الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

١ - ١ المتتابعات

✷ تعريف :

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

أى أن المتتابعه هى د : ص$^+$ ⟵ ح أو د : { ١، ٢، ٣، ....، ن } ⟵ ح

ويرمز للحد الأول بالرمز ح$_١$ ، الحد الثانى بالرمز ح$_٢$ ، الحد الثالث بالرمز ح$_٣$ ، وهكذا ...

ويرمز الحد النونى بالرمز ح$_ن$ ويتم التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين القوسين (   ) كمايلى:

(ح$_١$ ، ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، .... ، ح$_ر$ ، ....) أو يرمز للمتتابعة بالرمز (ح$_ن$)

✷ المتتابعة المنتهية والمتتابعة الغير منتهية:

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيا (أى يمكن حصره أو عده)

وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (أى عدد لانهائى من العناصر)

مثـــال١:

اكتب كلا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

Ⓐ ح$_ن$ = ١ + $\frac{٢}{\sqrt{ن}}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداء من حدها الأول)

Ⓑ ح$_ن$ = جا $\frac{\pi}{ن}$ (إلى خمسة حدود ابتداء من حدها الأول)

الحـــل:

Ⓐ ح$_ن$ = ١ + $\frac{٢}{\sqrt{ن}}$ بوضع ن = ١ فإن ح$_١$ = ١ + $\frac{٢}{\sqrt{١}}$ = ٣

، بوضع ن = ٢ فإن ح$_٢$ = ١ + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = ١ + $\sqrt{٢}$

، بوضع ن = ٣ فإن ح$_٣$ = ١ + $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = ١ + $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

∴ المتتابعة هى: (٣ ، ١ + $\sqrt{٢}$ ، ١ + $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ....)

ب) $ح_ن = جا \frac{\pi}{ن}$

بوضع $ن = ١$ فإن $ح_١ = جا \frac{\pi}{١} = جا\pi = ٠$ ، بوضع $ن = ٢$ فإن $ح_٢ = جا \frac{\pi}{٢} = ١$

، بوضع $ن = ٣$ فإن $ح_٣ = جا \frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، بوضع $ن = ٤$ فإن $ح_٤ = جا \frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

، بوضع $ن = ٥$ فإن $ح_٥ = جا \frac{\pi}{٥} = جا ٣٦° \simeq ٠,٥٩$

∴ المتتابعة هى: $(٠ ، ١ ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢} ، ٠,٥٩)$

✸ الحد العام للمتتابعة:

الحد العام للمتتابعة (ويسمى أحيانا الحد النونى) ويكتب $ح_ن$

حيث $ح_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبة ن أو هو الحد الذى رتبته ن ويمكن أحيانا استنتاج الحد العام من خلال الحدود المعطاة للمتتابعة وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد ورتبته

فمثلا:

متتابعة الأعداد الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، .....) حدها العام هو $ح_ن = ٢ن$

متتابعة الأعداد الفردية (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....) حدها العام هو $ح_ن = ٢ن - ١$

ملاحظة: بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة أى ليس لها حد عام

مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، .....)

مثـــال٢:

اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث

$ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ حيث $ن \geq ١$ ، $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$

الحـــل:

∵ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ ، $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$

بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_٣ = ح_٢ + ح_١ = ٣ + ٢ = ٥$

بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_٤ = ح_٣ + ح_٢ = ٥ + ٣ = ٨$

بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_٥ = ح_٤ + ح_٣ = ٨ + ٥ = ١٣$

بوضع $ن = ٤$ ∴ $ح_٦ = ح_٥ + ح_٤ = ١٣ + ٨ = ٢١$

∴ المتتابعة هى: (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ٢١)

✸ المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية:

✸ تعريف :

- تسمى المتتابعة ($ع_ن$) تزايدية إذا كان $ع_{ن+١} > ع_ن$
  أى أن كل حد من حدودها أكبر من الحد السابق له مباشرة
- تسمى المتتابعة ($ع_ن$) تناقصية إذا كان $ع_{ن+١} < ع_ن$
  أى أن كل حد من حدودها أصغر من الحد السابق له مباشرة

مثـــال٣:

بين أى المتتابعات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك:

(أ) $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ٣$ (ب) $ع_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ (ج) $ع_ن = (-٢)^{ن}$

الحـــل:

(أ) $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ٣$ نوجد $ع_{ن+١}$ بوضع ن + ١ بدلا من ن $\therefore ع_{ن+١} = \frac{٢}{ن+١} - ٣$

$$\therefore ع_{ن+١} - ع_ن = \left(\frac{٢}{ن+١} - ٣\right) - \left(\frac{٢}{ن} - ٣\right)$$

$$= \frac{٢}{ن+١} - ٣ - \frac{٢}{ن} + ٣ = \frac{٢}{ن+١} - \frac{٢}{ن} = \frac{٢ن - ٢ن - ٢}{ن(ن+١)} = \frac{-٢}{ن(ن+١)} < ٠$$

$\therefore ع_{ن+١} < ع_ن$ أى أن المتتابعة تناقصية

(ب) $ع_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ نوجد $ع_{ن+١}$ بوضع ن + ١ بدلا من ن $\therefore ع_{ن+١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١}$

$$\therefore ع_{ن+١} - ع_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}\left(\frac{١}{٢} - ١\right) = \frac{-١}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} < ٠$$

$\therefore ع_{ن+١} < ع_ن$ أى أن المتتابعة تناقصية

(ج) $ع_ن = (-٢)^{ن}$ نوجد $ع_{ن+١}$ بوضع ن + ١ بدلا من ن $\therefore ع_{ن+١} = (-٢)^{ن+١}$

$$\therefore ع_{ن+١} - ع_ن = (-٢)^{ن+١} - (-٢)^{ن} = (-٢)^{ن}(-٢ - ١) = -٣ \times (-٢)^{ن}$$

وهذا المقدار موجب عندما ن فردى وسالب عندما ن زوجى أى أن المتتابعة ليست تزايدية وليست تناقصية

ملاحظة

يمكن حل المثال السابق بإيجاد بعض الحدود لكل متتابعة ثم نقارن بين قيم الحدود لمعرفة هل المتتابعة تزايدية أو تناقصية أو غير ذلك

١ - ٢ المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة فمثلا: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٠٠٠٠٠) هى متتابعة
وبالتالى فإن: ١ + ٣ + ٥ + ٧ ٠٠٠ هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة
ويتم إستخدام رمز التجميع $\sum$ ويقرأ " سيجما " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة

✸ تعريف: المتسلسلة المنتهية:

المتسلسلة المنتهية تكتب بالصورة $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ٠٠٠ + ح_ر + ٠٠٠ + ح_ن$

حيث ن عدد صحيح موجب ، $ح_ن$ هو الحد الذى رتبته ن فى المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهيه بمجموع حدود المتتابعة المناظرة

ففى المتسلسلة المنتهية $أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + ٠٠٠٠ + أ_ر + ٠٠٠ + أ_ن$

يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر$ وتقرأ مجموع $أ_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

مثال١:

اكتب كلا من المتسلسلات الآتية فى شكل المفكوك ثم أوجد مجموعها :

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر^٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر + ٢)$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{ر+٢} - \frac{١}{ر+١})$

الحل:

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر^٢) = (١ + ١^٢) + (١ + ٢^٢) + (١ + ٣^٢) + (١ + ٤^٢) + (١ + ٥^٢)$

$= ٢ + ٥ + ١٠ + ١٧ + ٢٦ = ٦٠$

(ب) $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر + ٢) = (٣ + ٢) + (٦ + ٢) + (٩ + ٢) + (١٢ + ٢) + (١٥ + ٢)$

$+ (١٨ + ٢) + (٢١ + ٢) + (٢٤ + ٢) + (٢٧ + ٢)$

$= ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ٢٠ + ٢٣ + ٢٦ + ٢٩ = ١٥٣$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{ر+٢} - \frac{١}{ر+١}) = (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٤}) + ٠٠٠ + (\frac{١}{ن+٢} - \frac{١}{ن+١})$

$= \frac{١}{ن+٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٢ - ن - ٢}{٢(ن+٢)} = \frac{-ن}{٢(ن+٢)}$

المتسلسلة غير المنتهية:

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها

فمثلا المتسلسلة $-2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots$ **حدها العام هو** $(-2)^{ر}$

فيتم كتابتها بالصورة $\sum_{ر=1}^{\infty} (-2)^{ر}$ **و يستخدم الرمز** ∞ **للدلالة على أنه لايمكن حصر عدد حدودها**

مثـــال٢:

استخدم رمز التجميع $\sum$ **فى كتابة المتسلسلة** $1\times2\times3 + 3\times4\times5 + 5\times6\times7 + \cdots$

الحـــل:

نوجد الحد العام للمتتابعة $(1\times2\times3 ، 3\times4\times5 ، 5\times6\times7 ، \cdots)$

فنجد أن الحد العام هو $ح_{ر} = (2ر - 1)2ر(2ر + 1)$ **حيث** $ر \in ص^{+}$

$$\therefore 1\times2\times3 + 3\times4\times5 + 5\times6\times7 + \cdots = \sum_{ر=1}^{\infty} (2ر - 1)2ر(2ر + 1)$$

✱ الخواص الجبرية للتجميع:

١ – إذا كانت $(ح_{ر})$ ، $(هـ_{ر})$ **متتابعتين ،** $ن \in ص^{+}$ ، $ج \in ح$ **فإن:**

(أ) $\sum_{ر=1}^{ن} ج = جن$ **(مجموع عدد حقيقى من ١ إلى** $ن$ **يساوى العدد** $\times\, ن$ **)**

فمثلا: $\sum_{ر=1}^{5} 6 = 6\times5 = 30$

(ب) $\sum_{ر=1}^{ن} أح_{ر} = أ \sum_{ر=1}^{ن} ح_{ر}$ **(اخراج الثابت المضروب فى حدود المتسلسلة خارج رمز التجميع)**

فمثلا: $\sum_{ر=1}^{ن} 3ر^{2} = 3 \sum_{ر=1}^{ن} ر^{2}$

(ج) $\sum_{ر=1}^{ن} (ح_{ر} \pm هـ_{ر}) = \sum_{ر=1}^{ن} ح_{ر} \pm \sum_{ر=1}^{ن} هـ_{ر}$ **(توزيع التجميع على الجمع والطرح)**

فمثلا: $\sum_{ر=1}^{ن} (5 - 3ر + ر^{2}) = \sum_{ر=1}^{ن} 5 - \sum_{ر=1}^{ن} 3ر + \sum_{ر=1}^{ن} ر^{2}$

٢- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ (مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ إلى ن)

فمثلا مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠ يكون $\sum_{\text{ر}=1}^{10} \text{ر} = \frac{10\times(10+1)}{2} = 55$

، $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2 = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}$ (مجموع مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ إلى ن)

فمثلا مجموع مربعات الأعداد من ١ إلى ٦ يكون $\sum_{\text{ر}=1}^{6} \text{ر}^2 = \frac{6\times(6+1)(2\times6+1)}{6} = 91$

مثـــال٣:

اوجد بطريقتين مختلفتين : $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (2\text{ر}^2 - 3\text{ر} + 5)$

الحـــل:

الطريقة الأولى: استخدام التعويض المباشر عن ر من ١ ألى ٥

$$\therefore \sum_{\text{ر}=1}^{5} (2\text{ر}^2 - 3\text{ر} + 5) = (2-3+5) + (8-6+5) + (18-9+5)$$
$$+ (32-12+5) + (50-15+5)$$
$$= 4+7+14+25+40 = 90$$

الطريقة الثانية: استخدام الخواص الجبرية للتجميع

$$\therefore \sum_{\text{ر}=1}^{5} (2\text{ر}^2 - 3\text{ر} + 5) = 2\sum_{\text{ر}=1}^{5} \text{ر}^2 - 3\sum_{\text{ر}=1}^{5} \text{ر} + \sum_{\text{ر}=1}^{5} 5$$
$$= 2\times\frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6} - 3\times\frac{5(5+1)}{2} + 5\times5$$
$$= 110 - 45 + 25 = 90$$

ملاحظات هامة:

١- طريقة التعويض المباشر تصلح لإيجاد المجموع لعدد قليل جدا من الحدود
٢- طريقة الخواص الجبرية للتجميع هى الطريقة العامة التى تصلح لجميع الحالات
٣- يمكن التأكد من ناتج المتسلسلة باستخدام الألة الحاسبة (سيتم توضيح ذلك أثناء شرح الدرس)

١ - ٣ المتتابعة الحسابية

✸ تعريف: المتتابعة الحسابية:

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز ء

أى أن ء = $ح_{ن+١} - ح_ن$ لكل ن ∈ ص$^+$

∴ أساس المتتابعة الحسابية = قيمة أى حد − قيمة الحد السابق له مباشرة

فمثلا :

ء = $ح_٢ - ح_١$ ، ء = $ح_٣ - ح_٢$ ، ..... ، ء = $ح_٦ - ح_٥$ ، .... وهكذا

مثال١:

أى من المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية ؟ ولماذا؟

أ − (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨ ، ...)

ب − (−١٤ ، −٨ ، −٢ ، ٤ ، ١٠)

جـ − (٢٣ ، ٢٨ ، ٣٣ ، ٣٨ ، ٤٢)

الحل:

أ − (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨ ، ...)

∵ $ح_٢ - ح_١$ = ٣٣ − ٣٨ = −٥ ، $ح_٣ - ح_٢$ = ٢٨ − ٣٣ = −٥

، $ح_٤ - ح_٣$ = ٢٣ − ٢٨ = −٥ ، $ح_٥ - ح_٤$ = ١٨ − ٢٣ = −٥

∴ $ح_٢ - ح_١$ = $ح_٣ - ح_٢$ = $ح_٤ - ح_٣$ = $ح_٥ - ح_٤$ = −٥

∴ المتتابعة حسابية أساسها ء = −٥

ب − (−١٤ ، −٨ ، −٢ ، ٤ ، ١٠)

∵ $ح_٢ - ح_١$ = −٨ + ١٤ = ٦ ، $ح_٣ - ح_٢$ = −٢ + ٨ = ٦

، $ح_٤ - ح_٣$ = ٤ + ٢ = ٦ ، $ح_٥ - ح_٤$ = ١٠ − ٤ = ٦

∴ $ح_٢ - ح_١$ = $ح_٣ - ح_٢$ = $ح_٤ - ح_٣$ = $ح_٥ - ح_٤$ = ٦

∴ المتتابعة حسابية أساسها ء = ٦

جـ – (٢٣ ، ٢٨ ، ٣٣ ، ٣٨ ، ٤٢)

∵ $ح_٢ - ح_١ = ٢٨ - ٢٣ = ٥$ ، $ح_٣ - ح_٢ = ٣٣ - ٢٨ = ٥$

، $ح_٤ - ح_٣ = ٣٨ - ٣٣ = ٥$ ، $ح_٥ - ح_٤ = ٤٢ - ٣٨ = ٤$

∴ $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ \neq ح_٥ - ح_٤$ ∴ المتتابعة ليست حسابية

مثال٢:

أى من المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية ثم أوجد أساسها فى حال كونها حسابية:

أ – $(ح_ن) = (٥ - ٣ن)$ ب – $(ح_ن) = ((ن + ١)^٢)$

الحل:

لمعرفة نوع المتتابعة يتم إيجاد $ح_{ن+١}$ ، $ح_ن$ ثم إيجاد الفرق بينهما

أ – $(ح_ن) = (٥ - ٣ن)$

∴ $ح_ن = ٥ - ٣ن$ ، $ح_{ن+١} = ٥ - ٣(ن + ١) = ٥ - ٣ن - ٣ = ٢ - ٣ن$

∴ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٢ - ٣ن) - (٥ - ٣ن) = ٢ - \cancel{٣ن} - ٥ + \cancel{٣ن} = -٣ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٥ - ٣ن)$ متتابعة حسابية أساسها $= -٣$

ب – $(ح_ن) = ((ن + ١)^٢)$

∴ $ح_ن = (ن + ١)^٢$ ، $ح_{ن+١} = (ن + ١ + ١)^٢ = (ن + ٢)^٢$

∴ $ح_{ن+١} - ح_ن = (ن + ١)^٢ - (ن + ٢)^٢ = ((ن + ١) - (ن + ٢))((ن + ١) + (ن + ٢))$

$= -(٢ن + ٣)$ لا يساوى مقدار ثابت لأنه يعتمد على ن

∴ $(ح_ن) = (٢ن^٢ + ١)$ ليست متتابعة حسابية

✱ التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية:

مثال٣:

اوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية (١٠ ، ٧ ، ٤ ، ٠٠٠) ثم مثل الحدود السبعة بيانيا

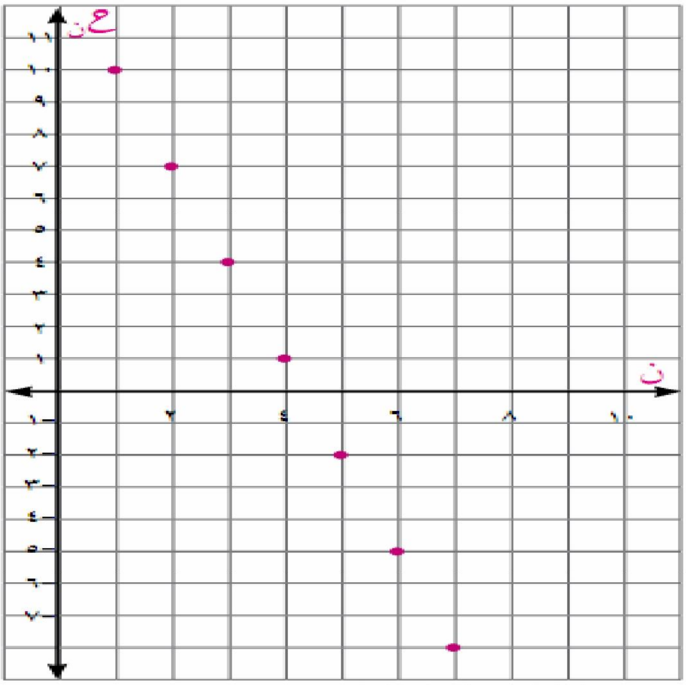
الحل:

∵ المتتابعة حسابية ∴ $ء = ح_٢ - ح_١ = ٧ - ١٠ = -٣$

∴ الحدود الأربعة التالية هى : ١ ، –٢ ، –٥ ، –٨

∴ مجال المتتابعة هو (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٠٠٠)

∴ مدى المتتابعة هو (١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، –٢ ، –٥ ، –٨ ، .....)



ويتم التمثيل كما بالشكل المجاور
ومن الشكل نلاحظ أن
النقاط التى تمثل حدود المتتابعة تقع على إستقامة واحدة
مما يعنى أن المتتابعة هى دالة من الدرجة الأولى
ويكون معامل ن هو اساس المتتابعة
ونستنتج من ذلك أن:

- العلاقة بين المتغيرين ن ، ع$_{ن}$ هى:

$$\boxed{ع_{ن} = ءن + ب}$$

حيث ء ، ب ثابتان ، ء أساس المتتابعة

- المتتابعة تكون تزايدية عندما ء > ٠
  وتكون تناقصية عندما ء < ٠

مثـــال٤:

فى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٣ن – ٥ :

أ – اثبت أن (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية وأوجد أساسها
ب – بين أن هذه المتتابعة تزايدية
جـ – أوجد حدها الخامس عشر
د – إذا كان ع$_{ن}$ = ٨٥ فما قيمة ن ؟

الحـــل:

أ– ∵ ع$_{ن}$ = ٣ن – ٥ ∴ ع$_{ن+١}$ = ٣(ن + ١) – ٥ = ٣ن + ٣ – ٥ = ٣ن – ٢

∴ ع$_{ن+١}$ – ع$_{ن}$ = ٣ن – ٢ – ٣ن + ٥ = ٣ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة حسابية أساسها ء = ٣

ب – ∵ ء = ٣ ∴ ء > ٠ ∴ المتتابعة تزايدية

جـ– ∵ ع$_{ن}$ = ٣ن – ٥ ∴ ع$_{١٥}$ = ٣ × ١٥ – ٥ = ٤٥ – ٥ = ٤٠

د – ∵ ع$_{ن}$ = ٨٥ ∴ ٨٥ = ٣ن – ٥ ∴ ٣ن = ٩٠ ∴ ن = ٣٠

✸ الحد النونى للمتتابعة الحسابية:

من تعريف المتتابعة الحسابية يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية التى حدها الأول أ وأساسها ء كما يلى:

$ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أ + ء$ ، $ح_٣ = أ + ٢ء$ ، $ح_٤ = أ + ٣ء$ ، .....

ونلاحظ أن **معامل ء يكون دائما أقل من رتبة الحد بواحد**

وبناء على ذلك يكون الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

$$\boxed{ح_ن = أ + (ن - ١)ء}$$

حيث: $ح_ن$ = قيمة الحد الذى رتبته ن ، أ = الحد الأول للمتتابعة الحسابية
، ن = رتبة الحد ، ء = أساس المتتابعة الحسابية

ملاحظات:

١) أذا كان عدد حدود المتتابعة = ن فإن $ح_ن$ يكون هو الحد الأخير للمتتابعة
ويرمز للحد الأخير بالرمز ل وبالتالى يكون :

$$\boxed{ل = أ + (ن - ١)ء}$$

حيث ن = عدد الحدود أى رتبة الحد الأخير

٢) الصورة العامة للمتتابعة الحسابية التى حدها الأول أ وأساسها ء تكون:

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

٣) ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب لأن ن تمثل رتبة الحد أو عدد حدود المتتابعة

مثـــال٥:

أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٩٩ فى المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...)

الحـــل:

∵ (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) متتابعة حسابية

∴ أ = ١ ، ء = $ح_٢ - ح_١$ = ٣ − ١ = ٢ ، $ح_ن$ = ٩٩

∵ $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$ ∴ ٩٩ = ١ + (ن − ١) × ٢ ∴ ٩٩ = ١ + ٢ن − ٢

∴ ٢ن = ٩٩ + ١ = ١٠٠ ⇐ ∴ ن = $\frac{١٠٠}{٢}$ ⇐ ∴ ن = ٥٠

∴ الحد الذى قيمته ٩٩ هو $ح_{٥٠}$

مثـــال٦:

أوجد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٩٥، ٩٢، ٨٩، ...)

الحـــل:

(٩٥، ٩٢، ٨٩، ...) متتابعة حسابية

∴ أ = ٩٥ ، ء = ح٢ − ح١ = ٩٢ − ٩٥ = −٣ ، أول حد سالب تعنى أن حن < ٠

∵ حن = أ + (ن − ١)ء ⟸ ∴ أ + (ن − ١)ء < ٠

∴ ٩٥ + (ن − ١) × (−٣) < ٠ ∴ ٩٥ − ٣ن + ٣ < ٠

∴ −٣ن < −٩٨ ⟸ ∴ ن > −٩٨ / −٣ ⟸ ∴ ن > ٣٢ ٢/٣

وحيث أن ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب ∴ ن = ٣٣

∴ اول حد سالب فى المتتابعة هو ح٣٣

مثـــال٥:

أوجد رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−١٦٥، −١٦١، −١٥٧، ...)

الحـــل:

(−١٦٩، −١٦٥، −١٦١، ...) متتابعة حسابية

∴ أ = −١٦٩ ، ء = ح٢ − ح١ = −١٦٥ + ١٦٩ = ٤ ، أول حد موجب تعنى أن حن > ٠

∵ حن = أ + (ن − ١)ء ⟸ ∴ أ + (ن − ١)ء > ٠

∴ −١٦٩ + (ن − ١) × ٤ > ٠ ⟸ ∴ −١٦٩ + ٤ن − ٤ > ٠

∴ ٤ن > ١٧٣ ⟸ ∴ ن > ١٧٣ / ٤ ⟸ ∴ ن > ٤٣ ١/٤

وحيث أن ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب ∴ ن = ٤٤

∴ اول حد موجب فى المتتابعة هو ح٤٤

مثـــال٧:

أوجد رتبة أول حد اكبر من ٢٠٠ فى المتتابعة الحسابية (١٠، ١٧، ٢٤، ...)

الحـــل:

(١٠، ١٦، ٢٢، ...) متتابعة حسابية

∴ أ = ١٠ ، ء = ح٢ − ح١ = ١٧ − ١٠ = ٧ ، حن > ٢٠٠

∵ حن = أ + (ن − ١)ء ⟸ ∴ أ + (ن − ١)ء > ٢٠٠

$\therefore ١٠ + (ن - ١) \times ٧ > ٢٠٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ١٠ + ٧ن - ٧ > ٢٠٠$

$\therefore ٧ن > ١٩٧ \quad \Leftarrow \quad \therefore ن > \frac{١٩٧}{٧} \quad \Leftarrow \quad \therefore ن > ٢٨\frac{١}{٧}$

وحيث أن ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب $\therefore ن = ٢٩$

$\therefore$ أول حد اكبر من ٢٠٠ فى المتتابعة هو $ح_{٢٩}$

مثـــال٨:

هل يوجد حد قيمته ١٥١ فى المتتابعة الحسابية (١٣، ١٧، ٢١، ...)

الحـــل:

(١٣، ١٧، ٢١، ...) متتابعة حسابية

$\therefore أ = ١٣ \quad ، \quad د = ح_٢ - ح_١ = ١٧ - ١٣ = ٤ \quad ، \quad ح_ن = ١٥١$

$\because ح_ن = أ + (ن - ١)د \quad \Leftarrow \quad \therefore ١٥١ = ١٣ + (ن - ١) \times ٤$

$\therefore ١٣ + ٤ن - ٤ = ١٥١ \quad \Leftarrow \quad \therefore ٤ن = ١٤٢ \quad \Leftarrow \quad \therefore ن = \frac{١٤٢}{٤} = ٣٥\frac{١}{٢}$

وحيث أن ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب $\therefore$ لا يوجد حد قيمته ١٥١ فى المتتابعة الحسابية

✸ تعين المتتابعة الحسابية:

يتم تعيين المتتابعة الحسابية إذا علم حدها الأول أ وأساسها د ومن خلال معطيات المسالة يتم تكوين معادلتين فى أ، د وبحل المعادلتين جبريا نحصل على قيمتى أ، د وبالتالى المتتابعة

مثـــال٩:

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ٨ وحدها السادس ١٧

الحـــل:

$\because ح_٣ = ٨ \quad \Leftarrow \quad \therefore أ + ٢د = ٨ \quad (١)$

$، \because ح_٦ = ١٧ \quad \Leftarrow \quad \therefore أ + ٥د = ١٧ \quad (٢)$ بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا

$أ + ٢د = ٨ \quad (١)$

$\mp أ \mp ٥د = \mp ١٧ \quad (٢)$ بالطرح

$\therefore -٣د = -٩ \quad \Leftarrow \quad \therefore د = \frac{-٩}{-٣} \quad \Leftarrow \quad \therefore د = ٣$ بالتعويض فى (١)

$\therefore أ + ٢ \times ٣ = ٨ \quad \Leftarrow \quad \therefore أ = ٨ - ٦ \quad \Leftarrow \quad \therefore أ = ٢$

$\therefore$ المتتابعة هى (٢، ٥، ٨، ...)

مثـــال١٠:

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس =١٧ مجموع حديها الثالث والعاشر =٣٧

الحـــل:

$\because$ ع$_٦$ = ١٧ $\Leftarrow$ $\therefore$ ٱ + ٥ء = ١٧ (١)

، $\because$ ع$_٣$ + ع$_{١٠}$ = ٣٧ $\Leftarrow$ $\therefore$ ٱ + ٢ء + ٱ + ٩ء = ٣٧ $\therefore$ ٢ٱ + ١١ء = ٣٧ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا بضرب المعادلة الأولى × (–٢)

$\therefore$ –٢ٱ – ١٠ء = –٣٤

٢ٱ + ١١ء = ٣٧

بالجمع

$\therefore$ ء = ٣ بالتعويض فى (١)

$\therefore$ ٱ + ٥ × ٣ = ١٧ $\therefore$ ٱ = ١٧ – ١٥ = ٢

$\therefore$ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، . . .)

✸ الأوساط الحسابية:

تعريف:

إذا كانت ٱ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن: ب تعرف بالوسط الحسابى بين ٱ ، جـ حيث ب – ٱ = جـ – ب أى أن ٢ب = ٱ + جـ $\Leftarrow$ $\therefore$ ب = $\frac{ٱ + جـ}{٢}$

$\therefore$ الوسط الحسابى لعددين يساوى نصف مجموعهما أو ضعف الوسط الحسابى لعددين يساوى مجموعهما

ويكون (ٱ ، $\frac{ٱ + جـ}{٢}$ ، جـ) متتابعة حسابية

أى أنه: إذا وضع الوسط الحسابى لعددين بين العددين فسيكون الناتج متتابعة حسابية

✸ إدخال عدد من الأوساط الحسابية بين كميتين:

يمكن إدخال عدة أوساط حسابية (س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، . . . س$_ن$) بين العددين ٱ ، ب

بحيث تكون الأعداد (ٱ ، س$_١$ ، س$_٢$ ، . . . ، س$_ن$ ، ب) متتابعة حسابية

وفى هذه الحالة يكون:

الحد الأول للمتتابعة = ٱ

، عدد حدود المتتابعة ن = عدد الأوساط + ٢

، الحد الأخير للمتتابعة = ب

ومن الحد الأخير نوجد الأساس ء ومن ثم نوجد المتتابعة ثم الأوساط

مثـــال١١:

ادخل ٦ أوساط حسابية بين العددين ١ ، ٢٩

الحـــل:

∵ عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢ ∴ عدد حدود المتتابعة ن = ٦ + ٢ = ٨

∵ $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$

بالتعويض عن: أ = ١ ، $ح_ن$ = ٢٩ ، ن = ٨

∵ ٢٩ = ١ + (٨ - ١)ء ∴ ٧ء = ٢٩ - ١ = ٢٨ ∴ ء = $\frac{٢٨}{٧}$ = ٤

∴ المتتابعة هى (١ ، ٥ ، ٩ ، . . . ، ٢٥ ، ٢٩)

∴ الاوساط هى ٥ ، ٩ ، . . . ، ٢٥

مثـــال١٢:

ادخل ٧ أوساط حسابية بين العددين − ٢٤ ، ١٦

الحـــل:

∵ عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢ ∴ عدد حدود المتتابعة ن = ٧ + ٢ = ٩

∵ $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$

بالتعويض عن: أ = −٢٤ ، $ح_ن$ = ١٦ ، ن = ٩

∵ ١٦ = −٢٤ + (٩ − ١)ء ∴ ٨ء = ١٦ + ٢٤ = ٤٠ ∴ ء = $\frac{٤٠}{٨}$ = ٥

∴ المتتابعة هى (−٢٤ ، −١٩ ، −١٤ ، −٩ ، −٤ ، ١ ، ٦ ، ١١ ، ١٦)

∴ الاوساط هى −١٩ ، −١٤ ، −٩ ، −٤ ، ١ ، ٦ ، ١١

ملاحظة هامة جدا:

∵ الوسط الأول هو الحد الثانى للمتتابعة أى أن الوسط الأول = أ + ء ، الوسط الثانى هو الحد الثالث للمتتابعة أى أن الوسط الثانى = أ + ٢ء ،..... وهكذا

∴ عند كتابة الأوساط يكون معامل ء مساويا لرتبة الحد

أما عند كتابة الحدود يكون معامل ء أقل من رتبة الحد بواحد

فمثلا: الحد العاشر = أ + ٩ء أما الوسط العاشر = أ + ١٠ء

مثـــال١٣:

إذا كانت ب هو الوسط الحسابى بين أ ، جـ فإثبت أن:

$$أ(٢ب + جـ - أ) = جـ(أ + ٢ب - جـ)$$

الحـــل:

$\because$ ب وسط حسابى بين أ ، جـ $\quad \therefore$ ب $= \frac{أ + جـ}{٢} \quad \Leftarrow \quad \therefore$ ٢ب = أ + جـ

$\therefore$ الطرف الأيمن $=$ أ(٢ب + جـ - أ) $=$ أ($\cancel{أ}$ + جـ + جـ - $\cancel{أ}$) $=$ ٢أجـ $\qquad$ (١)

، الطرف الأيسر $=$ جـ(أ + ٢ب - جـ) $=$ جـ(أ + أ + $\cancel{جـ}$ - $\cancel{جـ}$) $=$ ٢أجـ $\qquad$ (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore$ الطرفان المتساويان

مثـــال١٤:

إذا كانت ٢٢ ، س + ٩ ، ٣س - ١٤ ، ص حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد س،ص

الحـــل:

$\because$ ٢٢ ، س + ٩ ، ٣س - ١٤ ، ص متتابعة حسابية

$\therefore$ س + ٩ وسط حسابى بين ٢٢ ، ٣س - ١٤

$\therefore$ ٢(س + ٩) = ٢٢ + ٣س - ١٤ $\quad \Leftarrow \quad \therefore$ ٢س + ١٨ = ٣س + ٨

$\therefore$ ٣س - ٢س = ١٨ - ٨ $\quad \Leftarrow \quad \therefore$ س = ١٠

، ٣س - ١٤ وسط حسابى بين س + ٩ ، ص

$\therefore$ ٢(٣س - ١٤) = س + ٩ + ص $\qquad \therefore$ ٢(٣×١٠ - ١٤) = ١٠ + ٩ + ص

$\therefore$ ٢×١٦ = ١٩ + ص $\qquad \therefore$ ص = ٣٢ - ١٩ $\quad \Leftarrow \quad \therefore$ ص = ١٣

مثـــال١٥:

إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢٠ ، ١٧٠ وكان مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين خمسة أمثال الوسط الخامس فما عدد هذه الأوساط ؟

الحـــل:

المتتابعة هى (٢٠ ، $\underbrace{\text{٢٠ + ء ، ٢٠ + ٢ء ، . . . . ، ١٧٠ - ٢ء ، ١٧٠ - ء}}_{\text{الأوساط}}$ ، ١٧٠)

$\because$ الوسط الخامس عشر + الوسط العشرين = ٥ × الوسط الخامس

$\therefore$ (٢٠ + ١٥ء) + (٢٠ + ٢٠ء) = ٥ × (٢٠ + ٥ء) $\qquad \therefore$ ٤٠ + ٣٥ء = ١٠٠ + ٢٥ء

$\therefore$ ٣٥ء - ٢٥ء = ١٠٠ - ٤٠ $\qquad \therefore$ ١٠ء = ٦٠ $\qquad \therefore$ ء = ٦

∴ الأوساط هى : (٢٦ ، ٣٢ ، ..... ، ١٥٨ ، ١٦٤)

∵ $ح_ن = أ + (ن - ١) ء$ ∴ $١٦٤ = ٢٦ + (ن - ١) × ٦$ ∴ $١٦٤ = ٢٠ + ٦ن$

∴ $٦ن = ١٦٤ - ٢٠ = ١٤٤$ ∴ $ن = \frac{١٤٤}{٦} = ٢٤$ ∴ عدد الأوساط هو ٢٤ وسطاً

مثـــال١٦:

متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد المتتابعة

الحـــل:

∵ $ح_٩ = ٢٥$ ∴ $أ + ٨ء = ٢٥$ (١)

، ∵ $\frac{ح_٣ + ح_٥}{٢} = ١٠$ ∴ $ح_٣ + ح_٥ = ٢٠$ ∴ $أ + ٢ء + أ + ٤ء = ١٠$

∴ $٢أ + ٦ء = ١٠$ بالقسمة على ٢ ∴ $أ + ٣ء = ٥$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا بضرب المعادلة الثانية × (-١)

∴ $أ + ٨ء = ٢٥$

$- أ - ٣ء = -٥$

بالجمع

∴ $٥ء = ٢٠$ ∴ $ء = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ بالتعويض فى (١)

∴ $أ + ٨ × ٤ = ٢٥$ ⇐ ∴ $أ = ٢٥ - ٣٢ = -٧$

∴ المتتابعة هى (-٧ ، -٣ ، ١ ، ٥ ، .....)

١ - ٤ المتسلسلات الحسابية

٭مجموع ن حدا الأولى من متتابعة حسابية:

أولا: مجموع ن حدا من متتابعة حسابية حدها الأول (أ) والأخير (ل)

واساسها ء وعدد حدودها ن ومجموع حدودها يرمز له بالرمز $\text{جـ}_{\text{ن}}$ ويعطى بالمتسلسلة الأتية:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{أ} + \text{ء}) + (\text{أ} + ٢\text{ء}) + \cdots + (\text{ل} - ٢\text{ء}) + (\text{ل} - \text{ء}) + \text{ل} \quad (١)$$

بكتابة المجموع من النهاية للبداية

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ل} + (\text{ل} - \text{ء}) + (\text{ل} - ٢\text{ء}) + \cdots + (\text{أ} + ٢\text{ء}) + (\text{أ} + \text{ء}) + \text{أ} \quad (٢)$$

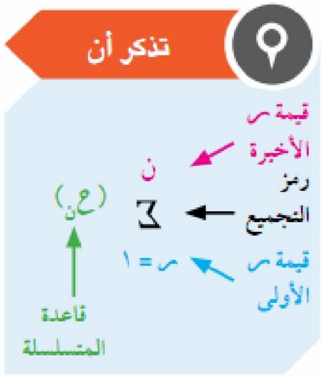
بجمع (١) ، (٢)

$$\therefore ٢\text{جـ}_{\text{ن}} = (\text{أ} + \text{ل}) + (\text{أ} + \text{ل}) + (\text{أ} + \text{ل}) + \cdots + (\text{أ} + \text{ل}) \text{ إلى ن من المرات}$$

$$\therefore ٢\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ن}(\text{أ} + \text{ل}) \Leftarrow \boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل})}$$

مثال١:

أوجد (أ) $\sum_{\text{ك}=١}^{٢٠}(٦\text{ك} + ٥)$ (ب) $\sum_{\text{ر}=٧}^{٣٢}(١٢ - ٥\text{ر})$



الحـــل:

(أ) $\sum_{\text{ك}=١}^{٢٠}(٦\text{ك} + ٥)$ نلاحظ أن مجموع المتسلسلة ابتداء من $\text{ع}_{١}$ إلى $\text{ع}_{٢٠}$

$\therefore \text{ن} = ٢٠$ ، $\text{ع}_{\text{ن}} = ٦\text{ن} + ٥$

$\therefore \text{أ} = \text{ع}_{١} = ٦ \times ١ + ٥ = ١١$ ، $\text{ل} = \text{ع}_{٢٠} = ٦ \times ٢٠ + ٥ = ١٢٥$

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل}) \Leftarrow \therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{٢٠}{٢}(١١ + ١٢٥) = ١٣٦٠$

(ب) $\sum_{\text{ر}=٧}^{٣٢}(١٢ - ٥\text{ر})$ نلاحظ أن مجموع المتسلسلة ابتداء من $\text{ع}_{٧}$ إلى $\text{ع}_{٣٢}$

$\therefore \text{ن} = ٣٢ - ٧ + ١ = ٢٦$ ، $\text{ع}_{\text{ن}} = ١٢ - ٥\text{ن}$

$\therefore \text{أ} = \text{ع}_{٧} = ١٢ - ٥ \times ٧ = -٢٣$ ، $\text{ل} = \text{ع}_{٣٢} = ١٢ - ٥ \times ٣٢ = -١٤٨$

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل}) \Leftarrow \therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{٢٦}{٢}(-٢٣ - ١٤٨) = -٢٢٢٣$

مثــــال٢:

أوجد مجموع حدود المتسلسلة ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ٠٠٠ + ٣٣

الحـــل:

∵ المتسلسلة هى ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ٠٠٠ + ٣٣

∴ أ = ٨٩ ، ء = ٨٥ − ٨٩ = −٤ ، ل = ٣٣

∵ ل = أ + (ن − ١)ء ∴ ٣٣ = ٨٩ + (ن − ١) × (−٤)

∴ ٣٣ − ٨٩ = −٤ن + ٤ ∴ −٥٦ − ٤ = −٤ن ∴ ن = $\frac{-٦٠}{-٤}$ = ١٥

∵ جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل) ⇐ ∴ جـن = $\frac{١٥}{٢}$ (٨٩ + ٣٣) = ٩١٥

ثانيا: مجموع ن حدا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

∵ جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل) ، ∵ ل = أ + (ن − ١)ء

∴ جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١)ء] ⇐ $\boxed{\text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢} [\, ٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{ء} \,]}$

مثــــال٣:

أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتابعات الحسابية (١ ، ٩ ، ١٧ ، ٠٠٠)

الحـــل:

∵ المتتابعة الحسابية هى (١ ، ٩ ، ١٧ ، ٠٠٠)

∴ أ = ١ ، ء = ٩ − ١ = ٨ ، ن = ٢٠

∵ جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)ء]

∴ جـ٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ١ + (٢٠ − ١) × ٨] = ١٠(٢ + ١٥٢) = ١٥٤٠

مثــــال٤:

أوجد مجموع المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٠٠٠ ، ٦١)

الحـــل:

∵ المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٠٠٠ ، ٦١)

$أ = ١$ ، $د = ٥ - ٣ = ٢$ ، $ل = ٦١$

$\because ل = أ + (ن - ١)د$ $\therefore ٦١ = ٣ + (ن - ١) \times ٢$ $\therefore ٦١ = ٣ + ٢ن - ٢$

$\therefore ٦١ = ٢ن + ١$ $\therefore ٢ن = ٦١ - ١ = ٦٠$ $\therefore ن = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ $\therefore جـ_{٣٠} = \frac{٣٠}{٢}(٣ + ٦١) = ١٥ \times ٦٤ = ٩٦٠$

مثـــال٥:

في المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...) أوجد:

(أ) مجموع ١٥ حدا الأولى منها

(ب) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس الى الحد الخامس عشر

(جـ) عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول

الحـــل:

$\because$ المتتابعة الحسابية هى (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...) $\therefore أ = ٩$ ، $د = ١٢ - ٩ = ٣$

(أ) $\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ ، $ن = ١٥$

$\therefore جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢}[٢ \times ٩ + (١٥ - ١) \times ٣] = \frac{١٥}{٢}[١٨ + ٤٢] = ٤٥٠$

(ب) $\because ح_٥ = أ + ٤د$ $\therefore ح_٥ = ٩ + ٤ \times ٣ = ٢١$

$\because ح_{١٥} = أ + ١٤د$ $\therefore ح_{١٥} = ٩ + ١٤ \times ٣ = ٥١$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

$\therefore جـ_ن = \frac{١١}{٢}(ح_٥ + ح_{١٥}) = \frac{١١}{٢}(٢١ + ٥١) = ٤٥١$

(جـ) $\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ $\therefore ٧٥٠ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٩ + (ن - ١) \times ٣]$

$\therefore ٧٥٠ = \frac{ن}{٢}[١٨ + ٣ن - ٣]$ $\therefore ١٥٠٠ = ن[١٥ + ٣ن]$

$\therefore ٣ن^٢ + ١٥ن - ١٥٠٠ = ٠$ $\therefore ن^٢ + ٥ن - ٥٠٠ = ٠$

$\therefore (ن - ٢٠)(ن + ٢٥) = ٠$ $\therefore ن = ٢٠$ والقيمة الأخرى مرفوضة

مثال٦:

اوجد المتتابعه الحسابية التى فيها $ح_{١} = ٢٣$ ، $ح_{ن} = ٨٦$ ، $جـ_{ن} = ٥٤٥$

الحل:

إيجاد قيمة ن $\because جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ $\therefore ٥٤٥ = \frac{ن}{٢}(٢٣ + ٨٦)$

$\therefore ١٠٩ن = ١٠٩٠$ $\therefore ن = \frac{١٠٩٠}{١٠٩} = ١٠$

إيجاد قيمة د $\because ح_{ن} = أ + (ن - ١)د$

$\therefore ٨٦ = ٢٣ + (١٠ - ١)د$ $\therefore ٩د = ٦٣$ $\therefore د = \frac{٦٣}{٩} = ٧$

$\therefore$ المتتابعة هى (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ...)

مثال٧:

اوجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ والتى كل منها يقبل القسمة على ٣

الحل:

الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ والتى كل منها يقبل القسمة على ٣ هى:

٣ ، ٦ ، ٩ ، .... ، ٩٩ وهى متتابعة حسابية فيها $أ = ٣$ ، $د = ٦ - ٣ = ٣$ ، $ل = ٩٩$

$\because ل = أ + (ن - ١)د$ $\therefore ٩٩ = ٣ + (ن - ١) \times ٣$ $\therefore ٩٩ = \cancel{٣} + ٣ن - \cancel{٣}$

$\therefore ن = \frac{٩٩}{٣} = ٣٣$ ، $\because جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

$\therefore جـ_{٣٣} = \frac{٣٣}{٢}(٣ + ٩٩) = \frac{٣٣}{٢} \times ١٠٢ = ٣٣ \times ٥١ = ١٦٨٣$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب مجموع الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ والتى كل منها لايقبل القسمة على ٣

١) نوجد مجموع جميع الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١

أى ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... ، ١٠٠ وهى متتابعة حسابية فيها $أ = ٢$ ، $د = ١$ ، $ل = ١٠٠$

٢) نوجد مجموع جميع الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ وتقبل القسمة على ٣

أى ٣ ، ٦ ، ٩ ، .... ، ٩٩ وهى متتابعة حسابية فيها $أ = ٣$ ، $د = ٣$ ، $ل = ٩٩$

٣) مجموع الاعداد التى لاتقبل على ٣ = مجموع الاعداد كلها − مجموع ما يقبل على ٣

مثـــال٨:

إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة حسابية يعطى بالقانون $ج_{ن} = ٣ن^{٢}$ فأوجد المتتابعة.
ثم أوجد قيمة الحد التاسع عشر من هذه المتتابعة.

الحـــل:

$\because ج_{ن} = ٣ن^{٢}$ وبوضع ن = ١، ٢، ٣، ...

$\therefore ج_{١} = ٣ \times ١^{٢} = ٣ \Leftarrow$ $ج_{١}$ تعنى مجموع حد واحد أى $ح_{١}$ $\boxed{\therefore ح_{١} = ج_{١}}$ $\therefore ح_{١} = ٣$

، $ج_{٢} = ٣ \times ٢^{٢} = ١٢ \Leftarrow$ $ج_{٢}$ تعنى مجموع حدين أى $ح_{١} + ح_{٢}$

$\therefore ج_{٢} = ح_{١} + ح_{٢} \Leftarrow \boxed{\therefore ح_{٢} = ج_{٢} - ج_{١}}$ $\therefore ح_{٢} = ١٢ - ٣ = ٩$

، $ج_{٣} = ٣ \times ٣^{٢} = ٢٧ \Leftarrow$ $ج_{٣}$ تعنى مجموع ثلاثة حدود أى $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣}$

$\therefore ج_{٣} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣}$ $\boxed{\therefore ح_{٣} = ج_{٣} - ج_{٢}}$ $\therefore ح_{٣} = ٢٧ - ١٢ = ١٥$

∴ المتتابعة هى (٣، ٩، ١٥، ...)

$\boxed{\because ح_{١٩} = ج_{١٩} - ج_{١٨}}$

$\therefore ح_{١٩} = ٣ \times ١٩^{٢} - ٣ \times ١٨^{٢} = ١٠٨٣ - ٩٧٢ = ١١١$

حل آخر:

نوجد $ح_{ن}$ حيث أن $ح_{ن} = ج_{ن} - ج_{ن-١}$

$\therefore ح_{ن} = ٣ن^{٢} - ٣(ن - ١)^{٢} = \cancel{٣ن^{٢}} - \cancel{٣ن^{٢}} + ٦ن - ٣$

$\therefore ح_{ن} = ٦ن - ٣$

∴ الاساس ء = ٦ وبالتعويض عن ن = ١ نحصل على الحد الأول أ

عند ن = ١ $\therefore ح_{١} = أ = ٦ \times ١ - ٣ = ٦ - ٣ = ٣$

∴ المتتابعة هى (٣، ٩، ١٥، ...)

$\therefore ح_{١٩} = أ + ١٨ء = ٣ + ٦ \times ١٨ = ٣ + ١٠٨ = ١١١$

مثـــال٩:

إقترض رجل مبلغا من المال واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ اقساط ،يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، وكل قسط تال يزيد عن القسط السابق له مباشرة ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض.

الحـــل:

القسط الأول ٥٠٠ جنيه ، القسط الثانى ٧٠٠ جنيه ، والقسط الثالث ٩٠٠ جنيه ، وهكذا

∴ الأقساط عبارة عن متتابعة حسابية فيها $أ = ٥٠٠$ ، $ء = ٢٠٠$ ، $ن = ١٠$

ويكون مبلغ القرض هو مجموع الأقساط

$$\because ج_ن = \frac{ن}{٢}\left[\, ٢أ + (ن-١)ء \,\right]$$

$$\therefore ج_ن = \frac{١٠}{٢}\left[\, ٢\times٥٠٠ + (١٠-١)\times٢٠٠ \,\right]$$

$= ٥(١٠٠٠+١٨٠٠) = ١٤٠٠٠$ ∴ مبلغ القرض $= ١٤٠٠٠$ جنيه

🕮 مثـــال١٠:

بدأ كريم العمل براتب سنوى قدره ١٩٢٠٠ جنيه ، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيـه. فكم يكون ما يحصل عليه من رواتب فى نهاية السنة العاشرة.

✍ الحـــل:

راتب كريم هو ١٩٢٠٠ ، ١٩٢٠٠ + ٤٨٠ ، ١٩٢٠٠ + ٢ × ٤٨٠ ، .... إلى ١٠ حدود

أى أنه متتابعة حسابية حدها الأول ١٩٢٠٠ وأساسها ٤٨٠ وعدد حدودها ١٠ لأن العلاوة سنوية

$$\because ج_ن = \frac{ن}{٢}\left[\, ٢أ + (ن-١)ء \,\right]$$

$$\therefore ج_{١٠} = \frac{١٠}{٢}\left[\, ٢\times١٩٢٠٠ + (١٠-١)\times٤٨٠ \,\right]$$

$$= ٥(٣٨٤٠٠+٤٣٢٠) = ٢١٣٦٠٠$$

∴ ماحصل عليه كريم خلال ١٠ سنوات $= ٢١٣٦٠٠$ جنيه

١ - ٥ المتتابعة الهندسية

تعريف

المتتابعة ($ع_ن$) تكون متتابعة هندسية إذا كان :

$$\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = \text{مقدار ثابت} \quad \text{لكل} \quad ن \in ص^+$$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز $ر$

أى أن

المتتابعة تكون هندسية إذا كان خارج قسمة كل حد على الحد السابق له يساوى مقدار ثابت أو كان كل حد يساوى الحد السابق له مضروبا فى أو مقسوما على مقدار ثابت.

$$\therefore\ ر = \frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$$

$$\therefore\ \text{أساس المتتابعة الهندسية} = \frac{\text{قيمة أى حد}}{\text{قيمة الحد السابق له مباشرة}}$$

فمثلا :

$ر = \frac{ع_2}{ع_1}$ ، $ر = \frac{ع_3}{ع_2}$ ، ...... ، $ر = \frac{ع_8}{ع_7}$ ، .... وهكذا

مثال١:

بين أى من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية:

أ – ($ع_ن$) = (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦) ب – ($ع_ن$) = ($3(ن+1)^2$)

الحل:

أ – ($ع_ن$) = (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦)

$\therefore\ \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{ع_3}{ع_2} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{ع_4}{ع_3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{ع_5}{ع_4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{ع_3}{ع_2} = \frac{ع_4}{ع_3} = \frac{ع_5}{ع_4} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ المتتابعة هندسية اساسها $ر = \frac{1}{2}$

ب – ($ع_ن$) = ($3(ن+1)^2$)

$\therefore$ $ح_{ن} = ٣(ن+١)^{٢}$ ، $ح_{ن+١} = ٣(ن+١+١)^{٢} = ٣(ن+٢)^{٢}$

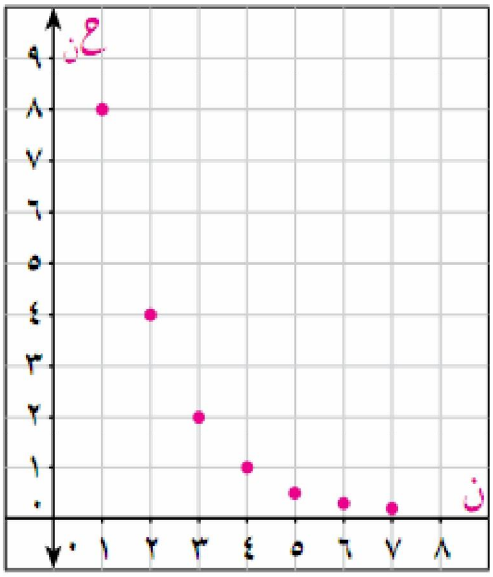
$\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٣(ن+٢)^{٢}}{٣(ن+١)^{٢}} = \frac{(ن+٢)^{٢}}{(ن+١)^{٢}}$ لا يساوى مقدار ثابت $\therefore$ المتتابعة ليست هندسية

✱ التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية:

🕮 مثـــال٢:

اوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ٠٠٠) ثم مثل الحدود السبعة بيانيا

✍ الحـــل:



$\because$ المتتابعة هندسية $\therefore$ $ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ الحدود الأربعة التالية هى : $١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨}$

$\therefore$ مجال المتتابعة هو (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٠٠٠)

$\therefore$ مدى المتتابعة هو ($٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨}$)

ويتم التمثيل كما بالشكل المجاور

ومن الشكل نلاحظ أن

- حدود المتتابعة تناقصية حيث $أ > ٠$ ، $٠ < ر < ١$
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية

✱ الحد النونى للمتتابعة الهندسية:

من تعريف المتتابعة الهندسية يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ وأساسها ر كما يلى:

$ح_{١} = أ$ ، $ح_{٢} = أر$ ، $ح_{٣} = أر^{٢}$ ، $ح_{٤} = أر^{٣}$ ، ....

ونلاحظ أن أس ر يكون دائما أقل من رتبة الحد بواحد

وبناء على ذلك يكون الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

$$\boxed{ح_{ن} = أر^{ن-١}}$$

حيث: $ح_{ن}$ = قيمة الحد الذى رتبته ن ، أ = الحد الأول للمتتابعة الهندسية

، ن = رتبة الحد ، ر = أساس المتتابعة الهندسية

ملاحظات:

١) أذا كان عدد حدود المتتابعة $=$ ن فإن $ح_ن$ يكون هو الحد الأخير للمتتابعة

ويرمز للحد الأخير بالرمز ل وبالتالى يكون :

$$\boxed{ل = أ ر^{ن-١}}$$

حيث ن $=$ عدد الحدود أى رتبة الحد الأخير

٢) الصورة العامة للمتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ وأساسها ر تكون:

$$(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، \ldots ، أ ر^{ن-١} ، \ldots ، \frac{ل}{ر^{٢}} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$$

٣) ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب لأن ن تمثل رتبة الحد أو عدد حدود المتتابعة

مثال٣:

إذا كان الحد النونى فى متتابعه هو $٥ \times (-٢)^{ن-٥}$ فاثبت أنها هندسية وأوجد حدها السابع

الحل:

$\because ح_ن = ٥ \times (-٢)^{ن-٥}$ $\therefore ح_{ن+١} = ٥ \times (-٢)^{ن+١-٥} = ٥ \times (-٢)^{ن-٤}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\cancel{٥} \times (-٢)^{ن-٤}}{\cancel{٥} \times (-٢)^{ن-٥}}$ $\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = (-٢)^{\cancel{ن}-٤-\cancel{ن}+٥} = -٢$ =مقدار ثابت

$\therefore$ المتتابعة هندسية ولإيجاد الحد االسابع نضع ن $= ٧$

$\therefore ح_٧ = ٥ \times (-٢)^{٧-٥}$ $\therefore ح_٧ = ٥ \times (-٢)^{٢} = ٥ \times ٤ = ٢٠$

مثال٤:

اوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨ فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، . . .)

الحل:

$\because$ (٢ ، ٤ ، ٨ ، . . .) م.هـ $\Leftarrow$ $\therefore أ = ٢$ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\because ح_ن = أ ر^{ن-١}$ $\therefore ١٢٨ = ٢ \times ٢^{ن-١}$ $\therefore ٢^{ن-١} = ٦٤$

$\therefore ٢^{ن-١} = ٢^{٦}$ $\therefore ن - ١ = ٦$ $\therefore ن = ٧$ $\therefore$ الحد الذى قيمته ١٢٨ هو $ح_٧$

مثـــال٥:

مارتبة وقيمة اول حد تزيد قيمته عن ٥٠٠ فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....)

الحـــل:

$\because$ (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....) م.هـ $\Leftarrow$ $\therefore$ أ = ٦ ، ر = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

$\because$ ح$_ن$ = أ ر$^{ن-١}$ ، ح$_ن$ > ٥٠٠ $\therefore$ أ ر$^{ن-١}$ > ٥٠٠

$\therefore$ ٦ × ٢$^{ن-١}$ > ٥٠٠ باخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ لـو٦ + (ن − ١) لـو٢ > لـو٥٠٠ $\therefore$ لـو٦ + ن لـو٢ − لـو٢ > لـو٥٠٠

$\therefore$ ن لـو٢ > لـو٥٠٠ − لـو٦ + لـو٢ $\therefore$ ن > $\frac{\text{لـو٥٠٠ − لـو٦ + لـو٢}}{\text{لـو٢}}$

باستخدام الآلة $\therefore$ ن > ٧,٣٨ $\therefore$ ن = ٨ $\therefore$ اول حد تزيد قيمته عن ٥٠٠ هو ح$_٨$

$\because$ ح$_٨$ = أ ر^٧ $\therefore$ ح$_٨$ = ٦ × ٢^٧ = ٦ × ١٢٨ = ٧٦٨

✱ تعين المتتابعة الهندسية:

يتم تعيين المتتابعة الهندسية إذا علم حدها الأول أ وأساسها ر ومن خلال معطيات المسالة يتم تكوين معادلتين فى أ ، ر وبحل المعادلتين جبريا نحصل على قيمتى أ ، ر
وطريقة حل معادلتين من الدرجة الثانية أو أعلى هى التحليل ثم القسمة أو التعويض إذا أمكن

مثـــال٦:

متتابعة هندسية حدها الأول = ٢ وحدها السادس = ٦٤ أوجد المتتابعة

الحـــل:

$\because$ ح$_١$ = ٢ $\Leftarrow$ $\therefore$ أ = ٢ ، $\because$ ح$_٦$ = ٦٤ $\Leftarrow$ $\therefore$ أ ر^٥ = ٦٤

$\therefore$ ٢ ر^٥ = ٦٤ $\Leftarrow$ $\therefore$ ر^٥ = $\frac{٦٤}{٢}$ = ٣٢ $\Leftarrow$ $\therefore$ ر^٥ = ٢^٥ $\Leftarrow$ $\therefore$ ر = ٢

$\therefore$ المتتابعة هى (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ....)

مثـــال٧:

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى١٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ١٠٨أوجد المتتابعة

الحـــل:

∵ $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ = ١٢ ⇐ ∴ أ + أر = ١٢ ⇐ ∴ أ(١ + ر) = ١٢ (١)

، ∵ $ح_{٣}$ + $ح_{٤}$ = ١٠٨ ∴ أ$ر^{٢}$ + أ$ر^{٣}$ = ١٠٨ ∴ أ$ر^{٢}$(١ + ر) = ١٠٨ (٢)

بقسمة (١) على (٢)

∴ $\frac{\cancel{أ}\cancel{(١ + ر)}}{\cancel{أ}ر^{٢}\cancel{(١ + ر)}} = \frac{١٢}{١٠٨}$ ∴ $\frac{١}{ر^{٢}} = \frac{١}{٩}$ ∴ $ر^{٢}$ = ٩ ∴ ر = ±٣

بالتعويض فى (١)

عندما ر = ٣

∴ أ(١ + ٣) = ١٢ ∴ أ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

∴ المتتابعة هى :

(٣، ٩، ٢٧، ...)

عندما ر = −٣

∴ أ(١ − ٣) = ١٢ ∴ أ = $\frac{١٢}{−٢}$ = −٦

∴ المتتابعة هى:

(−٦، ١٨، −٥٤، ...)

مثـــال٨:

متتابعة هندسية فيها $ح_{٥}$ = ٨$ح_{٢}$ ، $ح_{٤}$ + $ح_{٦}$ = ٢٤٠ أوجد هذه المتتابعة.

الحـــل:

∵ $ح_{٥}$ = ٨$ح_{٢}$ ∴ أ$ر^{٤}$ = ٨أر ∴ أ$ر^{٤}$ − ٨أر = ٠

∴ أر($ر^{٣}$ − ٨) = ٠ ∴ أ = ٠ أو ر = ٠ (مرفوض) ∴ $ر^{٣}$ − ٨ = ٠ ∴ ر = ٢

، ∵ $ح_{٤}$ + $ح_{٦}$ = ٢٤٠ ∴ أ$ر^{٣}$ + أ$ر^{٥}$ = ٢٤٠ بالتعويض عن ر = ٢

∴ أ × $٢^{٣}$ + أ × $٢^{٥}$ = ٢٤٠ ∴ ٨أ + ٣٢أ = ٢٤٠ ∴ ٤٠أ = ٢٤٠ ∴ أ = ٦

∴ المتتابعة هى (٦، ١٢، ٢٤، ٤٨، ...)

مثـــال٩:

متتابعة هندسية فيها مجموع الثلاثة حدود الأولى = −٢٤ ومجموع الحدود الثلاثة التالية = ٣ أوجد المتتابعة.

الحـــل:

∵ $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ + $ح_{٣}$ = −٢٤ ∴ أ + أر + أ$ر^{٢}$ = −٢٤

∴ أ(١ + ر + $ر^{٢}$) = −٢٤ (١)

، ∵ $ح_{٤}$ + $ح_{٥}$ + $ح_{٦}$ = ٣ ∴ أ$ر^{٣}$ + أ$ر^{٤}$ + أ$ر^{٥}$ = ٣

∴ أ$ر^{٣}$(١ + ر + $ر^{٢}$) = ٣ (٢) بقسمة (٢) على (١)

$\therefore \dfrac{\cancel{أ}\, ر^{٣} \cancel{(١+ر+ر^{٢})}}{\cancel{أ}\cancel{(١+ر+ر^{٢})}} = \dfrac{٣}{-٢٤}$ $\qquad \therefore ر^{٣} = \dfrac{-١}{٨}$ $\qquad \therefore ر = \dfrac{-١}{٢}$

بالتعويض فى (١)

$\therefore أ(١ + \dfrac{-١}{٢} + \dfrac{١}{٤}) = -٢٤$ $\qquad \therefore أ \times \dfrac{٣}{٤} = -٢٤$ $\qquad \therefore أ = \dfrac{-٢٤ \times ٤}{٣} = -٣٢$

$\therefore$ **المتتابعة هى** $(-٣٢ ، ١٦ ، -٨ ، \ldots)$

✸ الأوساط الهندسية:

تعريف:

إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن:

ب تسمى وسط هندسى بين أ ، جـ

وبالتالى يكون: $\dfrac{ب}{أ} = \dfrac{جـ}{ب}$ $\qquad \therefore ب^{٢} = أجـ$ $\qquad \therefore ب = \pm\sqrt{أجـ}$

أى أن مربع الوسط الهندسى لكميتين موجبتين معاً أو سالبتين معاً يساوى حاصل ضربهما

أو أن الوسط الهندسى لهما يساوى $\pm$ الجذر التربيعى لحاصل ضربهما

فمثلا: الوسط الهندسى للعددين ٣ ، ٢٧ $= \pm\sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm\sqrt{٨١} = \pm ٩$

والوسط الهندسى للعددين −٢ ، −١٨ $= \pm\sqrt{-٢ \times -١٨} = \pm\sqrt{٣٦} = \pm ٦$

لاحظ أنه:

إذا كانت إحدى الكميتين موجبة والأخرى سالبة فإنه لايوجد لهما وسط هندسى حقيقى

✸ إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين:

لإدخال عدد ن من الأوساط الهندسية بين كميتين أ ، ب ليكون الناتج متتابعة هندسية نجد أن:

الحد الأول للمتتابعة = الكمية الأولى = أ

، عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢

، الحد الأخير للمتتابعة = الكمية الثانية = ب

ومن الحد الأخير نوجد الأساس ر ومن ثم نوجد المتتابعة ثم الأوساط

🕮 مثـــال١٠:

ادخل ٥ أوساط هندسية بين العددين $\dfrac{٨}{٢٧}$ ، $\dfrac{٢٧}{٨}$

الحـــل:

$\text{أ} = \frac{٨}{٢٧}$ ، $\text{ل} = \frac{٢٧}{٨}$ ، عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢ = ٥ + ٢ = ٧

، ∵ $\text{ل} = \text{أ} ر^{ن-١}$ ⟸ ∴ $\frac{٢٧}{٨} = \frac{٨}{٢٧} ر^{٦}$

∴ $ر^{٦} = \frac{٢٧}{٨} \times \frac{٢٧}{٨}$ ⟸ ∴ $ر^{٦} = (\frac{٣}{٢})^{٦}$ ⟸ ∴ $ر = \pm \frac{٣}{٢}$

عندما $\text{أ} = \frac{٨}{٢٧}$ ، $ر = \frac{٣}{٢}$

∴ المتتابعة هى :

$(\frac{٨}{٢٧} ، \frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٣} ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٩}{٤} ، \frac{٢٧}{٨})$

∴ الأوساط هى :

$\frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٣} ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٩}{٤}$

عندما $\text{أ} = \frac{٨}{٢٧}$ ، $ر = \frac{-٣}{٢}$

∴ المتتابعة هى :

$(\frac{٨}{٢٧} ، \frac{-٤}{٩} ، \frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{-٩}{٤} ، \frac{٢٧}{٨})$

∴ الأوساط هى :

$\frac{-٤}{٩} ، \frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{-٩}{٤}$

مثـــال١١:

عددان موجبان الوسط الحسابى لهما ١٠ ووسطهما الهندسى ٨ فما هما العددان؟

الحـــل:

نفرض أن العددين هما أ ، ب

∵ الوسط الحسابى لهما ١٠ ∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢} = ١٠$ ∴ أ + ب = ٢٠ (١)

، ∵ وسطهما الهندسى ٨ ∴ $\pm\sqrt{\text{أب}} = ٨$ ∴ أب = ٦٤ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا من المعادلة (١) ∴ ب = ٢٠ − أ (٣)

بالتعويض فى (٢) ∴ أ(٢٠ − أ) = ٦٤ ∴ ٢٠أ − $\text{أ}^{٢}$ = ٦٤

∴ $\text{أ}^{٢}$ − ٢٠أ + ٦٤ = ٠ ∴ (أ − ٤)(أ − ١٦) = ٠ ∴ أ = ٤ أو أ = ١٦

بالتعويض فى (٣) ∴ ب = ٢٠ − ٤ = ١٦ أو ب = ٢٠ − ١٦ = ٤

∴ العددان هما ٤ ، ١٦

مثـــال١٢:

إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ١٦ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحـــل:

المتتابعة هى $(٣ ، \underbrace{٣ر ، ٣ر^{٢}}_{\text{الوسطين الأولين}} ، \ldots ، \underbrace{\frac{٣٨٤}{ر^{٢}} ، \frac{٣٨٤}{ر}}_{\text{الوسطين الأخيرين}} ، ٣٨٤)$

$$\therefore (٣ر + ٣ر^{٢}) \div (\frac{٣٨٤}{ر^{٢}} + \frac{٣٨٤}{ر}) = \frac{١}{١٦}$$

$$\therefore (٣ر + ٣ر^{٢}) \div (\frac{٣٨٤ + ٣٨٤ر}{ر^{٢}}) = \frac{١}{١٦}$$

$$\therefore ٣ر\,\cancel{(١+ر)} \times \frac{ر^{٢}}{٣٨٤\,\cancel{(١+ر)}} = \frac{١}{١٦} \qquad \therefore \frac{ر^{٣}}{١٢٨} = \frac{١}{١٦}$$

$$\therefore ر^{٣} = \frac{١٢٨}{١٦} = ٨ \qquad \therefore ر^{٣} = ٢^{٣} \qquad \therefore ر = ٢$$

الأوساط هى : $(٦ ، ١٢ ، \ldots ، ٩٦ ، ١٩٢)$

$$\because ح_{ن} = أ ر^{ن-١} \qquad \therefore ١٩٢ = ٦ \times ٢^{ن-١} \qquad \therefore ٢^{ن-١} = \frac{١٩٢}{٦} = ٣٢$$

$\therefore ٢^{ن-١} = ٢^{٥}$ $\quad \therefore ن - ١ = ٥$ $\quad \therefore ن = ٦$ $\quad \therefore$ عدد الأوساط هو ٦ اوساط

ملاحظات هامة :

١) الوسط الأول هو الحد الثانى للمتتابعة أى أن الوسط الأول = $أر$ ، الوسط الثانى هو الحد الثالث للمتتابعة أى أن الوسط الثانى = $أر^{٢}$ ،..... وهكذا

$\therefore$ عند كتابة الأوساط يكون أس ر مساويا لرتبة الحد

أما عند كتابة الحدود يكون أس ر أقل من رتبة الحد بواحد

فمثلا: الحد العاشر = $أر^{٩}$ أما الوسط العاشر = $أر^{١٠}$

٢) المتتابعة الهندسية يكون فيها أى حد هو وسط هندسى بين الحد السابق له والحد التالى له وذلك لجميع الحدود عدا الأول والأخير

فمثلا: $ح_{٥}$ هو وسط هندسى بين $ح_{٤}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{١١}$ هو وسط هندسى بين $ح_{١٠}$ ، $ح_{١١}$ ،.... وهكذا

✸ العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى:

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى الموجب

أى أنه إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين مختلفين

فإن وسطهما الحسابى هو $\frac{أ + ب}{٢}$ ووسطهما الهندسى الموجب هو $\sqrt{أب}$

ويكون الوسط الحسابى > الوسط الهندسى الموجب أى أن $\frac{أ + ب}{٢} > \sqrt{أب}$

نتيجة:

بفرض أن أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية موجبة

١) إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعه هندسية فإن $\frac{أ + جـ}{٢} > ب$

٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعه حسابية فإن $ب > \sqrt{أجـ}$

مثـــال ١٣:

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات موجبة فى تتابع حسابى فأثبت أن ب جـ > أ ء

الحـــل:

∵ أ ، ب ، جـ متتابعة حسابية ∴ الوسط الحسابى = ب ، الوسط الهندسى = $\sqrt{أجـ}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $ب > \sqrt{أجـ}$ ∴ $ب^٢ > أجـ$ (١)

∵ ب ، جـ ، ء متتابعة حسابية ∴ الوسط الحسابى = جـ ، الوسط الهندسى = $\sqrt{بء}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $جـ > \sqrt{بء}$ ∴ $جـ^٢ > بء$ (٢)

بضرب طرفى (١) ، (٢)

∴ $ب^٢جـ^٢ > أجـبء$ بقسمة الطرفين على ب جـ ∴ ب جـ > أ ء

مثـــال ١٤:

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن أب + أء + ء جـ > ٣ب جـ

الحـــل:

∵ أ ، ب ، جـ متتابعة هندسية ∴ الوسط الهندسى = ب ، الوسط الحسابى = $\frac{أ+جـ}{٢}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $\frac{\text{أ+جـ}}{\text{٢}}$ > ب ∴ أ+جـ > ٢ب (١)

∵ ب ، جـ ، د متتابعة هندسية ∴ الوسط الهندسى=جـ ، الوسط الحسابى = $\frac{\text{ب + د}}{\text{٢}}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $\frac{\text{ب + د}}{\text{٢}}$ >جـ ∴ ب + د> ٢جـ (٢)

بضرب طرفى (١) ، (٢)

∴ (أ+جـ)(ب + د) > ٢ب × ٢جـ ∴ أب + أد+بجـ+ب د > ٤بجـ

∴ أب + أد+ب د > ٤بجـ − بجـ ∴ أب + أد+ب د > ٣بجـ

🕮 مثـــال١٥:

إذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى أثبت أن س + ل > ص + ع

✍ الحـــل:

∵ س ، ص ، ع متتابعة هندسية ∴ الوسط الهندسى = ص ، الوسط الحسابى = $\frac{\text{س + ع}}{\text{٢}}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $\frac{\text{س + ع}}{\text{٢}}$ > ص ∴ س + ع > ٢ص (١)

∵ ص ، ع ، ل متتابعة هندسية ∴ الوسط الهندسى = ع ، الوسط الحسابى = $\frac{\text{ص + ل}}{\text{٢}}$

، ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $\frac{\text{ص + ل}}{\text{٢}}$ > ع ∴ ص + ل > ٢ع (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ س + ع + ص + ل > ٢ص + ٢ع ∴ س + ل > ٢ص + ٢ع − ع − ص

∴ س + ل > ص + ع #

٦-١ المتسلسلات الهندسية

✵مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية:

أولا: مجموع ن حدا من متتابعة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

المتتابعة الهندسية هى:

$$(\text{أ} ، \text{أ}ر ، \text{أ}ر^{٢} ، \text{أ}ر^{٣} ، \ldots ، \text{أ}ر^{ن-٣} ، \text{أ}ر^{ن-٢} ، \text{أ}ر^{ن-١})$$

$$\therefore ج_ن = \text{أ} + \text{أ}ر + \text{أ}ر^{٢} + \ldots + \text{أ}ر^{ن-٢} + \text{أ}ر^{ن-١} \quad (١)$$

بضرب الطرفين فى ر

$$\therefore ر ج_ن = \text{أ}ر + \text{أ}ر^{٢} + \text{أ}ر^{٣} + \ldots + \text{أ}ر^{ن-٢} + \text{أ}ر^{ن-١} + \text{أ}ر^{ن} \quad (٢)$$

بطرح (١) ، (٢)

$$\therefore ج_ن - ر ج_ن = \text{أ} - \text{أ}ر^{ن} \qquad \therefore ج_ن(١ - ر) = \text{أ}(١ - ر^{ن})$$

$$\boxed{\therefore ج_ن = \frac{\text{أ}(١ - ر^{ن})}{١ - ر}}$$

مثال١:

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) إلى ٨ حدود.

الحل:

$\because$ (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) متتابعة هندسية

$$\therefore \text{أ} = ٣ ، \quad ر = \frac{٦}{٣} = ٢ ، \quad ن = ٨$$

$$\because ج_ن = \frac{\text{أ}(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$$

$$\therefore ج_٨ = \frac{٣(١ - ٢^{٨})}{١ - ٢} = \frac{٣(١ - ٢٥٦)}{-١} = ٣ \times ٢٥٥ = ٧٦٥$$

ثانيا: مجموع ن حدا من متتابعة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير:

من قانون الحد العام نعلم أن $ل = \text{أ}ر^{ن-١}$ بالضرب فى ر $\therefore ل ر = \text{أ}ر^{ن}$

، $\because ج_ن = \frac{\text{أ}(١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{\text{أ} - \text{أ}ر^{ن}}{١ - ر}$ بالتعويض $\boxed{\therefore ج_ن = \frac{\text{أ} - ل ر}{١ - ر}}$

مثـــال٢:

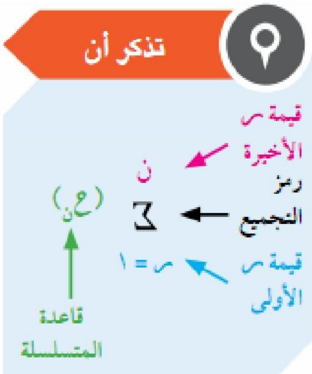
أوجد مجموع المتتابعة الهندسيةالتى فيها $\text{أ} = ٩$ ، $\text{ر} = ٣$ ، $\text{ل} = ٦٥٦١$

الحـــل:

$\because \text{أ} = ٩$ ، $\text{ر} = ٣$ ، $\text{ل} = ٦٥٦١$

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل}\,\text{ر}}{١ - \text{ر}} = \frac{٩ - ٦٥٦١ \times ٣}{١ - ٣} = ٩٨٣٧$$

مثـــال٣:



أوجد (أ) $\sum_{\text{ر}=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{\text{ر}-١}$ (ب) $\sum_{\text{ر}=٣}^{١١} ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ر}-١}$

الحـــل:

(أ) $\sum_{\text{ر}=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{\text{ر}-١}$ نلاحظ أن مجموع المتسلسلة ابتداء من $\text{ع}_٧$ إلى $\text{ع}_{١٦}$

$\therefore \text{ع}_٧ = \text{أ} = \frac{١}{٨}(٢)^{٧-١} = \frac{١}{٨} \times ٦٤ = ٨$ ، $\text{ر} = ٢$ ، $\text{ن} = ١٦ - ٧ + ١ = ١٠$

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$$

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{٨(١ - ٢^{١٠})}{١ - ٢} = \frac{٨ \times (-١٠٢٣)}{-١} = ٨١٨٤$$

(ب) $\sum_{\text{ر}=٣}^{١١} ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ر}-١}$ نلاحظ أن مجموع المتسلسلة ابتداء من $\text{ع}_٣$ إلى $\text{ع}_{١١}$

$\therefore \text{ع}_٣ = \text{أ} = ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣-١} = ١٦ \times \frac{١}{٤} = ٤$ ، $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ن} = ١١ - ٣ + ١ = ٩$

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$$

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{٤\left(١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٩}\right)}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٥١١}{٦٤}$$

مثـــال٤:

كم حداً يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ٠٠) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٢٥٤

الحـــل:

∵ (٢ ، ٤ ، ٨ ، ٠٠) م.هـ

$\therefore$ أ $= ٢$ ، ر $= \frac{٤}{٢} = ٢$ ، جـ$_ن = ٢٥٤$

$\because$ جـ$_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ $\therefore ٢٥٤ = \frac{٢(٢^ن - ١)}{٢ - ١} = ٢(٢^ن - ١)$

$\therefore ٢^ن - ١ = \frac{٢٥٤}{٢} = ١٢٧$ $\therefore ٢^ن = ١٢٧ + ١ = ١٢٨$

$\therefore ٢^ن = ٢^٧$ $\therefore ن = ٧$ ∴ عدد الحدود المطلوبة = ٧ حدود

مثـــال٥:

متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع اكبر من ٥٠٠٠.

الحـــل:

$\because$ ع$_١ = ٢$ $\therefore$ أ $= ٢$ ، $\because$ ع$_٤ = ٥٤$ $\therefore$ أ ر$^٣ = ٥٤$

$\therefore ٢$ر$^٣ = ٥٤$ $\therefore$ ر$^٣ = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$ $\therefore$ ر$^٣ = ٣^٣$ $\therefore$ ر $= ٣$

$\because$ جـ$_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $\because$ جـ$_ن > ٥٠٠٠$ $\therefore \frac{٢(٣^ن - ١)}{٣ - ١} > ٥٠٠٠$

$\therefore \frac{٢(٣^ن - ١)}{٢} > ٥٠٠٠$ $\therefore ٣^ن - ١ > ٥٠٠٠$

$\therefore ٣^ن > ٥٠٠١$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ ن لـو٣ $=$ لـو ٥٠٠١ $\therefore$ ن $> \frac{لـو ٥٠٠١}{لـو ٣}$ $\therefore$ ن $> ٧,٧٥$

∵ ن يجب أن تكون عدد صحيح موجب $\therefore$ ن $= ٨$

∴ أقل عدد من الحدود يجعل المجموع اكبر من ٥٠٠٠ هو ٨ حدود

مثـــال٦:

إذا كان مجموع $ن$ حداً من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $جـ_ن = ٣(٢^ن - ١)$:

اولا: أوجد المتتابعة.   ثانيا: أوجد قيمة الحد السابع من هذه المتتابعة.

الحـــل:

$\because جـ_ن = ٣(٢^ن - ١)$ وبوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ،...

$\therefore جـ_١ = ٣(٢^١ - ١) = ٣ \Leftarrow$ جـ١ تعنى مجموع حد واحد أى $ح_١$

$\boxed{\therefore ح_١ = جـ_١}$ $\therefore ح_١ = ٣$ #

، $جـ_٢ = ٣(٢^٢ - ١) = ٣ \times ٣ = ٩ \Leftarrow$ جـ٢ تعنى مجموع حدين

$\therefore جـ_٢ = ح_١ + ح_٢$ $\boxed{\therefore ح_٢ = جـ_٢ - جـ_١}$ $\therefore ح_٢ = ٩ - ٣ = ٦$ #

، $جـ_٣ = ٣(٢^٣ - ١) = ٣ \times ٧ = ٢١ \Leftarrow$ جـ٣ تعنى مجموع ثلاثة حدود

$\therefore جـ_٣ = ح_١ + ح_٢ + ح_٣$ $\boxed{\therefore ح_٣ = جـ_٣ - جـ_٢}$ $\therefore ح_٣ = ٢١ - ٩ = ١٢$ #

$\therefore$ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، . . .)

$\boxed{\because ح_٧ = جـ_٧ - جـ_٦}$

$\therefore ح_٧ = ٣(٢^٧ - ١) - ٣(٢^٦ - ١) = ٣ \times ١٢٧ - ٣ \times ٦٣ = ٣ \times ٦٤ = ١٩٢$

اوبطريقة اخرى:

$\because ح_٧ = أ ر^٦$ ، $أ = ٣$ ، $ر = \frac{٦}{٣} = ٢$

$\therefore ح_٧ = ٣ \times ٢^٦ = ٣ \times ٦٤ = ١٩٢$

✷المتسلسلات الهندسية غير المنتهية:

تعريف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود.

وتكون المتسلسلة تقاربية إذا كان مجموعها عددا حقيقيا حيث يكون $|ر| < ١$

وتكون المتسلسلة غير تقاربية اى تباعدية إذا لم يكن لها مجموع حيث يكون $ر \geq ١$

مثـــال٧:

أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لانهائى من حدودها ؟ ولماذا؟

(أ) $٧ + ٢١ + ٦٣ + \cdot\cdot$

(ب) $\frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٣ + ٢ + \cdot\cdot$

الحـــل:

(أ) $٧ + ٢١ + ٦٣ + \cdot\cdot$ ∴ نوجد اساس المتسلسلة الهندسية

∴ $ر = \frac{٢١}{٧} = ٣$ ∴ المتسلسلة غير تقاربية اى تباعدية لأن $٣ > ١$

(ب) $\frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٣ + ٢ + \cdot\cdot$ ∴ نوجد اساس المتسلسلة الهندسية

∴ $ر = \frac{٩}{٢} \div \frac{٢٧}{٤} = \frac{٩}{٢} \times \frac{٤}{٢٧} = \frac{٢}{٣}$ ∴المتسلسلة تقاربية لأن $\frac{٢}{٣} < ١$

✱مجموع المتتابعات الهندسية غير المنتهية:

من المعلوم أن مجموع ن حدا الأولى من متتابعة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر هو:

$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{أ - أ ر^ن}{١ - ر}$ وعندما تكون $|ر| < ١$ أى أن $-١ < ر < ١$

أى عندما يكون الأساس ر كسر حقيقى (أى كسر بسطه اصغر من مقامه)

فإن قيمة $ر^ن$ تقترب من الصفر عندما تقترب ن من مالانهاية

وبالتالى فإن مجموع عدد لانهائى من حدود متتابعة هندسية ابتداء من حدها الأول يصبح:

$$\boxed{جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}}$$

حيث أ هو الحد الأول أو الحد الذى يبدأ منه الجمع

وشرط جمع عدد لانهائى من حدود متتابعة هندسية هو $|ر| < ١$ أى $-١ < ر < ١$

لاحظ أنه إذا كان $|ر| > ١$ فإنه لايمكن جمع المتتابعة الهندسية ألى مالانهاية

مثـــال٨:

بين أى المتتابعات الآتية يمكن جمعها إلى مالانهاية واوجد المجموع إن أمكن:

❶ $(ع_ن) = (٤ \times ٣^{٢ - ن})$

❷ $(ع_ن) = (٣^{-٢ن})$

❸ $(٢، -١، \frac{١}{٢}، \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$

❹ $(\frac{١}{٨}، \frac{٣}{١٦}، \frac{٩}{٣٢}، \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$

الحـــل:

❶ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٤ \times ٣^{٢-\text{ن}})$

$\therefore \text{ح}_{\text{ن}} = ٤ \times ٣^{٢-\text{ن}}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+١} = ٤ \times ٣^{٢-(\text{ن}+١)} = ٤ \times ٣^{١-\text{ن}}$

$\therefore \dfrac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \dfrac{\cancel{٤} \times ٣^{١-\text{ن}}}{\cancel{٤} \times ٣^{٢-\text{ن}}} = ٣^{١-\cancel{\text{ن}}-٢+\cancel{\text{ن}}} = ٣^{-١} = \dfrac{١}{٣}$ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية اساسها $\text{ر} = \dfrac{١}{٣}$

، $\because |\text{ر}| < ١$ ∴ يمكن جمع المتتابعة الى مالانهاية

، $\because \text{ح}_{\text{ن}} = ٤ \times ٣^{٢-\text{ن}}$ $\therefore \text{ح}_{١} = ٤ \times ٣^{٢-١} = ٤ \times ٣ = ١٢$ $\therefore \text{أ} = ١٢$

$\because \text{جـ}_{\infty} = \dfrac{\text{أ}}{١-\text{ر}}$ $\therefore \text{جـ}_{\infty} = \dfrac{١٢}{١-\frac{١}{٣}} = ١٢ \div \dfrac{٢}{٣} = ١٢ \times \dfrac{٣}{٢} = ١٨$

❷ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٣ - ٢\text{ن})$

$\therefore \text{ح}_{\text{ن}} = ٣ - ٢\text{ن}$ وهو مقدار من الدرجة الأولى فى ن

∴ المتتابعة حسابية وليست هندسية

∴ لايمكن جمع المتتابعة الى مالانهاية لأنها متتابعة حسابية

❸ $(٢ ، -١ ، \dfrac{١}{٢} ، \ldots\ldots)$

$\dfrac{\text{ح}_{٢}}{\text{ح}_{١}} = \dfrac{-١}{٢}$ ، $\dfrac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٢}} = \dfrac{\frac{١}{٢}}{-١} = \dfrac{-١}{٢}$ $\therefore \dfrac{\text{ح}_{٢}}{\text{ح}_{١}} = \dfrac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٢}} = \dfrac{-١}{٢}$

∴ المتتابعة هندسية اساسها $\text{ر} = \dfrac{-١}{٢}$

، $\because |\text{ر}| < ١$ ∴ يمكن جمع المتتابعة الى مالانهاية

$\because \text{جـ}_{\infty} = \dfrac{\text{أ}}{١-\text{ر}}$ $\therefore \text{جـ}_{\infty} = \dfrac{٢}{١-(\frac{-١}{٢})} = ٢ \div \dfrac{٣}{٢} = ٢ \times \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{٤}{٣}$

④ $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{٣}{١٦} ، \frac{٩}{٣٢} ، \ldots\ldots\right)$

$$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٣}{١٦} \div \frac{١}{٨} = \frac{٣}{١٦} \times \frac{٨}{١} = \frac{٣}{٢} \quad ، \quad \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٩}{٣٢} \div \frac{٣}{١٦} = \frac{٩}{٣٢} \times \frac{١٦}{٣} = \frac{٣}{٢}$$

$\therefore \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٣}{٢}$ $\therefore$ **المتتابعة هندسية اساسها** $ر = \frac{٣}{٢}$

، $\because |ر| > ١$ $\therefore$ **لايمكن جمع المتتابعة الى مالانهاية**

مثـــال٩:

$(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ أثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما وأوجد هذا المجموع بدءا من حدها الأول.

الحـــل:

$\because ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ $\therefore أ + أ ر^٣ = ٧٠ \quad (١)$

، $\because ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ $\therefore أ ر + أ ر^٢ = ٦٠ \quad (٢)$

بقسمة (١) على (٢) $\therefore \frac{أ + أ ر^٣}{أ ر + أ ر^٢} = \frac{٧٠}{٦٠}$ $\therefore \frac{\cancel{أ}(١ + ر^٣)}{\cancel{أ} ر(١ + ر)} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{\cancel{(١ + ر)}(١ - ر + ر^٢)}{ر\cancel{(١ + ر)}} = \frac{٧}{٦}$ $\therefore ٦ر^٢ - ٦ر + ٦ = ٧ر$

$\therefore ٦ر^٢ - ١٣ر + ٦ = ٠$ $\therefore (٢ر - ٣)(٣ر - ٢) = ٠$

$\therefore$ إما $٢ر - ٣ = ٠$ ومنها $٢ر = ٣$ $\therefore ر = \frac{٣}{٢}$

أو $٣ر - ٢ = ٠$ ومنها $٣ر = ٢$ $\therefore ر = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ عندما $ر = \frac{٣}{٢}$ وبالتعويض فى (١) $\therefore أ + أ\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣ = ٧٠$

$\therefore أ\left(١ + \frac{٢٧}{٨}\right) = ٧٠$ $\therefore أ \times \frac{٣٥}{٨} = ٧٠$ $\therefore أ = ٧٠ \times \frac{٨}{٣٥} = ١٦$

$\therefore$ المتتابعة هى $(١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، \ldots)$

وهذه المتتابعة لا يمكن جمعها الى مالانهاية لأن $|ر| > ١$

وعندما $\text{ر} = \frac{٢}{٣}$ وبالتعويض فى (١) $\therefore \text{أ} + \text{أ}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = ٧٠$

$\therefore \text{أ}\left(١ + \frac{٨}{٢٧}\right) = ٧٠$ $\therefore \text{أ} \times \frac{٣٥}{٢٧} = ٧٠$ $\therefore \text{أ} = ٧٠ \times \frac{٢٧}{٣٥} = ٥٤$

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ٣٦ ، ٢٤ ، ...)

وهذه المتتابعة يمكن جمعها الى مالانهاية لأن $|\text{ر}| < ١$

$\because \text{ج}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$ $\therefore \text{ج}_{\infty} = \frac{٥٤}{١ - \left(\frac{٢}{٣}\right)} = ٥٤ \times ٣ = ١٦٢$

مثال ١٠:

متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة واساسها أصغر من الواحد الصحيح والوسط الحسابى للحدين الثالث والخامس يساوى ٣٠ والوسط الهندسى لهما يساوى ٢٤ أوجد المتتابعة ثم اثبت أن مجموع أى عدد من حدودها مهما كبر لا يزيد عن ٣٨٤ .

الحل:

∵ الوسط الحسابى للحدين الثالث والخامس يساوى ٣٠

$\therefore \text{ع}_{٣} + \text{ع}_{٥} = ٢ \times ٣٠ = ٦٠$ $\therefore \text{أ}\text{ر}^{٢} + \text{أ}\text{ر}^{٤} = ٦٠$ $\therefore \text{أ}\text{ر}^{٢}(١ + \text{ر}^{٢}) = ٦٠$ (١)

، ∵ الوسط الهندسى للحدين الثالث والخامس يساوى ٢٤

$\therefore \sqrt{\text{ع}_{٣} \times \text{ع}_{٥}} = ٢٤$ $\therefore \sqrt{\text{أ}\text{ر}^{٢} \times \text{أ}\text{ر}^{٤}} = ٢٤$ $\therefore \text{أ}\text{ر}^{٣} = ٢٤$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) $\therefore \frac{\text{أ}\text{ر}^{٢}(١ + \text{ر}^{٢})}{\text{أ}\text{ر}^{٣}} = \frac{٦٠}{٢٤}$ $\therefore \frac{١ + \text{ر}^{٢}}{\text{ر}} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore ٢\text{ر}^{٢} + ٢ = ٥\text{ر}$ $\therefore ٢\text{ر}^{٢} - ٥\text{ر} + ٢ = ٠$ $\therefore (\text{ر} - ٢)(٢\text{ر} - ١) = ٠$

$\therefore \text{ر} - ٢ = ٠$ ومنها $\text{ر} = ٢$ مرفوض لأن المتتابعة المطلوبة اساسها اصغر من واحد

أو $٢\text{ر} - ١ = ٠$ ومنها $٢\text{ر} = ١$ $\therefore \text{ر} = \frac{١}{٢}$ بالتعويض فى (٢)

$\therefore \text{أ} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = ٢٤$ $\therefore \text{أ} \times \frac{١}{٨} = ٢٤$ $\therefore \text{أ} = ٢٤ \times ٨ = ١٩٢$

∴ المتتابعة هى (١٩٢ ، ٩٦ ، ٤٨ ، ...)

، $\because \text{ج}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$ $\therefore \text{ج}_{\infty} = \frac{١٩٢}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١٩٢}{\frac{١}{٢}} = ١٩٢ \times ٢ = ٣٨٤$

∴ مجموع أى عدد من الحدود مهما كبر لا يزيد عن ٣٨٤

✸ تحويل الكسر العشرى إلى كسر إعتيادى:

من المعلوم أنه عند تحويل الكسر الإعتيادى إلى كسر عشرى نقسم البسط على المقام وفى بعض الحالات نـجد أن عملية القسمة لاتنتهى بل تتكرر بعض الأرقام

مثل: $\frac{١}{٣} = ٠,٣٣٣٣٣٣٣... = ٠,\overline{٣}$ ، $\frac{٥}{٢٣} = ٠,١٥١٥١٥١٥... = ٠,\overline{١٥}$

، $\frac{١}{٦} = ٠,١٦٦٦٦٦٦٦... = ٠,١\overline{٦}$ ، $\frac{١٤}{١١١} = ٠,١٢٦١٢٦١٢٦... = ٠,\overline{١٢٦}$

وهذه الكسور تسمى كسور عشرية دائرية ويرمز لها بوضع خط فوق الأرقام التى تتكرر
ولتحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر اعتيادى نستخدم المتتابعة الهندسية حيث نضع الكسر العشرى الدائر على صورة مجموع متتابعة هندسية لانهائية كما سيتضح من خلال المثال التالى

📖 مثـــال١١:

ضع كل من الكسور العشرية التالية على صورة كسر إعتيادى $٠,\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٣}$ ، $٠,٤\overline{٦}$

✍ الحـــل:

$٠,\overline{٦} = ٠,٦٦٦٦٦٦٦... = ٠,٦ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + ٠,٠٠٠٦ + ...$

الطرف الأيسر = مجموع متتابعة هندسية لا نهائية فيها $أ = ٠,٦$ ، $ر = ٠,١$

$\because ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ $\therefore ٠,\overline{٦} = \frac{٠,٦}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٦}{٠,٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

، $٠,\overline{٦٣} = ٠,٦٣٦٣٦٣... = ٠,٦٣ + ٠,٠٠٦٣ + ٠,٠٠٠٠٦٣ + ...$

الطرف الأيسر = مجموع متتابعة هندسية لا نهائية فيها $أ = ٠,٦٣$ ، $ر = ٠,٠١$

$\because ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ $\therefore ٠,\overline{٦٣} = \frac{٠,٦٣}{١ - ٠,٠١} = \frac{٠,٦٣}{٠,٩٩} = \frac{٦٣}{٩٩} = \frac{٧}{١١}$

، $٠,٤\overline{٦} = ٠,٤٦٦٦٦٦... = ٠,٤ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + ٠,٠٠٠٦ + ...$

الطرف الأيسر = $٠,٤$ + مجموع متتابعة هندسية لا نهائية فيها $أ = ٠,٠٦$ ، $ر = ٠,١$

$\because ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ $\therefore ٠,٤\overline{٦} = ٠,٤ + \frac{٠,٠٦}{١ - ٠,١} = ٠,٤ + \frac{٠,٠٦}{٠,٩} = \frac{٧}{١٥}$

الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

٢ - ١ مبدأ العد

مبدأ العد الأساسي:

تعريف:

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_١$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_٢$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_٣$ طريقة وهكذا .....

فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا = $م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times ... \times م_ن$

مثال١:

مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطة ، ٣ أنواع من المشروبات .كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميا على أن تشمل نوعا واحدا من كل من الفطائر والسلاطة والمشروبات.

الحـــل:

عدد طرق تقديم الفطائر = ٦ طرق

، عدد طرق تقديم السلاطة = ٤ طرق

، عدد طرق تقديم المشروبات = ٣ طرق

∴ عدد طرق تقديم الثلاثة معا = ٦ × ٤ × ٣ = ٧٢ طريقة

مثال٢:

كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر { ٢ ، ٣ ، ٥ }:

اولا: مع إمكانية تكرار الأرقام. ثانيا: مع عدم تكرار الأرقام.

الحـــل:

اولا: مع إمكانية تكرار الأرقام.

عدد طرق شغل خانة المئات = ٣ طرق

، عدد طرق شغل خانة العشرات = ٣ طرق

، عدد طرق شغل خانة الآحاد = ٣ طرق

∴ عدد الأعداد الممكنة = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ عدد

اولا: مع إمكانية تكرار الأرقام.

عدد طرق شغل خانة المئات = ٣ طرق

وبعد شغل خانة المئات بأحد الأرقام الثلاثة يتبقى رقمين

∴ عدد طرق شغل خانة العشرات = ٢ طريقة

وبعد شغل خانة العشرات بأحد الرقمين يتبقى رقم واحد

∴ عدد طرق شغل خانة الآحاد = ١ طريقة

∴ عدد الأعداد المكنة = ٣ × ٢ × ١ = ٦ أعداد

مثـــال٣:

كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ } بحيث يكون رقم الآحاد ٦ .

الحـــل:

تسمى هذه الحالة بمبدأ العد المشروط وذلك لوجود شرط فى الأرقام المطلوبة وهو أن يكون رقم الآحاد ٦ لذلك نبدأ بالخانة المشروطة

عدد طرق شغل خانة الآحاد = ١ طريقة

وبعد شغل خانة الآحاد بالرقم ٦ الثلاثة يتبقى ثلاثة أرقام

∴ عدد طرق شغل خانة العشرات = ٣ طريقة

وبعد شغل خانة العشرات بأحد الأقام الثلاثة يتبقى رقمين

∴ عدد طرق شغل خانة المئات = ٢ طريقة

وبعد شغل خانة المئات بأحد الرقمين يتبقى رقم واحد

∴ عدد طرق شغل خانة الألآف = ١ طريقة

∴ عدد الأعداد المكنة = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ أعداد

مثـــال٤:

كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر { ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٩ } بحيث تكون أصغر من ٩٠٠ .

الحـــل:

∵ العدد المطلوب أصغر من ٩٠٠ ∴ خانة المئات تحتوى على رقم اصغر من ٩ وهو ٢ أو ٥ أو ٨

∴ عدد طرق شغل خانة المئات = ٣ طرق

وبعد شغل خانة المئات بأحد الأرقام الثلاثة يتبقى ثلاثة ارقام اخرى

∴ عدد طرق شغل خانة العشرات = ٣ طريقة

، عدد طرق شغل خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد الأعداد المكنة = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٢	٣	٣

٢ - ٢ مضروب العدد ـ التباديل

✸ مضروب العدد:

✸ تعريف:

مضروب العدد الصحيح الموجب $ن$ يكتب على الصورة $\underline{|ن}$
ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى $ن$ أى أن:

$$\boxed{\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \cdots \cdots ٣ \times ٢ \times ١}$$

ملاحظات:

- عندما $ن = ٠$ فإن $\underline{|٠} = ١$ ، عندما $ن = ١$ فإن $\underline{|١} = ١$
- $\underline{|٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥\underline{|٤}$ ،
  $\underline{|٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦\underline{|٥}$ وبوجه عام فإن:

$$\boxed{\underline{|ن} = ن\underline{|ن-١}}$$

مثال١:

أوجد قيمة: (أ) $\dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|١٢}}$ (ب) $\dfrac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}} + \dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}}$

الحل:

(أ) $\dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|١٢}} = \dfrac{١٥ \times ١٤ \times ١٣\cancel{\underline{|١٢}}}{\cancel{\underline{|١٢}}} = ٢٧٣٠$

(ب) $\dfrac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}} + \dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}} = \dfrac{٧ \times ٦\cancel{\underline{|٥}}}{\cancel{\underline{|٥}}} + \dfrac{٩ \times ٨\cancel{\underline{|٧}}}{\cancel{\underline{|٧}}} = ٤٢ + ٧٢ = ١١٤$

مثال٢:

إذا كان $\dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{\underline{|ن+١}} = \dfrac{٥٦}{\underline{|ن+٢}}$ فما قيمة $ن$

الحل:

$\because \dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{\underline{|ن+١}} = \dfrac{٥٦}{\underline{|ن+٢}}$ $\therefore \dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{(ن+١)\underline{|ن}} = \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)\underline{|ن}}$

$\therefore 1 + \frac{٢}{(ن+١)} = \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)}$ $\therefore (ن+٢)(ن+١) + ٢(ن+٢) = ٥٦$

$\therefore ن^٢ + ٣ن + ٢ + ٢ن + ٤ - ٥٦ = ٠$ $\therefore ن^٢ + ٥ن - ٥٠ = ٠$

$\therefore (ن - ٥)(ن + ١٠) = ٠$ $\therefore ن = ٥$

مثـــال٣:

إذا كان $\underline{|ن} = ١٢٠$ فما قيمة ن

الحـــل:

$\because \underline{|ن}$ = حاصل ضرب عوامل متتالية اكبرها ن واخرها ١

$\therefore$ نحلل ١٢٠ بالقسمة على ١ ثم قسمة الناتج على ٢ ثم قسمة الناتج على ٣

وهكذا حتى نحصل على العوامل المتتالية فيكون اكبرها هو ن

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

$\therefore \underline{|ن} = ١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \underline{|٥}$ $\Leftarrow$ $\therefore ن = ٥$

✸التباديل:

✸تمهيد:

أذا كان لدينا الارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ويراد تكوين عدد من رقمين مختلفين من هذه الأرقام فإن الاعداد التى يمكن تكوينها تكون كالتالى:

٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٣٤ اى ١٢ عدد

وفى هذه الحالة نقول بأننا قمنا بعمل تراتيب (تباديل) لعدد أربع أشياء بأخذها إثنين إثنين

ويعبر عن ذلك بالرمز $^{٤}ل_{٢}$ اى أن $^{٤}ل_{٢} = ١٢$

✸تعريف:

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث:

$$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(ن-ر+١)$$

حيث $ر \le ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $^{ن}ل_{٠} = ١$

أى أن $^{ن}ل_{ر}$ = حاصل ضرب مجموعة من العوامل المتتالية اولهم = ن (العلم) وعددهم = ر (الدليل)

فمثلا: $^{٦}ل_{٣} = ٦ \times ٥ \times ٤ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times \frac{٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-٣}}$

، $^{٧}ل_{٥} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \frac{٢ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٧-٥}}$

وبصفة عامة فإن:

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن} - \text{ر}}}$$

حيث $\text{ر} \leq \text{ن}$ ، $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

مثـــال٤:

كم عددا مكونا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؟

الحـــل:

لدينا ٤ ارقام ويراد اختيار ٢ منها فى كل مرة

∴ عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين = $^{٤}\text{ل}_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$ عدد

لاحظ أنه إذا لم تذكر كلمة مختلفين يكون عدد الأعداد = $٤^{٢} = ١٦$ عدد

مثـــال٥:

من مجموعة الحروف { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و } أوجد:

(أ) عدد طرق إختيار حرف واحد (ب) عدد طرق إختيار حرفين مختلفين

الحـــل:

(أ) عدد طرق إختيار حرف واحد = $^{٦}\text{ل}_{١} = ٦$ طرق

(ب) عدد طرق إختيار حرفين مختلفين = $^{٦}\text{ل}_{٢} = ٦ \times ٥ = ٣٠$ طريقة

مثـــال٦:

أذا كان $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}} = ٦٧٢٠$ أوجد $|\underline{\text{ر}+١}$

الحـــل:

∵ $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}} = ٦٧٢٠$ = حاصل ضرب عوامل متتالية اكبرهم ٨ وعددهم ر

∴ نحلل ٦٧٢٠ بالقسمة على ٨ ثم قسمة الناتج على ٧ ثم قسمة الناتج على ٦

وهكذا حتى نحصل عى العوامل المتتالية فيكون عددهم هو ر

٦٧٢٠	٨
٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٥	٤
١	

∴ $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}} = ٦٧٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٨}\text{ل}_{٥}$ ⟸ ∴ ر = ٥

∴ $|\underline{\text{ر}+١} = |\underline{٥+١} = |\underline{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

مثـــال٧:

إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٤\ ^{ن-٢}ل_{٣}$ اوجد قيمة ن

الحـــل:

∵ $^{ن}ل_{٤} = ١٤\ ^{ن-٢}ل_{٣}$

∴ نفك تبديلة الايمن الى ٤ عوامل متتالية اولهم ن ونفك تبديلة الايسر الى ٣ عوامل متتالية اولهم (ن − ٢)

∴ ن(ن − ١)(ن − ٢)(ن − ٣) = ١٤(ن − ٢)(ن − ٣)(ن − ٤)

∴ $ن^{٢} - ن = ١٤ن - ٥٦$ ⇐ ∴ $ن^{٢} - ١٥ن + ٥٦ = ٠$

∴ (ن − ٧)(ن − ٨) = ٠ ⇐ ∴ ن = ٧ او ن = ٨

ملاحظة هامة: الترتيب مهم فى التباديل لذلك يعبر عن التباديل بأقواس الزوج المرتب (،)

مثـــال٨:

إذا كان س = { س : س ∈ ص ، −٣ ≤ س ≤ ٤ }

، ع = { (أ، ب، ج) : أ، ب، ج ∈ س ، أ ≠ ب ≠ ج } كم عدد عناصر ع

الحـــل:

عناصر ع عبارة عن ازوا ج مرتبه ثلاثية اى انها تباديل لعناصر س على ثلاثة أماكن

∵ س = { −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ∴ عدد عناصر س = ٨

∴ عدد عناصر ع = $^{٨}ل_{٣}$ = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

٢ - ٣ التوافيق

✸ تمهيد:

أذا كان لدينا الحروف { أ ، ب ، جـ ، د } ويراد اختيار حرفين مختلفين منها دون مراعاة الترتيب فإن الإختيارات التى يمكن تكوينها تكون كالتالى:

{ أ،ب } ، { أ،جـ } ، { أ،د } ، { ب،جـ } ، { ب،د } ، { جـ،د }

وكل اختيار من هذه الإختيارات يسمى " توفيقة "

وفى هذه الحالة نقول بأننا قمنا بعمل توافيق لعدد أربع أشياء بأخذها إثنين إثنين

✸ تعريف:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر هو $^{ن}ق_{ر}$

حيث $ر \le ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

من التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق أربع أشياء بأخذها إثنين إثنين بالرمز $^{٤}ق_{٢}$ (وتقرأ ٤ قاف ٢) أو بالرمز $\binom{٤}{٢}$ (وتقرأ ٤ فوق ٢)

$\therefore\ ^{٤}ق_{٢} = ٦ \quad \therefore\ ^{٤}ق_{٢} = \frac{١٢}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ اى أن $\boxed{^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}}$

📖 مثـــال١:

أوجد قيمة: (أ) $^{٨}ق_{٥}$ (ب) $^{٨}ق_{٣}$

✍ الحـــل:

(أ) $^{٨}ق_{٥} = \frac{^{٨}ل_{٥}}{\underline{|٥}} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦$

(ب) $^{٨}ق_{٣} = \frac{^{٨}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦$

✸ نتائج هامة:

١) $\boxed{^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}}$ ، ٢) $\boxed{^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن - ر}}}$

٣) اذا كان $\boxed{{}^{ن}\text{ق}_{ر} = {}^{ن}\text{ق}_{هـ}}$ فإنه أما ر = هـ او ر + هـ = ن

ای أنه إذا تساوت توفيقتان بحيث كان العلم متساوى فأنه:

اما أن الدليل الأول = الدليل الثانى او مجموع الدليلين = العلم

مثــــال٢:

أوجد قيمة: ${}^{١٢}\text{ق}_{٩}$ ، ${}^{١٠٠}\text{ق}_{٩٨}$ بدون استخدام الآلة الحاسبة

الحـــل:

$${}^{١٢}\text{ق}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{١٢-٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٣} = \frac{١٢\times١١\times١٠}{٣\times٢\times١} = ٢٢٠$$

$$، \quad {}^{١٠٠}\text{ق}_{٩٨} = {}^{١٠٠}\text{ق}_{١٠٠-٩٨} = {}^{١٠٠}\text{ق}_{٢} = \frac{١٠٠\times٩٩}{٢\times١} = ٤٩٥٠$$

مثــــال٣:

إذا كان: ${}^{٢٨}\text{ق}_{ر} = {}^{٢٨}\text{ق}_{٢ر-٥}$ فأوجد قيمة ر

الحـــل:

$\because {}^{٢٨}\text{ق}_{ر} = {}^{٢٨}\text{ق}_{٢ر-٥}$

$\therefore$ إما ٢ر − ٥ = ر $\Leftarrow$ $\therefore$ ٢ر − ر = ٥ $\Leftarrow$ $\therefore$ ر = ٥

أو ٢ر − ٥ + ر = ٢٨ $\Leftarrow$ $\therefore$ ٣ر = ٢٨ + ٥ = ٣٣ $\Leftarrow$ $\therefore$ ر = ١١

مثــــال٤:

اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين أوجد عدد مباريات المسابقة.

الحـــل:

عدد المباريات = عدد طرق أختيار شخصين من بين ٧ أشخاص = ${}^{٧}\text{ق}_{٢} = \frac{٧\times٦}{٢\times١} = ٢١$ مباراة

مثــــال٥:

فصل دراسى به ١٠ طلاب ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الفصل.

الحـــل:

عدد طرق إختيار ٣ طلاب من بين ١٠ طلاب = $^{١٠}ق_{٣}$

وعدد طرق إختيار طالبتين من بين ٨ طالبات = $^{٨}ق_{٢}$

وتبعا لمبدأ العد

∴ عدد طرق تشكيل اللجنة الخماسية = $^{١٠}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٢} = ١٢٠ \times ٢٨ = ٣٣٦٠$ طريقة

مثـــال٦:

بكم طريقة يمكن انتخاب:

١) لجنة مكونة من ٤ رجال و ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات.

٢) لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات.

الحـــل:

١) عدد طرق إختيار ٤ رجال من بين ٦ رجال = $^{٦}ق_{٤}$

، عدد طرق إختيار ٣ سيدات من بين ٥ سيدات = $^{٥}ق_{٣}$

∴ عدد طرق تشكيل اللجنة = $^{٦}ق_{٤} \times {}^{٥}ق_{٢} = ١٥ \times ١٠ = ١٥٠$ طريقة

٢) عدد طرق إختيار ٤ رجال من بين ٦ رجال = $^{٦}ق_{٤}$

، عدد طرق إختيار ٣ سيدات من بين ٥ سيدات = $^{٥}ق_{٣}$

∴ عدد طرق تشكيل اللجنة = $^{٦}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٢} = ١٥ + ١٠ = ٢٥$ طريقة

ملاحظة هامة: الترتيب غير مهم فى التوافيق لذلك يعبر عن التوافيق بأقواس المجموعة { ، }

مثـــال٧:

إذا كان $سـ = \{ س : س \in ط ، ٥ \le س \le ٩ \}$

، $ع = \{ \{ ٢ ، ب ، جـ \} : ٢ ، ب ، جـ \in س \}$ كم عدد عناصر ع

الحـــل:

عناصر ع عبارة عن مجموعة اى انها توافيق لعناصر س على ثلاثة أماكن

∵ $سـ = \{ ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ \}$ ∴ عدد عناصر سـ = ٥

∴ عدد عناصر ع = $^{٥}ق_{٣} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$