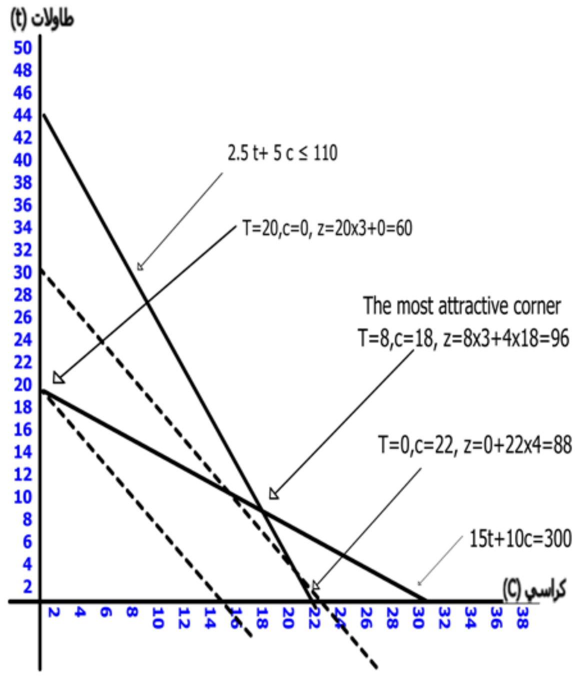
الفصل الأول
البرمجة الخطية

L I N E A R P R O G R A M M I N G



مقدمة:

الأساليب الكمية (Quantitative Methods) أو ما يسمى باسم " علوم المعلومات واتخاذ القرارات " (Decision& Information Sciences) أو " التحليل الكمي" (Quantitative Analysis) أو علوم الإدارة (Management Sciences) هو باختصار استخدام مجموعة من العلوم المختلفة والأدوات العلمية الحديثة لتحليل ودراسة المشكلات الإدارية (إدارة أعمال، محاسبة، و إقتصاد ...) والاجتماعية وغيرها وحلول هذه المشاكل بعد تحويلها إلى نماذج كمية.

هذه العلوم هي كالتالي:

1 - علم الإحصاء (Statistics): ويستفيد الأساليب الكمية من الجانب التطبيقي والاستخدامات المختلفة لعلم الإحصاء تاركا الجانب النظري (براهين معادلات وغيرها) إلى المتخصصين في الإحصاء.

ومن المواضيع الإحصائية التي يهتم بها الأساليب الكمية هي كالتالي:

- تنظيم البيانات وعرضها.
- مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.......)
- مقاييس التشتت (المدى، نصف المدى الربيعي، التباين والانحراف المعياري..)
- الارتباط والانحدار.
- الأرقام القياسية.
- السلاسل الزمنية.
- الإحصائيات الحيوية (السكانية).
- الاحتمالات.

وغيرها.

2 - علم بحوث العمليات (Operations Research) أو ما يسمى أحيانا بعلم الإدارة (Management Science): وهو العلم الذي يبحث في حلول المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية المختلفة بهدف التوصل إلى حل استراتيجي أمثل. هذا العلم ظهر في خلال الحرب العالمية الثانية، حيث احتاجه قادة الجيش في كل من بريطانيا وأمريكا إلى التوصل إلى حلول إستراتيجية للمشاكل التي واجهتهم للتغلب على الخصم.

ومن المواضيع المهمة التي يستفيد منها الأساليب الكمية من بحوث العمليات هي كالتالي:

- البرمجة الرياضية (Mathematical Programming).
- تحليل الشبكات (Network Analysis).

- مشكلة النقل (Transportation Problem).
- نماذج الصفوف (Queuing Models).
- نماذج المخزون (Inventory Models).

3 - علم الرياضيات: ويهتم الأساليب الكمية باستخدام بعض المواضيع الرياضية ذات الصلة والمهمة في اتخاذ القرار، مع التركيز على تطبيق الرياضيات على الجوانب الإدارية والاقتصادية وترك الجانب النظري للمتخصصين في قسم الرياضيات.

ومن المواضيع الرياضية التي يتطرق أليها الأساليب الكمية هي كالتالي:

-الأسس(Powers or Exponentiation)
-اللوغاريتمات (Logarithm)
-التباديل
-التوافيق
-نظرية ذات الحدين لأس صحيح موجب
-النهايات (Limits)
-اتصال (استمرار) الدوال
-التفاضل (Differentiation)
-الدوال الرياضية (الدالة الآسية –اللوغاريتمية-- البارامترية- العكسية)
-النهايات العظمى و الصغرى لدالة متغير واحد
-معادلة الخط المستقيم
-المعادلات من الدرجة الأولى والثانية
-المتراجحات (المتباينات)
-المحددات (Determinates)
-المصفوفات (Matrixes)
-المتواليات
-مجموع قوى الأعداد الطبيعية
-التكامل (Integration)

4 - علم الحاسب الآلي:ويهتم الأساليب الكمية بالتعرف على استخدام الحاسب الآلي والاستفادة منه في التوصل إلى حلول إدارية كمية. ومن التخصصات التي يستخدمها الأساليب الكمية في مجال الحاسب الآلي هو نظم القرارات المساند (Decision Support System) وكذلك نظم المعلومات الإدارية (MIS) (Management Information System) لتنظيم البيانات الإدارية بهدف تنسيقها وتصنيفها و تحليلها و تحويلها إلى علاقات ومعلومات مفيدة و حفظها بأسلوب يسهل إسترجاعها عند الحاجة.

وكمثال للبرامج الجاهزة التي يستفيد منها الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات هي كالتالي:
Excel, SAS, SPSS للتطبيقات الإحصائية و QSB+, Cplex, IP, Lindo لتطبيقات بحوث العمليات، كذلك يجب على المتخصص في الأساليب الكمية معرفة التطبيقات العامة مثل MS Office وغيرها.
أيضاً فلن الحاجة والتقدم في هذا العقد الأخير أوجبت على المدير ومتخذي القرارات في المنشاة الخاصة والعامة معرفة التعامل مع الإنترنت (Internet) كاستخدام البريد الإلكتروني (Email) واستخدام الشبكة العنكبوتية (WWW) وطريقة تصميم الصفحات التجارية والخاصة بالشركات ونشرها حية على الإنترنت للدعاية وتسويق منتجاتهم وزيادة عملائهم.

البرمجة الرياضية (Mathematical Programming).

تنقسم البرمجة الرياضية إلى عده أقسام وهي:

1 - البرمجة الخطية(LP) (Linear Programming)

تعتبر البرمجة الخطية من أهم أساليب البرمجة الرياضية Mathematical Programming و أكثرها تطبيقا في الحياة العملية لضمان الاستخدام الأ مثل للموارد في ظل إمكانيات و موارد محدودة. مثل إيجاد المزيج الأمثل من بين المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق اكبر ربح طبقا للمتاح من العمل و المواد الخام. وكذلك مثل نقل منتجات معينة من مناطق إنتاج إلى مراكز إستهلاك بحيث تقوم كل منطقة إنتاجية بتوزيع منتجاتها إلى مراكز الإستهلاك بحيث يشبع كل مركز إستهلاكي طلبه بأقل تكلفة ممكنة. وقد كان لاستخدام طريقة السمبلكس The Simplex Method التي طورها دانتزج G. Dantzig عام 1947 م لحل البرنامج الخطي اثر كبير في زيادة و انتشار التطبيقات العملية لهذا الأسلوب وساعد على ذلك الاستعانة بالحاسبات الآلية المتطورة في حله بحيث يمكن حل برنامج يتكون من مئات المتغيرات بسهولة.

ويلاحظ أن البرنامج الخطي يتكون من دالة هدف واحدة و تكون متغيرات القرار فيه مستمرة و جميع صيغه الرياضية خطية كما أن مؤشراته لا يدخل فيها العنصر العشوائي.

2 - برمجة الأهداف(GP) (Goal Programming)

في هذا النوع من البرمجة يوجد أكثر من هدف ويعبر عن كل هدف بقيد في صورة معادلة يعرف بقيد الهدف Goal Constraint يحتوي على متغيرين انحرافيين Deviation Variables ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها، ويمكن تقدير معامل لكل هدف يسمى معامل أولوية Priority Factor يعكس درجة تفضيل متخذ القرار ويمكن تقدير وزن نسبي لكل هدف، ويتم حل برنامج الأهداف باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى تأخذ في الاعتبار معاملات الأولوية.

3 - البرمجة الصحيحة(IP) Integer Programming

في كثير من المواقف الإدارية تكون قيم متغيرات القرار أعداد صحيحة فمثلا عند اختيار التوليفة الأقل تكلفة من الطائرات المطلوب شرائها طبقا للسعر ووفق الصيانة و الطاقة الاستيعابية. فانه في مثل هذه الحالة ليس من المعقول أن تكون إعداد الطائرات في صورة كسرية. و كذلك عند اختيار التوليفة الأكثر ربحا من بين المشروعات المطلوب إنشاء وها طبقا للموارد المالية المتاحة فليس من المناسب أن تكون أعداد المشروعات في صورة

كسرية. ويمكن التفرقة بين ثلاثة أنواع من البرمجة الصحيحة بحسب نوع متغيرات القرار التي يتضمنها البرنامج.
البرمجة الصحيحة العامة General Integer Programming وهي التي تكون جميع متغيرات القرار فيها في صورة صحيحة. و البرمجة الصحيحة الثنائية Binary Integer Programming وهي التي يمكن أن تكون فيها متغيرات القرار إما صفر أو واحد. والبرمجة الصحيحة المختلطة Mixed Integer Programming و التي تحوي على خليط من المتغيرات ذات الطبيعة الصحيحة و الكسرية. ويلاحظ أن بعض مواقف البرمجة الصحيحة لها هيكل خاص و طرق خاصة بحلها مثل مشكلة النقل Transportation Problem ومشكلة التعيين Assignment Problem و كذلك تستخدم طرق معينة لحل البرامج الصحيحة مثل السمبلكس ثم استخدام طريقة القطع Cutting Method وطريقة التفرع و الحد Branch And Bound Method. ويعيب هذه الطرق أنها تتطلب عددا كبيرا من الخطوات وخاصة مع ازدياد عدد متغيرات القرار.

4 - البرمجة غير الخطية(Non-Linear Programming (NLP

و يعتبر البرنامج غير خطي إذا تم صياغة علاقة أو أكثر من العلاقات في صورة غير خطية و يمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم أو تخفض دالة الهدف باستخدام مضاعفات لاغرانج Lagrange Multipliers و ذلك إذا كانت القيود الهيكلية في صورة معادلات و باستخدام شروط كون توكر Khun Tucker ومضاعفات لاغرانج إذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.

5 - البرمجة التربيعية (Quadratic Programming (QP

وفي مثل هذه البرمجة تكون دالة الهدف في صورة تربيعية و القيود الهيكلية في صورة خطية وهي حالة خاصة من البرمجة غير الخطية مثل نماذج اختيار المحافظ التي تكون فيها دالة الهدف من جزأين: جزء يمثل العائد المتوقع من المحفظة في صورة خطية والجزء الآخر يمثل المخاطرة الذي يعبر عنه بتباين قيم المحفظة في صورة تربيعية. ومن الطرق المستخدمة في الحل في هذه الحالة طريقة السمبلكس لولف Wolfe's Simplex Methods For QP وهي تعتمد على استخدام مضاعفات لاغرانج وشروط كون تكر بالإضافة إلى طريقة السمبلكس.

6 - البرمجة العشوائية أو الاحتمالية: (Stochastic Programming (SP

و في البرمجة العشوائية يتم وصف مؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج باستخدام متغيرات عشوائية –احتمالية-، ومن الطريق المعروفة للحل طريقة البرمجة العشوائية المقيدة Chance Continues Programming حيث تقدر

القيم المتوقعة لدالة الهدف ومعاملات متغيرات القرار من القيود الهيكلية أو الطرف الأيمن لها أو كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

7 - البرمجة الديناميكية (DP) (Dynamic Programming)

وهي عندما يكون المطلوب هو التوصل إلى حلول متعلقة ببعضها البعض وفي فترات متغيرة و متعاقبة ويكون الغرض من دالة الهدف هو أمثلية هذه الأهداف على الفترات المختلفة بأكملها.

البرمجة الخطية (Linear Programming)

طبيعة البرمجة الخطية:

يعتبر اتخاذ القرار الأمثل في إدارة الأعمال الحديثة أهم وظيفة للمدير. هذا القرار دائماً يكون عبارة عن اختيار بديل من عدة بدائل للوصول إلى أهداف معينة. هذه الأهداف قد تكون شيئاً يراد تعظيمه أو شيئاً يراد خفضه أو مزيج من الاثنين. و من الأمثلة على الأشياء التي يراد تعظيمها: تعظيم الأرباح، الدخل، الاستثمار، مستوى خدمة العملاء وغيرها من الأشياء التي في صالح الشركة.ومن الأمثلة على الأشياء التي يراد تخفيضها:تخفيض الخسائر، الأخطار، الموارد المستخدمة وجميع الأشياء التي في غير صالح المنشأة. لذلك فإن البرمجة الرياضية تهدف إلى معرفة قيم بعض المتغيرات التي تؤدي إلى أمثلية الهدف(أو الأهداف) المطلوب تحقيقها.

ومعظم مشاكل البرامج الخطية يمكن أن تصاغ بالصياغة العامة التالية:

$$(Maximization) \quad or \quad (Minimization) \quad z = \sum_{j=1}^{n} cj \quad xj$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \quad \geq\leq \quad b_i \qquad for \qquad i = 1,2,........,m$$

$$X_j \geq 0 \qquad for \qquad j = 1,2,........,n$$

حيث

Z: قيمة دالة الهدف والتي تقيس فعالية أو كفاءة قرار الاختيار.

X_j: المتغيرات التي يراد معرفة قيمتها.

C_j: تكلفة (أو ربح) الوحدة الواحدة من المتغيرات.

a_{ij}: معاملات المتغيرات وتكون عادةً معروفة.

b_i: المتاح من الموارد والتي تكون محدودة.

ويلاحظ أن البرنامج الرياضي يتكون من ثلاث عناصر رئيسية وهي

1- متغيرات القرار و المؤشرات (Decision Variables and Parameters)

و يمكن تعريف المتغيرات على أنها هي الكميات غير المعروفة التي يحددها الحل و تخضع لإرادة متخذ القرار مثل تحديد الكميات المطلوب إنتاجها من منتجات مختلفة ينتجها المصنع أو تحديد الكميات المطلوب نقلها من المصانع إلى الأسواق. بينما الثوابت أو المؤشرات فيمكن تعريفها بأنها هي الكميات المعروفة الثابتة التي بناء عليها يتم عليها تحديد المتغيرات مثل الكميات المتاحة من كل مورد أو الكمية المستخدمة من مورد معين لإنتاج وحدة واحدة من منتج ما أو معدل الربح أو تكلفة منتج معين.......الخ

2 – القيود (Constraints)

وهي تمثل المحددات التي تحصر قيم المتغيرات المجهولة وحصرها في حدود قيم معينة تسمى الحلول الممكنة Feasible Values.

3- دالة الهدف (Object Function)

وهي الدالة التي يتم فيها صياغة الهدف الذي يسعى إليه متخذ القرار حيث يتم التعبير عن فعالية النموذج كدالة في متغيرات القرار وعموما ينتج الحل الأمثل (Optimal Solution) عندما تحقق قيم متغيرات القرار أفضل قيمة لدالة الهدف سواء كانت الهدف تعظيم كتعظيم الأرباح أو تقليل كتقليل الخسائر والتكاليف وذلك طبقا لظروف الموقف التي يعبر عنها بواسطة القيود وتطبيق البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية (Liner Programming)

مثال: تقوم شركة ألاويسط للأثاث بتصنيع الطاولات والكراسي كجزء من إنتاجها. الجدول التالي يوضح أسم المورد (المواد والعمل) الذي نحتاجه لصنع وحدة واحدة من المنتج وعدد الوحدات المطلوبة و الوحدات المتاحة.

	الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
أسم المورد	الطاولات	الكراسي	المتاح
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال	3	4	

و يريد صاحب الشركة أن ينتج العدد اللازم من الكراسي و الطاولات لزيادة الربح إلى اكبر قدر ممكن من الريالات.

خطوات الحل:

1 -صياغة المشكلة رياضياَ (Formulation)

نفترض إن عدد الطاولات المطلوب إنتاجها (t) وعدد الكراسي المطلوب إنتاجها (c)

صياغة دالة الهدف (Objective function):

حيث أن الهدف هو تعظيم الربح إلى أعلى حد ممكن فإن دالة الهدف يجب أن تكون تعظيم (Maximization) و اختصارا تكتب (.Max)[1] وحيث أن الربح هو عبارة عن عدد الوحدات المباعة مضروبا بربح الوحدة الواحدة فإن دالة الهدف في هذه المشكلة تكون كالتالي:

Max. 3t + 4c

و يمكن أن يرمز لدالة الهدف برمز وليكن (z) فتكتب أيضا بصوره أخرى كالآتي:

Max. z = 3t + 4c

[1] لو افترضنا أن الشركة تريد مثلا (تخفيض) التكاليف أو أي عنصر أخر فإن دالة الهدف تكون دالة تخفيض (minimization) أو اختصارا (.Min)

صياغة القيود (Constraints)

■ قيد الخشب:

الأخشاب المستخدمة لصنع الطاولات + الأخشاب المستخدمة لصنع الكراسي محددة ويجب أن لا تزيد عن الكمية المتاحة. لذلك فإن القيد الخاص بالكمية المتاحة من الأخشاب يكون كالتالي:-

$15t + 10c \leq 300$

■ قيد العمل

ساعات العمل المستخدمة لصنع للطاولات + ساعات العمل المستخدمة لصنع الكراسي يجب أن لا تتعدى الساعات المتاحة للشركة. أي أن:-

$2.5t + 5c \leq 110$

■ قيد عدم السلبية(non-negative constraints)

حيث أنه لا يوجد إنتاج كراسي أو طاولات بالسالب فإنه يجب أن يوضع قيد على الحل أن لا يقل عن الصفر. أي أن

$t , c \geq 0$

لصياغة المشكلة بالبرمجة الرياضية (البرمجة الخطية) توضع المتغيرات t , c و دالة الهدف و القيود الخاصة بالمشكلة جميعا. لذلك فإن صياغة المشكلة السابقة كاملة هي كالآتي:

Max. $z = 3t + 4c$

subject to

$15t + 10c \leq 300$

$2.5t + 5c \leq 110$

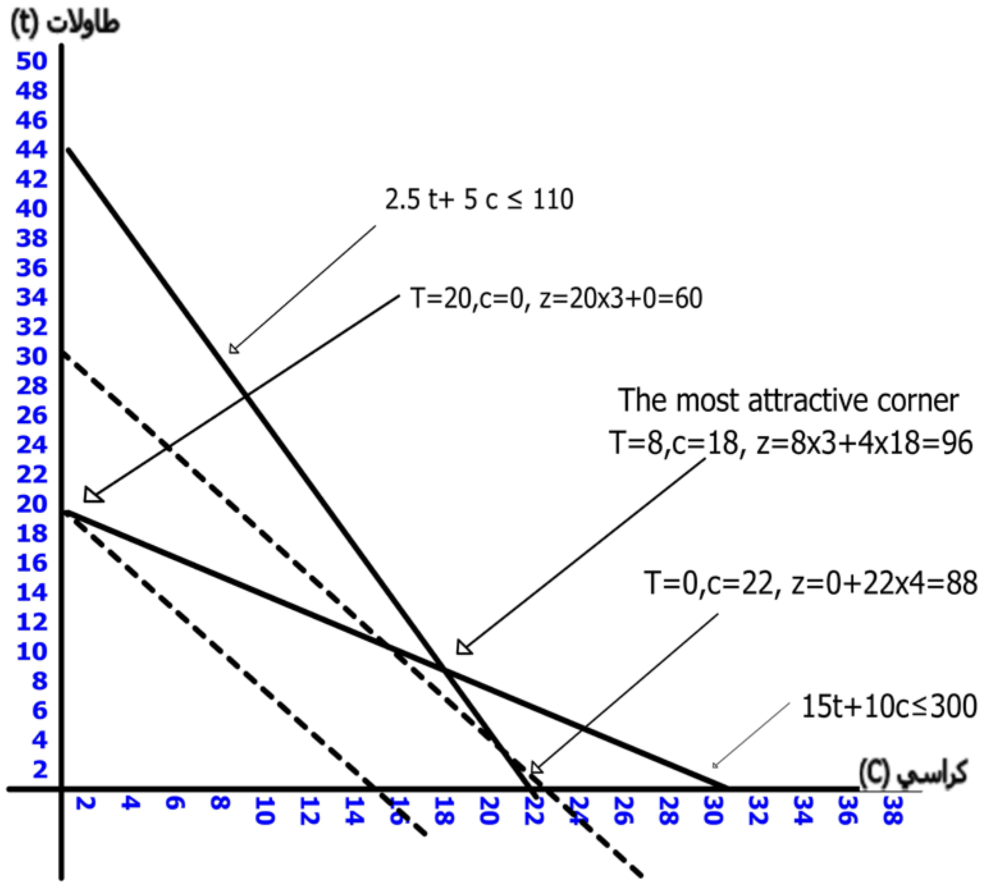
$t , c \geq 0$

2- طريقة الحل البياني (The graphical solution methods)

طريقة الحل البيانية هي أسهل من الطرق الأخرى لحل المشكلة ولكن يعيبها أنها مقتصرة على حل المشاكل التي تتكون من متغيرين فقط (مثلا منتجين) كما هو الحال في هذا المثال.

لرسم مجال الحل الممكن (feasible solution)

نبدأ الرسم بوضع محورين (خطين) متعامدين. أحد هذه المحاور يمثل عدد الطاولات و الآخر يمثل عدد الكراسي. يقسم كل محور إلى وحدات لا تقل عن الحد الأعلى الممكن إنتاجه من كل منتج. و يرسم كل قيد و كذلك دالة الهدف على شكل خط كالآتي:



تحديد أعظم زاوية جذابة (The most attractive corner)

الشركة تستطيع أن تنتج في أي نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة. ولكن هدف صاحب الشركة هو تعظيم الفائدة التي تمثلها المعادلة السابقة (z=3t+4c). لذلك فإنه لابد من وضع المعادلة هذه في الرسم البياني للحل. و ذلك بوضع أي قيمة ابتدائية و افتراضية لدالة الربح (عادة يوضع قيمة موجبة أكبر من الصفر). افترض أننا وضعنا 24= z حيث أنها تقبل القسمة على كلا من 3 و 4 بسهولة وتقع في منطقة الحلول الممكنة. بعد ذلك نضع خط دالة الهدف يقاطع محور الطاولات في 8 و يقاطع محور الكراسي في النقطة 6. ثم نحرك خط دالة الهدف إلى الاتجاه الذي يزيد من الأرباح (عكس نقطة الصفر) و بشكل موازي لخط دالة الهدف المرسوم حتى نصل إلى أخر زاوية في الحلول الممكنة وهذه الزاوية هي زاوية الحل الأمثل وتسمى زاوية أعظم جاذبية(The most attractive corner)

معرفة الحل الأمثل

أعظم زاوية جذابة هي التي تعطينا قيم متغيرات الحل الأمثل. و بالنظر إلى الزاوية المثلى نجد إنها تقاطع محور الكراسي في 18 و تقاطع محور الطاولات في 8. أي إن الحل الأمثل هو إنتاج 8 وحدات من الطاولات و 18 وحده من الكراسي. و أعظم قيمة لدالة الهدف هي 3×8+4×18=96 ريال.

معرفة الحل الأمثل بحل القيدين رياضيا:-

حيث إن الزاوية المثلى تقع في تقاطع القيدين الخاصّين بساعات العمل و كمية الخشب المتاحة فإنه أيضا يمكن معرفة العدد اللازمة من الكراسي و الطاولات بحل المعادلتين الخاصتين بهذه القيود التالية:-

$15t + 10c \leq 300 \quad (1)$

$2.5t + 5c \leq 110 \quad (2)$

بضرب المعادلة الثانية السابقة في –2 و أضافتها للمعادلة الأولى فإن الناتج يكون, 10t= 80 و منه t= 8 و بالتعويض في أي معادلة نجد إن c=18 و أعظم قيمة ممكنة لدالة الهدف هي 96 ريالا.

طريقة السمبلكس للبرمجة الخطية (The Simplex Method in Linear Programming)

طوّر هذه الطريقة العالم (George Dantzing) بعد الحرب العالمية الثانية في عام 1947. و هي طريقة مفيدة في حل مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة(ذات الموارد غير السالبة) حيث يمكن أن يستخدم الكمبيوتر ليقوم بحل المشاكل الكبيرة بسهولة.

لفهم طريقة السمبلكس فإننا سنحاول حل المثال المبسط السابق (شركة الأويسط) بطريقة السمبلكس خطوة بخطوة. حيث افترضنا أن عدد الكراسي المراد إنتاجها هو(c) وعدد الطاولات المراد إنتاجها أيضا هي (t) و كانت صياغة المشكلة هي كالتالي:-

Max. $z = 3t + 4c$

subject to:

$15t + 10c \leq 300$

$2.5t + 5c \leq 110$

$t , c \geq 0$

و بوضعها في جدول:

	عدد الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من		
اسم المورد	الطاولات	الكراسي	المتاح
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال)	3	4	

المتغيرات الفائضة (Slack variables)

أول خطوة لحل المشكلة بطريقة السمبلكس هو حلها جبريا لمعرفة الفوائض في الموارد المتاحة من خشب و ساعات عمل. نسمي العدد المطلوب إنتاجه من الكراسي (c) وعدد الطاولات المراد إنتاجها (t) بالمتغيرات الأساسية ونسمي الكمية الفائضة أو الزائدة من الخشب و من ساعات العمل بالمتغيرات الفائضة (Slack Variables). أي أنه من الممكن أن نضع القيود بصورة جديدة بعد إضافة المتغيرات الفائضة كالتالي:-

كمية الخشب المستخدم + كمية الخشب غير المستخدم (الفائض)= الكمية الخشب الإجمالية.

عدد الساعات المستخدمة + عدد الساعات غير المستخدمة (الفائضة)= عدد الساعات الإجمالية.

أفترض أننا رمزنا لكمية الخشب غير المستخدم (الفائض) بالرمز (s1) و رمزنا لعدد الساعات غيرا لمستخدمة (الفائضة) بالرمز (s2) فإن القيود يمكن الآن كتابتها كالآتي:-

$15\,t + 10c + (s1) = 300$

$2.5\,t + 5c + (s2) = 110$

هنا نلاحظ إن القيود على شكل يساوي لأننا جمعنا المستخدم وغير المستخدم من الموارد المتاحة

و بوضعها بالشكل السابق يخدمنا في غرضين. الأول هو لسهولة حلها جبريا إذا كانت متساوية بدلا من متراجحة. الثاني هو لسهولة تفسيرها اقتصاديا إذا كانت على هذا الشكل.

وضع المشكلة الخطية في شكل فوائض:

يتم وضع المشكلة الخطية السابقة في شكل فوائض بإدخال المتغيرات الفائضة على صياغة المشكلة الخطية السابقة كالآتي:

$\text{Max } z = 3t + 4c + (0)s1 + (0)s2$

subject to:

$15\,t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$

$2.5\,t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$

$t, c, s1, s2 \geq 0$

هذه المتغيرات الفائضة ظهرت في دالة الهدف بمعاملات صفرية لتعكس الحقيقة بأن الموارد غير المستخدمة لا تزيد في الربح (أو حتى الخسارة) ولكن تجلس في مستودع الشركة. و وضعت المتغيرات الفائضة في القيود حتى يتم حسابها لاحقا بشكل منظم. أيضا فإن المتغيرات الفائضة يجب أن تكون موجبة القيمة أو أصفارا ويستحيل وجودها بالسالب لأن و جودها بالسالب معناه أنك استخدمت من الموارد أكثر مما عندك و هذا مستحيل.

حل المشكلة الخطية جبريا

لا يمكن الآن رسم منطقة الحلول الممكنة بيانيا وذلك لأنه يوجد عندنا أربعة متغيرات بدلا من اثنين. و لا يمكن حل المشكلة لأنها صارت ذات أربعة أبعاد و كذلك هي معادلتين في أربعة مجاهيل.

$15\,t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$

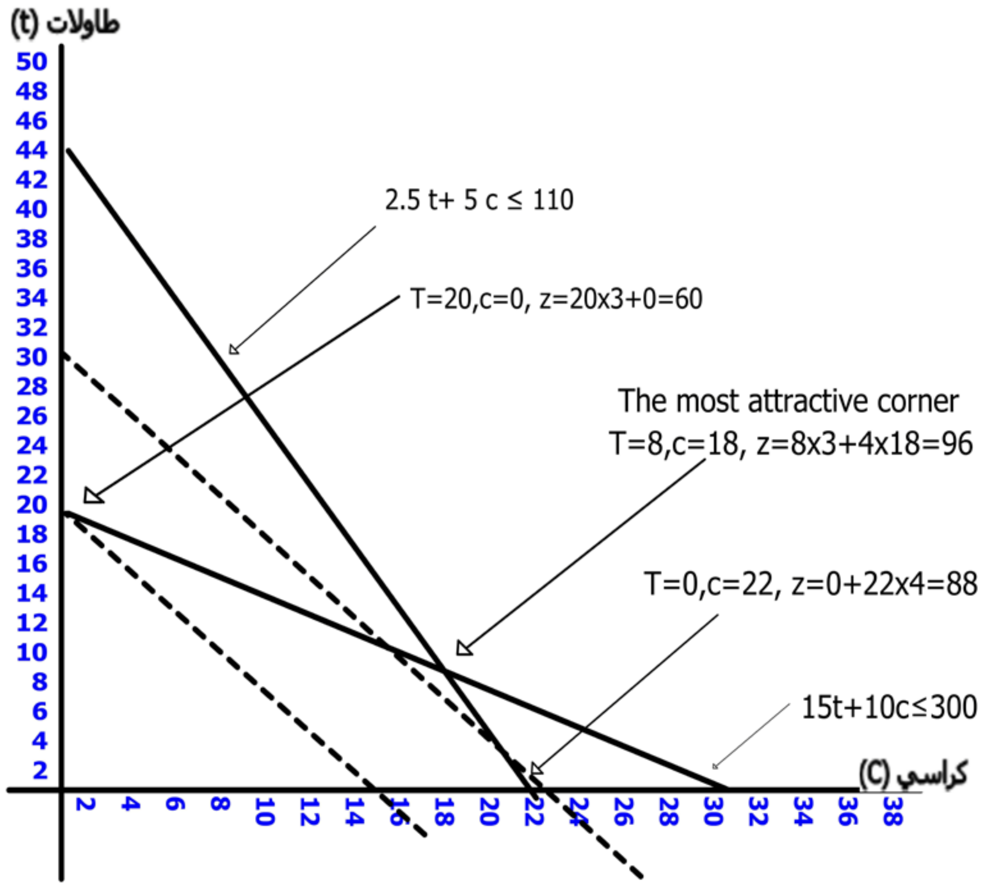
$2.5\,t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$

و الخلاصة هي أنه متى ما زاد عدد المجاهيل (المتغيرات) عن عدد المعادلات فإنه لحل هذه المعادلات يجب افتراض قيم ابتدائية للمتغيرات الزائدة.

خليط الحل(The variable mix):

في هذه المرحلة يجب أن نحدد أي من المتغيرات يوضع له قيمة افتراضية وأي من المتغيرات يجب أن يحل جبريا. سنطلق على المتغيرات التي يجب أن تحل جبريا بخليط الحل و قيم هذه المتغيرات يتم الحصول عليها بعد وضع قيم افتراضية للقيم الأخرى.

الشكل التالي يوضح جميع الحالات الممكنة من الحلول لمتغيرات الحل و المتغيرات الأخرى للشركة. في كل حاله من الحالات الست التالية قسمت المتغيرات إلى مجموعتين كل منهما مكملة للأخرى و كذلك القيم المقابلة لكل حل.



تقسم مناطق الحل إلى عدة أقسام.

1 - الحلول غير الممكنة (Infeasible Solution): وهي الحلول التي تقع خارج نطاق الحلول الممكنة و يمكن معرفتها على الرسم البياني السابق بالنظر إلى المنطقة خارج الشكل (A,B,C,D).

2 - الحلول الممكنة (Feasible Solution): وهي جميع نقاط المنطقة التي تحيط بها الزوايا (A,B,C,D).

3 - الحلول الأساسية الممكنة (Basic Feasible Solution): وهي النقاط التي تقع على زوايا الحل الممكن أي هي النقطة A و B و C و كذلك النقطة D.

4 - الحل الأمثل (Optimal Solution): وهي النقطة أو النقاط التي تقع على زوايا أو أضلاع الحلول الأساسية الممكنة و التي تؤدي إلى تحقيق أعظم قيمة لدالة الهدف.

z	s2	s1	c	t	المتغيرات المثبتة قيمتها (تثبيت عند الصفر) (non-mix variable)	المتغيرات الحرة القيمة (variable mix)	زاوية الحل
0	110	300	0	0	t , c	s1, s2	A
88	0	80	22	0	t , s2	c, s1	B
60	60	0	0	20	c ,s1	t ,s2	C
96	0	0	18	8	s1, s2	t, c	D
Infeasible غير ممكن	0	-360	0	44	c , s2	t , s1	E
Infeasible غير ممكن	40-	0	30	0	t , s1	c , s2	F

لحساب قيم زاوية (B):

وضع t=0 , s2=0 و التعويض في المعادلتين الخاصتين بالقيود كما يلي:-

15 (0) + 10 (22) +(1)s1+(0)s2 = 300

2.5 (0)+ 5 (22)+ (0)s1+(0)s2=110

c=22 , s1=300-220=80, z=4x22=88

فقط الزوايا A، B، C، D، هي زوايا ممكنة للحل بينما الزوايا E، F غير ممكنتين (infeasible) وذلك لأنهما تعطي كميات سالبة في المتغيرات الفائضة و هذا يخالف القيود بأن الكمية المتاحة من الخشب و العمل محدودة. في الخطوات السابقة وضحنا مبدأ السمبلكس و لم نبدأ خطوات حل السمبلكس بعد. و طريقة الحل البياني هي أفضل و أسهل للمشاكل التي تحوي على متغيرين فقط. هنا سيتم حل المشكلة السابقة لأن ذلك سيسهل فهم طريقة السمبلكس.

لماذا لا نختبر جميع الزوايا ذات الحلول الممكنة ثم نأخذ الحل الذي يعطي اكبر ربح؟

المشكلة التي نحن بصددها تحوي قيدين فقط و لذلك استطعنا أن نجد الحل الأمثل باختبار جميع الزوايا ولكن لو زادت القيود قليلا لكان حلها معقد جدا بالطريقة السابقة و لكن بطريقة السمبلكس يمكن حلها بالرغم من زيادة المتغيرات بأكثر من متغيرين.

استخدام طريقة السمبلكس في الحل The Simplex Method

تبدأ طريقة السمبلكس بالزاوية التي تكون كمية الإنتاج فيها صفرا (أي نقطة تقاطع المحورين) حيث تكون متغيرات الحل" تشكيلة الحل" هي المتغيرات الفائضة. بعد ذلك تنتقل إلى زاوية أخرى تعظم دالة الهدف بأعظم قيمة ممكنة في كل مرحلة. و عندما يستحيل زيادة الأرباح فإن ذلك يعني الوصول إلى الزاوية الأعظم جاذبية (المثلى).

خطوات الحل بطريقة السمبلكس The Simplex Method

1 -صياغة المشكلة الخطية Formulate the linear program

بعد إضافة المتغيرات الفائضة واستبدال المتراجحات (علامة الأكبر من و الأصغر من) بمتساويات. تكون صياغة المشكلة هي كما يلي:

z= 3 t + 4 c + (0)s1 + (0)s2

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

2.5 t + 5 c + (0)s1+(1)s2 = 110

وبالنظر إلى صياغة المشكلة السابقة نجد أنها تتكون من ثلاث قيود: القيد الأول خاص بدالة الهدف. القيد الثاني خاص بالمتراجحة الأولى (قيد الخشب). القيد الثالث خاص بالمتراجحة الثانية (قيد العمل). وهذه القيود تحقق شروط الصورة المقننة (The Canonical Form) التي بناء عليها يتم بناء جدول السمبلكس وهي:

- إن كل معادلة تقابل متغيرا أساسيا واحدا معامله يساوي الواحد الصحيح (S1, S2).
- إن كل متغير أساسي يظهر في معادلة واحدة فقط ولا يظهر أيا منهما في دالة الهدف.

2- بناء جدول السمبلكس الابتدائي The initial simplex tableau

ربحية الوحدة الواحدة unit profit		3	4	0	0	عمود	
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s1	15	10	1	0	300	=300÷30=10
0	s2	2.5	5	0	1	110	=110÷5=22*
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0	0 الحل الربح	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3	*4	0	0		

مع العلم بأن تضحية الوحدة الواحدة =ربحية الوحدة الواحدة × عمود معامل التغيير

لذلك فإن وحدة التضحية لكل متغير غير أساسي يكون كالتالي:

t	c	s1	s2	
0× 15	0×10	0× 1	0×0	
0×2.5	0×5	0×0	0×1	
تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0

و حيث أن ربحية الوحدة الواحدة للمتغيرات الأساسية الآن تساوي الصفر فإن جميع نتائج وحدات التضحية أيضا تساوي أصفارا. وهذا يدل على أننا سنتنازل عن لاشيء إذا أدخلنا أي متغير جديد في الحل.

كذلك فإن كسب الوحدة الواحدة = ربحية الوحدة الواحدة - تضحية الوحدة الواحدة

unit profitربحية الوحدة الواحدة	3	4	0	0
(-) تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0
كسب الوحدة الواحدة(=) Improvement row	3	4	0	0

إيجاد المتغير الداخل و الخارج

بالنظر إلى كسب الوحدة الواحدة من الجدول السابق نجد أن اكبر قيمة مكتسبة ستكون بدخول المتغير c و هي 4. لذلك فإن العمود الداخل فهو التالي:

c
*4

ولتحديد المتغير الخارج (الصف) فإنه يتم قسمة قيم عمود الحل على معاملات العمود الداخل.

15	10	1	0	300	=300÷30=10
2.5	5	0	1	110	=110÷5=22*

فيكون المتغير الخارج هو الصف الذي يحوي أقل معاملات موجبة (22)[1] كما يلي:

s2	2.5	5	0	1	110	=110÷5=22*

بناء جدول من جديد:

لبناء جدول جديد فإن معادلات المتغيرات الأساسية ستكون كالتالي:

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

2.5 t + 5 c + (0)s1+(1)s2 = 110 (المتغير الخارج)

بما أن المتغير الداخل هو c و الخارج هوs2 فإننا سنغير المعادلة الثانية بحيث أن معامل c في المعادلة العمل (المتغير الخارج) يجب أن يكون واحدا صحيحا. أي بقسمة المعادلة الثانية على 5 كالتالي:

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22(المتغير الجديد)

1- إذا كانت جميع معاملات التغيير أصفارا أو سالبة (أي لا يوجد معاملات موجبة على الإطلاق) فان قيود المشكلة غير مقيدة.

لذلك فإنه إذا وضعت قيمة t وكذلك s2 تساوي أصفارا فإن c ستساوي 22 و تكون المعادلتين السابقتين كما يلي:-

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22 (الصف الثاني الجديد)

وحيث أن معامل c يساوي الواحد الصحيح في المتغير الجديد(الثاني) و 10 في المتغير(الصف) الأول، فإنه بضرب المعادلة (الصف) الثاني في - 10 و أضافتها إلى الصف الأول، فإن نتيجة الحد الثاني (c) ستكون بعد جمع المعادلتين تساوي صفرا كما يلي:-

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

-5 t - 10 c - (0)s1-(2)s2 = -220

----

10 t + 0 c +(1)s1-(2)s2 = 80

هذا الصف الجديد هو صف s1 (الكمية الفائضة من الخشب) و هذا يؤكد هذه الحقيقة عندما s2 و t (وهما المتغيرات غير الداخلة في الحل) (nonmix variables) يساويان صفرا. حيث يكون

0 t + 0 c +(1)s1-(0)s2 = 80

s1=80

أو بعبارة أخرى في القيد:

15 t + 10 c +(1)s1+(0)s2 = 300

إذا كانت قيمة c=22 وكانت قيمة t=0 فإن 80 ياردة من الخشب ستظل غير مستخدمة. الصفين الجديدين هما كما يلي:-

10 t + 0 c +(1)s1-(2)s2 = 80

0.5 t + 1 c + (0)s1+(1/5)s2 = 22

بناء جدول السمبلكس الثاني:

	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل Solution values	exchange ratio معدل التغيير
		Exchange coefficient					
0	s1	10	0	1	-2	80	8*
4	c	1/2	1	0	1/5	22	44
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	2	4	0	4/5	88 الربح الحالي	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	1*	0	0	-4/5		

بناء جدول السمبلكس الثالث:

	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل Solution values	exchange ratio معدل التغيير
		Exchange coefficient					
3	t	1	0	1/10	-0.2	8	
4	c	0	1	-1/20	0.3	18	
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	3	4	0.1	0.6	96 الربح الحالي	
Improve ment row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	-0.1	-0.6	بما انه لا يوجد في جميع عناصر كسب الوحدة الواحدة أي عددا موجبا فإن ليس ممكن زيادة الأرباح عن هذا المقدار	

مع العلم إننا حصلنا على عناصر الصف الأول بقسمة جميع العناصر على 10 كما حصلنا على عنا صر الصف الثاني كما يلي:

العنصر الجديد= العنصر القديم - (العنصر المجاور في العمود الدليل(ثابت)× العنصر الجديد في الصف الخارج (الأول))

فمثلا

0=1/2-1/2(1)
1=1-1/2(0)
-1/2= 0- ½(1/10)
0.45= 1/5-1/2(-2)
18= 22-1/2(8)

خطوات حساب جدول السمبلكس(Simplex Tableau)

تعتمد طريقة حساب جدول السمبلكس في حالة التعظيم على الخطوات التالية:

1 - الابتداء من نقطة الصفر (0,0) كحل أساسي ممكن وهي التي تقابل الزاوية A في الرسم البياني السابق.

2 - فحص معاملات المتغيرات في دالة الهدف وتحديد مدى إمكانية وجود متغير غير أساسي و يؤدي زيادته إلى أعظم قيمة في دالة الهدف؟ إذا لم يوجد فنتوقف عند هذا الحد ونكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل. أما إذا و جد هذا المتغير غير الأساسي فيكون هو المتغير الداخل (Entering Variable) و ننتقل إلى الخطوة التالية.

3 - نزيد من قيمة هذا المتغير الداخل حتى تصل قيم احد المتغيرات الأساسية إلى الصفر وبذلك يكون هذا المتغير الأساسي هو المتغير الخارج (Departing Variable). ثم يضمّ المتغير الداخل إلى قائمة المتغيرات الأساسية و المتغير الخارج إلى المتغيرات غير الأساسية.

4 - حساب قيم المتغيرات و دالة الهدف ثم الانتقال إلى الخطوة 2.

مثال أخر على مشكلة التخفيض (Minimization):

شركة الطالعية تستثمر لصالح الشركات والعملاء حسب رغباتهم. أحد العملاء يرغب في استثمار 1,200,000 ريال على الأكثر في أسهم وعملات. كل وحدة استثمارية في الأسهم تكلف 50 ريالا و تعطى عائدا بنسبة 10%. أما الوحدة الاستثمارية في العملات فإنها تكلف 100 ريال و تعطي عائدا بنسبة 4%. هذا العميل يحاول أن يخفض المخاطرة على شرط أن يربح سنويا على الأقل 60,000 ريال من هذا الاستثمار. وحسب مقاييس الشركة فإن الاستثمار في الأسهم المالية يعطي مؤشر خسارة 8 لكل وحدة استثمارية بينما الاستثمار في العملة يعطي مؤشر خسارة 3 لكل وحدة استثمارية. مع العلم أنه كلما زاد رقم المؤشر كلما زادت المخاطرة.

هذا العميل أيضا اشترط أن يستثمر على الأقل 300,000 ريال في العملة. السؤال هو كم وحدة استثمارية من كل نوع يجب أن تشتريها الشركة لصالح العميل إذا كان هدف العميل هو تخفيض الأخطار من هذه العملية الاستثمارية.

1 -صياغة المشكلة الخطية:-

نفترض أن عدد الوحدات الاستثمارية في الأسهم = x1

نفترض أن عدد الوحدات الاستثمارية في العملة = x2

- دالة الهدف:

وحيث أن مؤشر الخطر للأسهم هو 8 و للعملة هو 3 فإن دالة الهدف المراد تخفيضها هي كما يلي:-

$$\min \quad 8x_1 + 3x_2$$

- قيد إجمالي الأموال التي يمكن الاستثمار فيها:

القيد الأول يختص بكمية الأموال المطلوب الاستثمار فيها و حيث أن وحدة الاستثمار في الأسهم تكلف 50 ريالا و 100 ريال للاستثمار في العملة فإن هذا القيد يمكن أن يكتب كما يلي:-

$$50x_1 + 100x_2 \le 1200\,000$$

- قيد العائد من الاستثمار

القيد الثاني هو أن يكون العائد من هذا الاستثمار على الأقل 60,000 ريال. وبما أن عائد الأسهم هو 10% من قيمة الأسهم و 4% من قيمة العملة فإن العائد للوحدة الاستثمارية للأسهم = 50 × 10 %=5 ريالات و العائد للوحدة الاستثمارية في العملة هي 100 × 4 % =4 ريالات.

لذلك فإن القيد يكتب كما يلي:-

$5x1+ 4x2 \geq 60\ 000$

- قيد الحد الأدنى للاستثمار في العملات

القيد الأخير يختص بالكمية التي يريد أن يستثمرها في العملات حيث أن الكمية المستثمرة في العملات يجب أن لا تقل عن 300,000 ريال أي:-

$100x2 \geq 300\ 000$

أو بمعنى آخر

$1x2 \geq 3\ 000$

لذلك تكون صياغة البرنامج لمشكلة شركة الطالعية كما يلي:-

$$\begin{aligned}
&\min \quad 8x1 + 3x2\\
&\text{subject to:}\\
&50x1 + 100x2 \leq 1200\ 000\\
&5x1 + 4x2 \geq 60\ 000\\
&x2 \geq 3\ 000\\
&x1 , x2 \geq 0
\end{aligned}$$

لحل المشكلة باستخدام السمبكلس فإنه يتعين علينا تهيئة المشكلة و تحويلها إلى جدول السمبكلس و ذلك عن طريق تحويل الأقل من أو يساوي ($\leq$) من المتراجحات إلى متساويات بإضافة المتغيرات الفائضة (slack variables) و تحويل الأكبر من أو يساوي ($\geq$) من المتراجحات إلى متساويات بإضافة المتغيرات الزائدة(surplus variables) و المتغيرات الصناعية (artificial variables)

إذا كان عندنا قيد على شكل $x2 \geq 3\ 000$ فيجب أن نضيف متغير زائد في الجهة اليمنى بحيث يكون $x2 = 3\ 000 + s1$ ونحوله إلى متغير فائض بتحويله إلى الجهة الأخرى بعد تغيير إشارته إي $x2 - s1 = 3\ 000$ و في مثل تلك القيود يجب أيضا إضافة متغير صناعي(وهمي) (artificial variable) إلى الطرف الأيسر من المعادلة و نرمز له بالرمز مثلا (a) و يعطي قيمة كبيرة جدا سالبة في حالة التعظيم (max.) و قيمة كبيرة جدا موجبة في حالة التصغير (min.) و ذلك حتى يخرج من الحل في الخطوات الأولى.

ولذلك يكون القيد على الشكل التالي:-

$x2 - s1 +a1= 3\ 000$

وبتحويل المتراجحات إلى معادلات و إضافة المتغيرات الفائضة و الصناعية. تكون الصياغة كما يلي:

min z= 8x1 + 3x2 + 0s1 +0s2+ 0s3 + Ma2+ Ma3

s.t.

5x1 + 10x2 + 1s1 + 0s2+ 0s3 +0a2+ 0a3=120 000

5x1 + 4x2 + 0s1 - 1s2+ 0s3 + 1a2+ 0a3 = 60 000

0x1 + 1x2 + 0s1 + 0s2- 1s3 + 0a2+ 1a3 = 3000

2-وضعها في جدول السمبلكس:

تكلفة الوحدة الواحدة unit cost	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	8	3	0	0	0	M	M	عمود الحل	exchange ratio معدل التغيير
		x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3		
0	s1	5	10	1	0	0	0	0	120000	120000/10 =12000
M	a2	5	4	0	1-	0	1	0	60000	60000/4 =15000
M	a3	0	1	0	0	1-	0	1	3000	3000/1 =3000*
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	5M	5M	0	-M	-M	M	M	الربح الحالي 63000M	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	8-5M	3-5M*	0	M	M	0	0		

المتغير الخارج وهو اقل قيمة موجبة

المتغير الداخل و هو أعلى قيمة مطلقة سالبة

لحساب المعاملات الجديدة للصف الأول الجديد فهي كما يلي:
العنصر الجديد= العنصر القديم - (العنصر المجاور في العمود الدليل × الجديد المقابل في الصف الخارج)

5 -10(0)=5
10-10(1)=0
1-10(0)=1
0-10(0)=0, 0-10(-1)=10,0-10(0)=0, 0-10(1)=-10, 120 000-10(3000)=90 000

وهكذا بالنسبة للصفوف الأخرى:

تكلفة الوحدة		8	3	0	0	0	M	M	عمود	
الواحدة unit cost	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3	الحل	Exchange ratio معدل التغيير
0	s1	5	0	1	0	10	0	-10	90000	18000
M	a2	5	0	0	-1	4	1	4-	48000	9600
3	x2	0	1	0	0	-1	0	1	3000	3000/0 =∞
Unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	5M	3	0	-M	4M-3	M	-4M+3	الأخطار الحالية 48000M +9000	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	8-5M	0	0	M	-4M+3	0	+5M-3		

المتغير الخارج وهو اقل قيمة موجبة

المتغير الداخل هو أعلى قيمة مطلقة سالبة

ثم ننتقل إلى الجدول التالي:

	تكلفة الوحدة الواحدة unit cost	8	3	0	0	0	M	M	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s1	0	0	1	1	6	1-	6-	42000	7000
8	x1	1	0	0	-1/5	4/5	1/5	-4/5	9600	1200
3	x2	0	1	0	0	-1	0	1	3000	-3000
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	8	3	0	-8/5	3.4	8/5	-3.4	الأخطار الحالية 85800	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	0	8/5	-3.4	M-8/5	M+3.4		

المتغير الداخل و هو أعلى قيمة مطلقة سالبة

مع العلم بان المعاملات الجديدة حسبت كالتالي:

0-4/5(1/6)=-0.1333 , -1/5-4/5(1/6)=-0.333 , 4/5-4/5(1)=0, 1/5-4/5(-1/6)=0.33, -4/5-4/5(-1)=0

0-(-1)(1/6)=0.16667, 0-(-1)(-1/6)=-0.1667, 1-(-1)(-1)=0, 3000-(-1)(7000)=10000

بعد حساب المعاملات الجديدة ينتج الجدول التالي:

0	عمود	M	M	0	0	0	3	8		تكلفة الوحدة الواحدة unit cost
exchange ratio معدل التغيير	الحل	a3	a2	s3	s2	s1	x2	x1	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	
	7000	-1	-1/6	1	1/6	1/6	0	0	s3	0
	4000	0	.33	0	-.33	-.133	0	1	x1	8
	10000	0	-.167	0	.167	-.167	1	0	x2	3
	الأخطار الحالية 62000	0	2.139	0	-2.165	-0.56	3	8	تضحية الوحدة الواحدة	unit sacrifice row
		M	M-2.139	0	2.1650	0.56	0	0	كسب الوحدة الواحدة	Improvement row

لا يوجد قيم سالبة ممكن إن تقلل الأخطار المراد تقليلها لذلك نتوقف عند هذا الحل وهو الحل الأمثل

تحليل الحساسية في البرنامج الخطي (Sensitivity Analysis in Linear Programming)

الحل الأمثل باستخدام السمبلكس هو حل للمشكلة الخطية بمعالمها الحالية المعطاة أي ربح الوحدة الواحدة و تكلفة الوحدة الواحدة و المعاملات الأخرى مثل قيم الجهة اليمنى للقيود وغيرها. ولكن أي اختلاف أو تغيير في تلك المعاملات سيؤدي بالضرورة إلى تغير في الحل الأمثل. إذا فالمهم إيجاد وسيلة لمعرفة اثر التغيرات في المعطيات و المعاملات على الحل الأمثل ومن الممكن لفكرة البرمجة الخطية أن تطور لتقدير وحساب اثر هذه التغيرات. هذا التطوير و الإضافة لطريقة السمبلكس السابقة يعرف بتحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) و لذلك فمهمة تحليل الحساسية هو معرفة تأثير هذه التغيرات البسيطة في المعاملات (Coefficients) أو في الكميات المتاحة. ودرجة حساسية الحل الأمثل الناتجة للتغير في هذه المعاملات قد يتراوح بين عدم التغيير في الناتج النهائي للحل الأمثل إلى تغيرات واضحة وقوية.

هذا الأمر مرتبط بأمر آخر إلا وهو شكل النموذج الخطي نفسه. مثلا نحن قد نهتم بمعرفة التغير في كمية الموارد المتاحة أو كيف سيؤثر اختيار منتج جديد ضمن الحلول المثلى على الحل الأمثل.

1 -تحليل الحساسية لمعاملات الجهة اليمنى (Sensitivity Analysis for Right-hand-side values)

لأجل التوضيح اعتبر أننا استخدمنا مشكلة شركة الأويسط السابقة. افترض أنه حدث نقص في عدد عمال الشركة مما أدى إلى تقليل الساعات المتاحة. لذلك فالسؤال عند هذه الحالة هو ماذا يمكن أن يحدث للحل الأمثل؟ طبعا إذا كان التغير بسيطا فإن الحل الأمثل قد لا يتغير و بذلك فإن الزاوية المثلى ستظل كما هي ولكن التغير في كمية هذه الموارد المتاحة قد يغير الزاوية المثلى كليا أحيانا. لذلك فإننا يجب أن نسأل أيضا السؤال التالي: إلى أي مدى من الممكن أن نغير في كميات الموارد المتاحة " الطرف الأيمن" بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلى أي تغير في الحلول المثلى الحالية " Variables mix"

لمعرفة مثلا الكمية الممكنة إضافتها أو إنقاصها من الخشب فإننا يجب أن ننظر إلى الكمية غير المستخدمة (Slack variable) من الخشب "s1".

إذا زيد ت "s1" كمية الخشب غير المستخدم" فإن كمية الخشب المستخدمة لعمل الطاولات و الكراسي ستقل وبالتالي تتغير الكمية المنتجة من الطاولات و الكراسي. إلى أي حد أو مدى ممكن إنقاص الخشب بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلي تغيرات في الحلول المثلى الحالية (Variables)

mix ؟ أي نفس السؤال لو قلنا إلى أي كمية يمكن زيادة الفائض من الخشب بدون أن تؤدي هذه الزيادات إلي تغيرات في الحلول المثلى الحالية (Variables mix)؟
باعتبار s1 كمتغير جديد داخل في جدول السمبلكس فإن ذلك سيخبرنا عن الإجابة. بفحص معامل التغير (Exchange Coefficient) الخاص بالخشب المستخدم و غير المستخدم(الرجاء النظر إلي الجدول النهائي للسمبلكس) فإننا نلاحظ أنه يجب أن نتخلى عن (1/10) أي (0.10) من الطاولة لكل زيادة في s1 بوحدة واحدة. و هذا يعطي للعمال وقت إضافي لعمل (1\-20) أي (-0.05) من عمل كرسي وذلك لان الرقم الذي في عمود s1 و c هو (0.05-).
كلما نزيد s1 " أي لا نستخدم خشب لعمل الطاولات" فإننا في النهاية سنتخلص من الطاولات. وبما أن الطاولات المثلى التي ستنتج هي 8 طاولات فإننا ممكن تحويل هذه ال 8 طاولات إلى 80 لوحا من الخشب (أي 8 ÷ (0.10) = 8 × 10 = 80) غير مستخدما. لو خفضت الكمية غير المستخدمة إلى اقل من 80 لوحا فإن معنى ذلك أنه سيظل عندنا كمية من الخشب غير المستخدم لعمل طاولات أو بعض الطاولة و هذا سيجعلنا ننتج على الأقل جزاء من الطاولة أو أكثر وذلك حسب الكمية غير المستخدمة من الألواح.
ولكن إذا أخذنا 80 لوحا على الأقل فإننا لن نستطيع إنتاج هذه الطاولات و الزيادة عن 80 لوح سيؤثر أيضا على إنتاج الكراسي.
وفي المقابل ماذا سيحصل إذا تمت زيادة الكمية المتاحة من الخشب ؟ إلى أي درجة ممكن أن نزيد من الخشب وستظل الشركة تنتج الطاولات و الكراسي جميعا ؟ زيادة الخشب هي مناظرة لإعارة خشب جديد أو الحصول على فائض من الخشب و بالنظر على أن زيادة الخشب " أو الحصول على فائض من الخشب" هي عبارة عن فائض سالب. أي بإمكاننا تخفيض " غير المستخدم من الخشب" إلى كمية سالبة " بالرغم أنه يفترض أنه لا يوجد كميات سالبة في السمبلكس و لكن للتوضيح فقط" وهو نفس المعنى إذا تمت زيادة الكمية.
تفسير معامل التغير "Exchange coefficient " يكون بالعكس إذا كان المتغير الداخل منقوص معامل التغير للفائض من الخشب "s1" يخبرنا أن الشركة بالإمكان الحصول على (0.10) من الطاولة و كذلك (0.05-) من الكرسي " أي إعطاء (0.05-) لكرسي.
لذلك فكل الـ 18 كرسي بالإمكان أن يستبدلوا إذا وجد عجز أو نقص في الخشب غير المستخدم بما يعادل 18 × 20 = 360 قدم من الألواح. وبكلمات أخرى فإن الكمية المتاحة من الألواح ممكن أن تزيد إلى حد 360 قدم من الألواح زيادة على 300 الأصلية و جعل الكمية الجديدة = 360+300 = 660.

والى هذا الحد ستظل الشركة تنتج طاولات وكراسي وهي تعمل أرباح وأي زيادة في الخشب عن هذا الحد ستؤدي إلى عدم خروج الكراسي من الحل الأمثل وبالتالي عدم وقف إنتاج الكراسي.

لتحليل حساسية الكمية المتاحة من الأخشاب نقول أن الشركة ستظل تنتج طاولات وكراسي وستكون مربحة ما دامت بين الحدين التاليين:
الحد الأدنى: 300 - 80 =220
الحد الأعلى = 300 + 360 = 660
أي بين (220 - 660).
وهذا ما كان يرى من الجداول التالية:

تأثير زيادة أو تخفيض الخشب عن الكمية المتاحة الأصلية

يمكن التوصل إلى الحل السابق بسهولة بالنظر إلى جدول السمبلكس النهائي:

مجال تغير كمية الخشب المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	الحل Solution values	s1 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
8÷(10\1) =80	8	1/10	t
18÷(-1\20) = -360	18	-1/20	c
الحد الأدنى = 300 - 80 = 220 لوح من الخشب الحد الأعلى = 300 + |360| = 660 لوح من الخشب			

تأثير زيادة أو تخفيض العمل عن الكمية المتاحة الأصلية

مجال تغير كمية العمل المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	الحل Solution values	s2 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
8÷(-0.2)= -40	8	-0.2	t
18÷(.3)= 60	18	0.3	c
الحد الأعلى = 110 + |40| = 150 ساعة عمل الحد الأدنى = 110 - 60 = 50 ساعة عمل			

المدى والذي حصلنا عليه بالطريقة السابقة ينطبق طالما الكميات المتاحة من الموارد الأخرى في القيود الأخرى لم تتغير
إذا وجد متغير فائض "Slack variable" مع المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس الأخير فإن الحد الأدنى و الأعلى للتغير في الكميات المتاحة من الموارد كما يلي:
الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية - قيمة الحل للمتغير الفائض
الحد الأعلى = ∞
والمنطق وراء الحد الأدنى ذلك هو أنه لم تستخدم الموارد المتاحة في الحل الأمثل لذلك بإمكاننا تخفيض هذه الموارد إلى اقل من هذا الحد الفائض ولن يتغير المتغيرات الأساسية الحل الأمثل. ولكن أي زيادة عن ذلك المقدار ستغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.
وحيث أن الكمية المتاحة من الموارد لم تستخدم فإن أي زيادة فيها لن تؤثر على المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ولكن ستؤثر على الفائض فقط.
الجهة اليمنى (الكميات المتاحة) للقيود من النوع " ≥ "
في الفقرة السابقة قد ذكرنا الحالة التي تكون عندها القيود من النوع " ≤ ". وهنا نناقش حالة أخرى إلا وهي عندما تكون القيود من النوع " ≥ ".
نفس الطريقة تطبق في مثل هذه الحالة ولكن المتغيرات الزائدة تستخدم لمعرفة الحدود الدنيا والعليا للقيود التي على شكل اكبر من أو يساوي.
معدل التغير يجب أن يفسر بالعكس لان المتغيرات الزائدة عادة تطرح ولا تجمع كالمتغير الفائض.
عندما يكون المتغير الزائد غير موجود ضمن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل:
الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية -أقل قيمة مطلقة للمعدلات السالبة

أو =∞- إذا " لم يوجد معدل سالب"
الحد الأعلى = الكمية المتاحة الأصلية + اقل قيمة للمعدلات الموجبة
أو = ∞ " إذا لم يوجد معدل موجب"
عندما يكون المتغير ا لزائد موجود ضمن المتغيرات الأساسية:
الحد الأدنى= - ∞
الحد الأعلى = الكمية المتاحة + قيمة الحل للمتغير الزائد
القيود من النوعية " ="
في هذه الحالة فإن النموذج يجب أن يحتوي على متغير صناعي. المتغير الصناعي هنا هو مناظر للمتغير الفائض في تحليل الحساسية. كل شي هو كما هو في حالة المتغير الفائض ماعدا حالة أن يكون فيها المتغير الصناعي ضمن المتغيرات الأساسية والتي يجب أن تعتبر لان المتغيرات الصناعية للقيود التي على شكل يساوي هي التي فقط تستخدم في تحليل الحساسية. وجميع أعمدة المتغيرات الصناعية الأخرى للقيود على الأشكال الأخرى يفضل أن تبعد من الحل من البداية.
تحليل الحساسية للقيود اليمنى" الكميات المتاحة" من الممكن أن تطبق في عامة أشكال البرمجة الخطية، بغض النظر عن ما إذا كانت المشكلة تعظيم أو تصغير.

الحل عند وجود تغير في الجهة اليمنى لأحد القيود

عند التغير في الجهة اليمنى لأحد القيود فإنه من الممكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس منذ البداية. ولكن بعمل قليل بالإمكان تعديل الحل الأصلي الأمثل طالما التغيير في الجهة اليمنى هذه يقع بين الحدين الذين تم التوصل أليهما سابقا.
في هذه الحالة فإن القيمة الجديدة للمتغير الأساسي = القيمة الأصلية + (معامل التغير × صافي التغير في الجهة اليمنى)
صافي التغير في الجهة اليمنى = القيمة الجديدة للطرف الأيمن - القيمة الأصلية للطرف الأيمن
مثال ذلك افترض أننا في مثال شركة الطالعية سنزيد المتاح من الخشب إلى 400 لوح من الخشب بدلا من 300 فما هي الكميات و القيم المثلى الجديدة؟
أولا: المتغيرات الأساسية:
الطاولات = 8 + (1\10× (300-400) = 8 + (10) = 18
الكراسي = 18 + (- 20\1 × (300-400) = 18 - 5 = 13
ومما يجدر ذكره هو أننا استخدمنا هنا معامل التغير لعمود s1

ثانيا: الربح الجديد
=3 ×18 + 4 ×13 = 754
افترض أن ساعات العمل قد انخفض من 110 إلى 90. ما هو تأثيرها ؟
الحل الجديد سيتم باستخدام معاملات المتغير الفائض لعنصر العمل s2.
المتغيرات الأساسية
الطاولات = 8 + (-1\2)(90-110) = 8 + 10 = 18
الكراسي = 18 + (.45) (90-110) = 18 + 9 =9
الربح الجديد= 18 × 3 + 9 × 4 = 252
وفي حالة أن الجهة اليمنى لأي من هذه القيود يوجد له متغير ضمن المتغيرات الأساسية فإن اي زيادة أو نقصان في ذلك المورد سيجعل المتغير الفائض يزيد أو ينقص بمقدار صافي التغير في الجهة اليمنى (القيمة الجديدة - القيمة القديمة). وجميع قيمة المتغيرات الأخرى و الأرباح ستظل ثابتة كما كانت. ولكن عندما يحدث تغير في أي جهة يمنى من هذه القيود خارج المدى (خارج نطاق الحد الأدنى و الأعلى) فإن المشكلة ستكون أصعب. وقد يكون حلها من البداية أسهل من حلها من جدول السمبلكس النهائي للمشكلة الأصلية.

طريقة السمبلكس المختصرة
مشكلة التعظيم:

الصياغة العامة:

$\max c1\ x_1 + c_2\ x_2$
s.t.
$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 <= b_1$
$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 <= b_2$
$x_1,\ x_2 >= 0$

بعد إضافة الفوائض (slacks) يمكن وضعها في جدول كالتالي:

	constant	x_1	x_2
z	0	c_1	c_2
s1	b_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$
s2	b_2	$-a_{21}$	$-a_{22}$

مثال:

max 3t + 4c
s.t.
15t + 10c <= 300
2.5t + 5c <= 110
t , c >= o

$15t + 10c + s_1 = 300$
$2.5t + 5c + s_2 = 110$
$z = 0 + 3t + 4c$
$s_1 = 300 – 15t – 10c$
$s_2 = 110 – 2.5t – 5c$

	constant	t	c
z	0	3	4
s1	300	- 15	- 10
s2	110	- 2.5	- 5

1- اختيار عمود المحور " select the pivot column "
نختار المتغير الذي يحمل أكبر معامل موجب من صف دالة الهدف وهو " 4 "
لذلك فإن عمود الدليل هو عمود " c2 " وهذا يسمى " المتغير الداخل ".
2- اختيار المتغير الخارج " صف المحور " " select pivot row "
وذلك بقسمة معاملات الطرف الأيمن من المعادلات الأصلية (الثوابت) أي
"110,300" على المعاملات السالبة فقط في العمود الدليل أي " -5,-10"
وتغير الإشارة " القيمة المطلقة " أي

-1*300/-10 =30
-1*110/-5 =22

وأخذ الأقل وهو 22 ليكون "المتغير الخارج هو الصف " s_2" وتقاطع المتغير الخارج (الصف) والداخل (العمود) يكون هو "عنصر المحور" " pivot element" وتضع عليه دائرة لتمييزه عن العناصر الأخرى.

3 -إيجاد الجدول التالي: يتم رسم الجدول الجديد ووضع المتغير c في الصف الثاني و s_2 في العمود الثاني.

4- أيجاد مقلوب عنصر المحور (وهو المحور الذي يقع في تقاطع المتغير الداخل والخارج) أي 5– ومقلوبه (1/5–).

5- تقسيم جميع عناصر الصف الخارج على عنصر المحور وتغيير إشاراتهم.
أي

(-1) * (110/-5) = 22
(-1) * (-2.5/-5) = -1/2

ويكون الصف الجديد

22 , -1/2 , -1/5

6- إيجاد العناصر الجديدة لعمود المحور (الدليل) وذلك بقسمة هذه العناصر على عنصر المحور مع إبقاء إشارتهم أي

4/-5 = -4/5

-10/-5 = +2

ويكون الجدول بالشكل التالي:-

	- 4/5
	2
22	-1/2 -1/5

7- بقية العناصر يتم حسابها بالطريقة الآتية:

العنصر الجديد = العنصر القديم — (حاصل ضرب العنصرين في الزوايا / عنصر المحور)

أي مثلا، قيمة دالة الهدف تكون

0 – (4*110)/-5 = 88

3 – (- 2.5 * 4) / -5 = 1

300 – (-10 * 110) / -5 = 300 – 220 = 80

-15 – (-10 * -2.5) / -5= -15 +5= –10

ويكون الجدول الجديد كالتالي:

	constant	t	s2
z	88	1	-4/5
s1	80	-10	2
c	22	-1/2	-1/5

وبإعادة نفس الخطوات السابقة يكون المتغير الداخل t1 لأنه يحتوي أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف " 1 " ، وبقسمة الثوابت على معاملات هذا العمود السالبة وتغير إشارتهم ينتج:

-1 * 80/ -10 = 8

-1 * 22 / -1/2 = 44

يكون المتغير الخارج هو " s_1" وتقاطعهم يكون عنصر المحور وهو " –10 " وبتقسيم جميع عناصر الصف الداخل على عنصر المحور وتغيير إشاراتهم ينتج:

0.20	-1/10	8

ويكون العمود الجديد

1/-10 = -0.10

-1/2/-10 = 0.05

ويكون الجدول الجديد كالتالي:

s_2	s_1		
-0.60	-0.10	96	z
.20	-1/10	8	t
-16/100	0.05	18	c

مع العلم انه تم حساب بقية العناصر التي لا تقع على العمود الداخل أو الصف الخارج كما يلي:

88 – (1* 80) / -10= 88 + 8 = 96

22 – (80*-1/2) / -10=22 – 4 = 18

- 4/5 – (1*2) / - 10=-4/5 + 0.2 = - 0.60

-1/5 – (-2 * -1/2) / -10= -1/5 + 1/10 = - 3 / 10

تفسير الحل:

بما أن جميع القيم في صف المتغيرات غير الأساسية " صف دالة الهدف " كلها قيم سالبة ، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

الحل الأمثل كالتالي: x1=8, x2=18

والذي يؤدي إلى أرباح مقدارها 96

كذلك فإن قيم s_1 , s_2 كلها أصفار أي لا يوجد وقت أو خشب فائض لم يستغل، وإذا وجد في الحل أي من الفوائض فإنه يدل على الموارد الزائدة.

مشكلة التخفيض:

Simplex methods for minimization:

مشكلة التخفيض تكون صياغتها عادة كالتالي:

$\min \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2$
s.t
$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 >= b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 >= b_2$
$x_1, x_2 >= 0$

وتكون تهيئتها لجدول السمبلكس بإضافة متغيرات فائضة للجانب الأيمن من المعادلة:

a11 x1 + a12 x2 = b1 + s1
a21 x1 + a22 x2 = b2 + s2

تكون الفوائض كالتالي:

s1 = -b1 + a11 x1 + a12 x2
s2 = -b2 + a21 x1 + a22 x2

و يبدأ الحل الابتدائي عندما تكون المتغيرات الأساسية (غير الفائضة) تساوي صفر كما في مشكلة التعظيم (max). ولكن هنا تفسير الحل الابتدائي هو أننا نبدأ من حل غير ممكن "infeasible" حتى الوصول إلى الحل الأمثل. كذلك نبدأ بقيمة صفر لدالة الهدف وذلك لأن المتغيرات الأساسية تكون أصفار في الحل الابتدائي.

جدول الحل الابتدائي سيكون كالتالي:

		x_1	x_2
Z	0	c_1	c_2
-s1	$-b_1$	a_{11}	a_{12}
-s2	$-b_2$	a_{21}	a_{22}

ولكن للتأكد من أن الحل امثل من عدمه يجب أن ننظر إلى عمود الثوابت (b_1 b_2,) (وليس الصف كما في التعظيم)
وإذا كانت القيم الموجودة موجبة (لا يوجد سالب) فإننا توصلنا إلى الحل الأمثل.

ووجود الفوائض بالسالب يدل على أن الحل غير ممكن وذلك لأنه لا يوجد فوائض بالسالب. لتطوير الحل الابتدائي فإننا نتبع الإجراءات التالية مع المثال التالي:

min $z = 4200 x_1 + 3000 x_2$
s.t
$4 x_1 + 2 x_2 >= 120$
$2 x_1 + 3 x_2 >= 120$
$x_1 + 2 x_2 >= 70$
$x_1 , x_2 >= 0$

لتهيئة الصياغة السابقة لجدول السمبلكس يجب إضافة المتغيرات الفائضة كالتالي:

$4 x1 + 2 x2 = 120 + s1$
$2 x1 + 3 x2 = 120 + s2$
$x1 + 2 x2 = 70 + s3$

ونضع الفوائض في جهة وبقية المعادلة في الجهة الأخرى كالتالي:
$s_1 = -120 + 4 x_1 + 2 x_2$
$s_2 = -120 + 2 x_1 + 3 x_2$
$s_3 =-70 + x_1 + 2x_2$

ثم نضعها في جدول السمبلكس بعدما نضيف إليهما دالة الهدف ونجعلها تساوي الصفر حيث يكون جدول السمبلكس الابتدائي كالتالي:

	constant	x_1	x_2
Z	0	4200	3000
S_1	-120	4	2
S_2	-120	2	3
S_3	-70	1	2

و بما أن الجدول الابتدائي السابق يحوي قيم سالبة في عمود الثوابت " constant " فان الحل غير أمثل ، ولتطويره فإننا نعمل الآتي:
1- إيجاد صف المحور(المتغير الخارج)، والذي يحوي على أكبر قيمة سالبة. ولذلك فإنه يمكن أن نختار s_2 أو s_1 لأن كل منها يحوي القيمة (120-).
. افترض أننا أخذنا الأول ، s_1 ويكون هو المتغير الخارج.
2 -اختيار عمود المحور " المتغير الداخل "

يجب النظر إلى القيمة الموجبة في صف المحور وقسمة معاملات دالة الهدف عليهم حيث يكون كالتالي:

3000/2 =1500 , 4200/4 = 1050

وحيث أن القيمة الأقل هي 1050 فإن المتغير الداخل " عمود المحور " هو x_1.

3 -يكون عنصر المحور هو "4" ولذلك نضع عليها دائرة ونحـ ضرب المقلوب لهذا العنصر وتقسم بقية العناصر في هذا الصف على هذا العنصر مع تغيير إشاراتهم:

أي يكون (2/4) 1- , ¼ , (120/4-) 1- أو 1/2- , ¼ , 30 على التوالي.

4 -نوجد قيمة عمود المحور بالقسمة على عنصر المحور بدون تغيير الإشارة أي 4200/4 , 2/4 , ¼

وبوضع المتغير الداخل والخارج يكون شكل الجدول الثاني كالتالي:

		s_1	x_2
z			1050
x_1	30	¼	-1/2
s_2			½
s_3			¼

5 -تطبيق المعادلة التالية لحساب بقية العناصر:

العنصر الجديد = العنصر القديم — $\frac{\text{حاصل ضرب العناصر المناظرة للعنصر الدليل}}{\text{عنصر المحور}}$

0 – (4200 * 120)/4 = 126000
-120 – (-120 * 2)/4 = -60
-70 – (-120 * 1)/4 = -40
3000 – (4200 * 2) /4 = 900
3 – 2*2 /4 = 2
2 – 2*1 /4 = 1.5

فيكون الجدول كالتالي:

	constant	s_1	x_2
Z	126000	1050	900
X_1	30	¼	-1/2
S2	-60	½	2
S3	-40	¼	1.5

وبما أنه يوجد قيمة سالبة في عمود المحور " الثوابت " " constants" فإن الحل ما زال غير أمثل.
و بإتباع نفس الخطوات السابقة نجد أن الصف الخارج هو s_2 والعمود الداخل هو x_2 ويكون عنصر المحور هو 2 ويكون جدول الحل التالي الجدول كالتالي:

		s_1	s_2
z	153000	825	450
X1	15	3/8	-1/4
X2	30	-1/4	½
S3	5	-1/8	3/4

وتفسير الحل هو كالتالي: $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $s_3 = 5$, $z= 153000$

مشاكل مع القيود المختلطة:

في الحياة العملية عادة ما تكون القيود تشمل قيود على شكل " =>" و " =<"

1 -في مشاكل التعظيم " maximization "

افترض أن عندنا الصياغة التالية:

Max $z = c1\ x1 + c2x2$

s.t.

$a11\ x1 + a12\ x2 \geq b1$

$a21\ x1 + a22\ x2 \leq b2$

ولكن هنا يجب إغفال المشكلة هل هي تعظيم أو تخفيض والنظر إلى القيود بوضع الفوائض في مكانها الصحيح:

$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 = b_1 + s_1$

$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + s_2 = b_2$

وتكون كالتالي:

$s1 = -b1 + a11\ x1 + a12\ x2$

$s2 = b2 - a21\ x1 - a22\ x2$

ونكمل الحل كما في مشاكل التعظيم

2 -في مشكلة التخفيض " minimization "

افترض أن عندنا قيود على شكل "=>"، "=<"، " = " كالتالي:

$\min \quad z = c1\,x1 + c2\,x2 + c3\,x3$

s.t

$x1 \le b1$

$x2 \ge b2$

$x3 \ge b3$

$x1 + x2 + x3 = b4$

حيث أن طريقة السمبلكس لا تسمح بالقيود التي لا يوجد فيها فوائض فإن القيد الأخير والذي على شكل " = " يتم التخلص منه بتعويضه في القيود الأخرى فمثلاً

$x_1 = b_4 - x_2 - x_3$

ويتم التعويض في القيود الأخرى بما فيها دالة الهدف

أي يتم إعادة صياغتها بالطريقة التالية:

$\min \quad z = c1\,(b4 - x2 - x3) + c2\,x2 + c3\,x3$

s.t

$(b4 - x2 - x3) <= b1$

$x2 >= b2$

$x3 >= b3$

ويمكن حلها كما سبق ثم للوصول إلى قيمة x_1 فإننا نعوض في المعادلة

$x1 = b4 - x2 - x3$

وذلك بالقيم المثلى x_3و x_2

أو يمكن حلها بإضافة متغير صناعي للمتغير الأخير حيث يكون كالتالي:

$s4 = -400 + x1 + x2 + x3$

وتكون قيمة "s_4" تساوي الصفر في الحل النهائي الأمثل وذلك لأن المتغير لا يوجد فيه فوائض.

- التحلل " degeneracy ":
يحدث التحلل إذا كان عندنا قيمتين متساويتين مؤهلتين لأن يكونا كلاهما عنصر المحور وهي تحدث في مشكلة التعظيم وكذلك التخفيض وتؤدي إلى وجود أحد الحلول الأساسية مساوياً للصفر.
- حلول متعددة مثلى " multiple optimal solutions ":
يحدث عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد القيود ويوضح أنه يوجد أكثر من حل أمثل للمشكلة إذا كان هناك صفر أو أكثر من صفر في صف دالة الهدف في جدول السمبكس.
- المشاكل غير المقيدة " unbound feasible solutions "
في بعض الحالات النادرة يكون مجال الحلول الممكنة " feasible solution" غير محددة بمنطقة معينة أي يكون مجالها لا نهائي (∞ +) ويمكن التعرف عليها من القيمة التي في صف دالة الهدف (في حالة التعظيم) فإذا وجدنا أن بعض قيم بعض المتغيرات في كل جدول جديد يكون موجباً دائما فإنه دليلاً على وجود هذه المشكلة. و هذه المشكلة عادةً سببها الصياغة الخاطئة.

التطابقية (أو الثنائية) وتحليل الحساسية Duality and sensitivity analysis

إن جدول السمبلكس في الحقيقة يعطينا معلومات إضافية مهمة غير التي تطرقنا إليها من قبل. هذا المعلومات الإضافية تعرف بالمرافقة، وكل برنامج أولي " primal problem " يوجد له برنامج نظير أخر يسمى برنامج مرافق " dual problem ".

الحل الترافقي للمشكلة أو للبرنامج الأولي مهم جداً لأنه يعطي معلومات اقتصادية ورياضية.

صياغة المشكلة المرافقة " formulation of dual problem ".

افترض أنه يوجد عندنا المشكلة الخطية التالية:

$$
\begin{aligned}
&\max = c_1\chi_1 + c_2\chi_2 \\
&s.t \\
&a_{11}\chi_1 + a_{12}\chi_2 \le b_1 \\
&a_{21}\chi_1 + a_{22}\chi_2 \le b_2 \\
&\chi_1, \chi_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

فإنه يمكن صياغة المشكلة المطابقة أو الثنائية للبرنامج السابق كالتالي:

أولاً: إذا كانت الصياغة الأصلية (max)، فتكون المرافقة (min) والعكس صحيح وعدد متغيرات المرافقة هو عدد القيود الأصلية، وعدد قيود المرافقة هو عدد المتغيرات الأصلية. ومعاملات دالة الهدف في المشكلة الأصلية هي ثوابت القيود في المرافقة والعكس، و اتجاه الأقل من أو يساوي يكون أكبر أو يساوي والعكس. أي يكون البرنامج التوافقي لها كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&\min b_1 y_1 + b_2 y_2 \\
&s.t \\
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1 \\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2 \\
&y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال:

مصنع الشوكي ينتج نوعين من ألعاب سيارات الأطفال:
النوع الأول: بالريموت كنترول "x1 "
والنوع الثاني: بدون ريموت كنترول " x2 ".
وإذا كانت أرباح 10 وحدات من x1، x2 هي 2، 3 ريال على التوالي و المدة التي يتطلبها صنع كل 10 وحدات من x1 هي 3 ساعات في المصنع a، وساعة في المصنع b. بينما 10 وحدات من x2 تتطلب ساعتين في المصنع a وساعتين في b.
علماً بأن الوقت المتوفر في المصنع a هو 20 ساعة وفي b هو 10 ساعة.
المطلوب إيجاد العدد الأمثل من الألعاب وتفسير الحل.
البرنامج الأصلي هو كالتالي:

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل:

الجدول الابتدائي:

		x1	x2
z	0	2	3
s1	20	-3	-2
s2	10	- 1	- 2

الجدول الثاني:

		x1	s2
z	15	-1/2	-3/2
s1	10	-2	1
x2	+5	-1/2	-1/2

الجدول الثالث:

		s1	s2
z	17.5	-1/4	-4/5
x1	5	-1/2	+1/2
x2	2.5	¼	-3/4

وبما أن جميع القيمة في صف دالة الهدف قيمة سالبة إذاً هذا هو الحل الأمثل و يكون البرنامج الترافقي المقابل هو كالتالي:

$$\min z = 20y_1 + 10y_2$$
$$s.t.$$
$$3y_1 + y_2 \geq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 \geq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

القيد الأول في المرافقة يتعلق بالنوع الأول من السيارات (x1)بينما القيد الثاني يختص بالنوع الثاني (x2)
كذلك y1 يتعلق بالوقت المتاح في المصنع الأول، بينما y2 يتعلق بالوقت المتاح في المصنع الثاني
حل المشكلة المرافقة:

الجدول الأول:

		y1	y2
z	0	20	10
s1	-2	3	1
s2	-3	2	2

الجدول الثاني:

		y1	s2
z	15	10	5
s1	-1/2	2	½
y2	3/2	-1	½

الجدول الثالث:

		s1	s2
z	17.5	5	2.5
y1	¼	½	-1/4
y2	5/4	-1/2	¾

وحيث أن جميع القيم بأعمدة الثوابت constant موجبة. إذاً فالحل أمثل.
في المشكلة الأصلية الهدف هو معرفة قيمة x1، x2 المثلى التي تؤدي إلى تعظيم الربح في حدود الوقت المتاح في المصنع (a) و (b).
ولكن في المشكلة المرافقة الهدف هو تخفيض تكاليف إنتاج هذين المنتجين بـ 20 ساعة متوفرة في a و 10 ساعات متاحة في b.
تكلفة الساعة الواحدة في b،a يجب أن نعرفها حتى تخفض من تكاليف إنتاج هذين السلعتين.
ولذلك فإن المتغيرين y1، y2 تعبر عن تكاليف إنتاج كل من x1، x2، في المصنع a، b.
وفي قيود المشكلة المرافقة يتضح أن عدد الساعات المطلوبة للسلعة الأولى في المصنعين هي 3، 1 على التوالي. " 3y1 " يوضح تكلفة صنع x1 في المصنع a، و " y2 " هو تكلفة صنع x1 في b.
ومجموعهم " 3y1 + y2 " يعبر عن إجمالي تكلفة صنع 10 وحدات من النوع الأول من السيارات " x1 " في كل من المصنعين. وهذه التكلفة لا تقل عن 2.
وكذلك " 2y1 + 2y2 " يعبر عن إجمالي تكلفة صنع 10 وحدات من النوع الثاني من السيارات " x2 " في كل من المصنعين. وهذه التكلفة لا تقل عن 3.

- افترض أن المصنع سيبيع موارده إذا فإنه يجب معرفة السعر الذي يجب أن يبيعها بها.

y1 هو إنتاجية الساعة الواحدة في المصنع الأول.
y2 هو إنتاجية الساعة الواحدة في المصنع الثاني.

لذلك فإن أسعار هذين الموردين تتحدد بمعرفة y1، y2، وهي التي يراد تحقيقها في دالة هدف المرافقة.

$$\min \quad z = 20y1 + 10y2$$

كذلك بالنظر إلى القيد الأول فإن النوع الأول من السيارات يجب أن يباع بــ 2 ريال على الأقل و هي نتيجة لـ 3 ساعات عمل في المصنع الأول وساعة في المصنع الثاني كذلك النوع الثاني من السيارات يجب أن لا يقل سعرها عن 3 ريال وهي نتيجة الــ 2 ساعة في المصنع الأول و 2 ساعة في المصنع الثاني.

سعر الظل:

سعر الظل الخاص بأحد القيود هو القيمة الإضافية التي يتم بها تعظيم أو تخفيض دالة الهدف نتيجة زيادة ثابت القيد بوحدة واحدة.

لذلك فإن دالة الهدف إذا كانت ثوابت القيود هي 20، 10

$$20y1+10y2$$

وبالتعويض في دالة الهدف بقيمة $y1, y2$

فتكون: $20(1/4)+10(5/4)=17.50$

وإذا افترضنا أن ثابت القيد الأول تغير من 20 إلى 21 (مع بقاء المتغيرات الأولى) فإن الدالة ستتغير بمقدار $21(1/4)+10(5/4)=17.75$

أي أن زيادة ساعة واحدة في المصنع الأول ينتج 1/4 ريال زيادة في الأرباح.

كذلك إذا افترضنا أننا زدنا ساعة واحدة في القيد الثاني ليكون 11 بدلاً من 10 فإن الربح الجديد سيكون:

$$20(1/4)+11(5/4)=18.75$$

أي أن كل زيادة في قيمة القيد الثاني (المصنع الثاني) ينتج عن ربح زيادة 1.25 ريال.

الحل الأمثل في المشكلة المرافقة كان " 17.5 " وهو أقل تكلفة يمكن أن نتحملها بالإبقاء على الطاقة المتاحة من الساعات في كل مركز. قيمة المتغيرات y1، y2 والتي هي ¼،5/4 على التوالي توضح أن الساعة الواحدة تكلف ¼ ريال للشركة في المصنع الأول، 5/4 في المصنع الثاني. لذلك فإن الشركة يجب أن لا تنتج أي سلعة في المصنع الأول (a) إذا كانت أرباحه لا تغطي هذه التكاليف، ولا تنتج أي سلعة في المصنع الثاني (b)، إلا إذا كانت أرباحها أكثر من 4/5 ريال، وهذا يعرف بتحليل الحساسية.

مسائل على البرمجة الخطية:

1. (قرار حملة تسويقية) تقوم إحدى الشركات بحملة إعلانية واسعة من خلال ثلاث وسائط إعلامية هي التلفزيون والانترنت والجرائد. وتهدف الشركة من هذه الحملة الحصول على أكبر تأثير على الزبائن المشاهدين. وكانت نتيجة الدراسة كالأتي:

	التلفزيون		الإنترنت	الجرائد
	صباحاً	مساءً		
تكلفة الإعلان للمرة الواحدة	40000	75000	300	15000
قوة (تأثير)الإعلان حسب الدراسة	8	7	5	6
عدد العملاء المحتمل وصول الإعلان لهم	40000	90000	80000	50000

ولا ترغب الشركة في إنفاق أكثر من 800000 على هذه الحملة الإعلانية بينما ترغب أن يكون عدد العملاء الذين يصل إليهم الإعلان 500000 على الأقل. وأن تكون تكلفة الإعلان عن طريق التلفزيون لا يزيد عن 500000. بينما يكون عدد مرات الإعلان في التلفزيون الصباحي لا يقل عن 3 مرات. أما الإعلان في الانترنت فيكون ما بين 5 مرات إلى 10 مرات. المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية فقط:

2. (قرار استثمار) يريد تاجر استثمار 100000 ريال في أسهم ثلاث شركات مختلفة لتحقيق أكبر عائد ممكن. والجدول التالي يبين سعر أو قيمة السهم الواحد و العائد السنوي المتوقع وكذلك الحد الأقصى للاستثمار.

أسم الشركة	سعر السهم	العائد السنوي	الحد الأقصى للاستثمار
الشركة الزراعية	60	7	60000
شركة سابك	50	5	25000
شركة الأدوية	55	5.5	30000

المطلوب هو صياغة المشكلة بطريقة البرمجة الخطية (Liner Programming).

3. (قرار صنع أو شراء) شركة الخالدية تقوم بتصنيع أدوات تجارية وهندسية متطورة. الشركة تفكر ألان في تنزيل نوعين من الآلات الحاسبة. الأولى للاستخدام في التجارة والأخرى للأغراض الهندسية. كل من هذه الآلات تتكون من ثلاث أجزاء

1 - قاعدة

2 - كاترج إلكتروني
3 - غطاء خارجي
القاعدة تصلح لكل من النوعين ولكن الكاترج والغلاف الخارجي يختلفان.
هذه الأجزاء الثلاثة من الممكن أن تصنع في مصنع الخالدية أو ممكن شراءها من مصانع أخرى خارجية. تكاليف الصنع و أسعار الشراء كالأتي:

الجزء	تكلفة الوحدة الواحدة		الوقت المستغرق لصناعة الوحدة الواحدة (بالدقيقة)
	الصنع	الشراء	
القاعدة	.05	.06	1.0
كاترج إلكتروني (تجاري)	3.75	4.0	3.0
كاترج إلكتروني (هندسي)	3.30	3.90	2.5
غطاء (تجارية)	.06	.65	1.0
غطاء (هندسية)	.75	.78	1.5

الشركة تتوقع أن يكون الطلب على الآلات التجارية 3000 و الهندسية 2000. ولكن الوقت المتاح للشركة متاح ب 200 ساعة في خلال وقت الدوام و 50 ساعة خارج دوام. حيث يكلف خارج الدوام 9 ريال للساعة الواحدة. الجدول السابق يوضح الوقت المستغرق بالدقائق لصنع كل وحدة.
الشركة تواجه مشكلة تقرير كم وحدة من كل من الأجزاء الثلاثة يجب إنتاجه وكم يجب اشتراه للوصول إلى اقل تكلفة ممكنة.

4. (تحديد كمية الإنتاج) شركة التقنية المحدودة تنتج ثلاث منتجات باستخدام مصنعين. تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج هي كالتالي:

	المنتج 1	المنتج 2	المنتج 3
المصنع A	5	6	8
المصنع B	8	7	10

كل مصنع يمكن أن ينتج 10000 وحدة. وعلى الأقل 6000 وحدة من المنتج الأول و 8000 من الثاني و 5000 من الثالث يجب أن تنتج. ما هي صياغة البرنامج الخطي إذا أردنا تخفيض التكاليف؟

5. (محافظ استثمارية) شركة العليا المتحدة (OUC) و التي مركزها في الرياض حصلت على 100,000ريال نتيجة بيع بعض أسهمها الصناعية. وألان الشركة تبحث عن فرصة استثمارية في أسهم صناعية أخرى. وبناء على نصائح وتوقعات الخبير الاستثماري للشركة فان الشركة يجب ان تستثمر في صناعة النفط (OI) أو الحديد (SI) أو الأسهم الحكومية(GB) فقط. و قد توقع الخبير العوائد التالية:

نوع الاستثمار	العائد المتوقع %
1- نفط الظهران(A)	7.3
2- نفط الجبيل(J)	10.3
3- حديد نجران(N)	6.4
4- حديد الرياض(R)	7.5
5- أسهم الحكومة(G)	4.5

وحسب تعليمات إدارة الشركة فان الاستثمار في أيا من الصناعات(النفط أو الحديد) يجب أن لا يزيد عن 50,000 ريال. واسهم الحكومة يجب أن لا تقل عن 25% من أسهم صناعة الحديد. كذلك فان الاستثمار في نفط الجبيل، والذي يعطي اكبر عائدا و أكثر خطرا، يجب أن لا يزيد عن 60 % من أحمالي الاستثمار في صناعة النفط. والمطلوب صياغة المشكلة الخطية مع استخدام نفس الرموز المعطاة ، مع العلم أن المشكلة هي مشكلة تعظيمية (.Max)

6. شركة صحراء نجد تنتج نوعين من المنتجات التي تتطلب ان تصنع في اثني من المصانع المختلفة. كل من المصانع له طاقة استيعابية من ساعات العمل لا يمكن زيادتها والتي يجب أن توزع بين هذين المنتجين حسب المدة التي يستغرقها صنع الوحدة الواحدة من المنتجين. الجدول التالي يوضح هذه المعلومات بالتفصيل:

المصنع	الأول	الثاني	ربح الوحدة الواحدة
الوقت اللازم لصنع وحدة واحدة من المنتج الأول (ساعة)	0.9	0.7	26
الوقت اللازم لصنع وحدة واحدة من المنتج الثاني (ساعة)	1.3	0.6	28
إجمالي	670	620	

المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية فقط علما بان الهدف هو تعظيم الأرباح:

7. شركة ماما هياء هي شركة سعودية لإنتاج البيتزاء المثلجة. تحصل الشركة على ربح مقداره 1 ريال مقابل بيع البيتزاء العادية و ربح مقداره 1.50 ريال مقابل صنع البيتزاء الديلوكس. كل بيتزاء تحتوي على جزأين: جزء خليط عجينة وجزء خليط حشوة. وعند الشركة الآن في مستودعها 150 كيلوغرام من العجينة و 50 كيلو غرام من الحشوة. البيتزاء العادية تستخدم 1 كيلو غرام من العجينة و 40 جرام من الحشوة. أما البيتزاء الديلوكس فتستخدم 1 كيلو غرام من العجينة و 80 جرام من الحشوة. بناء على الخبرة السابقة في الطلب فان الشركة ينبغي عليها صنع 50 من النوع العادي و 25 بيتزاء ديلوكس على الأقل. المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية للوصول إلى عدد البيتزاء العادية والديلوكس التي يجب أن تصنعها الشركة للوصول إلى أعظم الإرباح.

8. في مشكلة البرمجة الرياضية التالية:

$$\text{Max } z = 8x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$-6x_1 - 4x_2 \leq -36$$

$$0 \leq x_1 \leq 10 \ , \ 0 \leq x_2 \leq 8$$

- المطلوب
- أولا: رسم المشكلة.
- ثانيا: تحديد منطقة الحل الممكن؟
- ثالثا: توضيح هل يوجد حل ام لا؟
- رابعا: إذا وجد حل امثل فهل هو حل واحد أم حلول متعددة؟

9. إذا كان جدول السمبلكس الأتي هو احد جداول السمبلكس في مراحل الحل الامثل لمشكلة تعظيم (MAX).:

	constant	X2	S2
Z	88	1	-4/5
S1	80	-10	2
X1	-22	-1/2	-1/5

المطلوب أولا:هو إيجاد القيم التالية من الجدول السابق:

X1=............., X2=....................,S1=..........................,
S2=...................

المتغير الداخل =......................، المتغير الخارج=......................، دالة الهدف=.....................

ثانيا: اختبار هل الحل امثل أم لا؟ إذا كان الحل غير امثل الرجاء تعبئة الجدول التالي فقط.

10. في مشكلة التعظيم التالية المطلوب إكمال الجدول والتأكد من أمثلية الحل؟ إذا كان الحل غير امثل المطلوب تحديد المتغير الداخل والخارج، والانتقال لجدول السمبلكس الثاني:

ربح الوحدة الواحدة unit cost		3	8	0	0	0	0	-M	عمود الحل	Exchange ratio معدل التغيير
	المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a1		
0	s1	2	4	1	0	0	0	0	1600	
0	s2	6	2	0	1	0	0	0	1800	
0	s3	0	1	0	0	1	0	0	350	
-M	a1	1	1	0	0	0	-1	1	300	
row unit sacrifice تضحية الوحدة الواحدة										
Improvement row كسب الوحدة الواحدة										

و من الجدول السابق: أوجد

المتغير الداخل: المتغير الخارج = قيمة عنصر المحور (الارتكاز)=

الربح=

X1= x2= s1= s2= s3=

s4= a1=

11. إذا كانت المشكلة الأصلية (Primal problem) لتكوين خليط من غذاء صحي يهتم بالرشاقة هو كما في المشكلة التالية:

Min $50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4$

s.t. $400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 \geq 500$ قيد الكالوري

$3y_1 + 2y_2 \geq 6$ قيد الشيكولاته

$2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 \geq 10$ قيد السكر

$2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 \geq 8$ قيد الدهون

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

عدد الأسماك = Y_1 المشروبات الغازية = Y_3

عدد الايسكريم = Y_2 الكيك = Y_4

المطلوب هو صياغة المشكلة المرافقة أو الثنائية (Duality Problem) للمشكلة الأصلية.

استخدام الحاسب في حل مسائل البرمجة الخطية

حل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام (Solver):

في هذه المسالة سيتم استخدام برنامج اكسل (Microsoft Excel) و الموجود ضمن حزمة مايكروسوفت أوفيس (Ms Office) في حل هذه المشكلة. و لحل مشكلة البرامج الرياضية عموما والبرمجة الخطية خصوصا باستخدام برنامج اكسل يتعين علينا إضافة أداة الحل (Solver) إلى قائمة الأدوات. وهذا يتم بالذهاب إلى قائمة أدوات ثم الوظائف الإضافية و التأشير على Solver Add-in ثم موافق.

وللتذكير فان المشكلة التالية المطلوب حلها هي:

Max $Z=3t + 4c$

s.t

$15t + 10c \le 300$

$2.5t + 5c \le 110$

$t,c \ge 0$

ولحلها نقوم بتشغيل برنامج اكسل و في الخلية B6 مثلا نكتب المعادلة التالية بصيغة EXCEL: =B4*B5

ويعمل نفس الشيء في الخلية C6

الخلية E6 مجموع الخلايا B6 و C6وذلك بكتابة المعادلة التالية:-

=SUM(B6:C6)

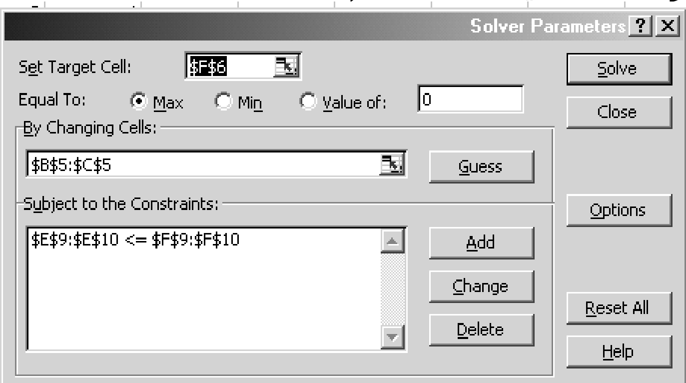
في الخلية E9 نكتب التالي:

=(B5*B9)+(C5*C9)

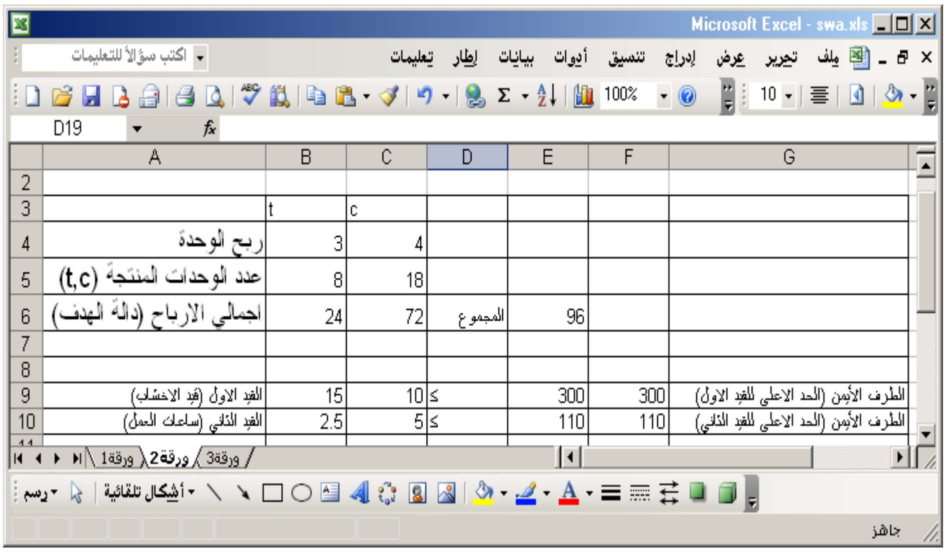
في الخلية E10 نكتب التالي:

=(B5*B10)+(C5*C10)

من نافذة solver parameters نحدد قيمة دالة الهدف في الخلية E6 وذلك باختيار Set Target Cell
نحدد متغيرات القرار في الخلايا B5,C5 وذلك باختيار By Changing Cell
اختر Add وذلك لتحديد القيود، ثم من نافذة Add Constraint اختر Cell Reference ونحدد الخلايا E9 إلى E10 وأبق (=>) كما هي ثم اختر Constraint ونحدد الخلايا F10 , F9 ثم OK



ومن Options ستظهر نافذة أخرى Solver Options نختار Assume linear Model ثم Ok.
من نافذة Solver Parameter اختر Solve ستظهر النتائج النهائية:



وهي قيمة عدد الوحدات المنتجة من t وهي 8 وحدات و من c 18 وحدة.
وكذلك دالة الهدف تساوي 96 وهي نفس النتائج التي تحصلنا عليها باستخدام جدول السمبلكس.

حل مثال البرمجة الخطية باستخدام (QSB)

يعتبر برنامج Qsb من البرامج التي تستخدم في تطبيقات بحوث العمليات وحل المشاكل التي تواجه الإدارة.

وفي هده الصفحات سوف نحاول التعرف على استخدام هذا البرنامج في حل المشاكل و المواضيع التي سوف تدرس في مقرر التحليل الكمي في الإدارة والمواضيع هي:

أولا: تثبيت البرنامج

يمكن تثبيت برنامج qsb بإدخال القرص المدمج (CDRom) في سواقة القرص المدمج (CDRom Drive) ثم الانتقال إلى

أبدأ start

تشغيل Run

استعراض Browse

واختيار القرص المضغوط CDRom

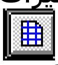
ثم الذهاب الى المجلد winqsb

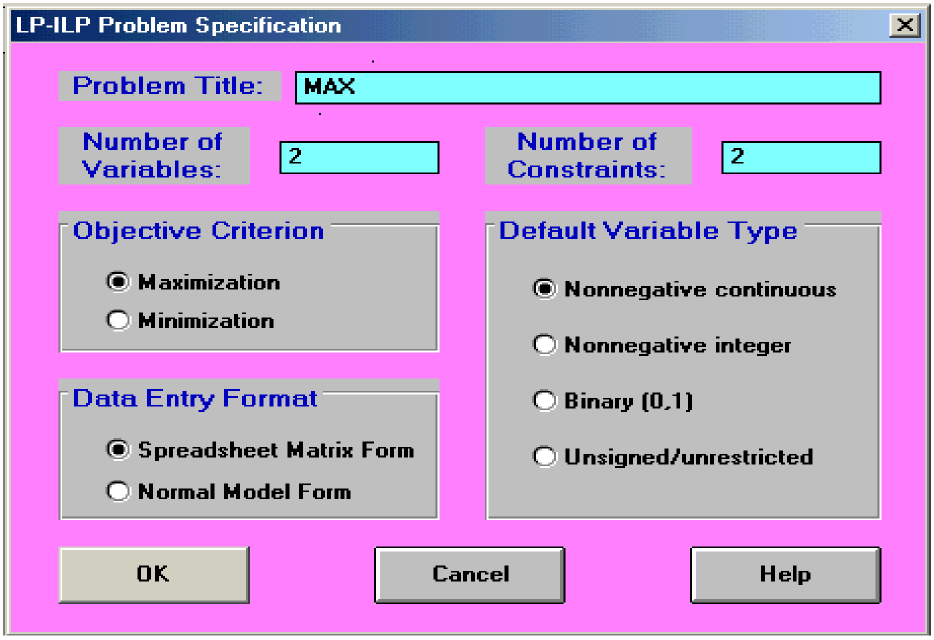
ثم النقر على setup.exe و إتباع التعليمات

ثانيا: البرمجة الخطية وبرمجة الأعداد الصحيحة. (Linear and Integer Programming)

و لحل هذه المشكلة باستخدام برنامج Qsb هي كما يلي:-

(حل مثال شركة الأويسط السابق).

- من ابدأ نختار برامج ثم WinQsb تظهر لنا قائمة بالبرامج التي يحتويها برنامج Qsb.
- من قائمة برنامج Qsb نختار برنامج Linear and Integer Programming بالضغط عليه تظهر لنا واجهة البرنامج ولإدخال بيانات المشكلة - أسم المشكلة ؛ عدد المتغيرات ؛ عدد القيود - نختار File ثم New Problem أو باستخدام الزر  ؛ بعد استخدامهما تظهر لنا نافذة حوار كما يلي:-



- تحتوي النافذة على عنوان المشكلة (Problem Title) و عدد المتغيرات (Number of Variables) و عدد القيود (Number of Constraints)؛ بعد كتابة البيانات نحدد نوع المشكلة (Objective Criterion) هل هي تعظيم (Maximization) أم تخفيض (Minimization)؛ وقد تم اختيار المشكلة تعظيم.

- بعد ذلك يتم تحديد نوع المتغير (Default Variable Type) هل هو:
الناتج يقبل فيه الكسور والأرقام الصحيحة(البرمجة الخطية) Nonnegative Continuous.
أو الناتج يقبل فيه الأرقام الصحيحة (برمجة الأرقام التامة) Nonnegative Integer
أو أيضا حل المشاكل الصفر – واحد (أمثل أو غير أمثل) (Binary 0,1)

بعد ذلك يتم تحديد كيفية إدخال المعلومات (Data Entry Format) هل هي عن طريق:

مصفوفة الجداول (Spread Sheet Matrix Form) أو على شكل نموذج عادي (Normal Model Form)

- بعد ذلك يتم الضغط على Ok؛ يظهر لنا جدول يتم فيه إدخال قيم المشكلة كتالي:

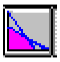
Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	3	4		
C1	15	10	<=	300
C2	2.5	5	<=	110
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

- بعد تعبئة الجدول يتم اختيار (Solve and Analyze) ثم (Solve the Problem)؛

بعد اختيارها يتم الحصول على نافدة النتائج ؛ من نافدة النتائج نجد أن:

Z = 96 ؛ X2 = 18 ؛ X1 = 8

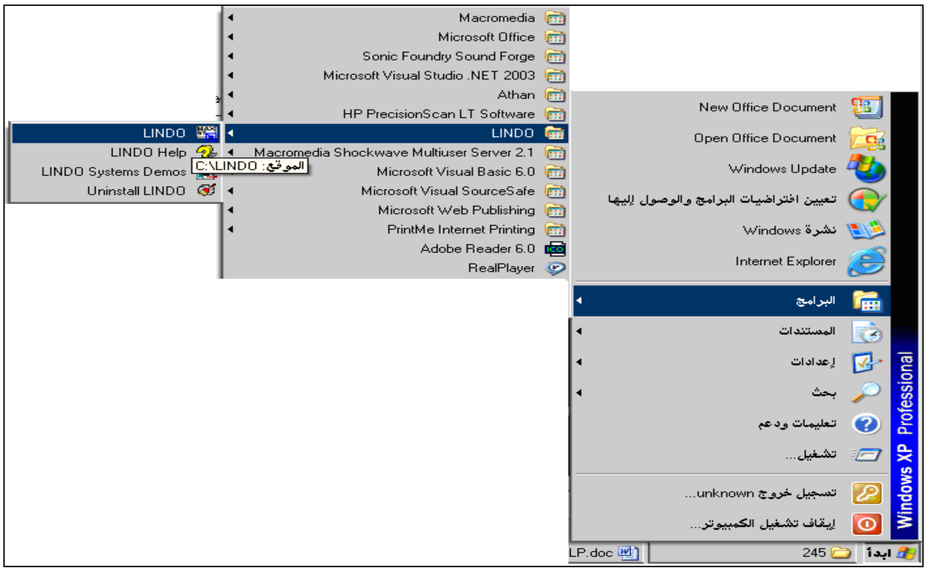
* <u>ملاحظة</u>:

يمكن رسم المشكلة بيانياً عن طريق اختيار الزر  من شريط الأدوات ؛ باختيارنا له تظهر لنا نافدة حوار يتم من خلالها تحديد الخط (المتغير) الأفقي و الخط (المتغير) الرأســـي ثم يتم الضغط على Ok ؛ نحصل على الرسم البياني مع تحديد النقطة المثلى.

حل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام (Lindo)

أتى اسم ليندو (Lindo) من أوائل الكلمات (Linear, Interactive, and Discrete Optimizer). وهو يعد من أشهر و أقوى البرامج المتخصصة في حل مشاكل البرمجة الرياضة (البرمجة الخطية "Linear Programming" و برمجة الأعداد الصحيحة "Integer Programming" و البرمجة الهدفية "Goal Programming" و البرمجة متعددة الأهداف "Multi-Objectives" و البرمجة غير الخطية "Nonlinear Programming" و البرمجة الديناميكية "Dynamic Programming"). وقد يستخدم في حل المشاكل الأخرى مثل مشكلة النقل والتخصيص وتحليل الشبكات ولكن بعد أن يحول شكل المشكلة إلى شكل الصياغة الرياضة.

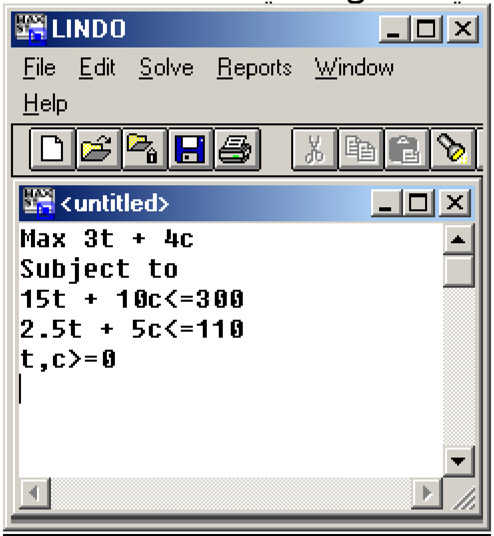
وما يميز هذا البرنامج هو سهولة الاستخدام حيث يمكن نسخ المشكلة بالشكل المعتاد وبالصياغة الرياضية المناسبة ولصقها في نافذة البرنامج أو يمكن كتابتها مباشر على نافذة البرنامج كما تكتب في محرر النصوص وغيره. ومما يجدر ذكره أن البرنامج متوفر على الانترنت يمكن تنزيله من موقع الشركة (www.lindo.com). بعد تنزيل البرنامج وتثبيته يمكن الانتقال إليه وتشغيله تمهيد لحل مشكلة البرمجة الخطية باستخدامه كما في الشكل التالي:



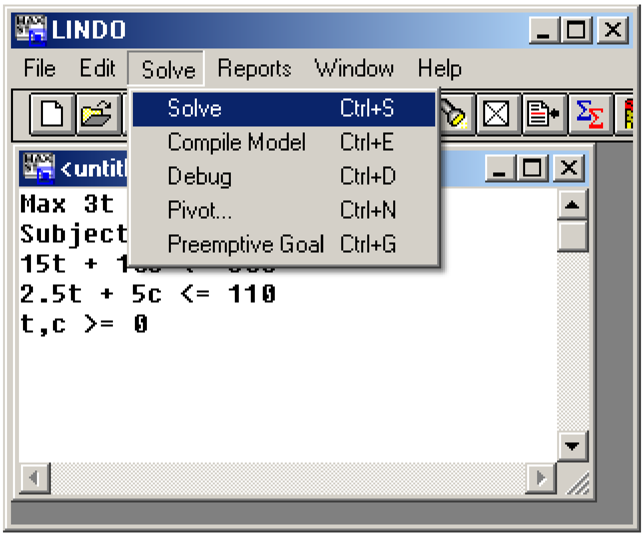
لحل مشكلة الأوسط السابقة باستخدام ليندو (Lindo) ينبغي علينا كتابتها بالشكل التالي:

Max 3t + 4c
Subject to
15t + 10c <= 300
2.5t + 5c <= 110
t,c >= 0

لاحظ أننا استبعدنا بعض الرموز الإضافية لدالة الهدف كـ (Z=) و كذلك استبدلنا الاختصار (s.t.) بكتابة الشرط كاملا (Subject to) وكذلك استعضنا بكتابة رمز اقل من أو يساوي بالشكل (<=) وكذلك رمز الأكبر من أو يساوي بالشكل (>=) كما في الشكل التالي:

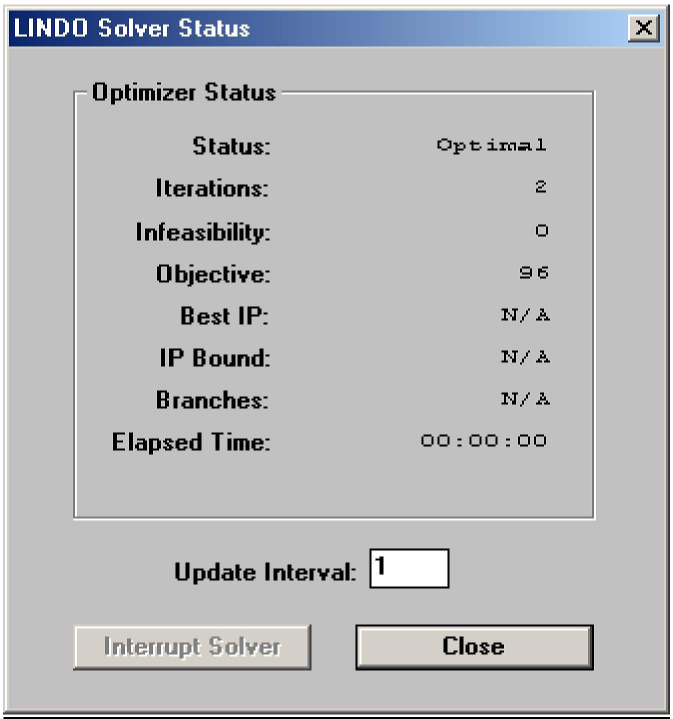


الآن أصبحت المشكلة جاهزة للحل بواسطة البرنامج وكل ما علينا فعله الآن هو الانتقال إلى قائمة الحل (solve) واختيار حل المشكلة كما في الشكل التالي:

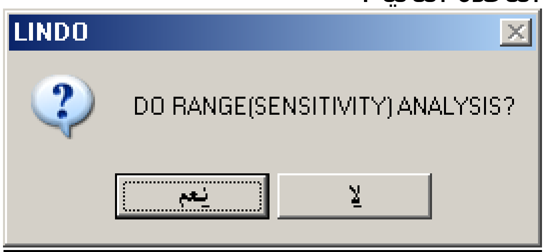


وبعد اختيار أمر الحل فان نافذة تخبرنا بانتهاء الحل تخرج تلقائيا إلا إذا كان هناك أي أخطاء تتعلق بخطأ في كتابة المشكلة أو لا يوجد حل للمشكلة أو أي أخطاء أخرى نتيجة عيوب في البرنامج أو نظام النوافذ.

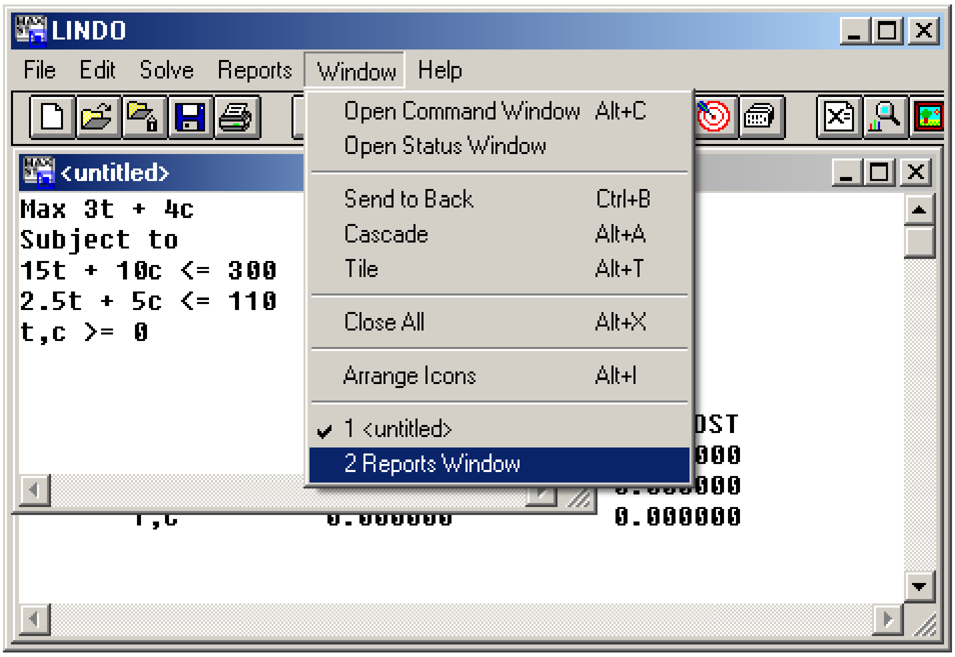
وهنا نجد أن البرنامج قد وجد حلا امثلا للمشكلة (Status: Optimal) و في خلال خطوتين فقط (iterations: 2) وكانت قيمة دالة الهدف هي 96 ريال (Objective:96) وهي نفس القيمة التي حصلنا عليها من قبل باستخدام جدول السمبلكس أو استخدام برامج الحاسب الأخرى كما توضحه النافذة التالية:



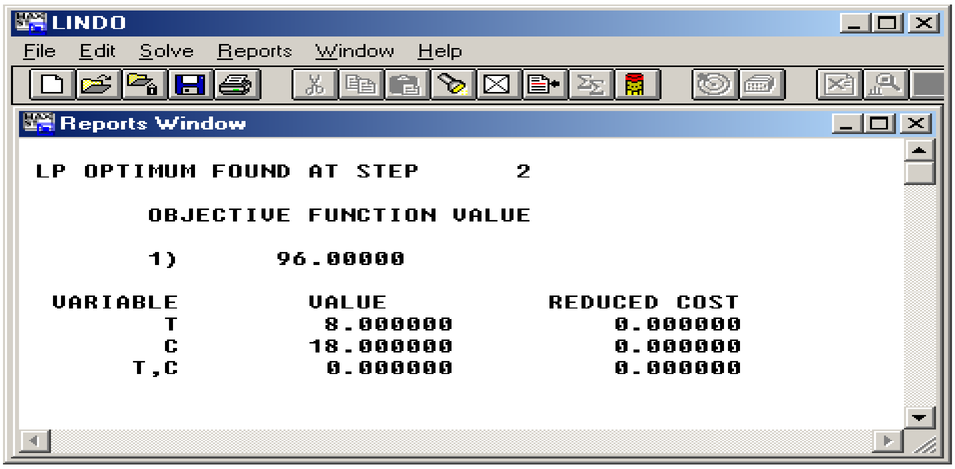
كذلك فان البرنامج يطلب من المستخدم تحديد ما إذا كان يرغب في الحصول على تحليلات إضافية للمشكلة كتحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) أم لا. وهذا يتوقف على حاجة كل مستخدم يستخدم هذه البرنامج لحلول مشاكله كما في النافذة التالية:



بعد ظهور النوافذ السابقة و التي تخبر المستخدم بحل المشكلة يمكن الانتقال إلى الصفحة الخاصة بالحل من قائمة الإطار window وهي صفحة تقارير الحل (Reports Window) كما في الشكل التالي:



بعدها ننتقل إلى صفحة الحل وهي تبدو كما في الشكل التالي:



ويتضح منها قيمة دالة الهدف وقيمة العنصر T و العنصر C وكذلك التحليلات التفصيلية الأخرى تتبع هذه النتيجة.

حلول مسائل البرمجة الخطية

1. نرمز لعدد مرات الإعلان في التلفزيون (صباحي) و(مسائي) و الإنترنت و الجرائد هي x_1 و x_2 و x_3 و x_4 على التوالي:

Max $8x_1+7x_2+5x_3+6x_4$ (دالة الهدف)
s.t.
$4000x_1+75000x_2+300x_3+15000x_4 \le 800000$ (قيد الإنفاق)
$4000x_1+90000x_2+80000x_3+50000x_4 \ge 500000$ (قيد عدد العملاء)
$40000x_1+75000x_2 \le 500000$ (قيد تكلفة الإعلان عن طريق التلفزيون)
$x_1 \ge 3$ (عدد مرات الإعلان في التلفزيون الصباحي)
$x_3 \ge 5$ (عدد مرات الإعلان في الإنترنت)
$x_3 \le 10$ (عدد مرات الإعلان في الإنترنت)
$x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$

2. نفترض أن:
عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم الشركة الزراعية هو: X_1
عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم شركة سابك هو: X_2
عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم شركة الأدوية هو: X_3

Max. $z=7x_1+5x_2+5.5x_3$
s.t.
$60x_1+50x_2+20x_3 \le 100000$
$60x_1 \le 60000$
$50x_2 \le 25000$
$55x_3 \le 30000$
$x_1,x_2,x_3 \ge 0$

3. نفترض أن:
عدد القواعد المصنّعة (bm) عدد القواعد المشتراة (bp)
عدد الكاترج التجاري المصنع (fcm) عدد الكاترج التجاري المشترى (fcp)
عدد الكاترج الهندسي المصنع (tcm) عدد الكاترج الهندسي المشترى (tcp)
عدد الأغطية التجارية المصنعة(ftm) عدد الأغطية التجارية المشتراة (ftp)
عدد الأغطية الهندسية المصنعة(ttm) عدد الأغطية الهندسية المشتراة (ttp)

Min 0.5 bm+0.6bp+3.75fcm+4fcp+ 3.3tcm+3.9tcp+ 0.6ftm+0.65ftp+0.75ttm+0.78ttp+9Ot
s.t.
bm+bp=5000
fcm+fcp=3000
tcm+tcp=2000
ftm+ftp=3000
ttm+ttp=2000
Ot≤50
bm+3fcm+2.5tcm+ftm+1.5ttm≤ 12000+06Ot

4.

min z= 5x11 + 6x12+8x13+8x21+7x22+10x23
s.t.
x11+x12+x13≤ 10000
x21+x22+x23≤ 10000
x11+x21≥6000
x12+x22≥8000
x13+x23≥5000

.5

Max $0.073A+0.103J+0.064N+0.075R+0.045G$
Subject to:
$A+J+N+R+G \leq 100,000$
$A+J \leq 50\,000$
$N+R \leq 50\,000$
$-0.25N - 0.25R + G \geq 0 \rightarrow G \geq 0.25N + 0.25R$
$-0.60A + 0.40j \leq 0 \rightarrow J \leq 0.60(A+J)$
$A, J, N, R, G \geq 0$

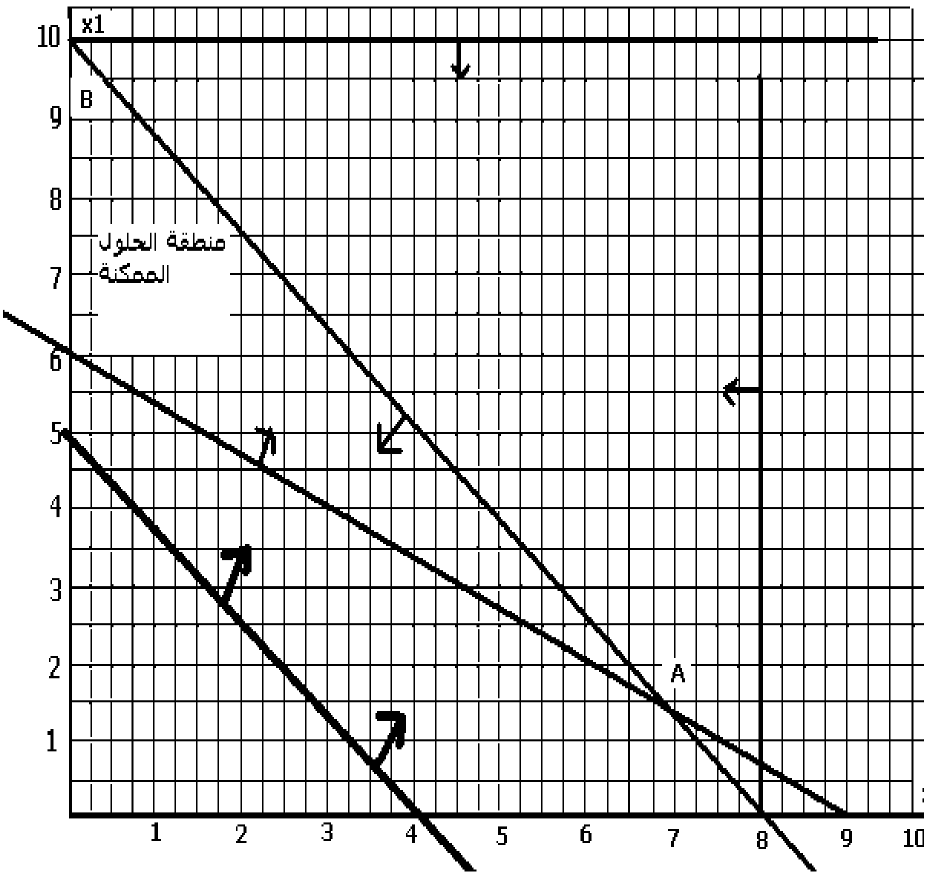
.6

Max $26x_1 + 28x_2$
s.t.
$0.9x_1 + 1.3x_2 \leq 670$
$0.7x_1 + 0.6x_2 \leq 520$
$x_1, x_2 \geq 0$

.7

نرمز بالرمز x1 لعدد البيتزاء العادية و x2 لعدد البيتزاء الديلوكس
Max $x1+1.5x2$
$X1 + x2 \leq 150$
$0.4x1 + 0.8x2 \leq 50$
$x1 \geq 50$
$x2 \geq 25$
$x1, x2 \geq 0$

8. الحل:
أولا: يتم التخلص من السالب بعد ضربه في -1 ثم تتغير علامة الأقل من أو يساوي إلى اكبر من أو يساوي
ثانيا: يوجد حلول متعددة وقيم x1 و x2 المثلى هي جميع قيم النقاط الواقعة على الخط A إلى B ودالة الهدف أو أقصى أرباح ممكنه هي 80 بعد التعويض بأي نقطة على هذا الخط في دالة الهدف.



يتضح من الرسم السابق أن حط دالة الهدف موازي للقيد الأول حيث يتجه إلى اليمين حتى ينطبق على خط القيد الأول و بذلك تكون جميع النقاط

التي بين الزاوية A إلى الزاوية B كلها تمثل نقاط حلول مثلى تؤدي إلى نفس الربح.

9. الحل:
X1=......-22........, X2=.........0............,S1=......80....................,
S2=......0.............
المتغير الداخل =.........x2.....، المتغير الخارج=...........s1.....، دالة الهدف=..............88.......
الحل السابق غير امثل ويكون الجدول التالي:

	constant	S1	S2
z	96	-1/10	-0.6
X2	+8	-1/10	2/10
X1	-26	0.05, 1/20	-0.3

10.الحل غير امثل ويمكن إكمال الجدول كالتالي:

ربح الوحدة الواحدة unit cost		3	8	0	0	0	0	M-	عمود الحل	Exchange ratio معدل التغيير
	المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1		
0	s_1	2	4	1	0	0	0	0	1600	400
0	s_2	6	2	0	1	0	0	0	1800	900
0	s_3	0	1	0	0	1	0	0	350	350
-M	a_1	1	1	0	0	0	1-	1	300	300
unit sacrific row e	تضحية الوحدة الواحدة	-M	-M	0	0	0	M	M-	الربح -300M	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3+M	8+M	0	0	0	-M	0		

من الجدول السابق:

المتغير الداخل: x2 المتغير الخارج = s2 قيمة عنصر المحور (الارتكاز)=

2 الربح= -300m

X_1=0 x_2=0 s_1= 1600 s_2=400 s_3=350

s_4=0 a_1=300

جدول السمبلكس الثاني:

ربح الوحدة الواحدة unit cost		3	8	0	0	0	0	M-	عمود الحل	exchange ratio معدل التغيير
	المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1		
0	s_1	-2	0	1	0	0	4	-4	400	
0	s_2	4	0	0	1	0	2	-2	1200	
0	s_3	-1	0	0	0	1	1	-1	50	
8	x_2	1	1	0	0	0	-1	1	300	
unit sacrific row e	تضحية الوحدة الواحدة	8	8	0	0	0	-8	8	الربح = 2400	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3-8	0	0	0	0	8	-M -8		

11.الحل

Dual Problem:

$$
\begin{array}{llrlrlrlrlcr}
\text{Max } z= & 500 & x_1 & + & 6 & x_2 & + & 10 & x_3 & + & 8 & x_4 & & \\
\text{s.t.} & 400 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 2 & x_3 & + & 2 & x_4 & \leq & 50 \\
 & 200 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 & + & 4 & x_4 & \leq & 20 \\
 & 150 & x_1 & & & & + & 4 & x_3 & + & & x_4 & \leq & 30 \\
 & 500 & x_1 & & & & + & 4 & x_3 & + & 5 & x_4 & \leq & 80 \\
 & & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}
$$