$ ، $أ_ن = 384$

$أ_ن = أ_1 \times ر^{ن-1}$

$384 = 3 \times ر^{ن-1}$

$128 = ر^{ن-1}$

$ر^{ن-1} = 2^7$

$ن - 1 = 7$

$ن = 8$

عدد الأوساط = 6

مثال ٦

إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ كميات موجبة ومتتابعة هندسيا فأثبت أن:

$(أ_1 + أ_2)(أ_3 + أ_4) > 4 أ_2 أ_3$

الحل

$أ_2$ وسط هندسي بين $أ_1$ ، $أ_3$

$أ_2^2 = أ_1 أ_3$

$أ_2 < \frac{أ_1 + أ_3}{2}$

$2 أ_2 < أ_1 + أ_3$ ← (1)

$أ_3$ وسط هندسي بين $أ_2$ ، $أ_4$

$أ_3^2 = أ_2 أ_4$

$أ_3 < \frac{أ_2 + أ_4}{2}$

$2 أ_3 < أ_2 + أ_4$ ← (2)

بضرب (1) × (2)

$4 أ_2 أ_3 < (أ_1 + أ_3)(أ_2 + أ_4)$

مثال ٤

ثلاثة أعداد ص تتابع ض تتابع حسابى مجموعها ١٥ واذا طرح عدد ثانى واحد وعدد ثالث واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية أوجد الأعداد الثلاثة

الحل

$ص - ء ، ص ، ص + ء$

$ص - ء + ص + ص + ء = ١٥$

$٣ ص = ١٥$

$ص = ٥$

$٥ - ء ، ٥ ، ٥ + ء$

$(٥ - ء) + ١ ، ٥ ، ٥ + ء + ١$

$٦ - ء ، ٦ ، ٦ + ء$

$(٦)^٢ = (٦ - ء)(٦ + ء)$

$٣٦ = ٣٦ - ء^٢$

$ء^٢ = ٠$

$ء = ٠$

الأعداد هى ٥ ، ٥ ، ٥

أو

٢ ، ٦ ، ١٨

مثال ٥

مجموع ثلاثة أعداد من متتابعة هندسية = ٧٠ اذا ضرب الأول × ٤ والثانى × ٥ والثالث × ٤ كونت الحدود متتابعة حسابية أوجد الأعداد الثلاثة

الحل

$أ + أ ر + أ ر^٢ = ٧٠$ ←(١)

$أ ، أ ر ، أ ر^٢$

$٤ أ ، ٥ أ ر ، ٤ أ ر^٢$

ضعف الوسط = الأول + الثالث ←(٢)

$٢ × ٥ أ ر = ٤ أ + ٤ أ ر^٢$

$١٠ أ ر = ٤ أ + ٤ أ ر^٢$

$÷ ٢ أ$

$٥ ر = ٢ + ٢ ر^٢$

$٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$

$(٢ ر - ١)(ر - ٢) = ٠$

$ر = ١/٢$ أو $ر = ٢$

بالتعويض فى (١)

$أ + أ × ١/٢ + أ × ١/٤ = ٧٠$

$١ ١/٤ أ = ٧٠$

$٧/٤ أ = ٧٠$ ← $أ = ٤٠$

٤٠ ، ٢٠ ، ١٠

ثم عدد الأعداد ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠

(ط) مجموعة حدود متتابعة

* $ن = \frac{ا(1-ر^{ن})}{1-ر}$

* $ن = \frac{ا - ل ر}{1-ر}$

* $ن = \frac{ا}{1-ر}$ حيث $|ر| < 1$

مثال ①

أوجد مجموع ٥ حدود متتابعة

المتسلسلة (١ ، ٩ ، ٢٦ ، ...)

ابتداء من الحد الثالث

الحل

$ا = 1 \times 3^{2} = 3$

$ر = \frac{9}{1} = 3$

$ل = ا ر^{ن-1} = 1 \times 9 = 9$

$ن = \frac{9(1-(-2)^{5})}{1-(-2)}$

$ن = \frac{9 \times (-33)}{3}$

$ن = -99$

مثال ② أوجد $\sum_{ن=1}^{5} 2 \times (\frac{1}{2})^{ن-1}$

الحل

$ا = 2 \times (\frac{1}{2})^{1-1} = 2$

$ل = 2 \times (\frac{1}{2})^{5-1} = 1$

$ر = \frac{1}{2}$

$ن = \frac{2(1-(\frac{1}{2})^{5})}{1-\frac{1}{2}}$

$ن = \frac{31}{32} \times 2 = \frac{31}{16}$

مثال ③ أوجد مجموع المتتابعة

(-٢ ، ٦ ، -١٨ ، ... ، -٧٦٨)

الحل

$ا = -2$ ، $ر = \frac{6}{-2} = -3$ ، $ل = -768$

$ن = \frac{ا - ل ر}{1-ر}$

$ن = \frac{-2 - (-768) \times -3}{1-(-3)}$

$ن = -512$

مثال (٤) كم عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...) ابتداء من حدها الثاني ليكون مجموعها هذه القيمة ٦٥٥٨

الحل

$أ = ٢ ، ر = ٣$

$مجـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

$٦٥٥٨ = \frac{٢(٣^ن - ١)}{٣ - ١}$

$٦٥٥٨ = ٣^ن - ١$

$٣^ن = ٦٥٥٨ + ١$

$٣^ن = ٦٥٥٩$

$٣^ن = ٣^٧$

$ن = ٧$

مثال (٥) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٧٢٩ وأساسها ٣ ومجموعها ١٠٩٢

الحل

$أ = ٧٢٩ ، ر = ٣$

$مجـ_ن = ١٠٩٢$

$\frac{أ - ل ر}{١ - ر} = ١٠٩٢$

$\frac{٣ \times ٧٢٩ - ل}{١ - ٣} = ١٠٩٢$

$٢١٨٧ - ل = -٢١٨٦$

$ل = ١$

(١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩)

مثال (٦) متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها أكبر من ٥٠٠٠

الحل

$أ = ٢ ، ر = \frac{٦}{٢} = ٣$

$أ ر^٣ = ٥٤$

$٢ ر^٣ = ٥٤$ ∴ $ر^٣ = ٢٧$ ← $ر = ٣$

$مجـ_ن > ٥٠٠٠$

$\frac{٢(٣^ن - ١)}{٣ - ١} > ٥٠٠٠$

$٣^ن - ١ > ٥٠٠٠$

$٣^ن > ٥٠٠١$

$٣^ن = ٣^٨$ ← $ن = ٨$

مثال (٦) متتابعة هندسية
حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث
ومجموع حدها الثانى والثامن = ٢٦
أوجد $ص_{١٠}$ الأول
الحل
$\star$ $أ = ٤ ع_٢$
$أ = ٤ أ ر$
$١ = ٤ ر^٢$
$\therefore ر = \frac{١}{٢}$

$\star$ $ع_٨ + ع_٥ = ٣٦$
$أ ر^٧ + أ ر^٤ = ٣٦$
$\frac{١}{١٢٨} أ + \frac{١}{١٦} أ = ٣٦$
$(\times ١٢٨)$
$٨ أ + أ = ٢٦ \times ١٦$
$٩ أ = ٢٦ \times ١٦$
$أ = ٦٤$

$\therefore (٦٤، ٣٢، ١٦، ...)$
$ص_{١٠} = \frac{٦٤ (١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}}$
$ص_{١٠} = ٢٠٦٩$

مثال (٧) متتابعة هندسية
مجموع حدودها الثلاثة الأولى ١٣، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها ٣٥١ أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى
الحل
$\star$ $أ + أ ر + أ ر^٢ = ١٢$
$أ (١ + ر + ر^٢) = ١٢$ ← (١)
$\star$ $أ ر^٣ + أ ر^٤ + أ ر^٥ = ٣٥١$
$أ ر^٣ (١ + ر + ر^٢) = ٣٥١$ ← (٢)
بقسمة (٢) ÷ (١)
$ر^٣ = ٢٧$
$ر = ٣$ بالتعويض
$أ + ٣أ + ٩أ = ١٢$
$١٣ أ = ١٢$ ← $أ = ١$
المتتابعة
$(١، ٣، ٩، ...)$
$ص_{١٠} = \frac{١ (١ - ٣^{١٠})}{١ - ٣}$
$ص_{١٠} = ٢٩٥٢٤$

مثال ⑨ اوجد $\sum_{n=1}^{\infty} ٥٦ \left(\frac{٢}{٤}\right)^{n-١}$

الحل

$أ = ٥٦ \times \left(\frac{٢}{٤}\right)^{١} = ٥٦$

$ج = ٥٦ \times \left(\frac{٢}{٤}\right)^{١} = ٤٢$

$م = \frac{ج}{أ} = \frac{٤٢}{٥٦} = \frac{٢}{٤}$

$مجـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - م}$

$= \frac{٥٦}{١ - \frac{٢}{٤}}$

$= ٥٦ \times ٢ = \boxed{١١٢}$

مثال ⑩ اذا كان $ق_{١} = ٣$ ، $ق_{٢} = ٢$ اوجد

$ق_{١٨}$ ، $مجـ_{٢}$ ، $مجـ_{\infty}$ ، ابتدا من $ق_{٢}$

الحل

$أ = ٢$ ، $م = \frac{ق_{٢}}{ق_{١}} = \frac{٢}{٣}$

$ق_{١٨} = أ م^{ن-١}$

$= ٢ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٧}$

$مجـ_{٢} = \frac{أ}{١ - م}$

$= \frac{٢}{١ - \frac{٢}{٣}} = ٦$

$مجـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - م}$

$= \frac{٢}{١ - \frac{٢}{٣}} = ٦$

مثال ⑪ اوجد $٢ + ٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \cdots$

الحل

$(٢ + ٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \cdots) + ٢$

$= \frac{٢}{١ - \frac{١}{٢}} + ٢$

$= ٤ + ٢ = ٦$

مثال ⑫ $م$ ق ح ، $ق_{٢} = ٤$ ، $ق_{٦} = ٢$

$ق_{٤} = ٤٥$ ، $ق_{\infty} = ١٨٠$

اوجد $ق_{١}$ ، $مجـ_{\infty}$ ، $مجـ_{٢}$ ثم اثبت ان

$ق_{ن}$ تقترب من ∞ واوجد $ن$

الحيود

$م_٤ - م_٣ = ٤٥$

$م_١ (١ - ر^٣) = ٤٥$ ← (١)

$ص_∞ = ١٨٠$

$\frac{م_١ (١ - ر^٤)}{١ - ر} = ١٨٠$ ← (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

$\frac{م_١ (١ - ر^٤)}{١ - ر} \times \frac{١}{م_١ (١ - ر^٣)} = \frac{١٨٠}{٤٥}$

$\frac{١}{١ - ر} = ٤$

$٤ - ٤ر + ر^٢ = ١$

$٤ر^٢ - ٤ر + ١ = ٠$

$(٢ر - ١)(٢ر - ١) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ (بالتعويض)

$|ر| < ١ \therefore م_١ = ٩٦$

$ص_∞ = \frac{م_١}{١ - ر}$

$= \frac{٩٦}{١ - \frac{١}{٢}}$

$ص_∞ = ١٩٢$

مثال ١٢ متتابعة هندسية غير منتهية حدودها موجبة يساوي حدها الأول عشر حدها الثاني مجموعها عددان ٢٠ ، مجموع عدد غير منته من حدودها $\frac{١٢٥}{٢}$ أوجد هذه المتتابعة

الحل

$م_١ - م_٢ = ٣٠$

$م_١ (١ - ر) = ٣٠$ ← (١)

$ص_∞ = \frac{١٢٥}{٢}$

$\frac{م_١}{١ - ر} = \frac{١٢٥}{٢}$ ← (٢)

بقسمة (١) × (٢)

$م_١^٢ = ٢٠ \times \frac{١٢٥}{٢}$

$م_١^٢ = ٢٥ \times ٢٥$

$م_١ = ٤٥$ حدودها موجبة

بالتعويض في (١)

$٤٥ (١ - ر) = ٣٠$

$٤٥ - ٤٥ر = ٣٠$

$ر = \frac{١}{٣}$

المتتابعة

$(٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...)$

مثال (٣) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_{\infty} = ١٨$ ومجموع مربعات تلك الحدود $ح_{\infty} = ١٠٨$ أوجد متتابعة

الحل

$$* \frac{أ}{١ - ر} = ١٨$$

$$أ = ١٨ (١ - ر) \quad ①$$

$$(أ^{٢}، أ^{٢} ر^{٢}، أ^{٢} ر^{٤}، ...)$$

$$\therefore \frac{أ^{٢}}{١ - ر^{٢}} = ١٠٨ \quad ②$$

بقسمة ① ÷ ②

$$\frac{٢ أ (١ - ر)}{(١ - ر)(١ + ر)} = ١٠$$

$$٢ - ٢ر = ١ + ر$$

$$\therefore ٣ر = ١ \Rightarrow ر = \frac{١}{٣}$$

بالتعويض في ①

$$\frac{أ}{١ - \frac{١}{٣}} = ١٨$$

$$أ = ٩$$

مثال (٤) يبين انتاج صنع من البترول في السنة الأولى ٥٦٠ ألف برميل وكان انتاج هذا المنجم يتناقص سنوياً بمعدل ٤٪ عن انتاج السنة السابقة لها مباشرة أوجد أقصى ما يمكن انتاجه من هذا البئر

الحل

* ٥٦٠ ألف ← السنة الأولى

$\frac{٤}{١٠٠} \times ٥٦٠$ ألف ← ٢٢٤٠٠

* السنة الثانية

$= ٥٦٠٠٠٠ - ٢٢٤٠٠ = ٥٣٧٦٠٠$

$* ر = \frac{٥٣٧٦٠٠}{٥٦٠٠٠٠} = ٩٦ر$

$|ر| < ١$

$\therefore ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

$= \frac{٥٦٠٠٠٠}{١ - ٩٦ر}$

$ح_{\infty} = ١٤٠٠٠٠$ ألف برميل

مبدأ العد - التباديل

مبدأ العد

* ٥ ، ٦ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ج

يراد اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين فيكم طريقة يمكن الاختيار

* الحل

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٤

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٣

العدد الكلي للطرق المتاحة = ٤ × ٣ = ١٢

مضروب العدد

$ل_ن = ن(ن-١)(ن-٢) \times ... \times ٢ \times ١$

$ل_٥ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= ١٢٠$

$ل_٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= ٧٢٠$

٦! = ٧٢٠ على الآلة

٦ shift X! =

على صفا

* $ل_١ = ١$
* $ل_٠ = ١$

على صفا هام جدًا

$$ل_ن = ن \times ل_{ن-١}$$

اوجد $\frac{ل_٧}{ل_٥} + \frac{ل_٩}{ل_٧}$

الحل

$\frac{٧ \times ٦ \times ل_٥}{ل_٥} + \frac{٩ \times ٨ \times ل_٧}{ل_٧}$

٤٢ + ٧٢ = ١١٤

اوجد قيمة ن

$\frac{١}{ل_ن} = \frac{٢}{ل_{ن+١}}$

الحل

$ل_{ن+١} = ٢ ل_ن$

$(ن+١) ل_ن = ٢ ل_ن$

$ن+١ = ٢$

$ن = ١$ ←

التباديل

$ن ل_ر$: $ن \geq ر$

$= ن(ن-١)(ن-٢) \ldots (ن-(ر-١))$

* $٥ ل_٣ = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

* $٧ ل_٢ = ٧ \times ٦ = ٤٢$

* $١٠ ل_٠ = ١$

* $ن ل_١ = ن$

* $ن ل_ن = ن!$

قاعدة هامة

$$ن ل_ر = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

ملاحظات

* $ن ل_ن = ن!$

* $ن ل_٠ = ١$

* $ن ل_١ = ن$

أمثلة

$٩ ل_{ن-١} = ٧ \times ٨ \times ٩$

$ن-١ = ٢$

$ن = ٣$

$ن ل_{ن-١} = ١٢٠$

$ن-١ ل_٣ = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن-١ = ٥$

$ن = ٦$

$٦ ل_ر = ٤ \times ٦ ل_{ر-١}$

$$\frac{٦!}{(٦-ر)!} = ٤ \times \frac{٦!}{(٧-ر)!}$$

$$\frac{١}{(٦-ر)!} = ٤ \times \frac{١}{(٧-ر)!}$$

$٧-ر = ٤$

$ر = ٣$

⑤ حل المعادلة $\frac{1}{(ن-1)!} + \frac{2}{(ن+1)!} = \frac{2ن}{(ن+2)!}$

بالضرب × $(ن+2)!$

$\frac{(ن+2)!}{(ن-1)!} + \frac{2(ن+2)!}{(ن+1)!} = 2ن$

$\frac{ن(ن+1)(ن+2)}{(ن-1)!} + \frac{2(ن+2)(ن+1)}{(ن+1)!} = 2ن$

$(ن+2)(ن+1) + 2(ن+2) = 2ن$

$(ن+2)(ن+2) = 2ن$

$(ن+2)(ن+2) = 9 \times 8$

$ن+2 = 8 \Leftarrow$ $\boxed{ن = 6}$

---

⑥ $ل_{ن-1}^{2ن+1}$: $ل_{ن}^{2ن-1} = 2 : 5$ فما قيمة ن

الحل

$\frac{(2ن+1)!}{(ن+2)!} \div \frac{(2ن-1)!}{(ن-1)!} = \frac{2}{5}$

$\frac{(2ن+1)!}{(ن+2)!} \times \frac{(ن-1)!}{(2ن-1)!} = \frac{2}{5}$

$\frac{(2ن+1)(2ن)(2ن-1)!}{(ن+2)(ن+1)ن(ن-1)!} \times \frac{(ن-1)!}{(2ن-1)!} = \frac{2}{5}$

$10ن^2 + 10ن = 4ن^2 + 18ن + 6$

$2ن^2 - 11ن - 6 = 0$

$(2ن+1)(ن-6) = 0$

$ن = -\frac{1}{2}$ مرفوضة

$\boxed{ن = 6}$

حل آخر ولة

$$ن + ٢ل_{٤} = ٥٦ \times ن ل_{ن}$$

$$\frac{(ن+٢)!}{(ن-٢)!} = ٥٦ \times \frac{ن!}{(ن-٢)!}$$

$$(ن+٢)(ن+١) = ٥٦ ن$$

$$(ن+٢)(ن+١) = ٧ \times ٨$$

$$ن + ٢ = ٨$$

$$ن = ٦$$

مثال (٧) على

اذا كان العامل الاوسط في مفكوك $ن ل_{١١}$ يساوي ١٥ اوجد قيمة ن

الحل

$$\text{العامل الاوسط} = \frac{\text{العامل الاول} + \text{الاخير}}{٢}$$

$$١٥ = \frac{ن + ن - ١١ + ١}{٢}$$

$$٢ن - ١٠ = ٣٠$$

$$٢ن = ٤٠$$

$$ن = ٢٠$$

حل آخر ت

$$ل_{ر+٢} = ١٨٢ ل_{١١} ل_{ر-١١}$$

الحل

$$\frac{ل_{ر+٢}}{ل_{ر-١١}} = ١٨٢ \times \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

$$(ر+٢)(ر+١) ل_{ر} = ١٨٢ ل_{ر}$$

$$(ر+٢)(ر+١) = ١٤ \times ١٣$$

$$ر + ٢ = ١٤$$

$$ر = ١٢$$

اذا كان $ن ل_{١٥} < ن ل_{١٤}$

اوجد اكبر قيمة لـ ن

الحل

$$\frac{ن!}{(ن-١٥)!} < \frac{ن!}{(ن-١٤)!}$$

طرفين × موجب

$$(ن-١٤)! < (ن-١٥)!$$

$$\therefore ن - ١٤ < ن - ١٥$$

لا يوجد عدد كلي ن يحقق المطلوب

ملحوظة اضفنا للعدد ن هو ١٥

مثال ⑨ إذا كان $ل_{ن+٢} = ٤٠$

$ل_{ن} = ٦$

أوجد $ل_{٢ن-٥}$

الحل

$* \quad ل_{ن+٢} = ٧ \times ٦ \times ٤$

$ن + ٢ = ٧ \quad \leftarrow ①$

$* \quad ل_{ن} = ٦$

$\therefore ل_{ن-٢} = ل_{٣}$

$ن - ٢ = ٣ \quad \leftarrow ②$

$٢ن = ١٠ \quad \boxed{ن = ٥}$

$\therefore ٥ + ٧ = ١٢ \quad \boxed{ن = ٢}$

$ل_{٢ن-٥} = ل_{٥-٥} = ل_{صفر} = ١$

مثال ⑩

$ل_{ن-٣} = ١$

الحل

$ن - ٣ = ٠ \quad \Big| \quad ن - ٣ = ١$

$\boxed{ن = ٣} \quad \Big| \quad \boxed{ن = ٤}$

مثال ⑪

$س + ص ل_{٣} = ٥٠٤$

$س - ص ل_{٤} = ١٢٠$

أوجد $ل_{س}$

الحل

$ل_{س} = ل_{ص+٧} \times ٣ \times ٩ \times ٧$

$ص + ٧ = ٩ \quad \leftarrow ①$

$ل_{س-ص} = ل_{٤} \times ٥ \times ٤ \times ٢ \times ٢$

$س - ص = ٥ \quad \leftarrow ②$

$٢ س = ١٤$

$\boxed{س = ٧}$

بالتعويض في ①

$٧ + ص = ٩$

$\boxed{ص = ٢}$

$ل_{س} = ل_{٧}$

$= ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

إثبات أن $ن^{ن-1}$ ، $ن^{ن-1}$ ل $ن$ − ١ ، $\frac{ن^{ن-1}\ل ن}{\ل ن - 1}$ = $ن \times \frac{ن}{\ل ن - 1}$

الحل

$= \frac{ن}{\ل ن - 1} \times$ ل $ن^{ن-1}$

$= \frac{ن}{\ل ن - 1} \times$ ل $ن^{ن-1}$

$= ن \times \frac{ن^{ن-1}\ل ن}{\ل ن - 1}$

$= ن \times \frac{ن^{ن-1}\ل ن}{\ل ن - 1}$

$= ن \times$ ن

$= ن^{2}$

إثبات أن $ن^{ن-1}$ ، $ن^{ن-1}$ ل $ن$ − ١ ، $\frac{ن^{ن-1}\ل ن}{\ل ن - 1}$ = $ن \times \frac{ن}{\ل ن - 1}$

$ن^{ن-1}$ ل $ن$ − ١ = $ن$

ومما تم استنتاج أن

٩٧ ل ٤٠ : ٩٦ ل ٣٩

الحل

$\frac{ن}{\ل ن - 1} \times$ ل $ن^{ن-1}$

$= ن$

$= ٩٧$

في أي مما يلي

الذي يحقق

٢٠ ل ٥٠ : ١١٨ ل ٤٨

الحل

٢٠ ل ٥٠ : ١١٨ ل ٤٨

١١٩ ل ٤٩ : ١١٩ ل ٤٩

$\frac{1}{119}$: ١٠ =

١١٩ × ١٠ =

=

تعريف

هو كل مجموعة جزئية تكون ناتجة من مجموعة معلومة عناصرها بغض النظر عن ترتيبها

مثال (١)

١٠ طلاب يريد اختيار مجموعة من ٣ منهم اوجد عدد الطرق

الحل

^{3}١٠

مثال (٢)

$س = \{ أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و \}$

$ص = \{ أ ، ب ، ج ، د \}$

اوجد عدد عناصر ص

الحل

* ل ؟ تبديل
* ^{4}ل$_{4}$ دون اعتبار

$$= \frac{ل_{4}}{ل_{4-4}}$$

$$= \frac{ل_{4}}{ل_{0}}$$

$$= \frac{٢٤}{١} = ٢٤$$

$$= ٢ \times ٤ \times ٥$$

$$= ٤٠$$

$$= \frac{٤٠}{٢ \times ١ \times ٢}$$

$$= \frac{٤٠}{٤}$$

$$= ١٠$$

$$= \frac{٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$

$$= \frac{٨٤٠}{٢٤}$$

$$= ٣٥$$

ملاحظات

* ^{0}ن = ١
* ^{1}ن = ن
* ^{n}١ = ١

إذا كان ^{ن}س = ^{ن}ص فإن س = ص أو س + ص = ن

البسيط

^{15}١٦ = ^{16}١٦

^{ن}س = ^{ن}ص

س = ص أو س + ص = ن

مثال ⑤

أوجد قيمة ر

$\frac{ن+٩}{ن+٢ر+١} = \frac{١٨}{١٨}$

الحل

بما أن

$ن+٩ = ن+٢ر+١$

$٢ر = ٨$

$ر = ٤$

أو

$ن+٩+٢ر+١ = ١٨$

$٣ر+١٠ = ١٨$

$٣ر = ٨$

$ر = ٢$

مثال ⑥

إذا كان $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ١٢٠$

فأوجد قيمة ن

الحل

$ن(ن-١) = ١٢٠$

$ن^٢ - ن = ١٢٠$

$ن^٢ - ن - ١٢٠ = ٠$

$(ن-١٢)(ن+١٠) = ٠$

$ن = ١٢$ أو $ن = -١٠$ (مرفوض)

مثال ⑦

إذا كان $\frac{ن!}{(ن-٣)!} = ٣٥$

أوجد قيمة ن

الحل

باستخدام قانون التبسيط

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٣٥$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)!}{(ن-٣)!} = ٣٥$

$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)! = ٧ \times ٥ \times ٤ \times ٣!$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٧ \times ٥ \times ٤$

$ن = ٧$

$\frac{ن!}{(ن-٢)!} = \frac{٧!}{٥!}$

$ن(ن-١) = ٧ \times ٦$

$ن = ٧ + ١$

$ن = ١٥$

مثال (٤)

$ن_{ر-١} = ٥٦$

$\frac{ن_{ر-١}}{ن_{١-١}} = ٥٦$

$\frac{٦٧٢٠}{ن_{١-١}} = ٥٦$

$\therefore ن_{١-١} = ١٢٠$

$\therefore ن_{ر-١} = ن_{٥}$

$\therefore ر - ١ = ٥$

$\therefore ر = ٦$

$\therefore ن_{ل} = \frac{٦٧٢٠}{٥}$

$\therefore ن_{ل} = ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$

$\therefore ن = ٨$

مثال (٥)

إذا كان

$ن_{ل} = ١٢٠ \times ن_{ن-ر}$

أوجد ر

الحل

$ن_{ل} = ١٢٠ \times ن_{ن}$

$ن_{ر} = ١٢٠ \times ن_{ن}$

$ل_{ر} = ١٢٠ \times ل_{ن}$

$ل_{ر} = ١٢٠$

$ل_{ر} = ل_{٥}$

$\therefore ر = ٥$

إذا كان

$ن_{٩} < ن_{١٠}$

الحل

$ل_{ن} < ل_{ن+١٠}$

$\frac{١}{ل_{ن+١٠}} < \frac{١}{ل_{٩-ن}}$

$\therefore ١٠ < ٩ - ن$

$\therefore ن < ١٩$

مثال ٦ أثبت أن $\frac{ن}{ن-١} = \frac{ن!}{(ن-١)!}$

ومنها أوجد قيمة $\frac{١٠٠!}{٩٩!} \div \frac{٥٠!}{٤٩!}$

الحل

$$\frac{ن!}{(ن-١)!} \div \frac{(ن+١)!}{(ن-١)!}$$

$$= \frac{ن!}{(ن+١)ن(ن-١)!} \times \frac{(ن-١)!}{(ن+١)!}$$

$$= \frac{ن}{ن+١}$$

$$\therefore \frac{١٠٠!}{٩٩!} \div \frac{٥٠!}{٤٩!} = \frac{١٠٠}{٥٠} = ٢$$

مثال ٧ أثبت أن $\frac{ن!}{(ن-١)!} + \frac{ن!}{(ن-١)!} = \frac{(ن+١)!}{(ن-١)!}$

ومنها أوجد $\frac{١٠!}{٢!٨!} + \frac{١٠!}{٤!٦!}$

الحل

$$\frac{ن!}{ن!(ن-ن)!} + \frac{ن!}{(ن-١)!(ن-ن+١)!}$$

$$\frac{ن!}{ن!(ن-ن)!} + \frac{ن!}{(ن-١)!(ن-ن+١)(ن-ن)!}$$

$$= \frac{(ن-ن+١)ن! + ن!ن}{ن!(ن-ن+١)(ن-ن)!}$$

$$\frac{\text{ل}_{ن+1}}{\text{ل}_{ن}} = \frac{(ن+1)}{\text{ف} \times \text{ل}_{ن+1-ن+1}} = \frac{\text{ل}_{ن+1}}{\text{ل}_{ن+1-ن+1}}$$

$$= \text{ف}^{ن+1} \text{ل}_{ن+1-ن+1}$$

$$\text{وسـ}_{ن} = ٤ن^{٣} + ١٠ن^{٢} + ١١ن$$

$$= \frac{١١ \times ١٠ \times ٤ \times ٧}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢٤٢$$

مسألة (١) $\text{ص}_{ن} = ٢ \times \text{س}^{ن}$ ، $\text{ص}_{ن+١} = \text{س}^{ن+١}$

$\text{ص}_{ن-١} = \text{س}^{ن-١}$ ، $\text{ص}_{ن+١} = \text{س}^{ن+١}$

الحل

$\text{ص}_{ن+١} = \text{ص}_{ن} + \text{ص}_{ن-١}$ ∴

$\text{س}^{ن+١} = \text{س}^{ن} + \text{س}^{ن-١}$

$\text{س}^{ن-١}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ١) = ٠$

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ١ = ٠$ ∵ $\text{س}^{ن-١} \neq ٠$

$\text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ ∴ $\text{س}_{١} = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\text{س}_{٢} = \frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$

$\text{ص}_{ن} = \text{ا} (\text{س}_{١})^{ن} + \text{ب} (\text{س}_{٢})^{ن}$

$\text{ص}_{١} = ١$ ، $\text{ص}_{٢} = ٣$

$١ = \text{ا} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right) + \text{ب} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)$

$٣ = \text{ا} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢} + \text{ب} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢}$

بحل المعادلتين ينتج أن

$\text{ا} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، $\text{ب} = -\frac{١}{\sqrt{٥}}$

$\text{ص}_{ن} = \frac{١}{\sqrt{٥}} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{ن} - \frac{١}{\sqrt{٥}} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^{ن}$

مسألة ثانية ∵ $\text{ص}_{ن+١} = \text{ص}_{ن} + \text{ص}_{ن-١}$ ∴ $\text{س}^{٢} = \text{س} + ١$

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ١ = ٠$

$\text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ ∴ $\text{س}_{١} = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\text{س}_{٢} = \frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$

$\text{ص}_{ن} = \text{ا} (\text{س}_{١})^{ن} + \text{ب} (\text{س}_{٢})^{ن}$

$\text{ص}_{١} = ١$ ، $\text{ص}_{٢} = ٣$

$١ = \text{ا} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right) + \text{ب} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)$

$٣ = \text{ا} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢} + \text{ب} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢}$

بحل المعادلتين ينتج أن

$\text{ا} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، $\text{ب} = -\frac{١}{\sqrt{٥}}$

$\text{ص}_{ن} = \frac{١}{\sqrt{٥}} \left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{ن} - \frac{١}{\sqrt{٥}} \left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^{ن}$

مسألة $\frac{\text{ص}_{ن}}{\text{ص}_{ن+١}} = ٢ - \frac{١}{\frac{\text{ص}_{ن+١}}{\text{ص}_{ن}}}$

$= ٢ - \frac{١}{\frac{\text{ص}_{ن+١}}{\text{ص}_{ن+١} + \text{ص}_{ن-١}}}$

$= ٢ - \frac{١}{١ + \frac{\text{ص}_{ن-١}}{\text{ص}_{ن+١}}}$

$= ٢ - \frac{١}{١ + \frac{\text{ص}_{ن-١}}{\text{ص}_{ن+١} + \text{ص}_{ن-٢}}}$

$= ٢ - \frac{١}{١ + \frac{١}{\frac{\text{ص}_{ن+١}}{\text{ص}_{ن-١}} + \frac{\text{ص}_{ن-٢}}{\text{ص}_{ن-١}}}}$

$= ٢ - \frac{١}{١ + \frac{١}{\frac{\text{ص}_{ن+١}}{\text{ص}_{ن}} + \frac{\text{ص}_{ن-٢}}{\text{ص}_{ن-١}}}}$

$= ٢ - \frac{١}{١ + \frac{١}{\frac{\text{ص}_{ن+١}}{\text{ص}_{ن}} + \frac{\text{ص}_{ن-٢}}{\text{ص}_{ن-١}}}}$

$$\text{ص} + 1 = 2 - 2\text{ص}$$

$$\therefore 3\text{ص} = 2 - 1 \quad \leftarrow$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3}$$

$$\text{س} = 0.6 \text{ ص} = \frac{3}{5}$$

مثال ٩ اثبت أن

$$\frac{\text{ن}^{\text{ن}+1} - \text{ن} + 1}{\text{ن}} = \text{ن}^{\text{ن}} \div \text{ن}^{\text{ن}-1}$$

ومنه أوجد $10^{6} \div 10^{5}$

الحل

$$\frac{\text{ن}^{\text{ن}}}{\text{ن}^{\text{ن}-1}} \times \frac{\text{ن}^{\text{ن}-1} \text{ ن}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{1 \times \text{ن}^{\text{ن}-1} \text{ ن}^{(\text{ن}+1)-\text{ن}}}{\text{ن}^{\text{ن}-1} \text{ ن}^{\text{ن}-\text{ن}}}$$

$$= \frac{\text{ن}^{\text{ن}+1} - \text{ن} + 1}{\text{ن}}$$ وهو المطلوب

ومنه $10^{6} \div 10^{5}$

$$= 10^{6-5+1}$$

$$= \frac{10}{6}$$

$$= \frac{5}{3}$$

سبحان الله والحمد لله
سبحان الله العظيم