بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب التحليل الاقتصادي الهندسي

Engineering Economic Analysis

تأليف

أسامة محمد المرضي سليمان خيال

Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية ، كلية الهندسة والتقنية ، جامعة وادي النيل

عطبرة ، السودان

يناير 1995 م

تم تنقيحه في مارس 2018 م

شكر وعرفان

الشكر والعرفان لله والتبريكات والصلوات على رسوله وخادمه محمد وعلى آله وصحبه وجميع من تبعه إلى يوم القيامة.

لذكرى كُلِّ من أمي الغالية خضرة درار طه، وأبي العزيز محمد المرضي سليمان، وخالتي الحبيبة زعفران درار طه الذين تعلمت منهم القيمة العظيمة للعمل واحترام الوقت وترتيبه وتدبيره.

إلى زوجتي الأولى نوال عباس عبد المجيد وبناتي الثلاث رؤى، روان وآية تقديراً لحبهم وصبرهم ومثابرتهم في توفير الراحة والسكون خاصَّةً عندما تتعقد وتتشابك الأمور.

إلى زوجتي الثانية لمياء عبد الله علي فزاري التي مَثَّل حبها وتضرعها إلى الله الزخم الذي دفعني للمسير في طريق البحث والمعرفة الشائك.

يَوَّدُ الكاتب أن يتقدم بالشكر أجذله لكل من ساهم بجهده وفكره ووقته في إخراج هذا الكتاب بالصورة المطلوبة ويخص بذلك الزملاء الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة وادي النيل، وأيضاً الأخوة الأساتذة بقسم الهندسة الميكانيكية بجامعة البحر الأحمر وجامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا.

الشكر والتقدير والعرفان للبروفيسور **محمود يس عثمان** الذي ساهم بقدر كبير في مراجعة وإعادة مراجعة محتويات الكتاب.

أهدي هذا الكتاب بصفة أساسية لطلاب دبلوم وبكالوريوس الهندسة في جميع التخصصات خاصة طلاب قسم الهندسة الميكانيكية حيث يستعرض هذا الكتاب تحليلاً اقتصادياً لبعض الأنظمة الهندسية.

وأُعبِّر عن شكري وامتناني إلى المهندس **أسامة محمود محمد علي** بمركز دانية للطباعة بمدينة عطبرة الذي أنفق العديد من الساعات في طباعة، مراجعة وإعادة طباعة هذا الكتاب أكثر من مرة.

أخيراً، أرجو من الله سبحانه وتعالى أن يتقبَّل هذا العمل المتواضع والذي آمل أن يكون ذو فائدة للقارئ.

مقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام علي رسوله محمد ρ وبعد:

إنَّ مؤلِّف هذا الكتاب إيماناً منه بالدور العظيم والمقدَّر للأستاذ الجامعي في إثراء حركة التأليف والتعريب والترجمة يأمل أن يفي هذا الكتاب بمتطلبات برامج البكالوريوس والدبلوم العام والمتوسط لطلاب وفنيي الهندسة الميكانيكية وهندسة الإنتاج أو التصنيع.

يتفَّق هذا الكتاب لغوياً مع القاموس الهندسي الموَّحد السوداني، ويُعد الكتاب مرجعاً في مجاله حيث يمكن أن يستفيد منه الطالب والمهندس والباحث ويعتبر الكتاب مقتبساً من مذكرات مؤلفه في تدريسه لهذا المقرر لفترة لا تقل عن عشرون عاماً.

يهدف هذا الكتاب للتعريف بمصطلحات الاقتصاد الهندسي وتحليل المشكلة الاقتصادية وكيفية إعداد دراسات الجدوى الاقتصادية للمشروعات الهندسية.

يشتمل هذا الكتاب على سبعة فصول. يستعرض الفصل الأول مقدمة عامة وتعريفات أساسية للاقتصاد، طبيعة المشكلة الاقتصادية، عناصر الإنتاج، تكلفة الفرصة البديلة، إمكانية الإنتاج، والاقتصاد الجزئي والكلي.

يشتمل الفصل الثاني على تعريف علم الاقتصاد وأهدافه، الاقتصاد الهندسي، والعرض والطلب.

يتناول الفصل الثالث خصائص سوق المنافسة، تحديد سعر السوق، تغيرات سعر السوق، واقتصاد المنشآت الهندسية من حيث المنافسة والاحتكار.

يشتمل الفصل الرابع على تعريف بالتكاليف وأنواعها وتحديد نقطة التعادل (نقطة اللاربح واللاخسارة). بينما يتناول الفصل الخامس القيمة الوقتية للنقود، حساب الفائدة، وسلسلة التدفقات النقدية.

يستعرض الفصل السادس التكافؤ من وجهة نظر خطط تسديد المال المقرض. بينما يتناول الفصل السابع مقارنة الخيارات والبدائل الاستثمارية من حيث تعريف وتحديد الخيارات الاستثمارية، تحديد الأفق الزمني، إعداد مسار التدفقات النقدية، تحديد معدل العائد المجزي الأدنى، وأساليب مقارنة الخيارات الاستثمارية.

إنَّ الكاتب يأمل أن يُساهم هذا الجهد المتواضع في إثراء المكتبة الجامعية داخل السودان وخارجه في هذا المجال من المعرفة ويأمل من القارئ بضرورة إرسال تغذية راجعة إن كانت هنالك ثمة أخطاء حتى يستطيع الكاتب تصويبها في الطبعة التالية للكتاب.

اللهم لا سهل إلاَّ ما جعلته سهلاً

وأنت تجعل الحزن إذا شئت سهلاً

والله ولي التوفيق

المؤلف
أسامة محمد المرضي سليمان
قسم الهندسة الميكانيكية
كلية الهندسة والتقنية
جامعة واي النيل
مارس 2018م

المحتويات

	الموضوع	الصفحة
	شكر وعرفان	ii
	مقدمة	iii
	المحتويات	v
	الفصل الأول: مقدمة	
1.1	مقدمة عامة	1
1.2	طبيعة المشكلة الإقتصادية	4
1.3	أهداف الدراسة الحالية	5
1.4	تكلفة الفرصة البديلة	7
1.5	منحنى إمكانية الإنتاج	7
1.6	أركان المشكلة الإقتصادية	15
1.7	الاقتصاد الجزئي	15
1.8	الاقتصاد الكلي	15
	الفصل الثاني: علم الاقتصاد	
2.1	تعريف علم الاقتصاد	16
2.2	أهداف الاقتصاد	16
2.3	الاقتصاد الهندسي	16
2.4	العرض والطلب	17
	الفصل الثالث : توازن السوق التنافسية	
3.1	خصائص سوق المنافسة الكاملة	42
3.2	تحديد سعر السوق	42
3.3	تغيرات سعر السوق	44
3.4	اقتصاد المنشأة	46
	الفصل الرابع : محاسبة التكاليف	
4.1	أنواع التكاليف	52
4.2	تصنيف التكاليف	53
4.3	مخطط نقطة التعادل	54
4.4	تدريبات عامة	60

الفصل الخامس : القيمة الزمنية أو الوقتية للنقود

5.1 مثال (1) القيمة الوقتية للنقود 62
5.2 مثال (2) القيمة الوقتية للنقود 62
5.3 مثال (3) القيمة الوقتية للنقود 63
5.4 حساب الفائدة 65
5.5 مجموع نقدي مفرد 68
5.6 سلسلة من التدفقات النقدية 70
5.7 تعدد فترات الفائدة المركبة 83

الفصل السادس : التكافؤ

6.1 خطط تسديد المال المقرض 90
6.2 تدريبات عامة 97

الفصل السابع : مقارنة الخيارات والبدائل الاستثمارية

7.1 مقدمة 103
7.2 تعريف وتحديد الخيارات الاستثمارية 105
7.3 تحديد الأفق الزمني 107
7.4 إعداد مسار التدفقات النقدية 114
7.5 تحديد معَّدل العائد المجزي الأدنى 114
7.6 مقارنة الخيارات الاستثمارية 115
7.7 تحليل الاستبدال 127
7.8 فترة الاستبدال المثالية 134
7.9 القيام بالتحاليل الإضافية 137
7.10 تدريبات عامة 139
7.11 الإهلاك 144
7.12 ضريبة الدخل 153
7.13 تدريبات عامة 157

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية 158
الكتب والمراجع الإنجليزية 158

ملحقات

ملحقات

الفصل الأول

مقدمة (Introduction)

1.1 مقدمة عامة (General Introduction):

يهتم علم الاقتصاد بدراسة السلوك البشرى في محاولته لإشباع حاجاته ورغباته الكثيرة وهو يختص أساساً بدراسة الدوافع المؤثرة في محاولة الإنسان القيام بتنظيم وإدارة أعماله لتحقيق أهدافه المادية في الحياة في حدود معتقداته وتقاليد المجتمع الذى يعيش فيه. فهو إذن يهدف لدراسة نشاطات الإنسان المتعلقة باستخدام موارده المحدودة والقليلة لإشباع حاجاته المتعددة واللانهائية.

يمكن حصر تعريف علم الاقتصاد بالآتي:

1. آدم اسميث:

هو العلم الذي يدرس الكيفية التي تمكن الأمة من أن تغتني.

2. روبتر:

هو دراسة السلوك الإنساني فيما يتعلق باستخدام موارده المحدودة لإشباع حاجياته اللامحدودة كحلقة وصل بين الأهداف والحاجات المتعددة وبين الوسائل النادرة ذات الاستعمالات المختلفة.

3. سامولسون:

هو دراسة الكيفية التي يختار بها الأفراد والمجتمع الطريقة التي يستخدمون بها مواردهم الإنتاجية النادرة لإنتاج السلع المختلفة على مدى الزمن وكيفية توزيع هذه السلع لغرض الاستهلاك الآن ومستقبلاً على مختلف الأفراد والجماعات في المجتمع.

4. مارشال:

هو العلم الذي يدرس بني الإنسان في إعمال حياتهم فهو يبحث في كيفية حصول الإنسان على دخله وكيفية استعمال هذا الدخل.

الحقيقة التي لا جدال فيها أن الإنسان يحس برغبات ولديه حاجات متعددة يجد إشباعها في الأشياء التي تقدمها له الطبيعة. فالأشياء التي تقدمها الطبيعة ويحصل منها لما يشبع حاجياته إشباعاً كاملاً بدون بذل عناء أو جهد كالهواء لا تثير أي مشكلة اقتصادية، ولكن الأمر ليس كذلك للجزء الأكبر من الحاجات لأن الوسائل المادية التي تقدمها الطبيعة غالباً ما لا تصلح في صورتها الأولى وغالباً لا تكفي لإشباع هذه الحاجات.

الطبيعة تحقق بعض حاجيات الإنسان الملحة مثل توفير الهواء، الماء، حيوانات اللحوم والألبان ... وغيرها دون بذل جهد كبير في تحويلها لصورة استهلاك نهائية.

ومن هذا الوضع ينشأ نوعان من المشاكل في تحويل الموارد إلى شكل نهائي للاستخدام:

1. النوع الأول يظهر بسبب أن الجزء الأكبر من الوسائل المادية التي تعطيها الطبيعة للإنسان (الموارد) لا يصلح في شكله الأولي لإشباع حاجاته لذلك لزم تدخل الجهد الإنساني (العمل) ليحوَّل تلك الموارد الطبيعية ويجعلها في شكل صالح لإشباع الحاجات. ينتج عن ذلك صراعاً بين الإنسان والطبيعة تحكمه قوانين طبيعية وعامة وأوضاعاً فنية تختلف تبعاً للزمان والمكان، وأيضاً في سبيل هذا التحوير يدخل الإنسان في علاقات مع الغير مما يخلع على عمله (الإنتاج) الصفة الجماعية.

موارد الطبيعة مثل ثروات باطن الأرض التي هي البترول والمعادن وظاهر الأرض مثل الماء والأحياء المائية والنبات ... الخ. والهواء، الشمس والرياح.

2. النوع الثاني يظهر بسبب أن الحاجات الإنسانية كثيرة ومتنوعة ومتزايدة وبالتالي غير محدودة في حين أن الموارد المتوفرة بالطبيعة بطبيعتها محدودة، ومن هذا الوضع لابد أن تنشأ مشكلة توزيع الموارد المحدودة على الحاجات الإنسانية الغير محدودة.

هنالك مجموعة من المشاكل والظواهر التي تثير مجموعة من التساؤلات، والتي قد تكون طبيعتها غير اقتصادية ولكن لها بعداً اقتصادياً مثل المشاكل السياسية المعقدة التي تؤدي إلى الحروب والتي

تستهلك جزءاً كبيراً من الموارد، والانفجار السكاني الذي يتطلب تحقيق زيادات في الإنتاج على الأقل تعادل معدلات الزيادة السكانية وأيضاً التفرقة العنصرية التي يمكن أن تؤدي إلى عدم الاستخدام الكامل للموارد البشرية المتاحة وعدم الاستفادة من بعض المواهب والتي تمثل ضياعاً للموارد البشرية. بالتالي يمكن حصر المشاكل ذات الطبيعة اللاقتصادية في المشاكل السياسية وعلاقات الدول، التضخم السكاني، التفرقة العنصرية ... الخ.

وهنالك المجموعة ذات الطبيعة الاقتصادية والتي منها:

– التقنيات الحديثة: تؤثر على أسلوب الإنتاج والاستهلاك. كيف يختار الناس ما يستهلكون وكيف ينتجون؟

– الأجور: تتباين الأجور على الأعمال المختلفة وفي بعض الأحيان قد تبدو متساوية في الجهد. ما الذي يحدد دخل (العامل) ولماذا نجد بعضهم يتحصل على دخل عالي مقارنة بالأخرين؟

– البطالة: تؤثر على معدلات الإنتاج والقوة الشرائية وتضر ببعض مجموعات المجتمع. ما هي أسباب البطالة ولماذا تتأثر بعض المجموعات أكثر من الأخرى؟

– التضخم: ترتفع الأسعار بمعدلات رهيبة تستنفذ معها مدخرات بعض الأفراد في فترة وجيزة. لماذا ترتفع الأسعار بمعدلات عالية في بعض البلدان دون الأخرى وما هي إمكانية التحكم في التضخم؟

– دور الحكومات: تتدخل الحكومات في الصرف على الأنشطة المختلفة وتحديد الضرائب وبالتالي تؤثر على حياة المجتمع. كيف يؤثر الصرف الحكومي والضرائب على الاقتصاد، هل يوجد حد يقف عنده التدخل الحكومي؟

– الغنى والفقر: ثلثي سكان العالم فقراء يستهلكون أقل من خمس ما ينتجه العالم في حين نجد أن خمس سكان العالم أغنياء ويستهلكون ثلثي ما ينتجه العالم. ما الذي يجعل هنالك مفارقات في الثروة بين الأمم مما يجعل بعض المجتمعات فقيرة وبعضها الأخر غنياً؟

- الحضر والريف.

- تلوث البيئة.

1.2 طبيعة المشكلة الاقتصادية (Nature of Economical Problem):

الندرة والاختيار (Scarcity and choice):

تعرف الندرة بأنها ما تريده (الرغبات أو الحاجات) أكثر من الموارد الموجودة والمتاحة (wants always exceeds the resources available to satisfy them) . فالرغبات ليست فقط أكثر من الموارد ولكن كل ما تريده غير محدود في حين أن الموارد محدودة!

كل الأسئلة التي أثيرت تظهر أن المشكلة الاقتصادية تنشأ عند ممارسة العمليات الخاصة باستخدام الموارد المتاحة بهدف إشباع الحاجات البشرية المتعددة والمتنوعة والمتطورة عبر الزمن عن طريق استهلاك السلع (commodities) في شكل بضائع (goods) أو خدمات (services) ، وتعتبر هذه الرغبات غير محدودة (لا نهائية) إلا أن حجم الموارد المتاحة لها لن يكفي باستمرار لتلبية جميع تلك الاحتياجات.

خذ مثلاً أن دخلك أكبر لتشتري ملابس متنوعة، أثاثات جديدة، عربة، مسجل ... الخ وكلها أشياء يود كل إنسان أن يقتنيها وهي لا تنتهي عند حد، والمهم في الأمر حتى لو تيسرت لك السبل في تحقيق هذه الأشياء وتحصلت عليها فإن أشياء جديدة (أي حاجات) سوف تظهر لك وتطالبك بإشباعها.

خذ مثلاً رجل الأعمال يقابل نفس المشكلة عند إدارته لأعماله هل ينتج هذه السلعة أم تلك أم مزيج من السلعتين وكم ينتج من كل نوع، هل يزيد عدد العمال بالمصنع أم يدخل ماكينة يستعيض بها عن العمال، هل يرحل منتوجاته بالوسائل التجارية أم يشتري وسيلة ترحيل ... الخ.

إذن المشكلة الاقتصادية هي حاجات غير محدودة ومتجددة تقابلها وسائل إشباع (أي موارد) محدودة ولا يمكن التغلب على هذه المشكلة تماماً ولكن ما يمكن عمله هو أن نحقق أقصى ما يمكن تحقيقه

مما هو متوفر لدينا من الموارد والإمكانيات أي الحصول على أقصى ما يمكن الحصول عليه من استغلال للموارد.

يقصد بالموارد في حالة الإنتاج عناصر الإنتاج وهي كل العناصر المكونة للثروة، وقد جرى العرف بتصنيفها إلى الأرض والعمل، ورأس المال، والإدارة.

يعرف الإنتاج بأنه كل نشاط يسهم بطريق مباشر أو غير مباشر في إشباع الحاجات الإنسانية أو هو كل نشاط ينتج عنه خلق أو زيادة المنفعة لسلعة ما أو القيام بخدمات لها منفعة وهي الصفة التي تجعل المنتج (سلعة أو خدمة) صالحاً لإشباع الرغبات أو هو إعداد أو موائمة (adaptation) للموارد المتاحة لإشباع الرغبات وذلك بالعمل على تغيير نوعيتها المادية والكيميائية أو الحيوية لتحويلها إلى الصورة التي تحقق الإشباع المباشر للرغبات ويشمل أيضاً التغير المكاني (النقل) والزماني (التخزين) لتلك الموارد.

1.3 عناصر الإنتاج (Elements of Production):

الأرض (Land):

وتشمل الأرض وما عليها وما يحتويه باطنها من ثروات (بترول، فحم، ... الخ) أي كل ما هو طبيعي أو قد تم تطويره.

العمل (Labor):

يقصد بالعمل الجهد الذي يبذله الإنسان ذهنياً (mentally) أو جسمانياً (physically) عند إنتاجه السلع والخدمات.

رأس المال (Capital):

وهو كل ما يساعد في إنتاج الخدمات والسلع النهائية كالمباني والعدد والآلات والمخزون من السلع المصنعة والشبه مصنعة والمواد الخام، ... الخ. أي الثروة التي يستخدمها الإنسان في خلق ثروات أخرى، وهو يشمل كل شيء مصدره الطبيعة أو من صنع الإنسان يستخدم في الإنتاج.

الإدارة (Management):

وهي نوع من أنواع العمل ولكنه يتميز بصفات خاصة ويقوم بها فرد واحد في بعض الأحيان أو مجموعة أفراد ويطلق عليه المنظم أو المنظمون ويربط المنظم بين عوامل الإنتاج وينظمها في وحدة مؤتلفة وينسق بين وظائفها ومن أهم مسئولياته التخطيط للأعمال الجديدة واتخاذ القرارات في كل ما هو غير مؤكد.

أما في حالة الاستهلاك فالموارد هي الوسيلة التي تمكن صاحبها من إشباع حاجاته (أي النقود) التي يشتري بها المستهلك السلع والخدمات المختلفة.

ويقود استغلال الموارد المحدودة إلى الاختيار من بينها حسب أهميتها بالنسبة له. ففي كلا الحالتين (الإنتاج أو الاستهلاك) يجب أن يقرر ما هي السلع والخدمات التي يلزم إنتاجها قبل غيرها وما هي تلك التي يمكن الإقلال منها أو حتى التنازل عنها وهذه مشكلة الاختيار.

ففي حالة الاستهلاك تُرتَّب الحاجيات الهامة والضرورية التي يريد إشباعها أولاً، وفي حالة الإنتاج تُرتَّب السلع المراد إنتاجها ترتيباً يجعل السلع الضرورية والهامة والمراد إنتاجها في أول القائمة.

فترتيب السلع حسب أولويتها وطبقاً لدرجة تفضيل المجتمع واحتياجاته أملته ظروف ندرة الموارد التي أدت إلى الاختيار من بينها وهذا ما يسمى بسلم التفضيل الجماعي.

وللاستفادة القصوى والاستخدام الأمثل لهذه الموارد يقوم الاقتصاديون بتوجيهها وتخصيصها على الاستخدامات المختلفة فمثلاً في حالة إعداد خطة أو برنامج لتنظيم النشاط الاقتصادي (الإنتاج، الاستهلاك والتبادل) تتم مراعاة عدة معايير:

1. أن يتم استخدام الموارد كاملاً أي عدم ترك أي موارد عاطلة.

2. أن يتم تخصيص الموارد على استخداماتها المختلفة (optimal allocation of resources) أي بمعنى عدم إهمال أي فرصة يمكن عن طريقها تحقيق أي زيادة في الإنتاج باستخدام نفس الحجم من

الموارد إذا ما أعيد تخصيصها على الأغراض الإنتاجية المختلفة.

3. أن يتم تخصيص الموارد بالطريقة التي تضمن إنتاج الخليط المطلوب من السلع والخدمات طبقاً لأولويات التفضيل الجماعي.

4. أن يتم توزيع السلع المنتجة بأفضل طريقة ممكنة على أفراد المجتمع أي بالطريقة التي تحقق أقصى إشباع كلي ممكن.

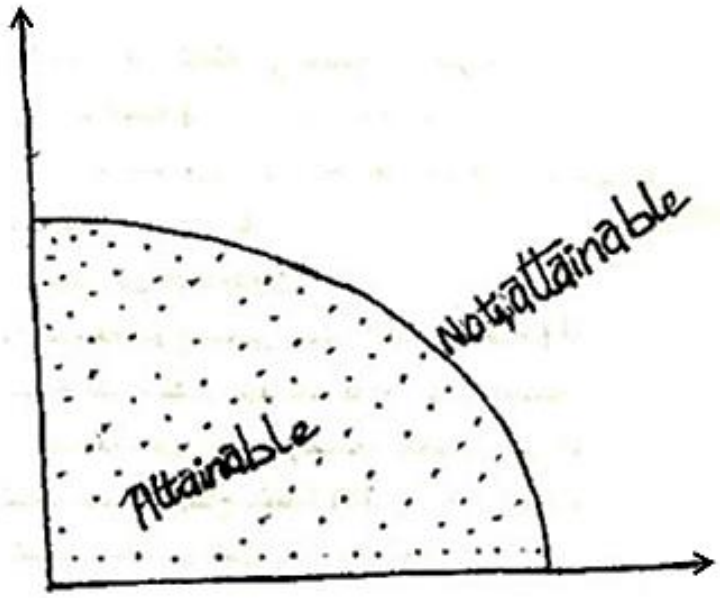
1.4 تكلفة الفرص البديلة (Opportunity Cost):

عندما يواجه الاقتصادي مشكلة تخصيص الموارد على استخداماتها المختلفة فإنه يعلم أنه لا يمكن إنتاج كل الكميات التي يريدها أفراد المجتمع من جميع السلع والخدمات ويعلم أيضا أن زيادة الإنتاج من إحدى السلع، لابد أن يقابله نقص الإنتاج من سلعة أخرى. والجزء الذي يجب التنازل عنه أو التضحية به من السلع الأخرى في مقابل الحصول على قدر محدد من سلعة معينة يعتبر تكلفة الفرصة البديلة لهذا القدر من تلك السلعة.

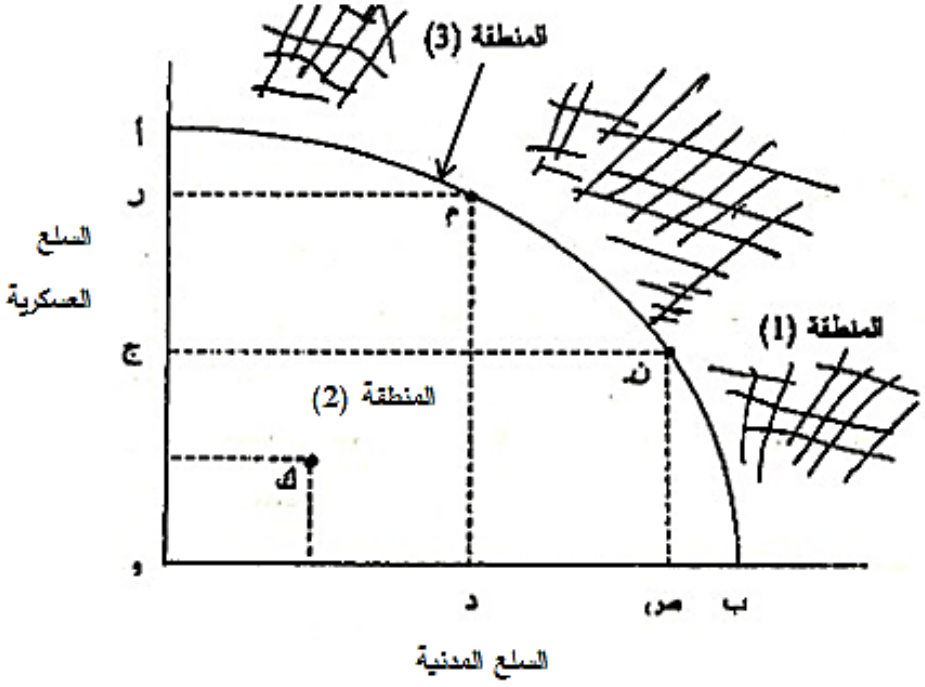
ويمكن تعريف تكلفة الفرصة البديلة بانها التكلفة الخاصة بالحصول على قدر محدد من سلعة ما مقاسة بدلالة ما يجب التنازل عنه من السلع الأخرى في مقابل الحصول على هذه السلعة.

1.5 منحنى إمكانية الإنتاج (Production Availability Curve):

هو منحنى يوضح بين مستويات أو حجم الإنتاج الذي يمكن تحقيقه والغير ممكن التحقيق (the boundary between what is attainable and what is not attainable) كما هو واضح في الشكل (1.1) أدناه.



شكل (1.1) منحنى إمكانية الإنتاج



شكل (1.2) حالة الإنتاج

(أ) حالة الإنتاج:

باعتبار حالة الإنتاج على المستوى القومي ومستخدمين في ذلك منحنى إمكانية الإنتاج (production possibility Frontier) فإذا تصورنا أن مجتمعاً ما يستخدم كل موارده المتاحة لإنتاج نوعين من السلع، الأولى سلع مدنية والأخرى سلع حربية ومن المؤكد أنه من المستحيل إنتاج كميات لا نهائية من السلعتين وإذا تصورنا أن المجتمع قرر استخدام جميع موارده المتاحة وبأقصى كفاءة ممكنة في إنتاج السلع الحربية فقط، فسيوجد قدراً من هذه السلع تمثل أقصى ما يمكن إنتاجه منها وهو ذلك الجزء الممثل بالمسافة الرأسية (و أ) في الشكل (1.2).

وبتطبيق نفس الفرض على السلع المدنية باستخدام جميع الموارد المتاحة وبأقصى كفاءة ممكنة سيوجد قدراً من هذه السلع يمثل أقصى ما يمكن إنتاجه منها وهو ذلك الجزء الممثل بالمسافة الأفقية (و ب) في الشكل (1.2). ويربط منحنى إمكانية الإنتاج بين النقطتين (أ ب). وتوضح الفكرة انه إذا أراد المجتمع بدلاً من أن يستخدم كل موارده المتاحة في إنتاج نوع واحدد من السلع (حربية – مدنية)، أراد أن ينتج مزيجاً من السلعتين فإن النقطة التي توضح ذلك المزيج تقع على المنحنى (أ ب). مثلاً النقطة (م)، والنقطة (ن)، فعند النقطة (م) يكون المجتمع قد أنتج مزيج من السلعتين (و ر) من السلع الحربية، (و د) من السلع المدنية والنقطة (ن) تمثل مزيجاً آخراً من هذين النوعين من السلع فهي تمثل (و ج) من السلع الحربية، (و ص) من السلع المدنية.

يميز هذا المنحنى بين ثلاث مناطق:

1. المنطقة خارج منحنى إمكانية الإنتاج (المظللة) المنطقة (1) أعلى المنحنى (أ ب) وتمثل المجموعات السلعية الغير ممكن إنتاجها لعدم كفاية الموارد المتاحة.

2. المنطقة داخل المنحنى (المساحة المحصورة بين المنحنى والمحورين) المنطقة (2) وتمثل المجموعات السلعية الممكنة الإنتاج. النقطة (ك) إنتاج أي مجموعة سلعية داخل هذه المنطقة يعني

عدم الاستخدام الكامل والأمثل للموارد المتاحة.

3. المنطقة التي يمر بها المنحنى (الواقعة على المنحنى نفسه) المنطقة (3) وهي تمثل جميع المجموعات السلعية التي يمكن إنتاج إحداها إذا تم استخدام الموارد المتاحة استخداماً كاملاً وأمثلاً في نفس الوقت (النقاط) (م)، (ن).

يوضح منحنى إمكانية الإنتاج الندرة والاختيار وتكلفة الفرصة البديلة كما يلي:

فيوضح الندرة بأنه لا يمكننا خارج المنحنى (أ ب) وذلك لأن موردنا النادرة والمحدودة لا تمكننا أن نحقق الإنتاج، النقاط (م) و (ن) على المنحنى (أ ب) تمثل الاختيار كما أنه يمكننا الاختيار بين مزيج من السلع عند استخدام جميع الموارد وبطريقة مثلى.

أما تكلفة الفرصة البديلة فتوضح كالآتي:

إذا كنا على النقطة (م) على المنحنى فإن ذلك يعني أننا أنتجنا ما مقداره (و ر) من السلع الحربية و (و د) من السلع المدنية وإذا تحركنا في الاتجاه الأسفل على المنحنى فإننا نصل النقطة (ن) مثلاً وبذلك نكون قد أنتجنا (و ج) من السلع الحربية و (و ص) من السلع المدنية. أي أننا تحصلنا على مزيج أخر من أنواع السلع الحربية والمدنية. ولقد كان نتيجة ذلك أن فقدنا ما مقدارها (ر ج) من السلع الحربية (و ر – و ج = ر ج) وأضفنا للسلع المدنية ما مقداره (ص د) سلع مدنية (و ص – و د = ص د). فهذا المقدار الذي ضحينا به من السلع الحربية (ر ج) فهو تكلفة الفرصة البديلة لحصولنا على المقدار (ص د) من السلع المدنية. أي هو المقدار الذي لابد أن تضحي به من السلع الحربية (ر ج) لكي تتمكن من الحصول على المقدار (ص د) من السلع المدنية.

وبنفس الطريقة إذا تحركنا إلى أعلى على المنحنى من النقطة (ن) إلى النقطة (م) فإن تكلفة الفرصة البديلة لحصولنا على المقدار (ر ج) من السلع الحربية هو المقدار (ص د) من السلع المدنية الذي تم التضحية به.

(ب) الاستهلاك:

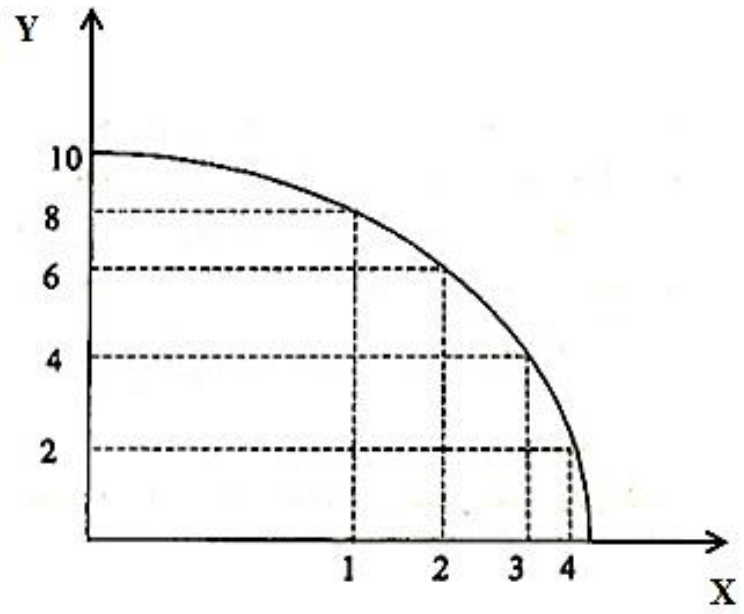
بافتراض أن هنالك شركة ما خصصت مبلغ 10 دولارات لشراء قطعة غيار وإذا كان هنالك نوعين من قطع الغيار X وقيمتها 2 دولار و Y وقيمتها 1 دولار فإن الشركة سوف تقابل الخيارات التالية الموضحة في الجدول (1.1) أدناه:

جدول (1.1) المفاضلة بين نوعين من قطع الغيار

قطعة غيار X 2 دولار	قطعة غيار Y 1 دولار
0	10
1	8
2	6
3	4
4	2
5	0

والخيارات التي تقابلها الشركة هي إما أن تنفق كل النقود في شراء النوع الأول وبالتالي شراء 5 قطع غيار من النوع (X) وصفر من النوع (Y) أو شراء 10 قطع غيار من النوع (Y) وصفر من النوع (X) أو تختار أي مزيج من النوعين.

على نحو ما موضح في الجدول (1.1) والمنحنى شكل (1.3) فإذا اختارت الشركة المزيج الذي به 6 قطع غيار من النوع (Y) و 2 قطعة غيار من النوع (X) وقررت أن تتركه وتختار المزيج 4 قطع غيار من النوع (Y) و 3 قطع غيار من النوع (X) فإنها بذلك تضحي بقطعتي غيار من النوع (Y) في سبيل الحصول على قطعة غيار واحدة من النوع (X). وتكون قطعتي الغيار من النوع (Y) التي افتقدتهما هي تكلفة الفرصة البديلة في سبيل حصولها على قطعة غيار واحدة من النوع (X).



شكل (1.3) منحنى إمكانية الاستهلاك

فتكلفة الفرصة البديلة تقابلنا في حياتنا اليومية كأفراد فكما ان المجتمع يحظى بقدر محدود من الموارد المتاحة يقوم الفرد بانفاقاته المختلفة على السلع المختلفة والخدمات بدخل محدود، فإذا قرر أحد الأفراد تجديد أثاث المنزل قد يضطر في مقابل ذلك إلى التنازل عن الذهاب إلى المصيف ويمثل هذا التنازل تكلفة الفرصة البديلة لتجديد أثاث المنزل والوقت يعتبر نادراً فحتى أنت نفسك إذا كان في مقدرتك عمل شيئاً آخر في هذه اللحظة التي تطالع فيها كتاب الاقتصاد الهندسي فهذا الشيء هو تكلفة الفرصة البديلة لقراءتك هذا الكتاب.

1.6 أركان المشكلة الاقتصادية (Economic Problem):

لحل المشكلة الاقتصادية مشكلة ندرة الموارد أو الموارد المحدودة بالنسبة للاحتياجات المتزايدة نجد هنالك عدة مسائل يبحث فيها الاقتصاديون مهما كانت النظم الاقتصادية التي ينتمون إليها رأسمالية كانت أم اشتراكية أم نظم اقتصادية مختلطة ولحل هذه المشاكل على الاقتصادي أن يجد الوسائل والمعايير التي تساعده في الإجابة عليها عند قيامه بوضع البرنامج الخاص بتنظيم النشاط الاقتصادي (تخصيص الموارد المتاحة على استخداماتها المختلفة).

وهذه المسائل التي تنتظر الحل هي أركان المشكلة وهي:

1. ماذا ننتج: أي ما هي السلع والخدمات التي يرغب المجتمع في إنتاجها وبأي كميات؟ وذلك حسب الموارد المتاحة في المنطقة المعينة مثل صناعة الاسمنت في منطقة توافر الحجر الجيري وغيرها. والسبب في ذلك أنه لو كانت الموارد غير محدودة لأمكن إنتاج أي شيء أخر يرغب فيه المجتمع ولما لم يسأل ذلك السؤال ولما كان هنالك ضرورة من وجود علم الاقتصاد.

ولكن ندرة الموارد بالنسبة للاحتياجات اللانهائية تستلزم ترتيب احتياجات المجتمع طبقاً لدرجة أولويتها وهذا ما يسمى بسلم التفضيل الجماعي. والذي لابد أن يكون قد أسقط بعض الاحتياجات غير المفضلة من الحسبان بسبب ندرة الموارد وتبقى أن توظف الموارد على الاستخدامات بغرض إنتاج السلع التي تم تفضيلها.

2. كيف ننتج: أي ما هي الطريقة الإنتاجية المثلى للحصول على سلعة أو خدمة معينة؟ هنالك أكثر من طريقة فنية لإنتاج السلع وتختلف طرق الإنتاج باختلاف النسب التي يتم بها خلط خدمات عوامل الإنتاج (الموارد). وذلك باستخدام عامل الإنتاج المناسب، التكنولوجيا ورأس المال المناسب.

وبافتراض أن الطرق الإنتاجية المختلفة يتم فيها التشغيل الكامل لجميع الموارد المتاحة فيجب أن يكون أساس المفاضلة بين هذه الطرق المتباينة هو حجم الإنتاج الكلي الذي تحصل عليه والطريقة التي تحقق أقصى إنتاج كلي ممكن ستمثل أقصى تحقيق للموارد.

3. لمن ننتج: أي كيف يتم توزيع السلع والخدمات المنتجة على أفراد المجتمع؟ يجب معرفة العوامل التي تحدد الكيفية التي يتم بها توزيع الدخل القومي للدولة بين الجماعات المختلفة مثل أصحاب الأراضي، العمال، أصحاب رؤوس الأموال (المنظمين) أي عناصر الإنتاج فيسمى دخل العمال الأجور ودخل رأس المال الفائدة وعائد الأراضي (الريع) والمنظمين الربح ولابد من وسيلة تحدد دخل كل فئة من هذه الفئات.

4. هل موارد المجتمع مستغلة استغلالاً كاملاً أم أن هناك بعض الموارد عاطلة والتي تسبب ضياعاً على المجتمع؟ بالرغم من أن الموارد توصف بأنها نادرة إلا أننا نجدها في أحيان كثيرة عاطلة وبدون توظيف وهذه تخلق مشكلة البطالة ويكون وضعها داخل منحنى إمكانية الإنتاج وتهدف السياسات في مثل هذه الحالات إلى التخلص من هذه المشكلة بتوظيف الموارد الكاملة وبذلك تعمل على إرجاع الاقتصاد مرة أخرى على منحنى إمكانية الإنتاج. وجود الموارد العاطلة يتشابه مع عدم الاستخدام الأمثل لها وفي كلا الحالتين يعمل الاقتصاد داخل منحنى إمكانية الإنتاج ولكن الأسباب مختلفة ففي الأولى بسبب أن الموارد عاطلة بينما في الثانية عدم التخصيص الأمثل لهذه الموارد على استخداماتها.

5. هل القوة الشرائية للدخول النقدية لأفراد المجتمع ولمدخراتهم ثابتة أم ان التضخم يلتهم جزءاً منها؟ التضخم في نهاية الأمر يرتبط بحجم الإصدار النقدي في المجتمع ومن ثم فهنالك الكثير من التساؤلات حول أسباب ونتائج تغير حجم الإصدار النقدي ودوافعه وأثر ذلك على مستويات الأسعار.

6. كيف يمكن ضمان تحقيق معدل نمو مرتفع للنمو الاقتصادي؟ ويعنى هذا السؤال بوسائل تحسين وزيادة الطاقة الإنتاجية للمجتمع بتنمية موارده المتاحة كماً ونوعاً والنجاح فيه يؤدي إلى نقل منحنى إمكانية الإنتاج بأكمله إلى الخارج.

أما حل هذه المشاكل بالإجابة على هذه الأسئلة فيختلف من نظام اقتصادي لآخر، ففي النظام الرأسمالي مثلاً (نظام الاقتصاد الحر) هنالك عاملان مهمان يعملان داخل النظام ويقومان بالتوجيهات المطلوبة بالإضافة إلى ذلك مؤشر هام (جهاز الإئتمان) يعمل بالتناسق مع هذين العاملين وعن طريق هذا التنظيم يقوم النظام الرأسمالي بتحقيق التوازن المطلوب وذلك بتقديم الحلول للمشاكل المذكورة.

أما حل المشاكل في النظام الاشتراكي فيعتمد كلياً على جهاز التخطيط المركزي حيث تقوم الهيئة العليا للتخطيط بتحديد الأسعار وحجم الاستثمار ونوع السلع وتحديد الأجور.

1.7 الاقتصاد الجزئي (Partial Economy):

يهتم الاقتصاد الجزئي بدراسة إنتاج السلع والخدمات بواسطة المنشآت والصناعات كما يهتم بإنفاق المستهلكين على السلع فوحدة الدراسة هي الجزء وليس الكل، فالاقتصاد الجزئي يحاول أيضاً تعيين الكيفية التي يتم بها تعيين السعر للسلعة المنتجة وتحديد مستوى الإنتاج للمنشاة الذي يحقق أكبر ربح وكيف تستطيع هذه المنشأة أن تحقق أقل تكلفة بتجميع عوامل الإنتاج لإنتاج هذه السلعة. كما يبحث في الأساس الذي يتم وفقاً له قيام المستهلك بتوزيع دخله المخصص للإنفاق على جميع السلع والخدمات التي يرغب في استهلاكها بحيث يعظم إشباعه من هذا الإنفاق.

1.8 الاقتصاد الكلي (Total Economy):

يحدد الاقتصاد الكلي التجمعات والمتوسطات الخاصة بالنظام أو الجهاز الاقتصادي وهو بذلك يجاوب على الأسئلة الخاصة بالتوظيف والبطالة والتشغيل الكامل وأيضاً عن التضخم ومستوى استقرار الأسعار، وهكذا.

الفصل الثاني

علم الإقتصاد (Economics Science)

2.1 تعريف علم الاقتصاد (Definition of Economics Science):

يمكن تعريف علم الاقتصاد استناداً على ما سبق بأنه ذلك العلم الذي يهتم بتفسير ووضع معايير للسلوك الإنساني عند قيامه باستخدام الموارد المتاحة والمحدودة لإشباع احتياجاته اللانهائية وغير المحدودة، بحيث توضع تلك الموارد في أفضل استخداماتها الممكنة ويتم الإنتاج طبقاً لسلم التفضيل الجماعي مع العمل المستمر على زيادة هذه الموارد كماً وتحسينها نوعاً حتى يمكن تحقيق معدلات مرتفعة للاقتصاد القومي لضمان ارتفاعات حقيقية في مستويات المعيشة.

2.2 أهداف الاقتصاد (Objectives of Economics):

عموماً أهداف الاقتصاد هي استنباط سياسات أفضل لتقليل مشاكل المجتمع وزيادة فوائده ويمكن تلخيص أهدافه في الآتي:

1. تقليل حجم البطالة.
2. تثبيت الأسعار.
3. رفع كفاءة الإنتاج.
4. العدالة في توزيع الدخل (الثروة)
5. استمرارية النمو لرفع مستوى المعيشة.

2.3 الاقتصاد الهندسي (Engineering Economics):

الهندسة هي تطبيق للعلوم والمعارف لحل مشكلات المجتمع بأبسط ما يمكن وبأقل التكاليف لتحقيق الأرباح، فبالتالي يكون المهندس في كثير من الأحيان مسئول عن اتخاذ القرار من بين عدة بدائل، وللجانبين الفني والاقتصادي الأثر في اتخاذ ذلك القرار، ولهذا يحتاج المهندس إلى الإلمام بالأسس

الاقتصادية حتى يستطيع القيام بتقييم المنشآت، والمشاريع البديلة، واختيار الأنسب منها من حيث الجدوى الاقتصادية من بعد جدوتها فنياً. وهذه الأسس والأساليب تعرف بالاقتصاد الهندسي.

2.4 العرض والطلب (Demand and Supply):

2.4.1 الطلب (Demand):

يقصد بالطلب على سلعة معينة الكميات التي يرغب المستهلكون في شرائها من هذه السلعة بحيث يكونوا قادرين فعلاً على شرائها وذلك عند كل ثمن من الأثمان خلال فترة زمنية معينة.

محددات الطلب:

هي أهم العوامل المؤثرة على طلب سلعة معينة ويمكن تلخيصها في الآتي:

i. الأذواق أو التفضيلات:

يتمشى الطلب مع أذواق وتفضيلات أفراد المجتمع فزيادة التفضيل لسلعة معينة قد يؤدي إلى زيادة الطلب عليها.

فالأذواق ترتبط أساساً بالاحتياجات البيولوجية والنفسية والفيزيولوجية للإنسان أكثر من ارتباطها بالعوامل الاقتصادية ولكن هناك ما قد يؤثر على الأذواق مثل الحملات الإعلانية.

ii. الحجم الكلي للسكان:

كلما زاد حجم السكان تزداد الحاجة إلى السلع المختلفة ومن ثم تزداد الكميات المطلوبة.

iii. متوسط الدخل الفردي:

يتوقف طلب سلعة على الدخل الفردي في المتوسط، فكلما زاد متوسط الدخل الفردي كلما زادت الكمية التي يطلبها من سلعة معينة.

iv. توزيع الدخل في المجتمع:

يعتمد الطلب على كيفية توزيع الدخل بين أفراد المجتمع فإذا كان هناك تفاوت كبير في التوزيع

بحيث تحصل الأقلية على الجزء الأكبر من الدخل في المجتمع فسيكون في هذه الحالة شكل الطلب (النمط الاستهلاكي) مختلفاً تماماً عنه في حالة توزيع الدخل بطريقة فيها قدر من العدالة.

v. ثمن السلعة:

يتأثر الطلب بثمن السلعة فكلما ارتفع الثمن كلما قلت أو انخفضت الكمية المطلوبة منها.

vi. أثمان السلع الأخرى:

يتأثر الطلب على سلعة معينة على أثمان العديد من السلع الأخرى. ويفرق الاقتصاديون بين السلع البديلة (substitutes) والسلع المكملة (compliments) عند وصف العلاقة بين سلعتين. وتعرف السلع البديلة بأنها السلع التي تحل محل بعضها البعض في الاستهلاك مثل (الشاي والبن)، (القمح والذرة)، ومع انخفاض ثمن السلعة البديلة من المتوقع أن ينقص الطلب على السلعة الأخرى الأصلية أما السلع المكملة فهي السلع التي تستخدم معاً (go together) فيزيد أو يقل الاستهلاك في السلعتين معاً ومن المتوقع أن يؤدي انخفاض ثمن إحداها إلى زيادة الطلب على السلعة الأخرى. فانخفاض ثمن السيارات تؤدي إلى زيادة الطلب على البنزين.

2.4.2 دالة الطلب (The demand function):

تمثل دالة الطلب على سلعة معينة العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة (Q_D) كمتغير تابع وكل العوامل المؤثرة فيها كمتغيرات مستقلة.

$$Q_D = f(P_1, I, P_{S1}, P_{S2}, \dots, P_{Sn}, H, M, I_D)$$

حيث:

Q_D الكمية المطلوبة من السلعة المعينة

P_1 ثمن السلعة

I متوسط الدخل

P_{Sn} ثمن السلعة البديلة (n تمثل عدد السلع البديلة)

H حجم السكان

M الأذواق والتفضيلات

I_D توزيع الدخل

عند دراسة أثر كل من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع يلجأ دائماً إلى افتراض ثبات العوامل الأخرى.

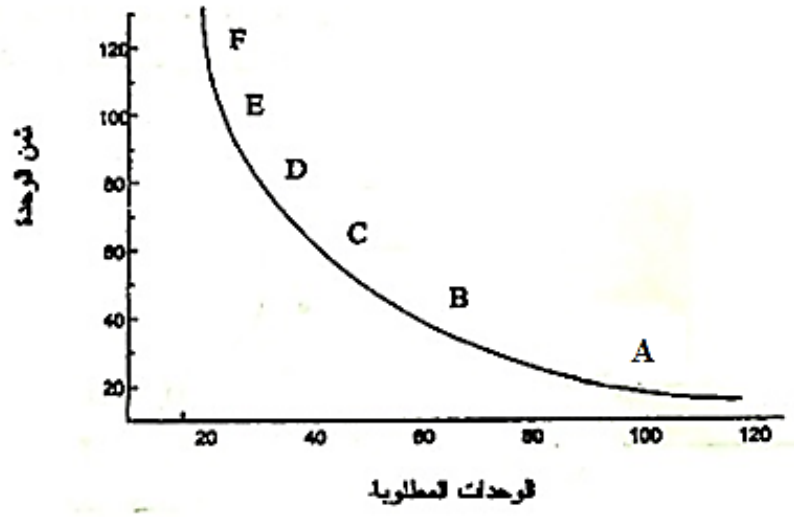
2.4.3 العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة وثمنها:

بافتراض ثبات كافة العوامل في دالة الطلب عدا ثمن السلعة من المتوقع ان تزيد الكمية المطلوبة مع انخفاض الثمن وتقل مع ارتفاع الثمن. وتفسير ذلك (أنه مع انخفاض ثمن السلعة، تصبح أرخص نسبياً من السلع الأخرى البديلة لها ومن ثم تزيد الكمية المطلوبة منها، والعكس صحيح). ويطلق الاقتصاديون على العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة وثمنها بقانون الطلب. أي (عند ثبات العوامل الأخرى وعند زيادة سعر السلعة تقل الكمية المطلوبة منها).

الجدول (2.1) أدناه والشكل (2.1) أدناه يوضحان الكميات المطلوبة من سلعة عند أثمان مختلفة في السوق خلال فترة زمنية محددة.

جدول (2.1) الكميات المطلوبة من سلعة عند اسعار مختلفة

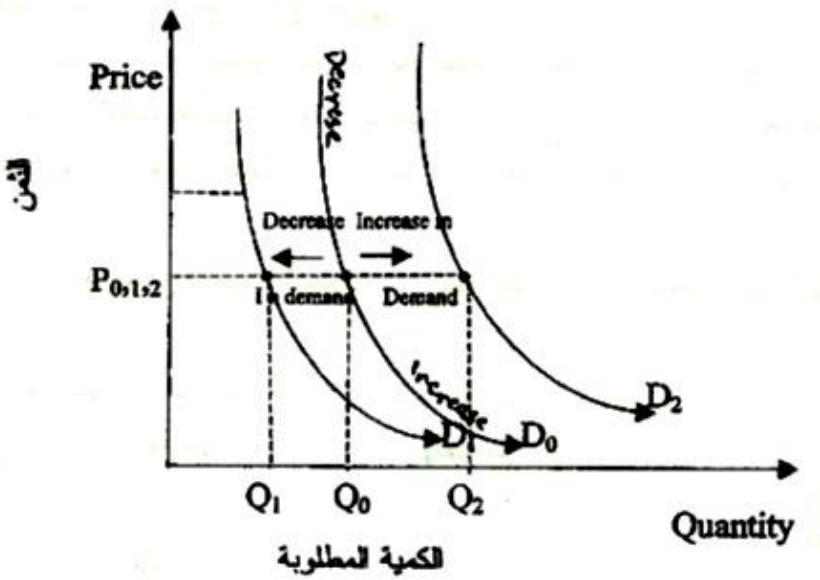
السلعة	الكمية المطلوبة من السلعة (ألف طن كل شهر)	الثمن لكل طن من السلعة (وحدة نقدية)
A	100	20
B	90	40
C	77.5	60
D	67	80
E	62.5	100
F	60	120



شكل (2.1) كميات ضد اسعار

2.4.4 تغير الطلب (انتقال منحنى الطلب):

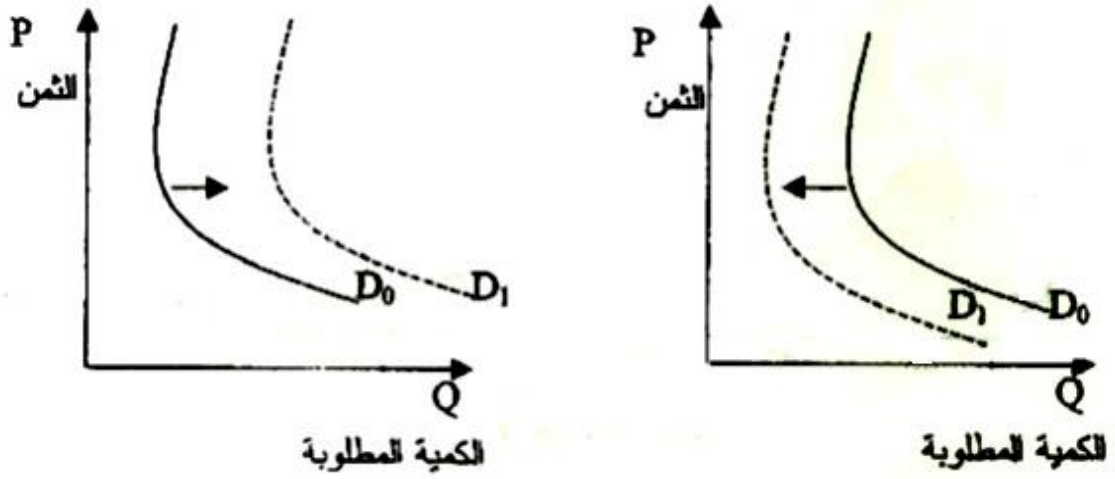
يقصد بتغير الطلب التغيير في الكمية المطلوبة عند كل ثمن من الأثمان حيث يزيد الطلب عندما ينتقل منحنى الطلب بأكمله لأعلى جهة اليمين فتزيد الكميات المطلوبة عند كل ثمن من الأثمان. ويرجع التغير في الطلب ليس إلى تغير ثمن السلعة ولكن إلى تغير العوامل الأخرى في دالة الطلب الشكل (2.2) أدناه.



شكل (2.2) تغير منحنى الطلب

i. أثر تغير الدخل:

تؤدي الزيادة في الدخل مع بقاء العوامل الأخرى على حالها إلى زيادة الكمية المطلوبة في معظم الحالات أي ينتقل منحنى الطلب لأعلى جهة اليمين والعكس صحيح في حالة نقص الدخل الشكل (2.3) أدناه.



شكل (2.3) أثر تغير الدخل

ii. أثر تغير أثمان السلع الأخرى:

1. السلع البديلة: عند ارتفاع ثمن سلعة بديلة يؤدي ذلك إلى انتقال منحنى الطلب على السلعة الأصلية إلى جهة اليمين (أي زيادة الطلب على السلعة الأصلية). فمثلاً عند ارتفاع ثمن خدمة المواصلات العامة قد يميل الأفراد إلى استخدام سياراتهم الخاصة وبالتالي زيادة الطلب على البنزين.

2. السلع المكملة: عند ارتفاع ثمن السلع المكملة سيؤدي إلى انتقال منحنى الطلب إلى أسفل جهة اليسار والعكس صحيح. فمثلاً عند ارتفاع ثمن السيارات سيقل الطلب على البنزين.

3. أثر التغير في الأذواق: يؤدي تغير الأذواق لصالح سلعة معينة مع بقاء العوامل الأخرى على حالها إلى زيادة الطلب على تلك السلعة والعكس صحيح.

4. أثر التغير في السكان: تؤدي زيادة السكان مع ثبات العوامل الأخرى إلى زيادة الكمية المطلوبة والعكس صحيح.

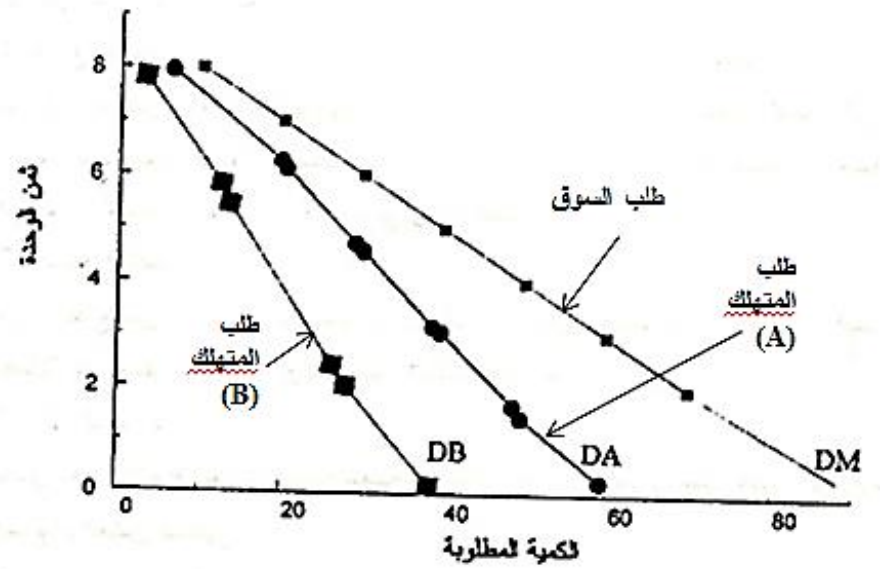
5. أثر التغير في توزيع الدخل: قد يترتب على التغير في توزيع الدخل في المجتمع تغير في الدخل الفردي، فقد يزيد دخل بعض الأفراد نتيجة لإعادة توزيع الدخل وبالتالي يزيد طلبهم على السلع التي يفضلونها وينتقل منحنى الطلب الأصلي إلى أعلى بينما العكس للذين انخفضت دخولهم فسينتقل منحنى الطلب إلى اليسار.

2.4.5 طلب السوق (Market demand):

هو التجميع الأفقي لطلبات كل المستهلكين الأفراد لهذه السلعة أي أن الكمية المطلوبة في السوق عند كل ثمن من الأثمان هي عبارة عن مجموع الكميات التي يطلبها كل المستهلكين الأفراد عند هذا الثمن. الجدول (2.2) والشكل (2.4) أدناهما يوضحان طلب المستهلكين وطلب السوق.

جدول (2.2) طلب المستهلكين الأفراد وطلب السوق

الكمية المطلوبة في السوق (A+B)	الكمية التي يطلبها المستهلك (B)	الكمية التي يطلبها المستهلك (A)	الثمن
2	0	2	10
6	1	5	9
13	5	8	8
22	10	12	7
30	14	16	6
39	18	21	5
49	22	17	4
60	25	35	3
72	27	45	2
89	29	60	1



شكل (2.4) طلب المستهلكين الأفراد وطلب السوق

2.4.6 مرونة الطلب:

مفهوم المرونة: هي مقدار استجابة متغير بالنسبة لمتغير أخر حيث تعرف مرونة المتغير B بالنسبة للمتغير A بالرمز $(\eta_{B,A})$ وهي نسبة التغير في (B) الذي يحدث نتيجة تغير (A) بنسبة 1%.

$\eta_{B,A}$ = نسبة التغير في (A) ÷ نسبة التغير في (B)

$$\eta_{B,A} = \frac{\Delta B}{B} / \frac{\Delta A}{A}$$

ويستخدم هذا المقياس لقياس مدى استجابة (تجاوب)الطلب على سلعة ما وتغير سعرها. يتميز هذا المقياس باستقلاله عن الوحدات المستخدمة في قياس المتغيرات (dimensionless).

i. مرونة الطلب السعرية (Price elasticity of demand):

تعرف بأنها مقياس للتغير أو الاستجابة النسبية في الكمية المطلوبة من السلعة نتيجة للتغير في سعرها.

مرونة الكمية المطلوبة بالنسبة لسعرها $\eta_{Q,P} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{\mathrm{P}}{\Delta P} = \frac{-\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{\mathrm{P}}{Q}$

حيث:

P الثمن

Q الكمية المطلوبة

وضعت الإشارة السالبة لكي تكون قيمة معامل المرونة موجبة بما أن $\Delta Q, \Delta P$ يرتبطان عكسياً.

تصلح هذه المعادلة فقط عندما تكون التغيرات صغيرة جداً في الكمية المطلوبة والثمن. وتستخدم بدلاً عنها المعادلة:

$$\eta_{Q,P} = \frac{\Delta Q}{Q_m} \times \frac{\Delta P}{P_m} = \frac{-\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_m}{Q_m}$$

حيث:

P_m متوسط السعر = $(P_0 + P_1)/2$

Q_m متوسط الكمية = $(Q_0 + Q_1)/2$

ΔQ التغير في الكمية = $Q_1 - Q_0$

ΔP التغير في السعر = $P_1 - P_0$

مثال : افترض المعلومات التالية عن أسعار النفط من منظمة OPEC

السعر للبرميل ($)	**الكمية المطلوبة (مليون برميل)**
9.5	41
10.5	39

أوجد مرونة الكمية المطلوبة بالنسبة لسعرها.

الحل:

$$P_0 = 9.5\$ \qquad Q_0 = 41$$
$$P_1 = 9.5\$ \qquad Q_1 = 41$$

$$\text{متوسط السعر } P_m = \frac{P_0 + P_1}{2} = \frac{9.5 + 10.5}{2} = 10$$

$$\text{التغير في السعر } \Delta P = P_1 - P_0 = 10.5 - 9.5 = 1$$

$$\text{متوسط الكمية المطلوبة } Q_m = \frac{Q_0 + Q_1}{2} = \frac{41 + 39}{2} = 40$$

$$\text{التغير في الكمية المطلوبة } \Delta Q = Q_1 - Q_0 = 39 - 41 = -2$$

$$\eta_{Q,P} = \frac{-\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_m}{Q_m} = -\left[\frac{-2}{1}\right] \times \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = 0.5$$

ويستخدم هذا المقياس لتصنيف الطلب على السلع كالآتي:

1. السلعة المرنة $\eta_{Q,P} > 1$

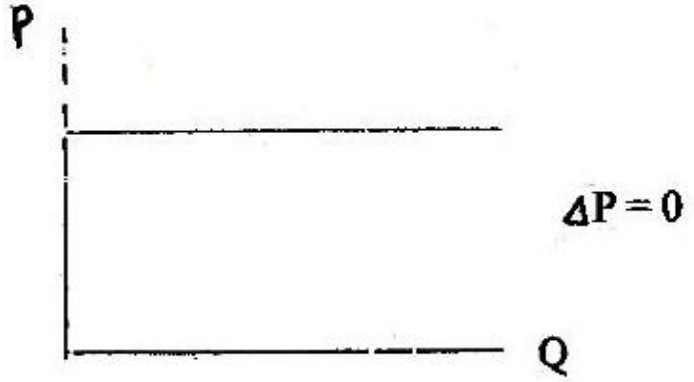
2. السلعة متكافئة المرونة $\eta_{Q,P} = 1$

3. السلعة قليلة المرونة $\eta_{Q,P} < 1$

يلاحظ أن مرونة الطلب السعرية يمكن أن تنحصر بين الصفر وإلى ما لا نهاية $0 \leq \eta_{Q,P} \geq \infty$

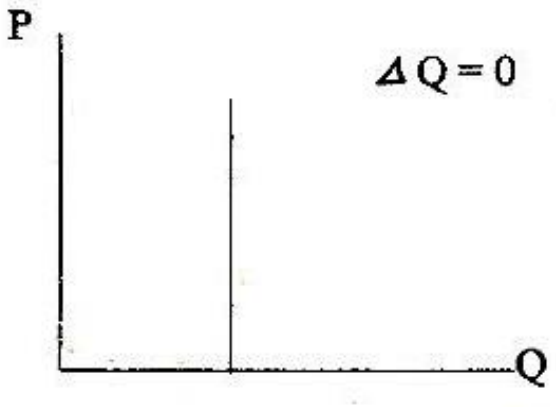
وهنالك 5 حالات يمكن اعتبارها:

a. طلب مرن تماماً تام المرونة (مثالي) (perfectly elastic demand) إذا كانت $\eta_{Q,P} = \infty$ أي بتغير طفيف جداً في الثمن يقابله تغير كبير جداً في الكمية المطلوبة ويمثل بياناً بخط أفقي مستقيم كما هو واضح في الشكل (2.5) أدناه.



شكل (2.5) طلب مرن تام المرونة

b. طلب غير مرن تماماً (perfectly inelastic demand) إذا كانت $\eta_{Q,P} = 0$ أي تغير في الثمن لا يقابله تغير في الكمية المطلوبة ويمثل بياناً بخط رأسي مستقيم، ومثال ذلك الخدمات الطبية وخاصة ذات الاستعمال المستديم من جانب المستهلكين (المطلوبة). ويتم توضيحه في الشكل (2.6) أدناه.

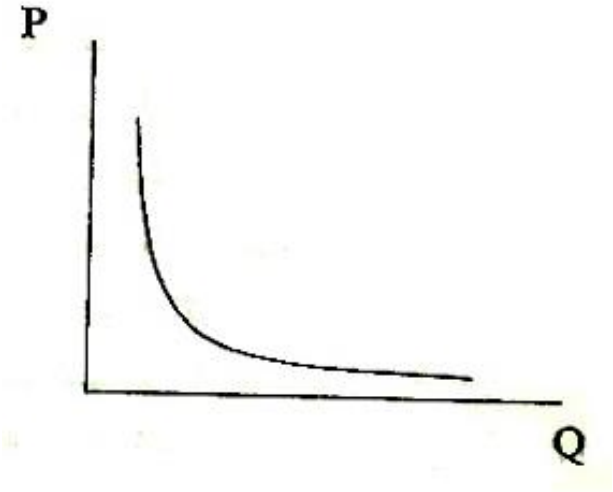


شكل (2.6) طلب غير مرن تماماً

c. طلب متكافئ المرونة (مرونته وحدة) ((unitary elasticity of demand إذا كانت $\eta_{Q,P} = 1$ ويعني أن التغيرات في الثمن والكمية المطلوبة تكون بنفس النسبة، أي تغير نسبي في ثمن السلعة يقابله تغير نسبي مماثل في الكمية المطلوبة ويظهر بيانياً منحنى الطلب بقطع زائد (rectangular hyperbola) (معظم السلع تصنف في مدى هذه الثلاث حالات). ويتم توضيحه في الشكل (2.7) أدناه.

$$\frac{\Delta P}{P_m} = \frac{\Delta Q}{Q_m}$$

$$\Delta P\% = \Delta Q\%$$



شكل (2.7) طلب متكافئ المرونة

d. طلب مرن (elastic demand) إذا كانت $1 < \eta_{Q,P} < \infty$ ويعني أن تغير ثمن السلعة بنسبة معينة سيؤدي إلى تغير بنسبة أكبر في الكمية المطلوبة فالتغيرات الطفيفة في الثمن تصاحب بتغيرات كبيرة وملموسة في الكمية المطلوبة.

$$\frac{\Delta P}{P_m} < \frac{\Delta Q}{Q_m}$$

e. طلب غير مرن (inelastic demand) إذا كانت $0 < \eta_{Q,P} < 1$ حيث يؤدي تغير ثمن السلعة بنسبة معينة إلى تغير في الكمية المطلوبة بنسبة أقل.

$$\frac{\Delta P}{P_m} > \frac{\Delta Q}{Q_m}$$

علاقة مرونة الطلب السعرية والإنفاق الكلي:

يمكن استخدام فكرة مرونة الطلب السعرية في بيان كيفية تغير الإنفاق الكلي من جانب المستهلكين على سلعة معينة استجابة لتغيرات ثمنها.

$$\text{الإنفاق الكلي} = P \times Q$$

الجدول (2.3) أدناه يوضح العلاقة بين تغير ثمن السلعة والإنفاق الكلي.

جدول (2.3) العلاقة بين نوع الطلب والإنفاق

نوع الطلب	الإنفاق في حالة زيادة الثمن	الإنفاق في حالة انخفاض الثمن
مرن $(\eta_{Q,P} > 1)$	ينخفض	يرتفع
متكافئ المرونة $(\eta_{Q,P} = 1)$	لن يتغير	لن يتغير
قليل المرونة $(\eta_{Q,P} < 1)$	يرتفع	ينخفض

العوامل المؤثرة في المرونة السعرية للطلب:

أهم العوامل التي تجعل الطلب مرناً أو قليل المرونة هي:

1. مدى ضرورة السلعة: عندما تكون السلعة ضرورية للمستهلك يتوقع أن ارتفاع الثمن بنسبة كبيرة لن يؤدي إلى تخفيض الكميات المطلوبة منها، مثل (الدقيق) بل قد لا يتغير إطلاقاً إذا كان لا يمكن الاستغناء عنها مثل (الدواء) ويقال الطلب غير مرن في الحالة الأولى وعديم المرونة في الحالة الثانية، أما إذا كانت السلعة كمالية حيث يستطيع المستهلك الاستغناء عنها فالطلب يكون مرن.

2. مدى إتاحة البدائل المختلفة للسلعة: كلما زاد عدد البدائل التي يمكن أن تحل محل سلعة معينة كلما زادت مرونة الطلب على هذه السلعة والعكس صحيح.

3. عدد الاستخدامات للسلعة: كلما زاد عدد الاستخدامات الممكنة للسلعة كلما زادت درجة مرونة الطلب السعرية للسلعة. السلعة ذات الاستخدام الواحد أو عدد قليل من الاستخدامات تكون مرونتها قليلة.

4. درجة تكامل السلعة مع السلع الأخرى: كلما زادت درجة تكامل السلعة مع السلع الأخرى كلما كان الطلب قليل المرونة والعكس صحيح، فالبنزين يرتبط استعماله بالسيارات ومن ثم لا تنخفض الكميات المطلوبة منه بدرجة كبيرة عند ارتفاع ثمنه.

ii. مرونة الطلب التبادلية (مرونة التقاطع) (Price cross – elastic of demand):

تعرف المرونة التبادلية (مرونة التقاطع) بأنها مقياس للاستجابة النسبية في الكمية المطلوبة من سلعة معينة للتغير في ثمن سلعة أخرى مرتبطة بها(بديلة أم مكملة).

تحسب بقسمة التغير النسبي في الكمية المطلوبة من السلعة (X) على التغير النسبي في ثمن سلعة أخرى (Y).

$\eta_{X,Y} = \frac{\Delta Q_X}{Q_X} / \frac{\Delta P_Y}{P_Y}$ التغير في الكمية المطلوبة من السلعة x بالنسبة لثمن السلعة y

حيث:

ΔQ_X التغير في الكمية المطلوبة من السلعة (X)

Q_X الكمية المطلوبة من السلعة (X)

ΔP_Y التغير في ثمن السلعة

P_Y ثمن السلعة (Y) عند الكمية المطلوبة من (X) (Q_X)

وفقاً لهذا المقياس يمكن التمييز بين السلع البديلة والمكملة.

1. السلعتان بدائل لبعض تماماً (perfect substitutes) إذا كانت $\eta_{X,Y} = \infty$. أقل زيادة محتملة في سعر السلعة (Y) يؤدي إلى زيادة لا نهائية (كبيرة) في الكمية المطلوبة من السلعة (X) والعكس صحيح.

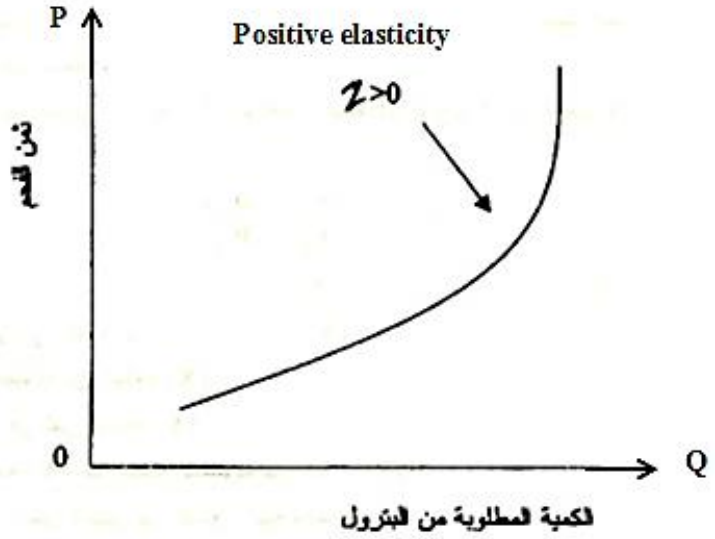
2. السلعتان بدائل لبعض (substitutes) إذا كانت $\eta_{X,Y} = (+ve), \eta_{X,Y} < \infty$. إذا زاد سعر السلعة (Y) يؤدي إلى زيادة في الكمية المطلوبة من السلعة (X) والعكس صحيح.

3. السلعتان مستقلتان عن بعض (independent) إذا كانت $\eta_{X,Y} = 0$ الكميات المطلوبة من (X) تظل ثابتة بغض النظر عن الزيادة أو النقصان في ثمن السلعة (Y) .

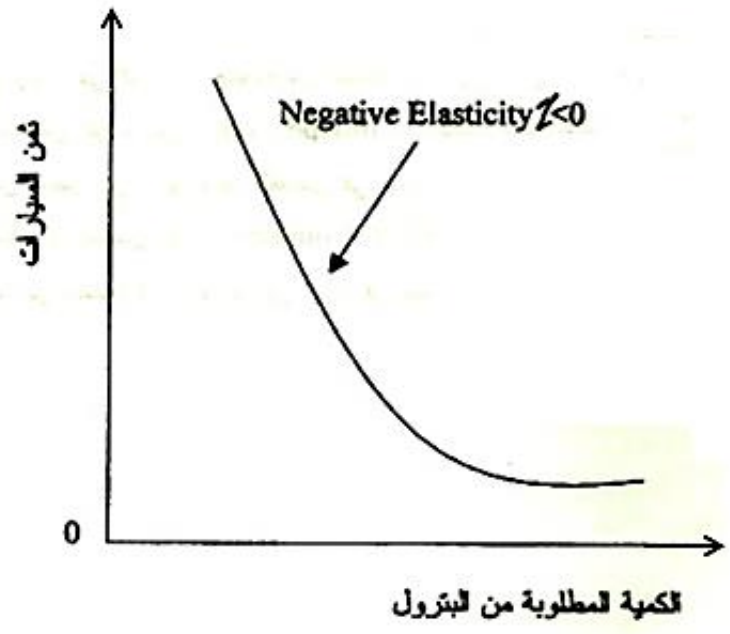
4. السلعتان مكملتان لبعض (compliments) إذا كانت $0 < \eta_{X,Y} < 0$. $\eta_{X,Y} = (-ve), 0$

انخفاض الكمية المطلوبة من السلعة (X) يؤدي إلى زيادة في ثمن السلعة (Y) والعكس صحيح.

الأشكال (2.8) و (2.9) يوضحان السلع البدائل والمكملة على الترتيب.



شكل (2.8) بدائل (Substitutes)



شكل (2.9) مكملة (Compliments)

iii. مرونة الطلب الدخلية (Income elasticity of demand):

تعرف بأنها الاستجابة للكمية المطلوبة من السلعة للتغيرات الداخلية، وتقاس بقسمة التغير النسبي في الكمية المطلوبة من السلعة على التغير النسبي في الدخل.

$$\eta_{Q,I} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta I}{I}$$

حيث:

ΔQ التغير في الكمية المطلوبة

Q الكمية المطلوبة

ΔI التغير في الدخل

I الدخل المقابل للكمية المطلوبة Q

$I =$ الثمن × الكمية المطلوبة $(Q.P)$

وطبقاً لمرونة الطلب الدخيلة يمكن التمييز بين السلع كالآتي:

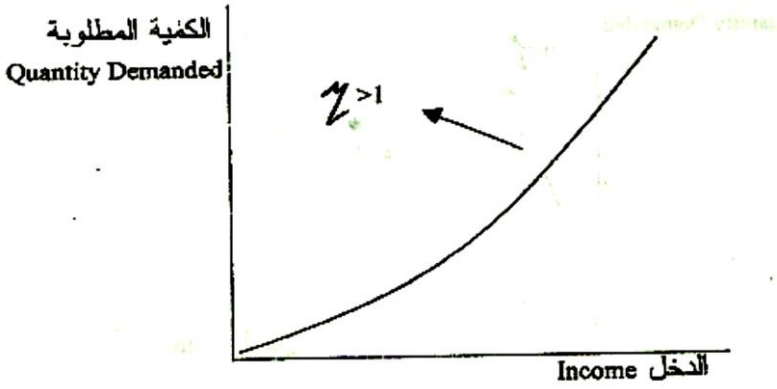
1. إذا كانت إشارة المرونة الدخلية موجبة $\{\eta_{Q,I} = (+ve)\}$ تكون السلعة عادية (normal good) وهي التي تزيد الكمية المطلوبة منها بزيادة الدخل.

2. إذا كانت إشارة المرونة الدخلية سالبة $\{\eta_{Q,I} = (-ve)\}$ تكون السلعة رديئة (inferior good) وهي التي تنقص الكمية المطلوبة منها بزيادة الدخل.

وفي داخل السلع العادية يمكن التمييز بين السلع كالآتي:

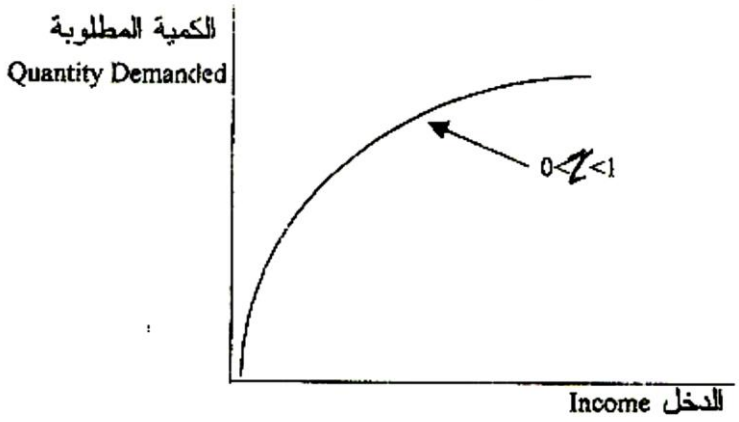
1. إذا كانت القيمة العددية لمرونة الطلب الدخلية أكبر من الواحد $\eta_{Q,I} > 1$ تكون السلعة كمالية أو ترفيهية (Luxury goods) بمعنى أن مشتريات هذه السلع تزيد بنسبة أكبر من الزيادة في الدخل.

2. إذا كانت مرونة الطلب الدخلية أقل من الواحد $\eta_{Q,I} < 1$ تكون السلعة ضرورية. كلما زاد الدخل تزيد الكمية المطلوبة بنسبة أكبر من نسبة الزيادة في الدخل. هذه يتم توضيحها في الأشكال (2.10) – (2.12).



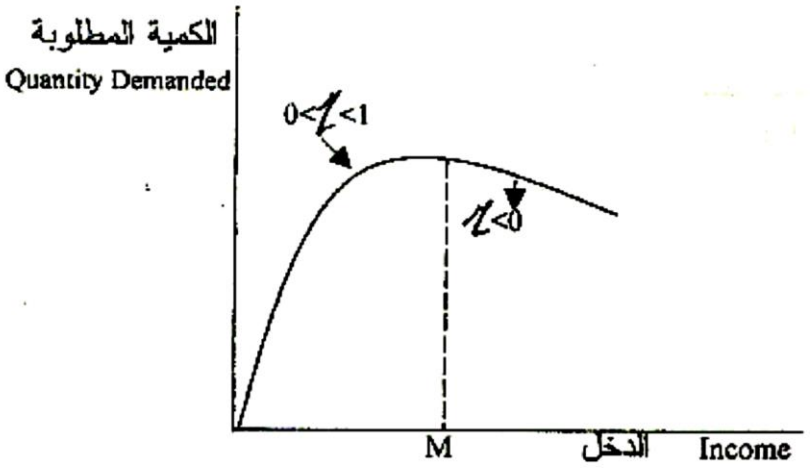
شكل (2.10)

كلما زاد الدخل تزيد الكمية المطلوبة بنسبة أقل من نسبة الزيادة في الدخل.



شكل (2.11)

المرونة الدخلية موجبة للدخل المنخفض لكنها تصبح سالبة عندما يزيد الدخل بعد المستوى (M) وهو أعلى استهلاك عند الدخل (M). أي عند زيادة الدخل تزيد الكميات المطلوبة من هذه السلعة إلى المستوى (M) أي إلى أعلى كمية مطلوبة منها، بعد هذا الحد يزيد الدخل وتنقص الكمية المطلوبة لأن المستهلك يستبدل هذه السلعة بسلعة أخرى أجود منها.



شكل (2.12)

2.4.7 العرض (Supply):

هو الكميات التي ترغب المنشآت في بيعها أو يكون المنتج قادراً على إنتاجها وتكون جاهزة للبيع عند الأثمان المختلفة خلال فترة زمنية معينة. ويلاحظ أن الكميات التي ترغب المنشآت في عرضها ليست بالضرورة هي الكميات التي تنجح في بيعها.

2.4.8 محددات العرض:

هي العوامل المؤثرة في الرغبة لعرض سلعة معينة وأهمها:

1. **أهداف المنشأة:** قد يكون هدف المنشأة بيع أكبر كمية ممكنة من السلعة ربما لاكتساب مكانة أو أهمية أكبر في السوق أو مجال الأعمال، ولو كان ذلك على حساب الأرباح المحققة وبالتالي تزيد الكمية المعروضة عن تلك التي تعظم تحقيق الأرباح.

وقد يكون الهدف تقليل درجة المخاطر إلى أدنى حد ممكن وفي هذه الحالة ستزيد المنشأة من إنتاج وعرض السلع التي تقل فيها درجة المخاطرة على حساب السلع الأخرى التي تزيد فيها هذه المخاطر.

2. **مستوى التكنولوجيا:** تتوقف أنواع وكميات السلع المنتجة على مستوى التكنولوجيا والمعارف الفنية السائدة في فترة زمنية معينة. وهذه المعارف في تغير وتطور مستمر وكذلك يكون إنتاج وعرض السلع. فاستحداث طرق إنتاج أكثر كفاءة ستمكن المنشأة من الإنتاج بتكاليف أقل ويكون لديها الحافز

نحو زيادة العرض، أيضاً التقدم والتطور التكنولوجي يأتي بسلع جديدة لم تكن معروفة من قبل وهكذا تزيد الكمية المعروضة من هذه المنتجات بينما تقل من منتجات أخرى.

3. ثمن السلعة وأثمان السلع الأخرى: باعتبار كل العوامل على حالها (لم تتغير) يتوقع إذا تم رفع ثمن السلعة سترغب المنشآت في عرض كميات أكبر منها ويرجع ذلك إلى أهداف المنشآت عامة وهي تعظيم الأرباح (profit maximization) التي يمكن أن تتزايد بارتفاع أثمان السلع المنتجة.

4. تكاليف عوامل الإنتاج: من المتوقع أن يؤدي التغير في أحد عوامل الإنتاج إلى تغير الربحية. فارتفاع ثمن أحد عوامل الإنتاج قد يؤدي إلى زيادة كبيرة في تكاليف إنتاج السلع التي تعتمد عليه بدرجة أكبر من السلع الأخرى أي سيؤدي إلى تغير الربحية النسبية لخطوط الإنتاج المختلفة ومن ثم سينتقل المنتجون من نشاط لأخر ويتبع ذلك تغير في عرض السلع المختلفة.

2.4.9 دالة العرض (The supply function):

يمكن التعبير عن العلاقة الدالية بين الكمية المعروضة من السلعة Q_S والعوامل المؤثرة فيها كالآتي:

$$Q_S = f\left(O, T, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{P_1}, P_{P_n}\right)$$

حيث:

Q_S الكمية المعروضة من السلعة

O أهداف المنشأة

T مستوى التكنولوجيا

P_1 ثمن السلعة 1

$P_s, \dots, P_n$ أثمان السلع الأخرى البديلة المحددة بـ (n)

$P_{P_1}, \dots, P_{P_n}$ أثمان خدمات عوامل الإنتاج المحددة (n)

2.4.10 منحنى العرض (The supply curve):

يبين منحنى العرض العلاقة بين الكمية المعروضة Q_S من السلعة وثمنها مع افتراض بقاء العوامل الأخرى في دالة العرض على حالها. من المتوقع أن الكمية المعروضة من السلعة سوف تزيد أو تتمدد مع ارتفاع الثمن وتقل أو تنكمش مع انخفاض الثمن.

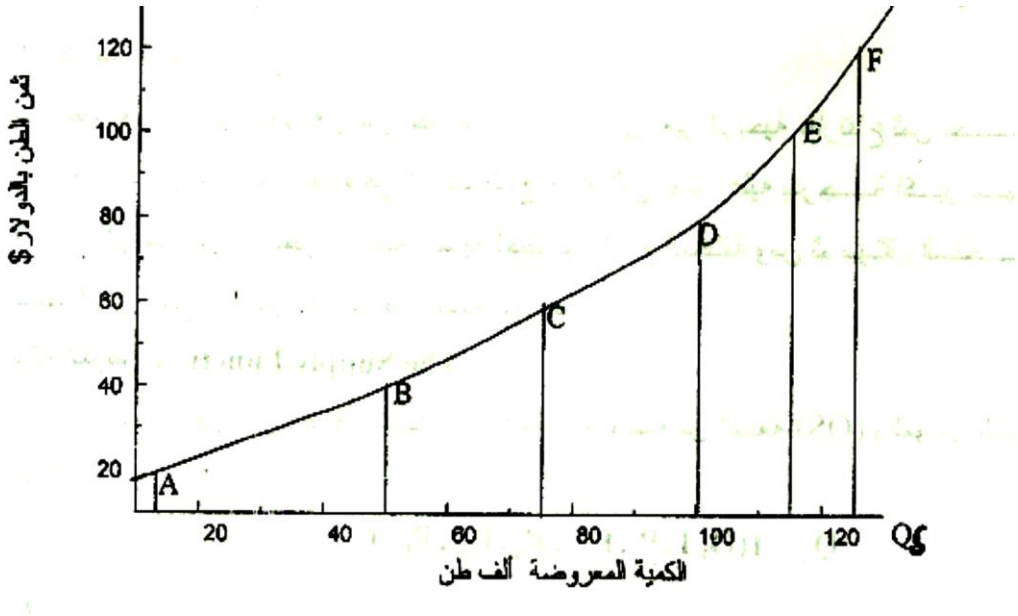
وتفسير ذلك أن ارتفاع الثمن يؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة وبالتالي زيادة الأرباح ومن ثم يتناسب الحافز مع زيادة إنتاج وعرض المزيد من السلعة.

ويطلق الاقتصاديون على العلاقة الطردية بين الكمية المعروضة وثمنها بقانون العرض (supply law).

الجدول (2.4) والشكل (2.13) أدناهما يوضحان الكميات المعروضة من سلعة (التي يرغب المنتجون في بيعها) عند الأثمان المختلفة.

جدول (2.4) كميات معروضة من سلعة عند أثمان مختلفة

	الكمية المعروضة ألف طن كل شهر	ثمن الطن دولار $
A	5	20
B	45	40
C	75	60
D	100	80
E	115	100
F	125	120



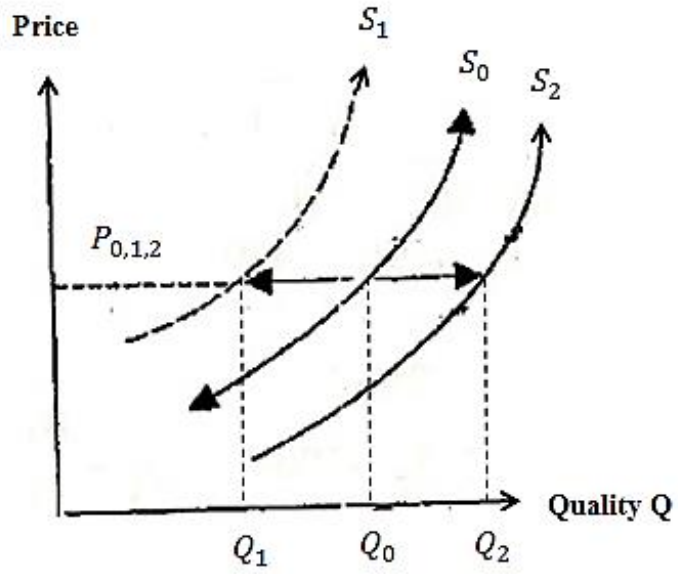
شكل (2.13) كميات معروضة عند أثمان مختلفة

2.4.11 تغير الكمية المعروضة (تغير العرض):

يقصد بالتغير في العرض ذلك التغير الذي ينشأ من تغير العوامل الأخرى المؤثرة في دالة العرض مع ثبات ثمن السلعة نفسها.

قد يزيد العرض وتزيد الكمية المعروضة عند كل ثمن من أثمان وينتقل منحنى العرض بأكمله جهة اليمين من $(S_2 - S_0)$ وأهم أسباب زيادة العرض تغير أهداف المنشأة أو المشروع بحيث تزيد الكمية المعروضة أو المنتجة عن ذي قبل نتيجة لتحسن مستوى التكنولوجيا أو انخفاض أثمان السلع الأخرى أو انخفاض أثمان خدمات عوامل الإنتاج.

وقد يقل العرض وتقل الكمية المعروضة عند كل ثمن من الأثمان وينتقل منحنى العرض بأكمله جهة اليسار من $(S_1 - S_0)$ وأهم أسباب نقص العرض تغير أهداف المشروع بحيث تقل الكمية المنتجة والمعروضة من السلعة وارتفاع أثمان السلع الأخرى، وارتفاع خدمات عوامل الإنتاج. الشكل (2.14) أدناه يوضح ذلك.



شكل (2.14) تغير العرض

2.4.12 مرونة العرض (Elasticity of supply):

تظهر مرونة العرض السعرية مدى استجابة الكمية المعروضة من سلعة معينة للتغير في ثمنها مع ثبات العوامل الأخرى.

وتقاس مرونة العرض السعرية بقسمة التغير النسبي في الكمية المعروضة على التغير النسبي في ثمن السلعة.

$\eta_{S,P}$ = نسبة التغير في الكمية المعروضة / نسبة التغير في ثمن السلعة

$$\eta_{S,P} = \frac{\Delta Q_S}{Q_S} / \frac{\Delta P}{P}$$

$$= \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S}$$

حيث:

ΔQ_S التغير في الكمية المعروضة

Q_S الكمية المعروضة المتوسطة $Q_S = (Q_1 + Q_2)/2$

ΔP التغير في ثمن السلعة

$P_S = (P_1 + P_2)/2$ ثمن السلعة المتوسط P_S

يلاحظ أن إشارة المرونة ستكون موجبة طالما الكمية المعروضة والثمن يتغيران في نفس الإتجاه.

مثال: البيانات أدناه توضح تغير الكميات المعروضة من سلعة ما مع أثمانها:

الكمية (المعروضة)	الثمن $
3000	30
3600	34

أوجد مرونة العرض السعرية.

$$\Delta Q = 3600 - 3000 = 600$$

$$Q_S = 3600 + \frac{3000}{2} = 3300$$

$$\Delta P = 34 - 30 = 4$$

$$P_S = 30 + \frac{34}{2} = 32$$

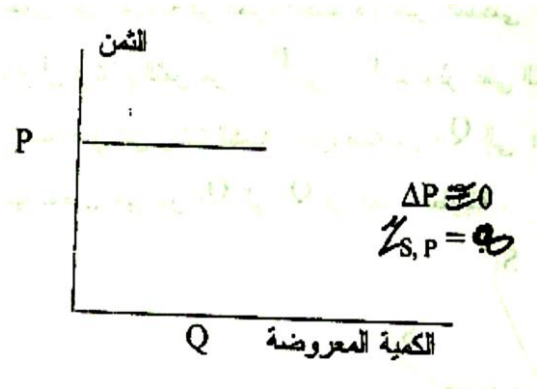
$$\eta_{S,P} = \frac{600}{4} \times \frac{32}{3300} = \frac{48}{33} = \frac{16}{11} = 1.45$$

وتختلف مرونة العرض السعرية من سلعة لأخرى وعموماً يمكن التمييز بين عدة درجات لمرونة العرض طبقاً للقيمة العددية التي يأخذها معامل المرونة $\eta_{S,P}$.

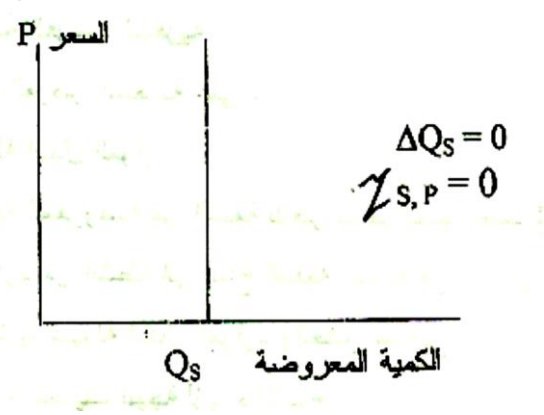
1. عرض عديم المرونة (perfectly inelastic supply): في هذه الحالة يكون العرض عديم المرونة حيث تظل الكمية المعروضة ثابتة ولا تتغير بتغير الأثمان، ويظهر بيانياً خط رأسي عمودي (الشكل (2.15) أدناه).

2. عرض تام المرونة (مرن تماماً) (perfectly elastic supply): في هذه الحالة لا تعرض أي كمية عند الأثمان الأقل من الثمن السائد $(Q_S = 0)$. بينما زيادة ضئيلة جداً في هذا الثمن تؤدي

إلى زيادة العرض من (الصفر) إلى كميات لا نهائية. حيث يعرض المنتجون أي كميات مطلوبة عند هذا الثمن (الشكل (2.16) أدناه).

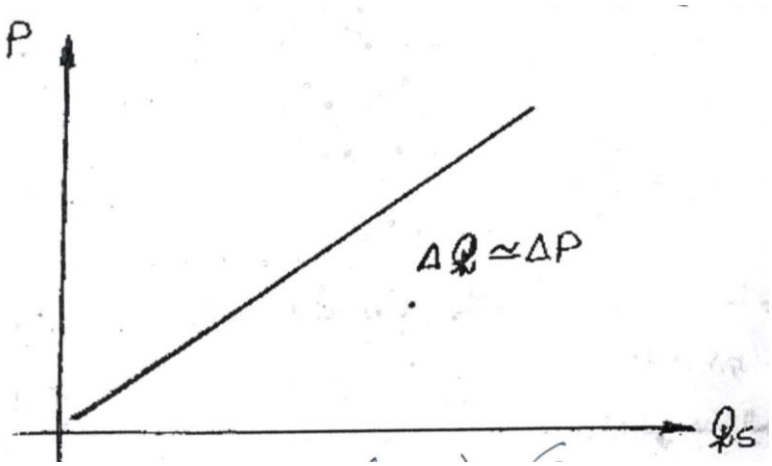


شكل (2.16)



شكل (2.15)

3. عرض مرن متكافئ (Unitary elastic supply): في هذه الحالة تتساوى نسبة التغير في الكميات المعروضة ونسبة التغير في أثمانها. أي نسبة زيادة في الثمن ستقابلها نفس الزيادة في الكمية المعروضة من السلعة ويظهر بيانياً في شكل خط مستقيم من نقطة الأصل. الشكل (2.17) أدناه يوضح ذلك.



شكل (2.17)

4. عرض مرن (Elastic supply): في هذه الحالة تكون نسبة التغير في الكمية المعروضة أكبر مما في الثمن.

$$\frac{\Delta Q}{Q_S} > \frac{\Delta P}{P_S}$$

$$\eta_{S,P} > 1$$

5. عرض غير مرن (Inelastic supply): في هذه الحالة تكون نسبة التغير في الكمية المعروضة أقل مما في الثمن.

$$\frac{\Delta Q}{Q_S} > \frac{\Delta P}{P_S}$$

$$\eta_{S,P} < 1$$

2.4.13 محددات مرونة العرض السعرية:

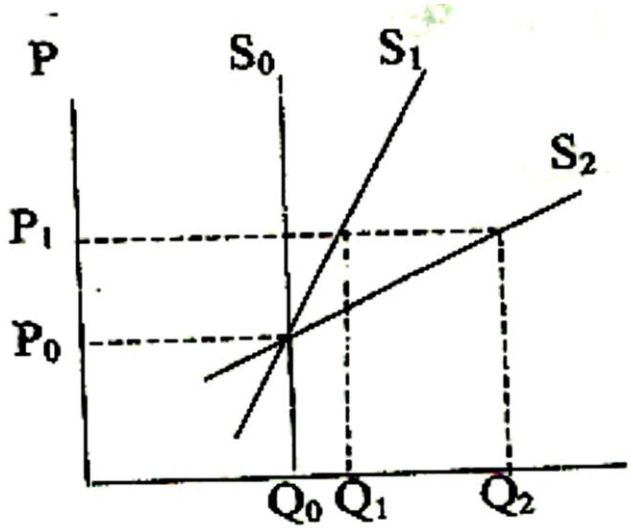
تتوقف مرونة العرض السعرية على:

1. **مدى سهولة انتقال الموارد:** فاستجابة الكمية المعروضة من السلعة للتغيرات في ثمنها تعتمد إلى حد كبير على مدى السهولة التي تنتقل بها الموارد من أنشطة إلى إنتاج السلعة في حالة ارتفاع ثمنها. أي تزيد مرونة العرض السعرية عندما تزيد سهولة انتقال الموارد والعكس صحيح.

2. مدى ارتفاع التكاليف نتيجة لزيادة الإنتاج: كلما أمكن زيادة الإنتاج دون زيادة كبيرة في التكاليف كلما استجابت الكميات المعروضة بدرجة أكبر للتغيرات في الثمن وكان العرض مرناً.

3. طول الفترة الزمنية: يميز عادة الاقتصاديون بين الفترة القصيرة والفترة الطويلة لعرض السلع. عموماً تميل مرونة العرض للزيادة كلما طالت الفترة الزمنية التي تمر على تغير الثمن وثباته عند المستوى الجديد. أن طول الفترة الزمنية يؤدي إلى اطمئنان وتحفيز المنتجين على زيادة الإنتاج. ويمكن توضيح ذلك بيانياً في الشكل (2.18) أدناه حيث يلاحظ أن منحنى العرض S_0 يكون عديم المرونة في الفترة القصيرة جداً بينما المنحنى S_1 يكون قليل المرونة في الفترة القصيرة والمتوسطة

وأخيراً المنحنى S_2 يكون أكثر مرونة في الفترة الطويلة ويتضح أن ارتفاع الثمن من P_0 إلى P_1 لم يؤثر على الكمية المعروضة في الفترة القصيرة جداً، بينما أدى إلى زيادة الكمية المعروضة من Q_0 إلى Q_1 فقط في الفترة القصيرة، وأخيراً زيادتها بمعدل أكبر من Q_0 إلى Q_1 في الفترة الطويلة.



شكل (2.18)

الفصل الثالث

توازن السوق التنافسية

(Equilibrium of Competition Market)

3.1 خصائص سوق المنافسة الكاملة:

(Characteristics of Free Competition Market)

1. وجود عدد كبير من البائعين والمشترين بحيث لا يستطيع بائع أو مشتري بمفرده التأثير في ثمن السلعة.

2. تجانس وحدات السلعة: أي أن كافة المنشآت تنتج سلعاً متماثلة بحيث لا تستطيع أي منشأة التحكم في ثمن السلعة.

3. حرية الانتقال الكاملة لعوامل الإنتاج والسلع من مكان لآخر.

4. حرية الأسواق أي عدم وجود قوى خارجية تعمل على التحكم أو السيطرة على مجريات الأمور في السوق (مثلاً لا يوجد تدخل حكومي في تحديد سعر السلعة أو الكمية المنتجة منها).

3.2 تحديد سعر السوق (Price Determination):

يترتب على هذه الشروط أو الخصائص السابقة أن يتحدد أو يسود السوق سعر واحد فقط للسلعة بتفاعل كل من الطلب والعرض.

دعنا نفترض الجدول (3.1) أدناه الذي يوضح طلب وعرض السوق على سلعة معينة

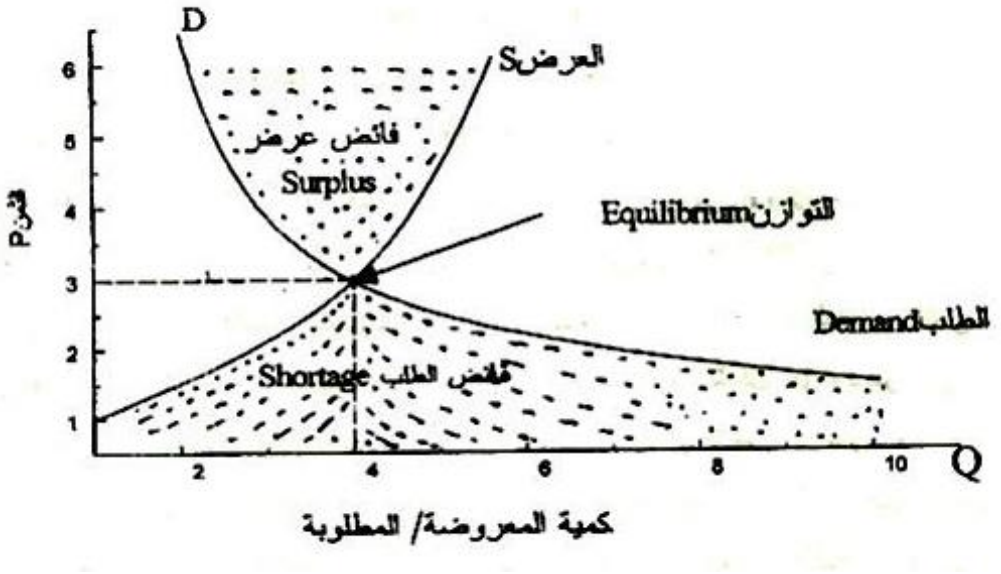
جدول (3.1) طلب وعرض السوق على سلعة معينة

فائض الطلب (+) فائض العرض (−)	الكمية المطلوبة مليون وحدة في الأسبوع	الكمية المعروضة مليون وحدة في الأسبوع	الثمن $
-9	9	0	1
-3	6	3	2

3	4	4	0
4	5	3	+2
5	6	2	+4

يلاحظ من الجدول أن هناك ثمناً واحداً هو (3 دولار) تتساوى عنده الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة من السلعة (4 مليون وحدة في الأسبوع).

أما عند الأسعار الأقل فتزيد الكمية المطلوبة عن الكمية المعروضة مما يعني أن هناك عجز في السلعة (فائض طلب) أي الكمية المطلوبة أكبر من الكمية المعروضة. وبالمثل عند الأسعار التي تزيد عن هذا الثمن تزيد الكمية المعروضة عن الكمية المطلوبة مما يؤدي إلى وجود (فائض عرض) أي الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة. الشكل (3.1) أدناه يوضِّح نقطة التوازن.



شكل (3.1) نقطة التوازن

يطلق على السعر الذي تتساوى عنده الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة بأنه ثمن التوازن وهو الثمن الوحيد الذي يحقق التوازن بين رغبات البائعين والمشترين حيث يرغب البائعون في عرض نفس الكميات التي يرغب المشترون في شرائها (كمية التوازن).

يلاحظ عند أي سعر أعلى من سعر التوازن يوجد فائض عرض حيث تزيد الكمية المعروضة عن الكمية المطلوبة مثلاً عند السعر 4$، الكمية المعروضة 5 مليون وحدة والكمية المطلوبة 3 مليون وحدة والفائض في العرض يساوي 2 مليون وحدة ويؤدي فائض العرض في ظل الخصائص السابقة إلى المنافسة بين البائعين مما يؤدي إلى انخفاض السعر حتى يصل سعر التوازن.

وبالمثل عند أي سعر أقل من سعر التوازن يعني وجود فائض طلب حيث تزيد الكمية المطلوبة عن الكمية المعروضة وسوف تؤدي المنافسة بين المشترين إلى ارتفاع الثمن حتى يصل إلى ثمن التوازن.

3.3 تغيرات سعر السوق (Changes of Market Price):

وجد أن كمية التوازن وثمنها تتحدد في السوق بتفاعل كل من الطلب والعرض ولن يتغير التوازن طالما لم تتغير محددات الطلب أو العرض.

بسبب تغير أو اختلال التوازن أو التغير في عامل أو أكثر من العوامل التي افترض ثباتها في دالة العرض أو الطلب والتي تؤدي إلى انتقال منحنى الطلب أو العرض بأكمله وتقود إلى تغير ثمن وكمية التوازن.

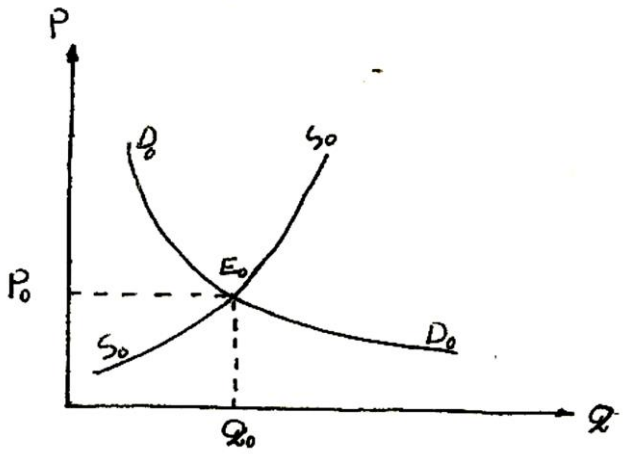
1. تغير الطلب مع بقاء العرض ثابتاً:

بافتراض نقطة التوازن E_0 حيث منحنى الطلب D_0 D_0 ومنحنى العرض S_0 S_0 وثمن التوازن P_0 وكمية التوازن Q_0 الشكل (3.2). وبافتراض بعض العوامل أو كل العوامل التي تؤدي إلى زيادة الطلب وانتقاله إلى الوضع D_1 D_1 وثبات حال العرض عند S_0 S_0 ، سوف ينتقل وضع التوازن من E_0 إلى E_1 حيث يزيد ثمن التوازن إلى P_1 وتزيد كمية التوازن إلى Q_1 والسبب في ذلك أنه عندما يزيد الطلب مع ثبات العرض يظهر فائض طلب عند ثمن التوازن المبدئي P_0 أي تزيد الكمية المطلوبة عن الكمية المعروضة ويدفع هذا الفائض الثمن نحو الارتفاع حتى يصل إلى ثمن توازن أعلى عند P_1 وكمية توازن Q_1 كما في الشكل (3.3). وبافتراض نقصان الطلب بتغير العوامل

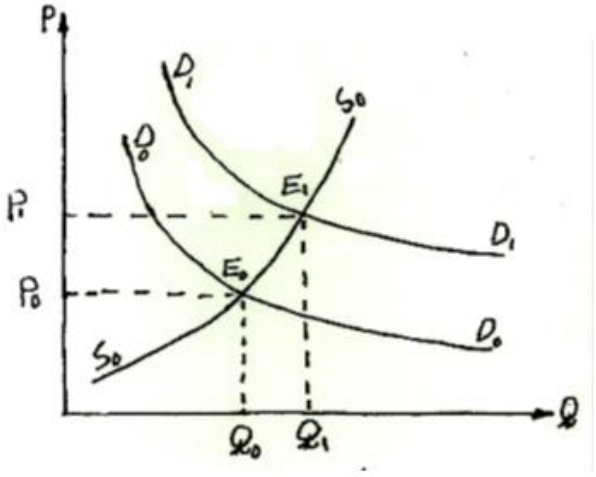
المحددة للطلب ومع ثبات العرض سوف يظهر فائض عرض عند ثمن التوازن المبدئي P_0 يؤدي إلى التنافس بين البائعين مما يدفع السعر نحو الانخفاض حتى يصل إلى ثمن التوازن الجديد P_2 وكمية التوازن Q_2 عند نقطة التوازن الجديدة E_2 الشكل (3.4) أي:

i. في حالة زيادة الطلب تزيد الكمية ويزداد الثمن.

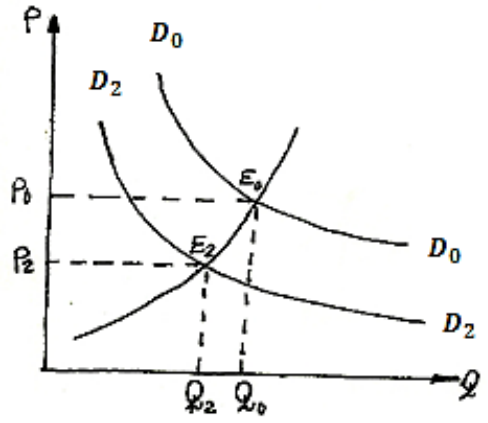
ii. في حالة نقصان الطلب تقل الكمية ويقل الثمن.



الشكل (3.2)



الشكل (3.3)



(الشكل 3.4)

2. تغير العرض مع بقاء الطلب ثابتاً:

i. في حالة زيادة العرض تزيد الكمية ويقل السعر.

ii. في حالة نقصان العرض تقل الكمية ويزداد الثمن.

3. تغير العرض والطلب معاً:

ويمكن التمييز بين التغييرات التالية:

i. زيادة العرض ونقصان الطلب.

ii. زيادة الطلب ونقصان العرض.

iii. نقصان العرض والطلب.

iv. زيادة العرض والطلب.

ولكل تغير أثر على كمية وسعر التوازن.

3.4 اقتصاد المنشأة (Firm Economy):

تتبع المنشآت نظما خاصة في معاملاتها مع المستهلكين وفي معاملاتها مع المنشآت والمؤسسات الأخرى، للتأثير على الأسواق عند بيع منتجاتها وأهم نظم المعاملات:

1. المنافسة الخالصة (المضاربة) (Competition):

في هذه الحالة يتوفر عدد كبير من المؤسسات تبيع سلعاً متجانسة في سوق معينة ليس لأحد من هذه المؤسسات تأثير على مجموع الإنتاج أو السعر وهي حالة نسبية ومن العسير جداً حصول المنافسة المثالية أو الخالصة. وعلى المنشأة أن تتبع سياسة المنافسة (competition policy).

إذا كان المشروع أو المنشأة في حالة المنافسة الكاملة وواجه سعراً لا يستطيع أن يؤثر فيه بتغير حجم ما يعرضه في الأسواق (السعر ثابتاً)، يجب على المنتج أن يكيف إنتاجه لتحقيق أكبر ربح ممكن.

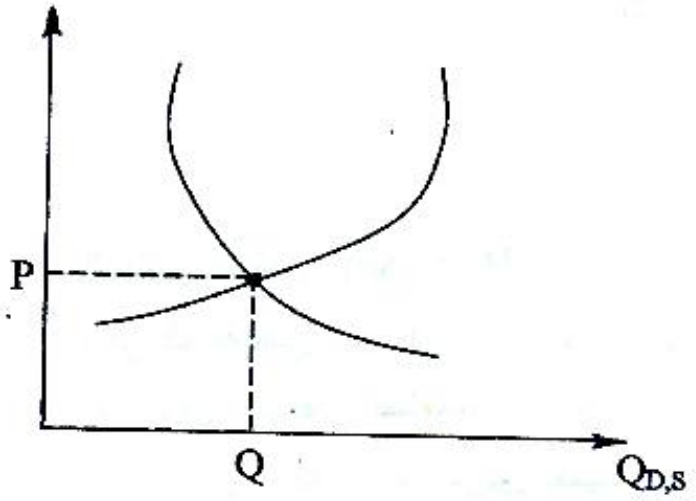
في هذه الحالة يحصل المنتج على أكبر ربح عندما تبلغ المصاريف (التكاليف) الحدية قيمة تتساوى فيها مع السعر. الشكل (3.5) أدناه.

$$M.C = R$$

حيث:

$M.C$ التكاليف الحدية (marginal cost)

R سعر البيع



الشكل (3.5)

الربح = الإيراد (العائد) – المصروفات (التكاليف) الكلية

$$P_r = Rx - T.C(x)$$

إذا كانت الكمية المطلوبة هي Q

عوض عن قيمة $Q = x$

$$\therefore P_r = Q.R - T.C(Q)$$

$$P_{r(\max)} = \frac{d(P_r)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\,P_r}{d\,Q} = \frac{d(Q.R)}{d\,Q} = \frac{d\,T.C(Q)}{d\,Q} = 0$$

$$= R - \frac{d\,T.C(Q)}{d\,Q} = 0$$

$$\therefore R = \frac{d\,T.C(Q)}{d\,Q}$$

$$M.C = \frac{d\,T.C(Q)}{d\,Q} \qquad \text{لكن}$$

$$\therefore R = M.C$$

أي عندما المصروف (التكلفة) الحدية تساوي السعر يكون الربح أقصى ما يمكن.

مثال:

يجابه مشروع منافسة كاملة طبقاً للمعادلتين:

$$R = 50\ unit\ price$$

$$T.C = Q^2 + 12Q + 120$$

أوجد الكمية التي يحقق عندها المشروع أكبر ربح ممكن؟

$$P_r = Q.R - T.C(Q)$$

$$= 50Q - Q^2 - 12Q - 120$$

$$= -Q^2 + 38Q - 120$$

$$\frac{d\,P_r}{d\,Q} = -2Q + 38 = 0$$

$$\therefore Q = \frac{38}{2} = 19\ units$$

2. الاحتكار الخالص (Monopoly):

وهي الحالة التي تكون فيها منشأة واحدة تبيع سلعة معينة في سوق معينة ولا تستطيع منشأة أخرى أن تبيع نفس السلعة، أي تتحكم في إمداد السوق وبالتالي التحكم بالطلب على منتجاتها بصورة غير مباشرة عن طريق تحديد السعر. وفي هذه تتبع المنشأة سياسة الاحتكار (monopoly policy).

يسعى المحتكر لتحقيق أكبر ربح، ولهذا إما أن يحدد الكميات المعروضة ويترك السعر حراً، أو يحدد السعر ويترك الكميات المعروضة حرة. غير انه لا يستطيع تحديد كليهما معاً.

أي أن $P_r = f(R, Q)$

ويتم الحصول على ربح عندما يتساوى الإيراد الحدي والتكاليف (المصروف) الحدي.

$$\frac{dR(Q)}{dQ} = \frac{dT.C(Q)}{dQ}$$

$$M.R = M.C$$

حيث:

$M.R$ الإيراد الحدي

$M.C$ التكلفة الحدية

الربح = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P_r(Q) = T.R(Q) - T.C(Q)$$

يبلغ P_r قيمته العظمى عندما $M.R = M.C$

a. إذا حددت الكمية وترك السعر حراً.

$$P_r = R.Q - T.C(Q)$$

$$\frac{d\,P_r}{d\,Q} = R\frac{d\,Q}{d\,Q} + Q\frac{d\,R}{d\,Q} - \frac{dT.C(Q)}{dQ} = 0$$

$$\therefore R + Q\frac{d\,R}{d\,Q} = \frac{dT.C(Q)}{dQ}$$

b. إذا حدد السعر وتركت الكمية حرة في السوق.

$$\frac{d\,P_r}{d\,Q} = R.\frac{d\,Q}{d\,R} + Q.\frac{d\,R}{d\,R} - \frac{dT.C(Q)}{dR} = 0$$

$$R.\frac{d\,Q}{d\,R} + Q = \frac{dT.C(Q)}{dR}$$

أضرب طرفي المعادلة في $\frac{d\,R}{d\,Q}$

$$R.\frac{d\,Q}{d\,R}.\frac{d\,R}{d\,Q} + Q.\frac{d\,R}{d\,Q} = \frac{dT.C(Q)}{dR}.\frac{d\,R}{d\,Q}$$

$$\therefore R + Q\frac{d\,R}{d\,Q} = \frac{dT.C(Q)}{dQ}$$

وهي نفس المعادلة السابقة. أي بأي السياستين يمكن تحقيق نفس الربح المطلوب.

مثال:

يُعَّبر عن الظروف التي تواجه محتكر بالمعادلتين التاليتين:

التكلفة الكلية $T.C = 500 + 2Q$

الكمية المطلوبة $Q = 600 - 4R$

حيث: R: سعر البيع ، Q: الوحدات المنتجة

ما هي السياسة التي تحقق للمحتكر أقصى قدر من الربح ؟

a. عند تحديد الكميات وترك الأسعار حرة.

$$R = \frac{600 - Q}{4} \qquad (*)$$

$$P_r = Q.R - T.C(Q)$$

$$= Q\frac{[600 - Q]}{4} - [500 + 2Q]$$

$$= \frac{1}{4}[600Q - Q^2 - 2000 - 8Q]$$

$$= \frac{1}{4}[592Q - Q^2 - 2000]$$

$$\frac{dP_r}{dQ} = \frac{1}{4}[592 - 2Q] = 0$$

$$2Q = 592$$

$$\therefore Q = \frac{592}{2} = 296\ units$$

عند هذه الكمية من الإنتاج تبلغ الأرباح قيمتها العظمى ويمكن حساب السعر في هذه الحالة من المعادلة (*).

$$R = \frac{600 - Q}{4} = \frac{600 - 296}{4} = \frac{304}{4} = 76\ price\ unit$$

b. عند تحديد السعر (الأسعار) وترك الكميات المعروضة حرة.

$$Q = 600 - 4R \qquad (**)$$

$$P_r = Q.R - T.C(Q)$$

$$= R[600 - 4R] - [500 + 2(600 - 4R)]$$

$$= 600R - 4R^2 - 500 - 1200 + 8R$$

$$608R - 4R^2 - 1700$$

$$\frac{dP_r}{dR} = 608 - 8R = 0$$

$$\therefore 8R = 608$$

$$R = \frac{608}{8} = 76\ unit\ price$$

عند هذا السعر تبلغ الأرباح قيمتها العظمى، ويمكن حساب الكمية في هذه الحالة من المعادلة (**).

$$Q = 600 - 4R$$

$$= 600 - 4 \times 76$$

$$= 600 - 304 = 296\ units$$

أي بأيٍّ من السياستين يمكن تحقيق نفس الربح المطلوب.

الفصل الرابع

محاسبة التكاليف (Cost Accounting)

في أي منشأة هندسية يتمثل واجب النظام الهندسي في الآتي:

1. توفير المعلومة المالية.
2. تخطيط عمليات المنشأة في المدى الطويل والقصير.
3. السيطرة على نتائج العمليات.

وتنبع أهمية عملية حساب التكاليف في المساعدة في اتخاذ القرارات مثل:

1. كم سعر بيع المنتجات؟
2. ما مدى تأثير تعديل الأسعار على الدخل الكلي وهل يعدل السعر أم لا؟
3. كم من السلع يعرض وهل التوقعات معقولة؟
4. هل المنتج المعين يدر ربح كافي ، هل نستمر في إنتاجه أم لا؟
5. هل طاقة المنشأة كافية أم تحتاج إلى توسع؟

4.1 أنواع التكاليف (Types of Costs):

1. المواد المباشرة (Direct material):

وهي المواد التي أصبحت جزء متكامل في الناتج النهائي والتي لها قيمة مؤثرة. مثال: درج (المواد المباشرة خشب + حديد).

2. العمالة المباشرة (Direct labor):

وتمثل تكاليف العمل الذي قام بتحويل المواد الخام إلى منتجات نهائية. مثال: (الأجور).

3. التكاليف غير المباشرة (Overhead cost):

وتشمل كل التكاليف التي لا تصنف على أساس أنها تكاليف مواد مباشرة أو عمالة مباشرة. مثل:

التأمين، الضرائب، الإيجار، ... الخ.

4.2 تصنيف التكاليف (Classification of Costs):

من الأنواع السابقة للتكاليف يمكن تصنيفها كالآتي:

1. التكاليف المباشرة وغير المباشرة (Direct and indirect costs):

تشمل التكاليف المباشرة المواد المباشرة والعمالة المباشرة ، وتشمل التكاليف غير المباشرة كل التكاليف عدا المباشرة وتسمى بالتكاليف الفوقية (overhead).

2. التكاليف الثابتة والمتغيرة (Fixed and variable costs):

التكاليف المتغيرة هي التكاليف التي تتغير مع تغير حجم الإنتاج مثل: العمالة المباشرة ، والمواد المباشرة أما التكاليف الثابتة هي التي لا تعتمد على الإنتاج أو النشاط في المدى القصير مثل: الإيجار، المباني، الإهلاك، ... الخ.

هنالك تصنيفات أخرى للتكاليف إلا أن التصنيفان المذكوران سابقاً هما الأكثر شيوعاً واستخداماً:

1. التكاليف التاريخية (Historical costs):

وهي التكاليف المسجلة بحسابات الشركة.

2. التكاليف القياسية (Standard costs):

وهي التكاليف التقديرية التي توضح عمليات الإنتاج.

3. تكاليف الإحلال (Replacement costs):

تكاليف إحلال المواد والماكينات غالباً ما تفوق التكاليف التاريخية في ظروف التضخم. لذا تكون تكاليف الإحلال ذات أهمية كبرى للتنبؤ ووضع السياسات التسعيرية واتخاذ القرار.

4. التكاليف الحدية (Marginal costs):

وتعرف بأنها التكاليف الكلية الناتجة من زيادة الإنتاج بوحدة إضافية. حيث تتحول التكاليف الثابتة

إلى تكاليف متغيرة.

5. تكاليف الفرص البديلة (Opportunity costs):

وهي تكلفة فقدان الفرصة البديلة مقارنة مع القرار المتخذ.

6. التكاليف الغارقة (Sunk costs):

وهي التكاليف المصروفة في الدعاية والتدريب والخدمات الصحية.

7. التكاليف المؤجلة (Deferred costs):

أحياناً يعتبر إهلاك المنشأة والمعدات تكاليف مؤجلة.

4.3 مخطط نقطة التعادل (Break Even Point Chart)):

وهي من المخططات البسيطة والتي تعتمد على عملية مقارنة البدائل من ناحية تكاليف.

نقطة التعادل:

وهي النقطة التي تتساوى فيها التكاليف الكلية (TC) (total costs) مع العائدات الكلية (TR) (total revenues) أو هي النقطة المتعادلة بين الربح والخسارة.

لأي عملية إنتاجية:

$$TC = fixed\ cost + variable\ cost$$

$$\therefore TC = f.c + v.c/\ unit$$

TC التكاليف الكلية

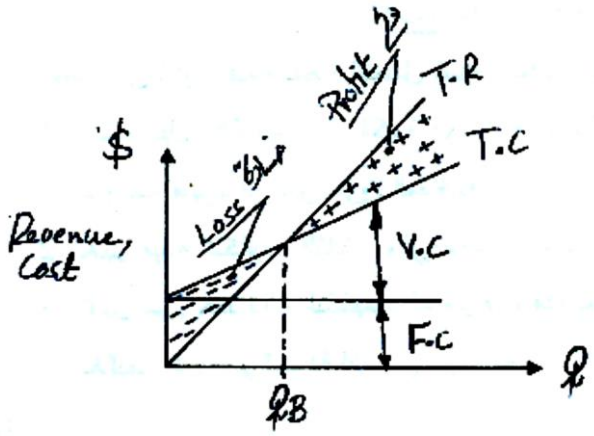
TR العائدات الكلية

$f.c$ التكاليف الثابتة

$v.c$ التكاليف المتغيرة

رسم مخطط التعادل:

الشكل (4.1) أدناه يوضِّح نقطة التعادل.



شكل (4.1) نقطة التعادل

إذا كانت الوحدة المنتجة تباع بسعر R$/unit وهي دالة خطية في حجم الكمية المنتجة

$$\therefore TR(x) = R\$/unit.x$$

التكاليف الكلية منسوبة للحجم الكلي للإنتاج

$$TC(x) = f.c + v.c/unit.x$$

عند نقطة التعادل:

$$TC(x) = TR(x)$$
$$\therefore R\$.x = f.c + v.c.x$$
$$(R\$ - v.c).x = f.c$$
$$Q_B = x = \left(\frac{f.c}{R - v.c}\right)$$

مثال:

تكاليف المعدات والعمالة المطلوبة لتجهيز ماكينة لإنتاج قطعة غيار هي 300$. التكاليف المتغيرة عند الإنتهاء من التجهيز تحتوي على 2.5$ للمواد و 1$ للعمالة لتشغيل الماكينة. إذا كان أي قطعة منتجة يتم بيعها بـ 5$ حدد نقطة التعادل؟ ثم أحسب الربح أو الخسارة إذا تم إنتاج 1000 قطعة غيار.

الحل:

$$T.R(x) = T.C(x) = f.c + v.c(x)$$
$$\$5.x = 300 + (2.5 + 1).x$$

$$\text{from which} \quad x = \frac{300}{(5 - 3.5)} = \frac{300}{1.5} = 200\ unit$$

$$\text{profit or loss} = T.R(x) - T.C(x)$$

$$\text{profit or loss} = 5 \times 1000 - (300 + 3.5 \times 1000)$$

$$= 5000 - 3500 = 1500$$

عامة يفضل أن تكون نقطة التعادل صغيرة المقدار وهذا لا يتم إلا بثلاث طرق:

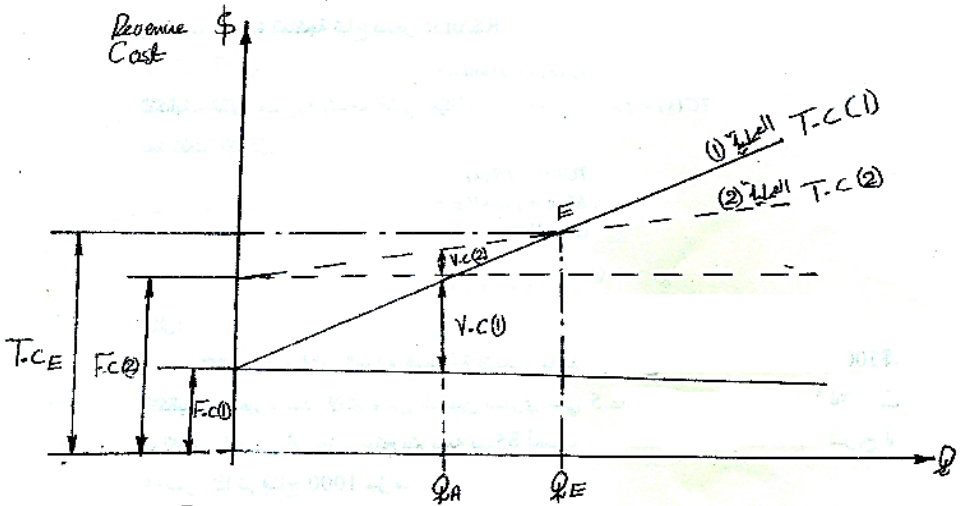
1. زيادة ميل دالة العائدات الكلية $T.R(x)$: وهذا يعني زيادة سعر البيع وهذه سياسة تسويقية فقيرة في جو سوق المنافسة.

2. تقليل قيمة التكاليف الثابتة : وفي معظم الأحيان من الصعوبة بمكان تقليلها.

3. تقليل ميل خط دالة التكاليف المتغيرة : وهذا يعطي فرصة كبيرة للمهندس في تقليل تكاليف المواد والعمالة لتحسين الربحية.

مثال:

تحليل نقطة التعادل لأكثر من عملية:



F_1 = fixed cost for process 1
F_2 = fixed cost for process 2
V_1 = variable costs for process 1 — at quantity Q_A
V_2 = variable costs for process 2
Q_B = Break even quantity
T_B = Total cost of manufacture at quantity Q_B

شكل (4.2)

مثال:

شغلة يمكن إنتاجها بواسطة ماكينة برجية (turret lathe) أو ماكينة آلية تستخدم الكامات. أحسب كمية التعادل Q_B معتمداً على المعلومات أدناه:

	البرجية	الآلية
a- تكاليف المعدات	£ 3.00	£3.00
b- تكاليف الكامات	-	15.00
c- تكاليف المواد لكل جزء (cost/component)	0.025	0.025
d- تكاليف العمالة	0.25 £/h	0.10£/h
e- زمن دورة إنتاج وحدة (cycle time/component)	4 min	2min
f- تكاليف تجهيز العمالة (setting up labor cost)	0.40 £/h	0.4£/h
g- زمن التجهيز (setting up time)	2 h	9 h
h- تكاليف فوقية machine overheads (setting operating)	300% of (d)	1000% of (d)

العملية (1) (الماكينة البرجية):

1. التكاليف الفوقية (overheads) = 300% من تكاليف التشغيل للعمالة

$$£/h\frac{300}{100} \times 0.25/h = 0.75$$

2. التكاليف الثابتة = تكاليف المعدات + تكاليف التجهيز

fixed cost = tooling cost + setting up cost

$$= 3.00£ + 1 \times (0.4 + 0.75)$$

$$= 3.00 + 1.15 = 4.15£$$

3. التكاليف المتغيرة لكل منتج (variable cost/ component)

$$= \text{labor cost} + \text{material cost} + \text{overheads}$$

$$= \left(0.25 \times \frac{5}{60}\right) + 0.025 + \left(0.75 \times \frac{5}{60}\right)$$

$$= \frac{1}{12} + 0.025 = \frac{13}{120}£/\text{component}$$

$$\text{variable cost for 1000 units} = \frac{13}{120} \times 1000 = 108\frac{1}{3}£$$

العملية (2) (الماكينة الآلية):

1. التكاليف الفوقية:

$$\frac{1000}{100} \times 0.1/h = 1.00\ £/h$$

2. التكاليف الثابتة:

$$\text{fixed cost} = \text{tooling cost} + \text{cam cost} + \text{setting up cost}$$

$$= 3.00 + 15 + 8(0.40 + 1$$

$$= 3 + 15 + 11.5 = 29.2\ £$$

3. التكاليف المتغيرة لكل جزء منتج:

$$= \left(0.1 \times \frac{1}{60}\right) + 0.025 + \left(1.00 \times \frac{1}{60}\right) = \frac{13}{300}£/\text{component}$$

$$\text{variable cost for 1000 units} = \frac{13}{300} \times 1000 = 43\frac{1}{3}£$$

يمكن بمقياس رسم مناسب رسم منحنى نقطة التعادل ومنه يمكن إيجاد Q_B .

تحليلياً:

نقطة التعادل هي النقطة التي تتساوى فيها التكلفة الكلية للطريقة (1) والطريقة (2).

$$T.C(1) = T.C(2)$$

$$T.C(1) = fixed\ cost(1) + variable\ cost(1)$$

$$= 4.15 + \frac{13}{120}.x$$

$$T.C(2) = fixed\ cost(2) + variable\ cost(2)$$

$$= 29.2 + \frac{13}{300}.x$$

$$\therefore 4.15 + \frac{13}{120}.x = 29.2 + \frac{13}{300}.x$$

$$\frac{13}{120}.x - \frac{13}{300}.x = 29.2 - 4.15$$

$$\left(\frac{13}{120} - \frac{13}{300}\right)x = 29.2 - 4.15$$

$$from\ which\ \ x = 387\ unit\ at\ break\ even\ point$$

$$\therefore Q_B = 387\ units$$

إذا كانت الكمية المراد إنتاجها 200 وحدة أي عملية نختار :

$$T.C_{(200)} = fixed\ cost + variable\ cost$$

$$T.C_{at\ 200}(1) = 4.15 + \frac{13}{120}.x$$

$$= 4.15 + \frac{13}{120} \times 200 = 4.258\ £$$

$$T.C_{at\ 200}(2) = 29.2 + \frac{13}{300}.x$$

$$= 29.2 + \frac{13}{300} \times 200 = 37.867\ £$$

عليه نختار الطريقة (1)

إذا كانت الكمية المراد إنتاجها 700 وحدة أي طريقة نختار

$$T.C_{at\ 700}(1) = 4.15 + \frac{13}{120} \times 700 = 79.983\ £$$

$$T.C_{at\ 700}(2) = 29.2 + \frac{13}{300} \times 700 = 59.533\ £$$

عليه نختار الطريقة (2)

4.4 تدريبات عامة (General Exercises):

1. إذا كانت الكمية المطلوبة من سلعة ما تمثل بالمعادلة $Q_D = 6 - x$ بينما الكمية المعروضة من نفس السلعة تمثل بالمعادلة $Q_S = 12 - 3x$ ، حيث x ثمن السلعة أحسب ثمن وكمية التوازن.

2. أوجد التكلفة الحدية والمتوسطة إذا كانت دالة التكاليف الكلية تمثل بالآتي:

$$T.C = +3x^2 + 10 - 4x$$

حيث x هي عدد الوحدات المنتجة ومن ثم أوجد قيمة التكلفة الحدية والمتوسطة إذا كان حجم الإنتاج 50 وحدة.

3. تبلغ قيمة التكاليف الثابتة لسلعة ما 1200$ وتكلفة إنتاج الوحدة منها تبلغ 4$. بيّن حالة المنشأة من حيث الربح والخسارة إذا بلغ الإنتاج أولاً 1000 وحدة ثم 3000 وحدة جبرياً وبيانياً.

4. البيانات التالية جزء من بيانات سنوية توضح الكميات المطلوبة والمعروضة (التي يمكن إنتاجها) من سلعة معينة بأحد طريقتين من طرق الإنتاج آلية وشبه آلية كالآتي:

الثمن $ للوحدة	الكمية المطلوبة وحدة	الكمية المنتجة (آلية) وحدة	الكمية المنتجة (شبه آلية) وحدة
14	800000	200000	100000
18	600000	300000	150000
22	400000	500000	200000
26	300000	600000	250000
30	200000	900000	350000

a. أرسم:

i. منحنى الطلب.

ii. منحنى العرض لنوعي التشغيل.

b. أحسب مرونة الطلب السعرية إذا تغير السعر من 22 إلى 26 دولار وبم تصف الطلب في هذه الحالة.

c. أحسب مرونة العرض السعرية لنفس تغير السعر في (b).

d. بالرسم جد ثمن وكمية التوازن لنوعي التشغيل.

e. إذا زادت الكمية المطلوبة بما مقداره 1.5 مرة عن الكميات عند كل ثمن من الأثمان. جد ثمن التوازن ومن ثم علِّق على ما تحصلت عليه مقارنة بما في (d).

الفصل الخامس

القيمة الزمنية أو الوقتية للنقود

(Time Value of Money)

5.1 مثال (1): القيمة الوقتية للنقود

قلت لصديقك لأنك إنسان لك مقدرة عالية في إدارة المال. أود أن أعطيك 1000$ خالية من الضرائب، لمدة عام من الآن وسوف تجني عائد منها. هل ترغب في الحصول على الـ 1000$ الآن أم X$ بعد عام من الآن إذا كانت X$ تساوي:

1. 1000$ 2. 1100$ 3. 2000$ 4. 10000$

1. سوف لن يفضل استلام 1000$ بعد عام من الآن.
2. سوف لن يفضل استلام 1100$ بعد عام من الآن.
3. سوف يفضل استلام 2000$ بعد عام من الآن.
4. سوف يفضل استلام 10000$ بعد عام من الآن.

- السبب في الحالة الأولى أنه أجزم أن 1000$ بعد عام من الآن لا تساوي قيمة 1000$ الآن.
- السبب في الحالة الثانية أعتقد أن 1100$ بعد عام من الآن أقل من قيمة 1000$ الآن.
- السبب في الحالة الثالثة أعتقد أن 2000$ من الآن قيمتها أكبر من 1000$ الآن.
- السبب في الحالة الثالثة أعتقد أن 10000$ بعد عام من الآن قيمتها أعلى من 1000$ الآن.

5.2 مثال (2): القيمة الوقتية للنقود

الجدول أدناه يوضح شكل تدفق نقدي لخيارين استثمارين.

End of year (EOY) (t)	C.F (Cash flow) A	C.F (Cash flow) B	A-B (Difference)
0	-100,000	-100,000	0

1	+70,000	+10,000	+60,000
2	+50,000	+30,000	20,000
3	+30,000	50,000	-20,000
4	+10,000	+70,000	-60,000

- كلا الخيارين استثمر فيه مبلغ 100,000$ لمدة 4 سنوات.
- الخيار A استثمار في مجال الحواسيب الدقيقة بخبرة مهندس استشاري. لتقديم خدمات التصميم بواسطة الحاسب.
- الخيار B استثمار في مجال الأراضي بواسطة مجموعة من الاستشاريين.
- كلا الخيارين يتم تمويلهما بشرط اختيار أحدهما.
- كلا الخيارين يعطي قيمة 160000$ في نهاية 4 سنوات أي كلا الخيارين يجني نهاية المدة .160000$

أيهما تفضل ؟

إذا اخترت الخيار B فإنك لم تعطي أي اعتبار أن للنقود قيمة زمنية.

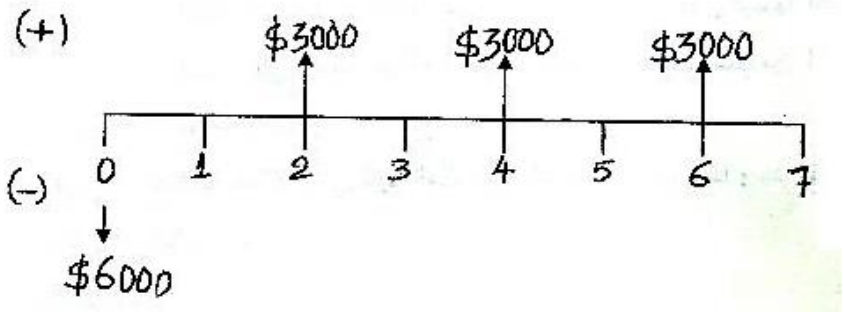
السبب:

1. الفرق 60000$ في نهاية السنة الأولى سوف يكون لها عائد أكبر من 60000$ في نهاية السنة الرابعة.

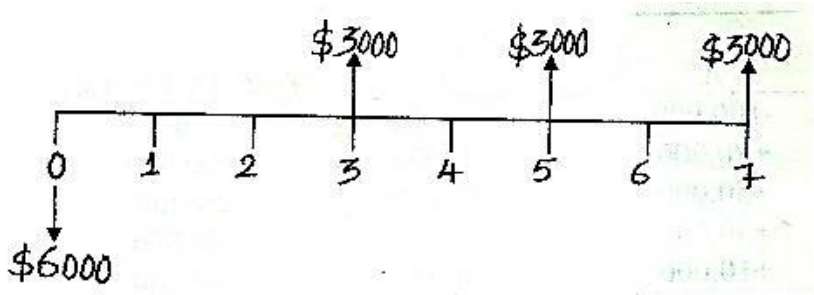
2. الفرق 20000$ في نهاية السنة الثانية سوف يكون لها عائد أكثر مما يكون في نهاية السنة الثالثة.

5.3 مثال (3): القيمة الوقتية للنقود

خذ الخيار C و D



الخيار (C)



الخيار (D)

- شكل التدفق النقدي للخيارين متشابهين فقط الدفعيات تسلم في الخيار (C) قبل سنة من الخيار (D) وكل الخيارين يتطلب استثمار ما قيمته 6000$.
- إذا طلب أن تُفضِل أحد خياري الاستثمار أيهما تفضل؟
- سوف يكون بالتأكيد تفضيل الخيار (C) عن (D) لأن قيمة 3000$ الآن أفضل من قيمتها بعد عام.

من الظواهر المألوفة في واقع الحياة أن الأموال تفقد بعض قيمتها مع مرور الزمن وبصورة أخرى للزمن أثر في تحديد قيمة الأموال والسبب في ذلك فرص الاستثمار (opportunities). حيث أن 1000$ اليوم تتيح لصاحبها فرصة استثمار خلال الأعوام القادمة لتحقيق ربح مأمول ونفع مرتجى من خلال أي عمل أو نشاط استثماري أو حتى الاكتفاء بإيداعها. نتيجة لاختلاف هذه الأنشطة التي يمكن الاستثمار فيها (تعدد البدائل/ الفرص) يؤدي إلى اختلاف قيمة الربح.

إن المشاريع الهندسية كغيرها من المشاريع الاقتصادية تتطلب نفقات ومصاريف مختلفة لقاء إعدادها وتنفيذها وتشغيلها وينتج عنها واردات وعائدات عند استغلالها مستقبلاً. وبما أن عنصر الزمن يدخل دائماً في هذه المشاريع فلابد من الأخذ في الاعتبار أثر الزمن في تحديد وتقدير أرباحها واتخاذ القرار بشأنها.

5.4 حساب الفائدة (Interest Calculation):

باعتبار للنقود قيمة زمنية، يمكن التعبير رياضياً عن العلاقة بين القيمة الحالية (current value or present value) لمجموع نقدي وقيمته المستقبلية (future value).

- بفرض الزمن يقاس بالسنوات.
- بفرض قيمة المجموع النقدي الحالية (P) (present value).
- بفرض قيمة المجموع النقدي المستقبلية بعد n من السنوات F_n .

الفائدة المتراكمة + القيمة الحالية = القيمة المستقبلية بعد n من السنوات

$$F_n = P + I_n \qquad (1)$$

حيث:

F_n هي القيمة المتراكمة لـ P في فترة n سنة أي القيمة المستقبلية.

I_n الزيادة في قيمة P في فترة n سنة. وهي الفائدة المتراكمة للاستلاف او الإيداع وهي دالة في P وعدد الفترات (n) ومعدل الفائدة السنوي (annual interest rate "i").

i معدل الفائدة السنوي. ويعرف بأنه قيمة تغير 1$ خلال 1 سنة.

هنالك طريقتان لحساب الفائدة المتراكمة (I_n) خلال سنوات أو فترات الفائدة (n):

1. الربح البسيط (Simple interest):

يعتبر قيمة الفائدة المتراكمة (I_n) دالة خطية في الزمن. بما أن التغير يحدث خلال فترة 1 سنة إذن قيمة P تتغير بقيمة $P.i$ في كل سنة. إذن I_n تساوي حاصل ضرب P في i في n.

عدد السنوات × معدَّل العائد السنوي × القيمة الحالية = الفائدة المتراكمة

$$I_n = P.i.n$$

عليه:

$$F_n = P + I_n$$

$$F_n = P + P.i.n$$

$$F_n = P(I + i.n)$$

2. الربح المركب (Compound interest):

حيث يتغير I_n كمعدل للتغير في القيمة المتراكمة للنقود.

$$I_n = i\, F_{n-1} \qquad (2)$$

من المعادلة (1) ،

$$F_n = P + I_n$$

$$F_n = P + i\, F_{n-1} \qquad ، \qquad F_{n-1} = P$$

$$F_n = F_{n-1} + i\, F_{n-1}$$

$$F_n = F_{n-1}(1 + i\,) \qquad (3)$$

مثال:

إذا اقرضت 1000$ لمدة سنة لشخص ووافق أن يدفع لك معدل فائدة مقداره 10% في السنة. في نهاية السنة سوف تستلم منه 1100$. هنا يمكن القول بأن 1100$ بعد سنة من الآن هو العائد الذي يكافئ الـ 1000$ الآن بمعدل فائدة 10%.

أو

1000$ الآن لها قيمة 1100$ بعد سنة من الآن على أساس معدل فائدة مقداره 10%. إذا استلف منك شخص 1100$ لسنة أخرى سوف يدفع لك في نهاية السنة 1210$. الفائدة لـ 1100$ من الآن لمدة سنة بمعدل فائدة 10%.

$$I_2 = P \times i = 1100 \times (0.1) = \$110$$

$$F_2 = P + P_i = \$1100 + 110 = \$1210$$

أي يمكن القول:

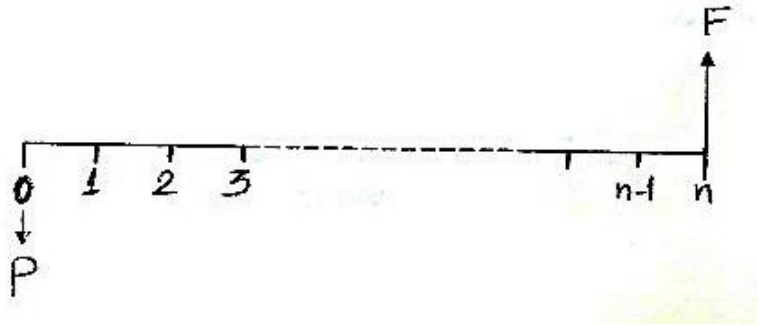
استلاف $1000 لمدة 2 سنة بمعدل فائدة 10% مركبة سنوية تعطي $1210 .

الجدول (5.1) أدناه يوضِّح أسلوب الربح المركب.

جدول (5.1) أسلوب الربح المركب

End of year (EOY)	**A Amount Owed**	**B Interest for next period**	**C = A + B Amount owed for next period**
0	P	Pi	$P + Pi = P(1 + i)$
1	$P(1 + i)$	$P(1 + i)i$	$P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$
2	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2.i$	$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2.i = P(1 + i)^3$
3	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3.i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3.i = P(1 + i)^4$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$n - 1$	$P(1 + i)^{n-1}$	$P(1 + i)^{n-1}.i$	$P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-1}.i = P(1 + i)^n$
n	$P(1 + i)^n$		

5.5 مجموع نقدي مفرد (Single Sum of Money):



نهاية الفترة $0, 1, 2, 3, \ldots n$

F تحدث بعد عدد n من الفترات وهي القيمة المستقبلية المتراكمة للمجموع النقدي (P) في n من السنوات (الفترات).

P القيمة الحالية للمجموع النقدي في الفترة 0 (الآن).

i معدل الفائدة لكل فترة (interest rate per interest period)

n عدد فترات الفائدة (the number of interest periods)

القيمة المستقبلية منسوبة إلى القيمة الحالية:

$$F = P(1 + i)^n$$

حيث i يعبر عنه في صورة كسر عشري

$$F = P(F/P, i, n)$$

حيث i يعبر عنه في صورة نسبة مئوية

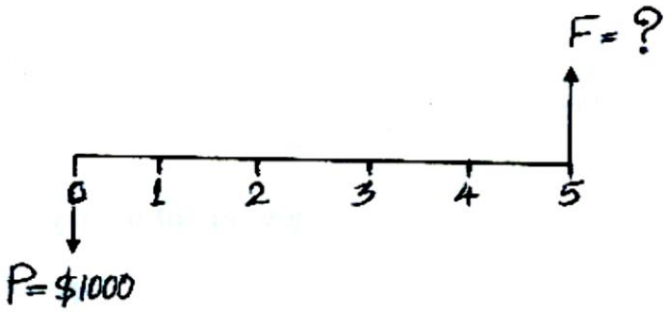
$(1 + i)^n$ يسمى بمعامل القيمة المستقبلية لمجموع نقدي ويعرف بـ $(F/P, i, n)$

$(F/P, i, n)$ يقرأ لإيجاد معطى (بمعلومات) to find F given P, i, n وهي محسوبة ومعدة في جدول.

مثال:

شخص استدان قرض قيمته $1000 بمعدل فائدة 12% مركبة سنوياً. القرض يسدد بعد 5 سنوات كم سيدفع للجهة الدائنة.

الحل:



$$i = 0.12, n = 5, P = 1000$$

$$F_n = P(1+i)^n = 1000(1+0.12)^5$$

$$= 1000(1.12)^5$$

$$= 1000(1.7623)$$

$$= \$1762.3$$

∴ القيمة التي سوف يتم سدادها هي $1762.3 .

$$from\ table\ we\ find\ that\ \ (F/P, 12\%, 5) = 1.7623 \times 1000 = \$1762.3$$

أيضاً: من القانون يمكن حساب القيمة الحالية (present value) إذا علمت القيمة المستقبلية ومعدل الفائدة (i) وعدد فترات الفائدة (n) .

$$F = P(1+i)^n$$

$$\therefore P = F(1+i)^{-n}$$

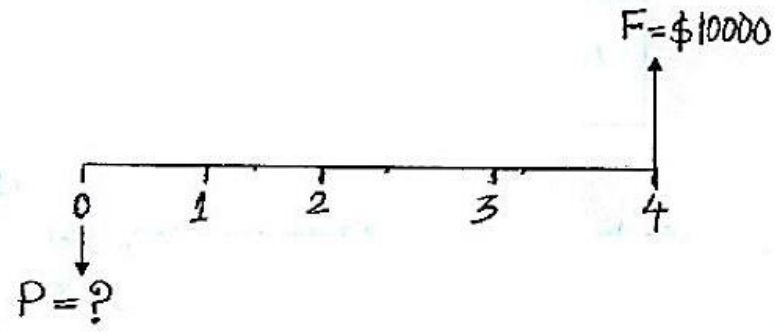
$$OR$$

$$P = F(P/F, i, n)$$

حيث يعرف $(1+i)^{-n}$ أو $(P/F,i,n)$ بمعامل القيمة الحالية لمجموع نقدي.

مثال:

إذا كنت ترغب أن تجمع مبلغ $10,000 في حساب توفير لمدة 4 سنوات من الآن والحساب يدفع 9% كمعدل فائدة مركبة سنوياً كم تودع في حسابك الآن.



$$F = 10{,}000$$

$$i = 0.09$$

$$n = 4$$

$$P = F(1+i)^{-n}$$

$$= 10{,}000(1+0.09)^{-5}$$

$$= 10{,}000(0.7084) = \$7084$$

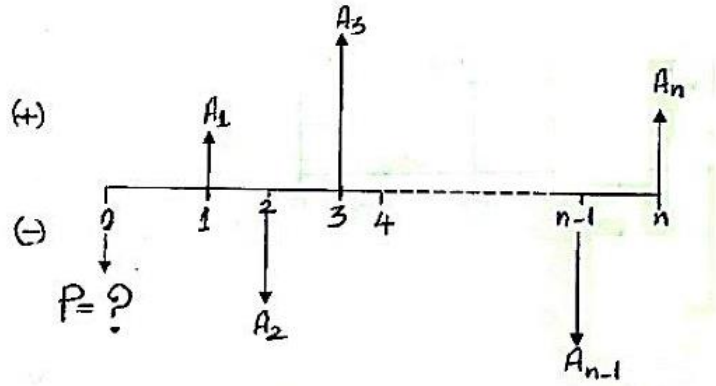
$$from\ table\ \ (P/F, 9\%, 4) = 0.7084 \times 10{,}000 = \$7084$$

5.6 سلسة من التدفقات النقدية (Series of Cash Flow):

تسمى الحالة العامة للصيغ السابقة. أي تحويل سلسلة من التدفقات النقدية إلى ما يكافئها كقيمة حالية (present) أو مستقبلية (future) .

أفرض A_t هي القيمة التي سوف تودع (إيراد) أو المدفوعة (استلاف) في نهاية الفترة t ، وبمعدل فائدة i .

القيمة الحالية لسلسة التدفقات النقدية تساوي حاصل مجموع كل القيم الحالية لكل تدفق نقدي كل على حدة.



$$P = A_1(1+i)^{-1} - A_2(1+i)^{-2} + A_3(1+i)^{-3} \pm \cdots - A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{n}$$

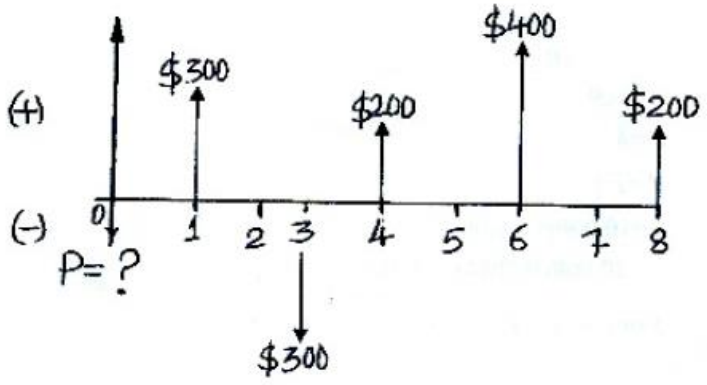
$$P = \sum_{i=1}^{n} A_t(P/F, i, t) \quad or \quad \sum_{i=1}^{n} A_t(1+i)^{n-(n+t)}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} A_t(P/F, i, t)$$

مثال:

اعتبر سلسلة التدفقات النقدية الموضحة. استخدم معدل فائدة يساوي 6% كمعدل فائدة لكل فترة (interest rate per period) 6%.

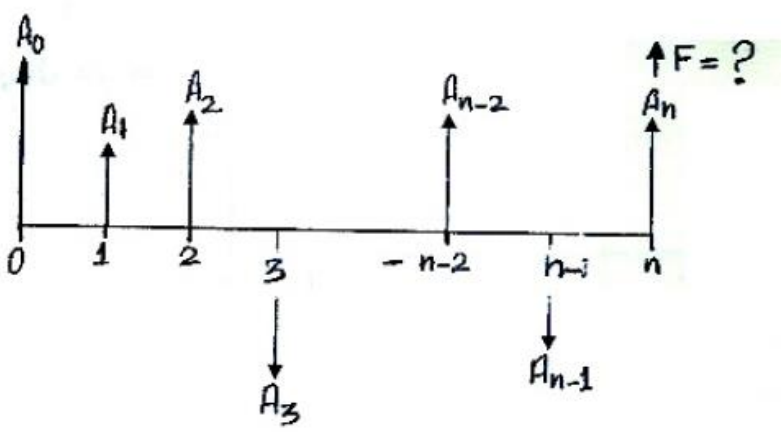
الحل:



$$P = 300(P/F, 6\%, 1) - 300(P/F, 6\%, 3) + 200(P/F, 6\%, 4) + 400(P/F, 6\%, 6) + 200(P/F, 6\%, 8)$$

$$= 300(0.9434) - 300(0.8396) + 200(0.7921) + 400(0.7050) + 200(0.6274) = \$597.04$$

بنفس القدر فإنَّ القيمة المستقبلية المكافئة لسلسلة تدفقات نقدية تساوي حاصل مجموع كل القيم المستقبلية لكل تدفق (مجموع) نقدي كل على حدة. وبتطبيق الفرضية السابقة:



$$F_{(n-1)} = A_0(1+i)^{n-0} + A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} - A_3(1+i)^{n-3} \pm \cdots + A_{n-1}(1+i)^{n-(n-1)} + A_n(1+i)^{(n-n)}$$

$$= A_0(1+i)^n + A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} - A_3(1+i)^{n-3} \pm \cdots + A_{n-1}(1+i) + A_n$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_t(1+i)^{n-t}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_t(F/P, i, n-t)$$

$$OR$$

$$from \quad P = \sum_{i=1}^{n} A_t(1+i)^{-t} \qquad (1)$$

$$and \quad F = P(1+i)^n \qquad (2)$$

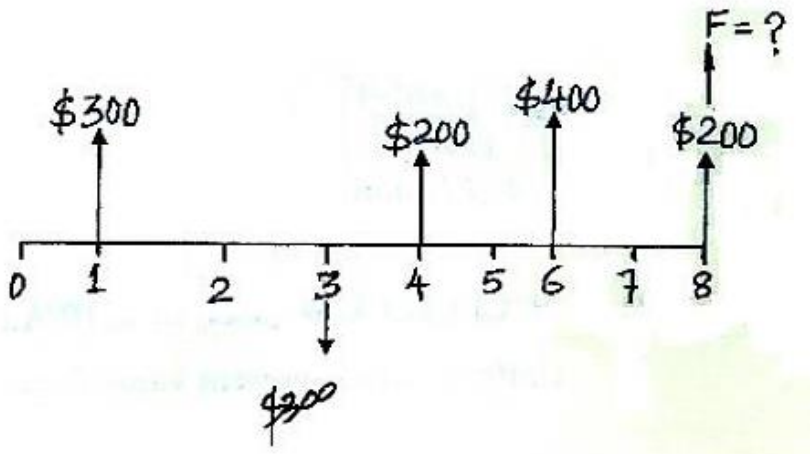
عوض قيمة P من (1) في (2)

$$F = (1+i)^n \sum_{i=1}^{n} A_t (1+i)^{-t}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_t (1+i)^{-t} \,.\, (1+i)^n$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_t (1+i)^{n-t}$$

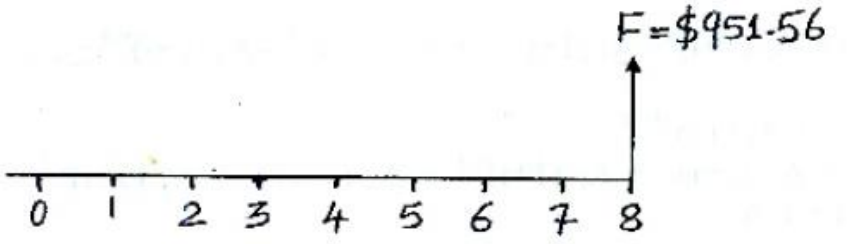
لنفس التدفق النقدي السابق أحسب القيمة المستقبلية المكافئة لسلسلة التدفقات الموضحة.



$$F = 300(F/P, 6\%, 7) - 300(F/P, 6\%, 5) + 200(F/P, 6\%, 4) + 400(F/P, 6\%, 2) + 200(F/P, 6\%, 0)$$

$$= 300(1.5036) - 300(1.3382) + 200(1.2625) + 400(1.236) + 200$$

$$= \$951.56$$



أو يمكن مباشرة حساب القيمة الحالية أو المستقبلية كمجموع نقدي واحد.

$$P = F(P/F, i, n) = 951.56(0.627) = \$596.62812$$

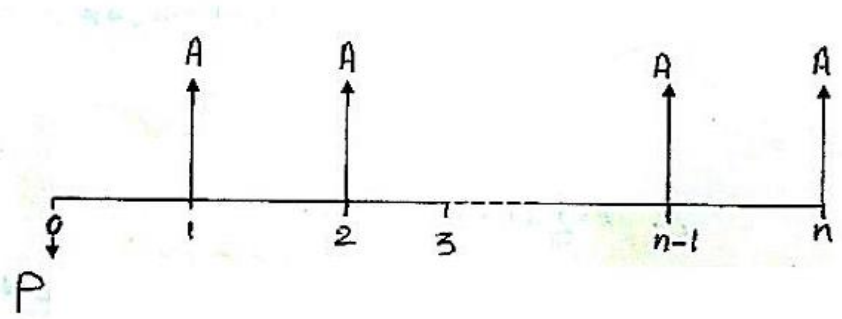
$$F = P(F/P, i, n) = 596.62812(1.5938) = \$950.905$$

1. سلسلة التدفقات النقدية المتساوية (المنتظمة) (Uniform Series of Cash Flow):

تحدث عندما تكون كل التدفقات النقدية متساوية.

القيمة الحالية المكافئة للسلسلة المتساوية.

$$P = \sum_{i=1}^{n} A(1+i)^{-1}$$



$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = A(P/A, i, n)$$

$(P/A, i, n)$ يعرف بمعامل القيمة الحالية لسلسلة من التدفقات النقدية (المنتظمة) المتساوية (uniform series, present value factor).

مثال:

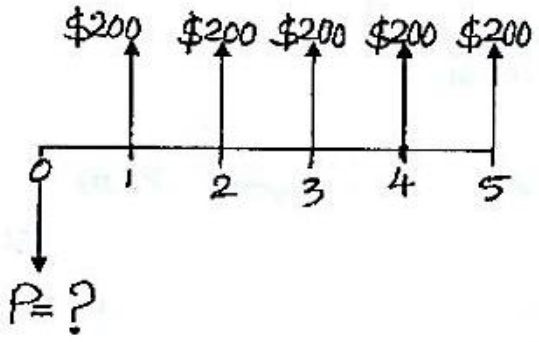
شخص يرغي في إيداع مبلغ من المال في حساب إدخار، بحيث يسحبه في 5 دفعات كل دفعة تساوي 2000$. إذا كان سحب الدفعة الأولى بعد سنة واحدة من الإيداع. والبنك يعطي فائدة مقدارها 12% مركبة سنوياً كم يودع هذا الشخص.

$$P = ?$$

$$A = 2000/year$$

$$i = 12\%$$

$$n = 5$$

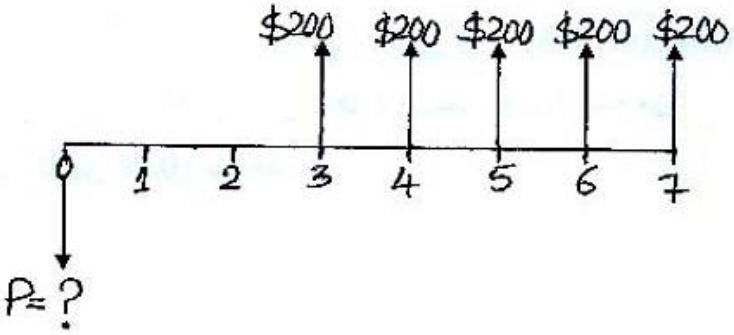


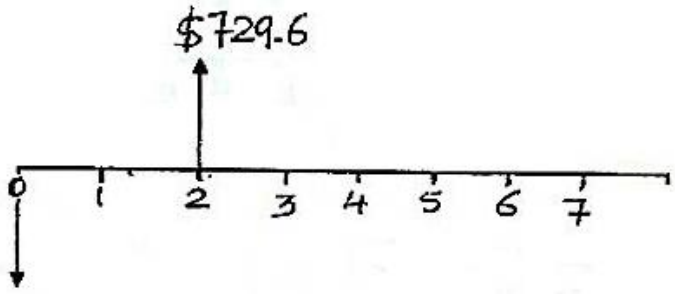
$$P = A(P/A, 12\%, 5)$$

$$= 2000(3.6048) = \$7209.6$$

مثال:

للتدفق أدناه أحسب قيمة P





$$P = (P/A, 12\%, 5)$$

$$= 2000(3.6048)(0.7972) = \$5747.49$$

أيضاً يمكن تحويل قيمة حالية إلى دفعات منتظمة من القانون.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = P(A/P, i, n)$$

$(A/P, i, n)$ يسمى معامل استعادة رأس المال (capital recovery factor).

مثال:

بافتراض هناك $10,000 أودعت في حساب يعطي فائدة بمعدل 15% مركبة سنوية. يسحب في 10 دفعات سنوية متساوية وأول دفعة تسحب عند نهاية السنة الأولى من الإيداع. ما هي قيمة الدفعات السنوية التي يقفل بعدها الحساب. (أي لا يترك في الرصيد شيء).

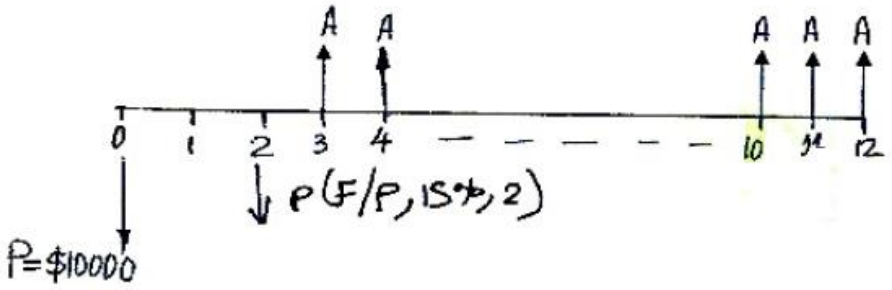
الحل:

$$A = P(A/P, i, n)$$

$$= 10{,}000(A/P, 15\%, 10)$$

$$= 10{,}000(0.1993) = \$1993 \text{ سنوياً}$$

لنفس المثال السابق إذا أخرت فترة السحب لمدة 2 سنة من نفس تاريخ الإيداع كم يسحب في كل سنة من الـ 10 سنوات.



$$V_1 = P(F/P, 15\%, 2)$$

$$= 10{,}000(1.3225) = \$13.225$$

$$A = V_1(A/P, 15\%, 10)$$

$$= 13.225 \times (0.1993) = \$2635.74/year$$

القيمة المستقبلية المكافئة لسلسلة من التدفقات النقدية المتساوية:

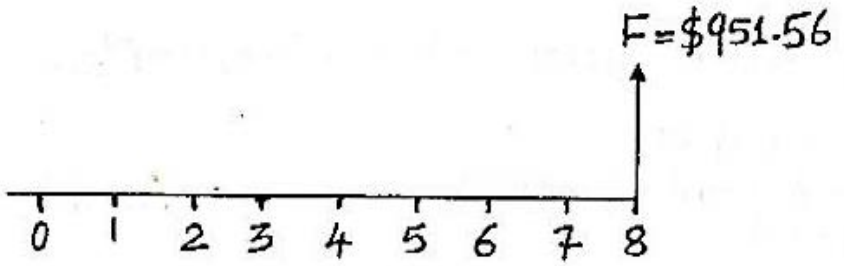
$$\mathrm{F} = \mathrm{P}(1+i)^n \ , P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$\therefore F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = A(F/A, i, n)$$

$(F/A, i, n)$ معامل القيمة المستقبلية (uniform series, future worth factor)

حل المثال التالي:



$$F = 150{,}000$$

$$i = 8\%$$

$$n = 35 \text{ سنة}$$

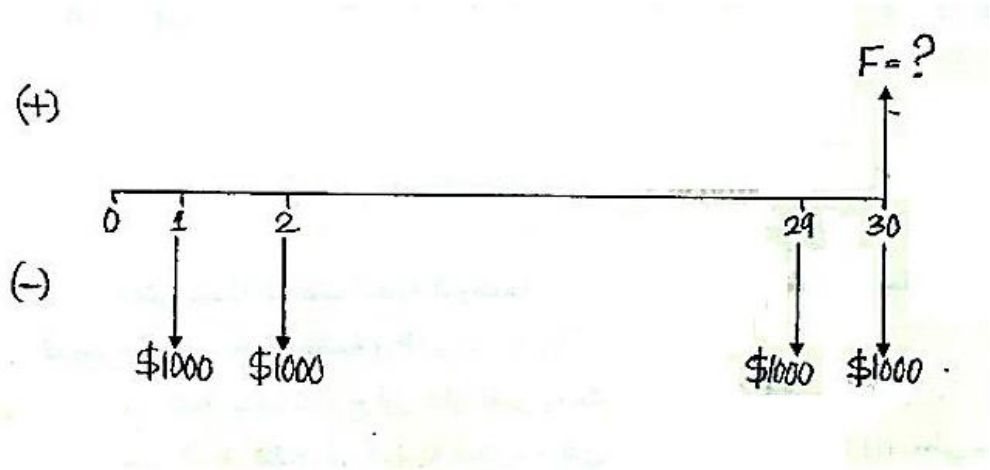
$$A = ?$$

$$A = F(A/F, 8\%, 35)$$

$$= 150{,}000(0.0058) = \$870 \text{ سنة}$$

مثال أخر:

إذا تم إيداع 1000$ سنوياً في حساب ادخار لمدة 30 سنة من الآن. ما قيمة المبلغ المتراكم في حساب الادخار في فترة انتهاء آخر إيداع. إذا كان الحساب يدفع 8% مركبة سنوياً.



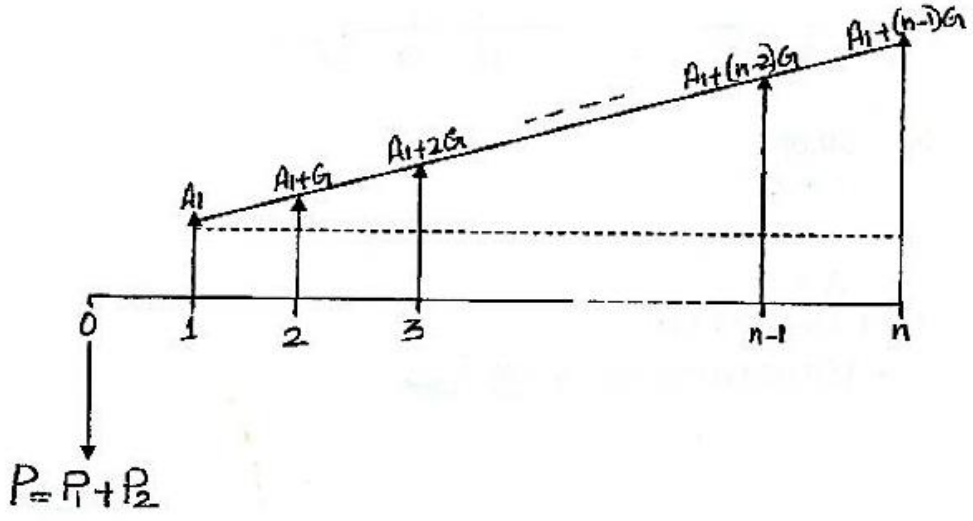
$$F = A(A/F, 8\%, 30)$$

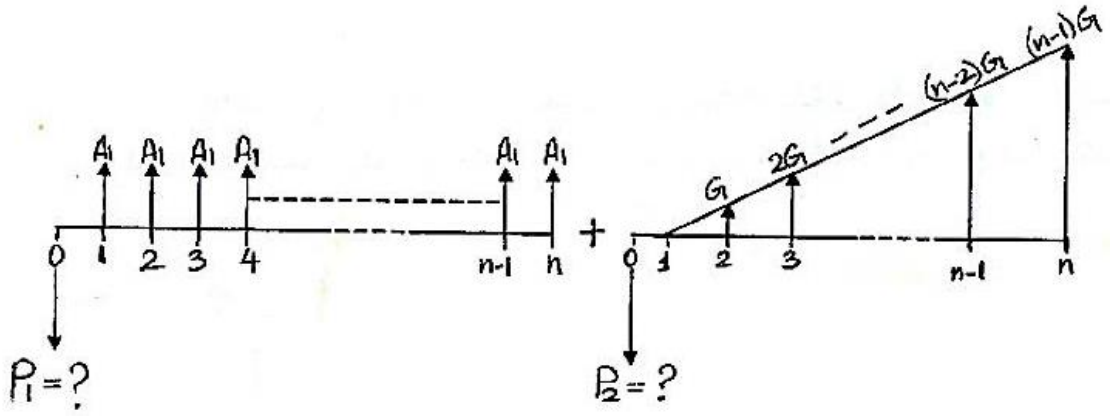
$$= 1000(113.2832) = \$113.283.2$$

2. سلسلة التدفقات النقدية المتدرجة (Gradient Series of Cash Flow):

سلسلة التدفقات المتوالية عددياً:

سلسلة التدفقات النقدية المتدرجة تحدث عندما تكون قيمة التدفق النقدي التالي لأول تدفق نقدي أكبر من التدفق النقدي الذي يسبقه بقيمة ثابتة تساوي G . أو عندما يكون التدفق النقدي التالي يقل من التدفق النقدي الذي يسبقه بقيمة ثابتة تساوي G .





(Uniform series) + (Gradient series)

شكل (5.1)

اعتبر سلسلة التدفقات النقدية الموضحة في الشكل (5.1) أعلاه. السلسلة (المنتظمة) يمكن تمثيلها كمجموع لتدفقات نقدية منتظمة (P_1) ومتدرجة (P_2) .

من الشكل بديهياً للتدرج فإن أول تدفق نقدي يحدث في نهاية الفترة الزمنية الثانية.

حجم التدفق النقدي في السلسلة المتدرجة الذي يحدث عند نهاية الفترة (t) يعطى بـ :

$$A_t = (t-1)G \qquad (a)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

التسلسل النقدي المتدرج يظهر عندما تختلف قيمة مجموع نقدي والذي يليه بقيمة ثابتة هي G ومثال لهذا التدفق تكاليف الصيانة والتشغيل (operating and maintenance cost) ، التي تتجه نحو الزيادة مع الزمن نسبة لأثر التضخم والتهالك المتدرج للمعدات. مثل هذه التكاليف في الغالب تقرب كتدفق نقدي متدرج.

القيمة الحالية المكافئة لسلسلة التدفق النقدي المتدرج تحسب كالآتي:

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} A_t(1+i)^{-t} \qquad (b)$$

بتعويض المعادلة (a) في المعادلة (b)

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (t-1)(1+i)^{-t}$$

$$P_2 = G \sum_{i=1}^{n} (t-1)(1+i)^{-t}$$

$$P_2 = G\left[\frac{1-(1+ni)(1+i)^{-n}}{i^2}\right]$$

يمكن التعبير عن القيم داخل الأقواس بالمعاملات

$$P_2 = G\left[\frac{(P/A,i,n)-n(P/F,i,n)}{i}\right]$$

$$P_2 = G(P/G,i,n)$$

حيث $(P/G,i,n)$ معامل القيمة الحالية لسلسلة التدفقات المتدرجة

(gradient series, present worth factor)

$$P_1 = A(P/A,i,n)$$

$$\therefore P = P_1 + P_2$$

$$= A_1(P/A,i,n) + G(P/G,i,n)$$

سلسلة التدفقات النقدية المتساوية المكافئة لسلسلة التدفق النقدي المتدرج يحصل عليها عن طريق ضرب قيمة معامل القيمة الحالية للتدفق المتدرج في المعامل $(A/P,i,n)$ لنحصل على:

$$A = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}(A/F,i,n)\right]$$

$$A = G(A/G,i,n)$$

حيث $(A/G,i,n)$ هو معامل تحويل التدفق المتدرج إلى تدفق منتظم (متساوي)

(gradient – to uniform series conversion factor)

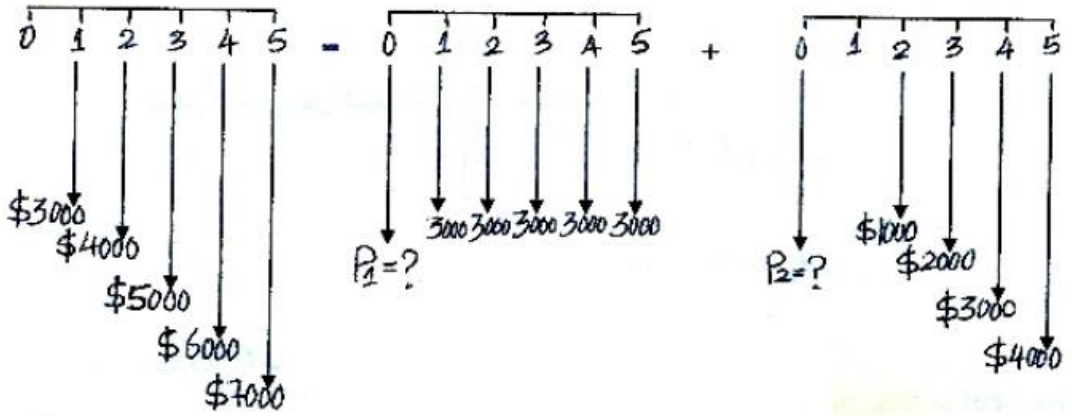
لحساب القيمة المستقبلية المكافئة لسلسلة تدفق نقدي متدرج في فترة (n) أضرب قيمة معامل $(A/G,i,n)$ في قيمة معامل $(F/A,i,n)$ أو معامل $(P/G,i,n)$ في قيمة معامل $(F/P,i,n)$.

مثال:

تكاليف الصيانة لماكينة معينة تزيد بمقدار $1000/year$ خلال 5 سنوات وهي عمر الماكينة. إذا كانت تكلفة الصيانة في السنة 3000$. باستخدام معدل فائدة مقداره 8% مركبة سنوياً أحسب القيمة الحالية المكافئة لتكاليف الصيانة.

الحل:

يمكن تبسيط شكل التدفق النقدي كالآتي:



$$P_1 = 3000(P/A, 8\%, 5)$$

$$= 3000(3.9927) = \$11.978.10$$

$$P_2 = G(P/G, 8\%, 5)$$

$$= 1000(7.3724) = \$7372.4$$

$$P_{EQ} = P_1 + P_2$$

$$= 11{,}978.10 + 7372.4 = \$19{,}350.5$$

سلسلة التدفقات النقدية المنتظمة (المتساوية) المكافئة للتدفق النقدي للمثال السابق

A = (قيمة التدفق المنتظم) + (قيمة التدفق المتدرج)

$$A = 3000 + G(A/G, 8\%, 5)$$

$$= 3000 \div 1000(1.8465) = \$4846.5/years$$

لإيجاد القيمة المستقبلية المكافئة للتدرج تحول القيمة الحالية المكافئة للتدرج إلى قيمة مستقبلية:

$$F = P_{EQ.G}(F/P, 8\%, 5)$$

$$= 19{,}350(1.4693) = \$28{,}431.69$$

أو بتحويل التدفقات السنوية المتساوية إلى مجموع قيمة مستقبلية مكافئة للتدرج.

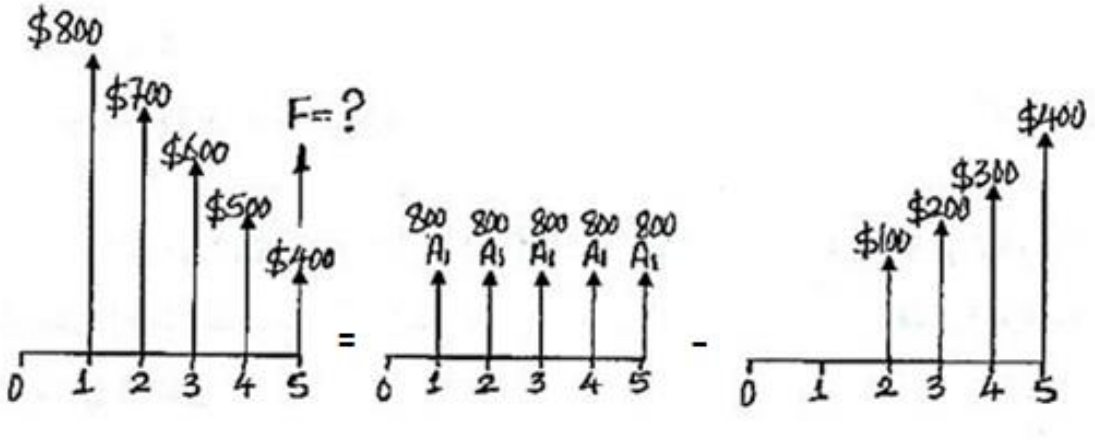
$$F = A(A/P, 8\%, 5)$$

$$= 4846.5(5.8666) = \$28{,}432.48$$

مثال:

للتدرج النقدي الموضح أحسب القيمة المستقبلية المتراكمة المكافئة في نهاية الفترة. علماً بأن معدل الفائدة 8% مركبة سنوياً.

الحل:



شكل (a)

1. تحويل التدفق المتدرج إلى تدفق منتظم (متساوي) كما في الشكل (b) أدناه.

$$A_2 = G(A/G, 8\%, 5)$$

$$= 100(1.8465) = \$184.65$$

$$A_1 = 800$$

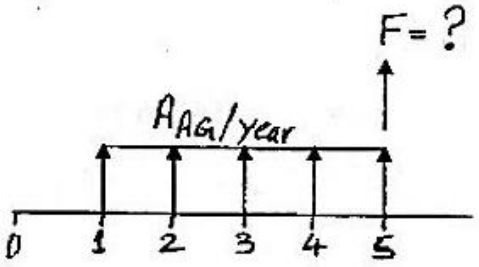
$$A_{A.G} = A_1 - A_2$$

2. طرح قيمة 184.65$ من التدفق المتساوي في الشكل (a)

$$A_{A.G} = 800 - 184.65$$

$$= \$615.35/years$$

$$F = ?$$



شكل (b)

3. تحويل قيمة التدفق النقدي المتساوي (المنتظم) الحقيقي المكافئ للتدفق المتدرج A_{AG} إلى قيمة مستقبلية وسوف تكون مكافئة للتدرج المنتظم.

$$F = A_{AG}(F/A, 8\%, 5)$$

$$= 651.35(5.866) = \$3610.01$$

5.7 تعدد فترات الفائدة المركَّبة:

(Multiple Compounding Periods in a Year)

ليس كل معدلات الفائدة يشترط فيها أن تكون معدلات سنوية التركيب. في حالات كثيرة من معاملات القروض توضع شروط مثل أن تحسب الفائدة وتسدد أكثر من مرة في السنة. مثلاً يمكن أن تحسب الفائدة على الودائع في بنوك التوفير وتضاف إلى الرصيد 4 مرات في السنة ويسمى ذلك بفائدة مركبة ربع سنوية. وتدفع عادة الفوائد على السندات المشتركة كل 6 أشهر، وتطلب في أغلب الأحيان مؤسسات البناء والقروض وشركات تمويل السيارات والمنظمات الأخرى التي تقوم بالإقراض الشخصي أن تحسب الفائدة كل شهر.

أفترض أحد المعاملات بالقروض والتي تسدد فيها الفائدة بمعدل فائدة 12% مركبة ربع سنوية يمكن إعادة وصف هذه المعاملة على أن معدل الفائدة هو 3% للكل فترة تركيب وهي تساوي 3 أشهر.

مثال:

إذا استدان شخص مبلغ 1000$ بمعدل فائدة 12% مركبة ربع سنوية فما هي القيمة التي يجب أن تسدد للجهة الدائنة عند نهاية 5 سنوات.

معدل الفائدة لكل فترة تركيب = $\frac{12}{4}$ % = 3% لكل فترة تركيب

عدد فترات تركيب الفائدة = 4 × 5 = 20 فترة

$$F = P(F/P, 3\%, 20)$$

$$= 1000(1 + 0.03)^{20}$$

$$= 1000(1.03)^{20} = \$1806.1$$

بتركيب ربع سنوي 1806.1$ يجب أن تعاد للجهة الدائنة.

مثال:

إذا تم اقتراض 1000$ لمدة سنة بمعدل فائدة 8% مركبة ربع سنوية ما هي قيمة المبلغ الذي سوف يعاد للجهة الدائنة في نهاية الفترة.

الحل:

معدل الفائدة لكل فترة تركيب = $\frac{8}{4}$ % = 2% لكل فترة تركيب

عدد فترات تركيب الفائدة = 4 مرات (فترات) كل 3 اشهر في السنة

$$F = P(F/P, 2\%, 4)$$

$$= 1000(1.0824)$$

$$= 1000(1.02)^4 = \$1802.4$$

مثال:

وإذا تم اقتراض نفس المبلغ بفائدة 8% مركبة سنوياً فما هو المبلغ الذي سوف تستلمه الجهة الدائنة من المدين.

الحل:

معدل الفائدة لكل فترة تركيب = 8% لكل فترة تركيب

عدد فترات تركيب الفائدة = 1 (مرة) فترة في السنة

$$F = P(F/P, 8\%, 1)$$

$$= 1000(1.08)^1$$

$$= 1000(1.08)^1 = \$1080$$

إذا حددت الفائدة بـ 8.24% مركبة سنوياً فالقيمة المسددة للجهة الدائنة:

معدل الفائدة لكل فترة تركيب = 8.24% لكل فترة تركيب

عدد فترات تركيب الفائدة = 1 (مرة) فترة في السنة

$$F = P(F/P, 8.24\%, 1)$$

$$= 1000(1 + 1.0824)^1$$

$$= 1000(1.0824)^1 = \$1082.4$$

وهي نفس القيمة المعادة للجهة الدائنة في حالة 8% مركبة ربع سنوية.

ويمكن أن نخلص إلى أن 8% مركبة ربع سنوية تكافئ 8.24% مركبة سنوية، وأن 8% مركبة سنوية لا تكافئ 8% مركبة ربع سنوية.

المعدل 8% يعرف بمعدل الفائدة الاسمي السنوي (nominal annual interest rate) .

المعدل 8.24% يعرف بمعدل الفائدة الفعلي السنوي (effective annual interest rate) .

ويعرف معدل الفائدة الفعلي السنوي بأنه معدل الفائدة السنوي الذي يكافئ معدل الفائدة المذكور (الاسمي). بتعريف:

r معدل الفائدة الاسمي السنوي (nominal annual interest rate)

m عدد فترات التراكيب في السنة (number of interest periods per year)

i معدل الفائدة لكل فترة تركيب (interest rate per interest period)

i_{eff} معدل الفائدة الفعلي السنوي (effective annual interest rate)

$$\frac{r}{m} = i$$

$$i_{eff} = \left[1 + \frac{r}{m}\right]^m - 1$$

$$= (1 + i)^m - 1$$

$$OR$$

$$i_{eff} = \left[F/P, \frac{r}{m}, m\right]$$

$$= (F/P, i, m)$$

مثال:

إذا كان معدل الفائدة هو 8% مركبة نصف سنوية فما هو معدل الفائدة الفعلي السنوي المكافئ له.

الحل:

$$r = 0.08$$

$$m = 2$$

$$i_{eff} = \left[1 + \frac{r}{m}\right]^m - 1$$

$$= \left[F/P, \frac{r}{m}, m\right]$$

$$= \left[1 + \frac{0.08}{2}\right]^2 - 1$$

$$= (1.04)^2 - 1$$

$$= 1.0816 - 1$$

$$= 0.0816 = 8.16\%$$

$$OR$$

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

$$i_{eff} = (1 + i)^m - 1$$

$$= (F/P, i, m) - 1$$

$$= (1 + 0.04)^2 - 1$$

$$= (1.04)^2 - 1$$

$$= 1.0816 - 1$$

$$= 0.0816 = 8.16\%$$

أي أن 8% مركبة نصف سنوية تكافئ 8.16 مركبة سنوية أو 8.16% هو معدل الفائدة الفعلي السنوي لمعدل فائدة 8% مركبة نصف سنوية.

مثال:

أحسب معدل الفائدة الفعلي إذا كان معدل الفائدة الاسمي هو 12% مع التركيب.

a. السنوي ans. : %12

b. النصف سنوي ans. : %12.36

c. الربع سنوي ans. : %12.55

d. الشهري ans. : %12.68

e. اليومي ans. : %12.75

مثال:

شخص استدان مبلغ 1000$ وسدد القرض بعد 4.5 سنة. وكانت القيمة التي دفعت للجهة الدائنة 1500$. ما هو معدل الفائدة الفعلي السنوي لهذه المعاملة الاستثمارية إذا كانت فترة تركيب الفائدة هي 6 أشهر.

الحل:

$$F = 1500$$

$$P = 1000$$

$$n = 4.5 \times 2 = 9 \ periods$$

$$F = P(F/P, i, n)$$

$$1500 = 100(F/P, i, 9)$$

$$1500 = 1000(1 + i)^9$$

$$1.5 = (1 + i)^9$$

$Take\ log\ for\ each\ side$:

$$0.17609 = 9 \log(1 + i)$$

$divide\ by\ 9$

$$0.019566 = \log(1 + i)$$

$Take\ inverse\ log$:

$$1 + i = \log^{-1}(0.019566) = 1.04608$$

$$i = 1.04608 - 1 = 0.046$$

إذن ، معدل الفائدة الذي يركب كل 6 أشهر بالتقريب هو 4.6%

$$i = \frac{r}{m} = 4.6\%$$

$$i_{eff} = (1 + i)^m - 1$$

$$= (1 + 0.046)^2 - 1$$

$$= (1.046)^2 - 1$$

$$= 1.0943 - 1 = 0.0943$$

إذن معدل الفائدة الفعلي السنوي لهذه المعاملة بالتقريب (.approx) هو 9.43%

الفصل السادس

التكافؤ (Equivalence)

6.1 خطط تسديد المال المقرض (Planning of Paying Borrowed Money):

يوضح الجدول (6.1) أدناه خطط تسديد قرض مقداره 10000$ بفائدة مقدارها 9% تدفع سنوياً، والسنة صفر في الجدول يشار بها إلى تاريخ بداية القرض وتسمى الـ 10000$ (برأس المال الأساسي الأصلي) المقترض (principal amount).

جدول (6.1) خطط تسديد قرض مقداره 10000$

الخطة	المال الممتلك بعد الدفعة التي تتم في نهاية السنة E.O.Y	الدفعة التي تتم في نهاية السنة E.O.Y	إجمالي المال الممتلك قبل الدفعة التي تتم في نهاية السنة E.O.Y	الفائدة المستحقة (9%) من المال الممتلك عند بداية السنة S.O.Y	نهاية السنة
	10000				1
	10000	900	10900	900	2
	10000	900	10900	900	3
	10000	900	10900	900	4
الخطة I	10000	900	10900	900	5
	10000	900	10900	900	6
	10000	900	10900	900	7
	10000	900	10900	900	8
	10000	900	10900	900	9
	0	10900	10900	900	10
	10000				0
	9000	1900	10000	900	1
	8000	1810	9810	810	2
الخطة II	7000	1720	8720	720	3
	6000	1630	7630	630	4

5	540	6540	1540	5000	
6	450	5450	1450	4000	
7	360	4360	1360	3000	
8	270	3270	1270	2000	
9	180	2180	1180	1000	
10	90	1090	1090	0	
0				10000.0	
1	900.0	10900.0	1558.2	9341.8	
2	840.76	10182.56	1558.2	864.36	
3	776.19	9400.55	1558.2	7842.35	
4	705.81	8548.16	1558.2	6989.96	
5	629.10	7619.06	1558.2	6060.86	الخطة
6	545.46	6606.32	1558.2	5048.12	III
7	454.33	5502.45	1558.2	3944.25	
8	354.98	429923	1558.2	2741.03	
9	246.69	2987.72	1558.2	1429.52	
10	128.66	1558.18	1558.2	0.00	
0				10000.0	
1	900.0	10900.0	0.0	10900.0	
2	981.0	11881.0	0.0	11881.0	
3	1069.29	12950.29	0.0	12950.29	
4	1165.3	14115.82	0.0	14115.82	
5	1270.42	15386.24	0.0	15386.24	الخطة
6	1384.76	16771.00	0.0	16771.00	IV
7	1509.39	18280.39	0.0	18280.39	
8	1645.24	19925.63	0.0	19925.63	
9	1793.31	21718.94	0.0	21718.94	
10	1954.70	23673.64	23673.64	0.00	

الخطة I :

1. تدفع الفائدة سنوياً.
2. لا تقتضي دفع جزئي لرأس المال.
3. يدفع رأس المال الأساسي كله دفعة واحدة نهاية الفترة.

الخطة II :

1. تقليل رأس المال بطريقة نظامية.
2. تخفيض الفائدة.

الخطة III :

1. تقليل رأس المال الأساسي بطريقة منتظمة.
2. انتظام مجموع مدفوعات الفائدة ورأس المال.

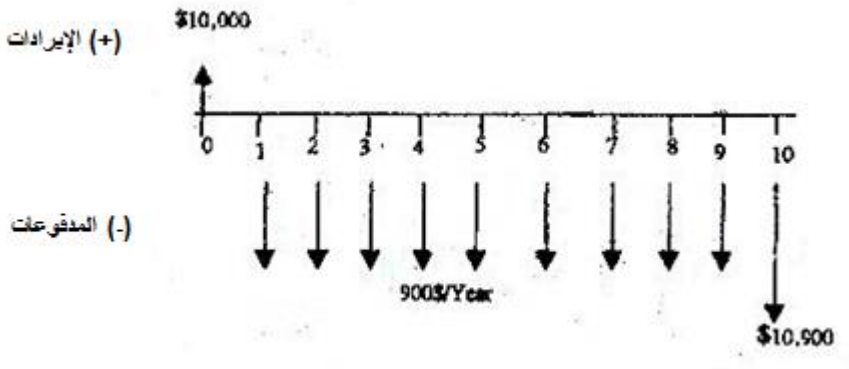
الخطة IV :

1. لا تقتضي دفع جزئي لرأس المال.
2. لا تقتضي دفع فائدة.
3. يتم دفع رأس المال الأساسي والفائدة في نهاية الـ 10 سنوات.

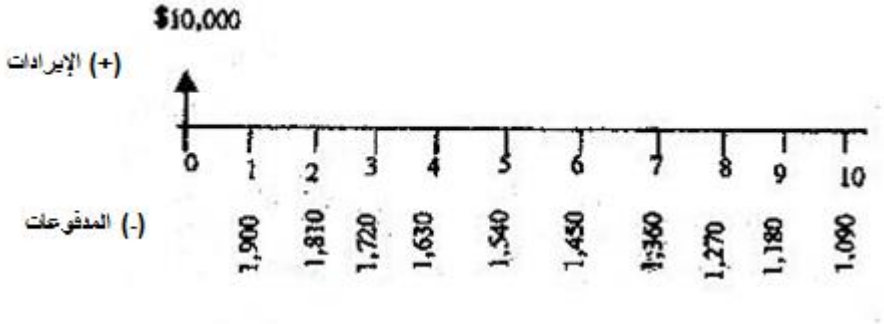
جدول (6.2)

السنة	رأس المال المستثمر	I	II	III	IV
0	10000				
1		900	1900	1558	
2		900	1810	1558	
3		900	1720	1558	
4		900	1630	1558	
5		900	1540	1558	

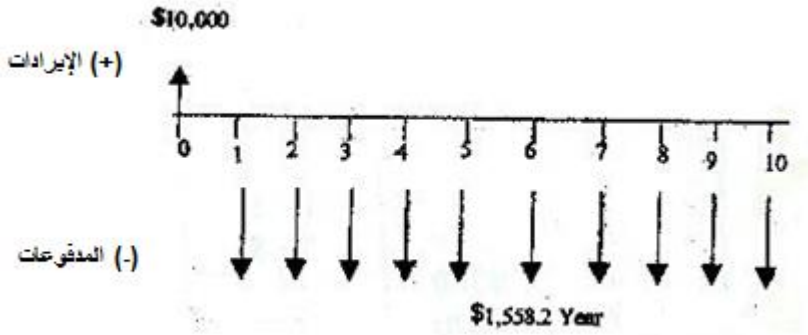
6		900	1450	1558	
7		900	1360	1558	
8		900	1270	1558	
9		900	1180	1558	
10		19000	1090	1558	
					23671
F_{10}		23674	23674	23673	23671



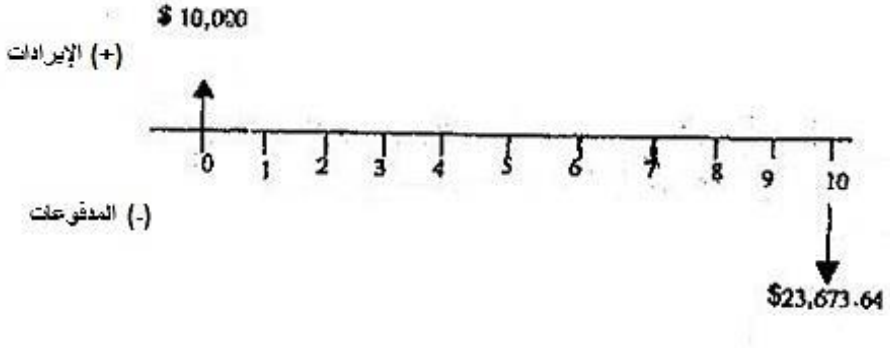
(a) رسم تخطيطي للمسار النقدي في الخطة I



(b) رسم تخطيطي للمسار النقدي في الخطة II



(c) رسم تخطيطي للمسار النقدي في الخطة III



(d) رسم تخطيطي للمسار النقدي في الخطة IV

أثناء تناول المواضيع الخاصة بالقيمة الزمنية للنقود استخدم تعبير التكافؤ (equivalence) من غير تعريف ماهية المقصود بهذا المفهوم، وقد تم ذلك عمداً (intentionally) لأجل تقديم فكرة عن تكافؤ سلسلة أو مسار تدفقين نقديين عند معدل فائدة معين k% . إذا كان قيمتها الحالية تتساوى باستخدام نفس معدل الفائدة k% . وبالطبع إذا كانت القيمة الحالية (PW) للتدفقين النقديين متساوية عند معدل الفائدة k% فإن عائدهما عند أي نقطة في الزمن معطاة يتساويان باستخدام نفس المعدل k% . وبالمثل إذا تكافأ مساران للتدفق النقدي عند معدل فائدة k% فالسلسلة المنتظمة المتكافئة (AW) الخاصة بكل تدفق سوف تتساويا عند التعبير عنهما في نفس الفترة الزمنية.

وتعد فكرة احتمال تكافؤ المدفوعات (الإيرادات) التي تختلف في مقدارها الإجمالي والتي تتم في فترات مختلفة ذات أهمية في الاقتصاد الهندسي. ولتوضيح هذه الفكرة يمكننا للمقارنة كما في الجدول السابق

أن نضع الـ 10,000$ التي تم اقتراضها بجوار الأربع متواليات للمدفوعات والتي كما رأينا يمكن عن طريقها التسديد في حالة فائدة 9%.

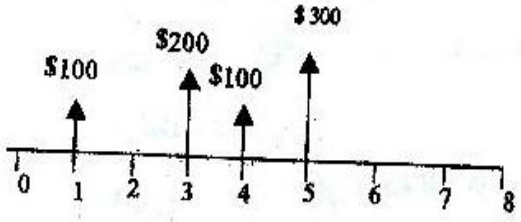
فإذا كان معدل الفائدة هو 9% فإن الخمس متواليات للمدفوعات تكافئ بعضها البعض من وجهة نظر الدائن (المستثمر) ذو العلاقة بالـ 10,000$ ، لأن الدائن يمكنه بهذا المبلغ أن يستفيد من أي من المتواليات الأربع للمدفوعات في المستقبل (وبدقة أكثر، يمكنه أن ينال وعداً بالتسديد) كبديل للـ 10,000$ الحالية (PW).

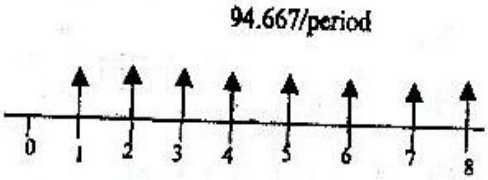
وبطريقة مماثلة فإنه من وجهة نظر المدين الذي يحتاج إلى الـ 10,000$ (ربما لاستثمارها بشكل مربح في أحد مشاريع الأعمال)، تتكافأ المتواليات الأربع المستقبلية (FW) مع بعضها وأيضاً مع الـ 10,000$ في الوقت الحالي (PW)، لأنه بالاتفاق على دفع أي من هذه المتواليات المستقبلية فإن المبلغ الحالي المطلوب يكون مضموناً. وقد نفكر في أي عدد من متواليات المدفوعات التي تساعد على تسديد الـ 10,000$ بالكاد في حالة فائدة 9% والإجابة هي أنَّ كلٍ من هذه المتواليات متكافئة مع بعضها البعض وأيضاً مع ما يكافئها من قيمة حالية (PW) أي الـ 10,000$.

ويوضح معنى التكافؤ باستخدام التناظر من علم الجبر، فإذا كان عدد من الأشياء مساوياً لشيء واحد فإن كل منها يكون مساوياً للأخر. فإذا أعطي معدل الفائدة فإن المدفوعات أو متواليات المدفوعات التي تمكن من تسديد مقدار حالي (PW) من المال تكافئ هذا المقدار الحالي وبالتالي هي نفسها تتكافأ.

مثال:

تحرى من أن التدفقين النقديين أدناه متكافئان.





التدفق النقدي (a) **i=15%** **التدفق النقدي (b)**

$$PW_{(a)} = \$100(P/F, 15\%, 1) + \$200(P/F, 15\%, 3) + \$100(P/F, 15\%, 4)$$

$$+\$300(P/F, 15\%, 4) = 100(0.8696) + 200(0.6575) + 100(0.5718)$$

$$+300(0.4972) = \$424.80$$

$$PW_{(b)} = \$94.667(P/A, 15\%, 8)$$

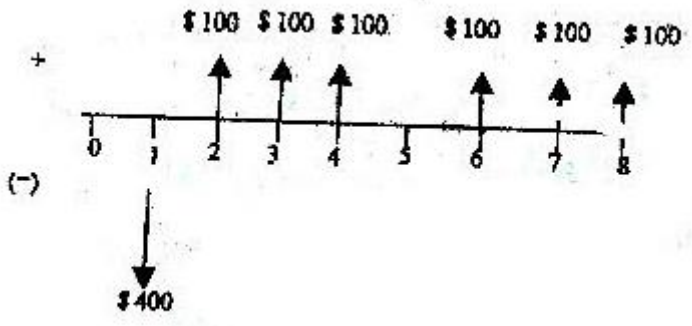
$$= 94.667(4.4873)$$

$$= 424.799 \simeq \$424.80$$

إذن التدفقين النقديين يكافئان بعضها البعض لأن قيمة كل منهما الحالية هي 424.80$. وطالما أنهما متكافئان فقيمتهما المستقبلية في نهاية الفترة باستخدام نفس معدل الفائدة k%(15%) هي 1299.46$.

مثال:

ما هي قيمة المجموع النقدي عند $t = 6$ الذي يكافئ التدفق النقدي الموضح إذا كان i هو 10%.



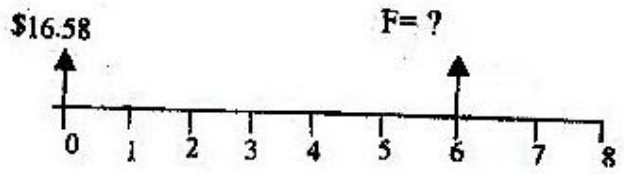
القيمة الحالية لهذا التدفق النقدي عند الفترة (0) هي :

$$PW_{(0)} = -400(P/F, 10\%, 1) + 100(P/A, 10\%, 3)(P/F, 10\%, 1)$$

$$+100(P/A, 10\%, 3)(P/F, 10\%, 5)$$

$$= -400(0.9091) + 100(2.489)(0.9091) + 100(2.4869)(0.6209)$$

$$= \$16.58$$

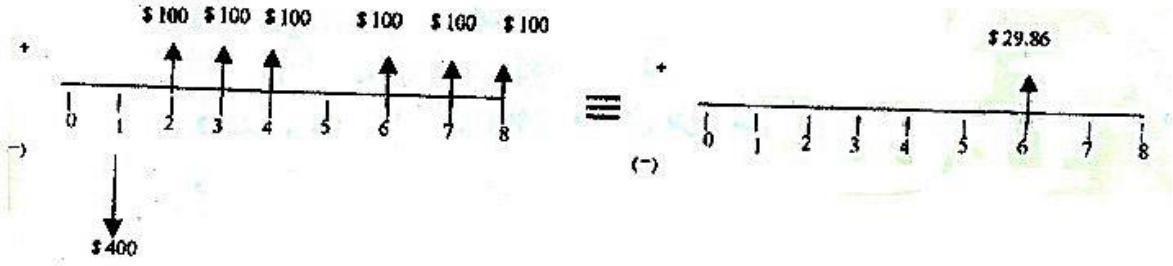


بتحويل الـ $16.58 من $t = 0$ إلى $t = 6$ تعطي :

$$F(6) = 16.58(F/P, 10\%, 6)$$

$$= 16.58(1.7716) = \$29.86$$

عليه عند 10% فإنَّ التدفق النقدي الموجب بالقيمة $29.86 في الفترة $t = 6$ يكافئ التدفق النقدي الموضح.



6.2 تدريبات عامة (General Exercises):

1. تم إيداع مبلغ $5,000 في حساب توفير يدفع معدل فائدة 6% مركبة سنوياً:

a. ما هو المبلغ الذي سوف يتراكم في الحساب عند نهاية 10 سنوات؟

b. ما هو المبلغ الذي سوف يتجمع في الحساب عند نهاية 5 سنوات إذا كان معدل الفائدة 12% مركبة سنوياً.

c. ما تعليقك على مضاعفة معدل الفائدة وتقليل فترة الفائدة إلى النصف.

d. إذا كان نفس المبلغ 5000$ الآن توفر للاستثمار والخياران في a, b مطروحان امامك أيهما تختار؟ (برر اجابتك)

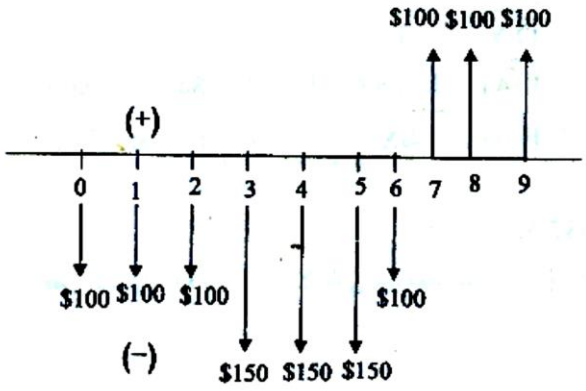
e. إذا تم اعتماد الخيار (2) صاحب أقل فترة زمنية ماذا تفعل للمبلغ المتراكم لفترة الـ 5 سنوات القادمة.

2. حساب ادخار يدفع معدل فائدة 10% مركبة سنوياً، ما هو المبلغ الذي يتم إيداعه الآن في الحساب لكي يجمع المدخر مبلغ 12000$ في نهاية 10 سنوات.

3. أودع علي كمال مبلغاً قدره 2000$ في حساب جاري يعطي فائدة مقدارها 8% مركبة سنوياً ، وبعد 2 سنة بالضبط أودع في نفس الحساب 3000$ ثم في السنتين التاليتين أودع 4000$. بعد 4 سنوات من الإيداع الأخير قرر علي كمال سحب المبلغ المتراكم وحوله لحساب استثمار يعطي معدل فائدة 10% مركبة سنوياً. ما قيمة ما تجمع له من مبلغ في نهاية 4 سنوات بعد تحويل الحساب.

4. لمياء عبد الله أودعت المبالغ 5000$، 1200$، 2000$ عند الفترات $t = 1, 2, 3$ على التوالي. إذا كان الحساب يعطي معدل فائدة 8% مركبة لكل فترة. ما هو المبلغ المتراكم في الحساب عند $t = 3$ و $t = 6$ ؟

5. ما هو المبلغ عند الفترة $t = 4$ المكافئ للمخطط النقدي الموضح في الشكل أدناه، إذا كان معدل الفائدة 15% مركبة لكل فترة.

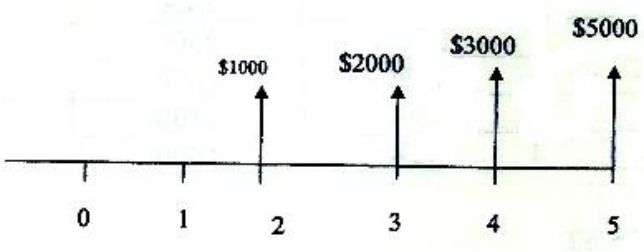


6. اعتبر التدفق النقدي التالي:

نهاية السنة (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
(C.F) التدفق النقدي	$10000	$6500	$6000	$5500	$5000	$4500	$4000	$3500	$3000

ما قيمة الدفعات السنوية المنتظمة التي تكافئ التدفق النقدي المعطى إذا كان معدل الفائدة 10% مركبة سنوياً.

7. للتدفق النقدي الموضح ما هي قيمة الـ 5 دفعات المتساوية التي تحدث في الفترات $t = 1, 2, 3, 4, 5$. إذا كان معدل الفائدة 12% مركبة لكل فترة.



8. معطى التدفقات النقدية الموضحة أدناه. أحسب قيمة X التي تجعل التدفقات النقدية متكافئة عند معدل فائدة 20% مركبة سنوياً.

نهاية السنة (t)	E.O.Y	1	2	3	4	5	6
التدفق النقدي (A)	C.F(A)	-$12000	$1000	$4000	$6000	$7000	$5000
التدفق النقدي (B)	C.F(B)	-$X	$7000	$9000	$10000	$10000	$7000

9. معطى أدناه مسار تدفقين نقديين. أحسب قيمة Y التي تجعلهما متكافئين إذا أستخدم معدل فائدة مقداره 10% مركبة سنوية.

نهاية السنة (t)	E.O.Y	1	2	3	4	5	6
التدفق النقدي (A)	C.F(A)	-$12000	$1000	$4000	$6000	$7000	$9000

التدفق النقدي (B)	C.F(B)	-$10000	7000	6000+ 0.5Y	5000+ Y	4000+ 1.5Y	3000+ 2Y

10. للتدفق النقدي الموضح أحسب قيمة X و Y التي تجعل كل التدفقات تتكافأ عند معدل فائدة 15% مركبة سنوياً.

نهاية السنة (t) E.O.Y	التدفق النقدي (A) C.F(A)	التدفق النقدي (B) C.F(B)	التدفق النقدي (C) C.F(C)
0	-$1000	-$2500	$Y
1	X	3000	Y
2	1.5 X	2500	Y
3	2.0 X	2000	2Y
4	2.5 X	1500	2Y
5	3.0 X	1000	2Y

11. من المؤكد أنك تسعى لأن تصير مليونيراً عند التقاعد. حساب ادخار يعطيك معدل فائدة 8% مركبة سنوياً لمدة 40 سنة من الآن. ما مقدار ما تودعه الآن ليصل إلى مبلغ مليون دولار في نهاية الفترة.

12. قرض قيمته 1000$ تم سحبه عند $t = 0$ ما قيمة الثلاث دفعات المتساوية عند $t = 1, 2, 3$ التي تعطي قيمة القرض إذا كان معدل الفائدة 10% مركبة لكل فترة.

13. 5 دفعات قيمة كل منها 500$، أودعت في الفترة $t = 1, 2, 3, 4, 5$ في حساب يدفع فائدة مقدارها 8% مركبة لكل فترة. ما قيمة ما تراكم في الفترة $t = 5$.

14. ما قيمة الدفعيات السنوية التي يجب إيداعها في حساب يعطي فائدة مقدارها 10% مركبة سنوياً في نهاية السنة t لأجل جمع ما قيمته 15000$ عند نهاية الفترة $t = 8$.

15. يتم إيداع 8000$ سنوياً في حساب يعطي فائدة مقدارها 12% مركبة سنوياً. ما قيمة ما تراكم مباشرة بعد الدفعة الخامسة.

16. نوال عباس أودعت 1000$ في حساب ادخار. بعد مرور 4 سنوات من الإيداع سحبت نصف ما تجمع لها. هنالك مبلغاً وقدره 200$ سنوياً بدأت في إيداعها بعد مرور سنتين من أخر سحب. المبلغ الكلي تم سحبه بعد 15 سنة من تاريخ أول إيداع. إذا كان الحساب يدفع 8% مركبة سنوياً. ما قيمة المبلغ المسحوب عند كل فترة سحب.

17. روان أسامة استلفت مبلغ 15000$ بفائدة 15% مركبة سنوياً وسوف تسدد القرض في فترة 5 سنوات بأقساط سنوية قيم كل دفعة منها تزيد بمقدار 500$ عن السابقة.

a. ما قيمة أول دفعة.

b. ما هي قيمة أول دفعة، إذا كانت كل دفعة تقل بنفس المقدار عن السابقة.

c. ما قيمة أول دفعة لكل من $(a), (b)$ إذا تم الاتفاق على تسديد هذه الدفعيات عند بداية كل فترة

18. أحسب معدل الفائدة الفعلي إذا كان معدل الفائدة الاسمي هو 20% مع التركيب.

a. السنوي

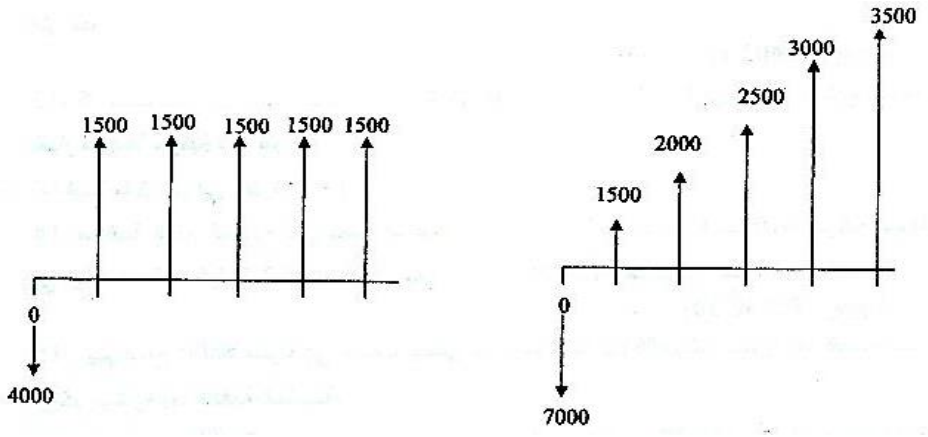
b. النصف سنوي.

c. الربع سنوي.

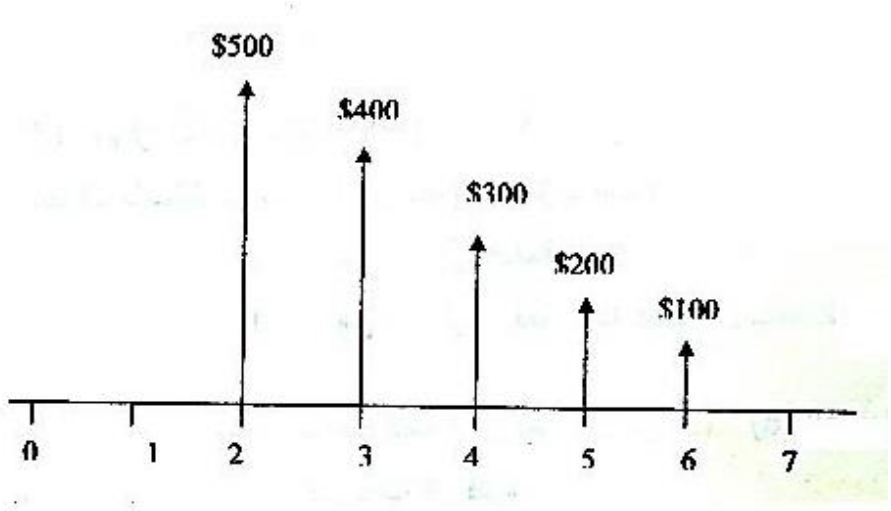
d. الشهري.

e. اليومي.

19. أي قيمة لـ (i) تجعل التدفقين التاليين متساويين (متكافئين).



20. مستخدماً معدل فائدة 8% مركبة لكل فترة. ما قيمة الدفعات السنوية المنتظمة خلال $t = (1\ to\ 5)$ المكافئة للتدفق النقدي الموضَّح.



21. رؤى أسامة أودعت 4 دفعات سنوية متتالية مقدارها 2000$ في حساب ادخار يعطي فائدة مقدارها 10% مركبة نصف سنوية ما هي قيمة ما سوف يكون في حسابها بعد سنتين من أخر إيداع.

الفصل السابع

مقارنة الخيارات والبدائل الاستثمارية

(Comparison of Alternatives)

7.1 مقدمة (Introduction):

إن القيام بإعداد الدراسات الخاصة بتقييم واختيار المشروعات الاستثمارية، يساعد على قياس العائد الاقتصادي وتقييم الجودة الاقتصادية لهذه المشاريع، حتى يتم اتخاذ القرار الاستثماري المناسب. ويتطلب إعداد هذه الدراسات القيام بجمع وتصنيف وتحليل كافة البيانات الممكن جمعها عند الفرص الاستثمارية المتاحة وكل فرصة منها تمثل مشروع استثماري يمكن اختياره والمضي قدماً في إجراءات تنفيذه.

وتختلف نوعية البيانات وطرق التقييم والقرارات الاستثمارية والمالية التي يتم اتخاذها باختلاف مرحلة التقييم والمفاضلة التي يمر بها المشرع الاستثماري. بالرغم من أن نشأة فكرة المشروع في ذهن المستثمر، وتطور مراحل هذه الفكرة، وخروجها إلى حيز التنفيذ عملية متكاملة الأبعاد إلا أنها تتم على عدة مراحل متعاقبة وتتطلب العديد من الدراسات المتكاملة والمعتمدة على بعضها البعض، والتي تساعد في تحديد العائد الاقتصادي المتوقع تحقيقه من المشروع الاستثماري في ظل المتغيرات البيئية والفنية والمالية والاقتصادية المحيطة بالفرصة الاستثمارية التي تدور حولها فكرة المشروع الاستثماري. يتوقف نجاح أي مستثمر على اختيار الفرصة الاستثمارية التي تحقق له عائد متتابع الحدوث في شكل تدفق نقدي داخل يزيد من ربحية الاستثمار.

ولذلك فإن دراسة الجدوى الاقتصادية وتقييم العائد الاقتصادي للفرصة الاستثمارية تثير العديد من الاسئلة التي توضح بشكل عام طبيعة هذه الدراسة، ومن الأسئلة على سبيل المثال لا الحصر ما هي الأهداف طويلة الأجل للمشروع الاستثماري، التي تعظم من قيمته التسويقية وربحيته والعائد الاقتصادي المتوقع منه؟

ما هي نوعية البيانات والدراسات الواجب توافرها والتي تساعد على تقييم فاعلية الفرص الاستثمارية المتاحة؟ وكيف يمكن الاستفادة من هذه الدراسة لاتخاذ قرار استثماري يترتب عليه اختيار أفضل الفرص الاستثمارية المتاحة؟ وما هي المشاكل المتوقع حدوثها والتي تحد من فاعلية الفرص الاستثمارية وكيف يمكن تجنبها؟ وما هي سلسلة القرارات الواجب اتخاذها لوضع قرار الاستثمار موضع التنفيذ؟

ولعل نقطة البداية للإجابة على هذه الأسئلة تتمثل في ضرورة التعرف على طبيعة وأهداف ومشاكل دراسة الجدوى الاقتصادية وتقييم العائد الاقتصادي للمشروعات الاستثمارية.

ترتبط فاعلية ونجاح المشروع الاستثماري بتحديد المتغيرات الاستثمارية والمالية والإدارية والفنية التي تؤثر في قرار الاستثمار من حيث تحديد الفرص الاستثمارية المرتبطة بالمشروع الاستثماري في ضوء العلاقة بين التدفقات النقدية الخارجة كتكلفة استثمارية رأسمالية والتدفق النقدي الداخل كعائد – دخل – متتابع الحدوث نتوقع تحقيقه مستقبلاً والبعد الزمني للاستثمار الذي يمثل العمر الإنتاجي الاقتصادي للمشروع الاستثماري ومعدل الخصم الذي يعبر عن تكلفة رأس المال ومخاطر عدم التأكد (uncertainty) المرتبط بالمشروع كفرصة استثمارية.

يضاف إلى هذه المتغيرات، تقدير حجم الطلب على منتجات المشروع وتحديد مصادر تمويله مع الرقابة المستمرة على التكاليف أثناء مراحل تنفيذ المشروع والعمل على تجنب فشل المشروع بتوفير المتطلبات المالية والبشرية والمادية والفنية لكل مرحلة من مراحل تنفيذه مع التقييم المستمر لمراحل التنفيذ لتجنب تأخير تنفيذ أي مرحلة عن الجدول الموضوع للتنفيذ.

فضلاً عن الدراسة الموضوعية لمخاطر عدم التأكد (uncertainty) للحد من أثارها السلبية على قيمة العائد الاقتصادي والاجتماعي المتوقع تحقيقه، نظراً لارتباط هذه المخاطر بالمستقبل وصعوبة تجنبها كلية. يتطلب تحديد وتحليل المتغيرات الاقتصادية والمالية والإدارية والفنية المؤثرة في فاعلية وربحية

المشروع الاستثماري في جداول متكاملة تعكس القيمة الاقتصادية الفنية والتسويقية والمالية والبشرية للمشروع مما يساعد على صياغة وكتابة التقارير المختلفة التي تغطي كل جوانب ومتطلبات دراسة الجدوى الاقتصادية.

يستخدم مفهوم القيمة الزمنية للنقود ومعايير (مقاييس) العائد من الاستثمار لمقارنة الخيارات الاستثمارية الهندسية. بالرغم من أن عملية المقارنة تحوي عدة أهداف لكن هنا يتم التركيز على مقارنة الخيارات الاستثمارية الهندسية مالياً فقط باعتبار أن الجانب الفني ذو جدوى (technically feasible) وباعتبار كل الفرص في الاستثمار ويتم اختيار بديل استثماري أوحد.

هنالك طريقة منتظمة تتبع لمقارنة المردود (العائد) الاقتصادي للمشاريع والخيارات الهندسية كالآتي:

1. تعريف وتحديد مجموعة الخيارات المطلوب مقارنتها.
2. تعريف وتحديد الأفق الزمني (planning horizon) المستخدم في المقارنة.
3. إعداد مسار التدفقات النقدية لكل خيار (develop cash flow profiles).
4. تحديد معدل الفائدة المغري (المجزي) الأدنى (minimum attractive rate of return) (MARR).
5. مقارنة الخيارات باستخدام معايير الاستثمار.
6. القيام بالتحليل والاختبارات الإضافية (perform supplementary analyses).
7. اختيار (البديل) الخيار الأمثل.

7.2 تعريف وتحديد الخيارات الاستثمارية: (Defining and Determination of Investment Alternatives)

يتم تعيين الخيارات الاستثمارية من مجموعة المقترحات الاستثمارية (investment proposals).

ويمكن التفريق بين المقترح الاستثماري والخيار الاستثماري كالآتي:

الخيارات الاستثمارية بدائل لاتخاذ القرار بينما المقترحات الاستثمارية الواحد منها يحتمل أن يكون خيار استثماري. أي أن الخيارات الاستثمارية تكون من المقترحات. ولتوضيح تكوين مجموعة من الخيارات من مجموعة المقترحات، مثلاً إذا كان لدينا m من المقترحات وأن أي مقترح لا يتم أخذه كخيار يأخذ القيمة (0) والذي يمكن اختياره يأخذ القيمة (1) وباستخدام المتغير الثنائي يمكن تكوين 2^m من الخيارات (البدائل). خذ مثلاً ثلاث مقترحات C, B, A يمكن تكوين 8 خيارات منها كما موضحة في الجدول (7.1) أدناه.

جدول (7.1) تحديد الخيارات من المقترحات

الخيار	المقترحات			التوضيح
	A	B	C	
1	0	0	0	لا يتم اختيار أحد المقترحات الثلاث (do nothing)
2	0	0	1	قبول الاقتراح C فقط
3	0	1	0	قبول الاقتراح B فقط
4	1	0	0	قبول الاقتراح A فقط
5	0	1	1	قبول الاقتراح C, B فقط
6	1	0	1	قبول الاقتراح C, A فقط
7	1	1	0	قبول الاقتراح B, A فقط
8	1	1	1	قبول الثلاث مقترحات

من بين الخيارات التي تم الحصول عليها قد تكون هنالك مجموعة من الخيارات غير مجدية ويمكن استبعادها مبكراً نتيجة لبعض القيود التي حددت في تعريف المشكلة. مثلاً محدودية الميزانية قد تؤدي إلى استبعاد الخيار رقم (8) وهي إمكانية الاستثمار في الثلاث مقترحات في آن واحد. وقد تكون بعضها متنافية (mutually exclusive) مثلاً الخيار رقم (7) يمكن أن يستبعد إذا كان أحد المقترحين A أو B ينفي وجود الأخر كفرصة استثمار في آن واحد. أو قد تكون بعض المقترحات

مرتبطة ببعضها (contingent proposals) أي لا يتم اختيار إحداها بدون الأخر. ويمكن استبعاد الخيار رقم (2) و (3) و (6) إذا كان المقترح B و C مرتبطان ببعض، عليه اعتماداً على القيود الموجودة في تعريف المشكلة دائماً تكون الخيارات أقل من 2^m.

7.3 تحديد الأفق الزمني (Defining the Planning Horizon):

الأفق الزمني يُعرف بعرض النافذة (window) الزمنية التي من خلالها يظهر الأداء الاقتصادي لأي خيار. أي هو طول الفترة الزمنية المطلوبة للأداء الاقتصادي، ولغرض المقارنة يعرف بأنه الهيكل الزمني المستخدم الذي يوضح حقيقة الفترة الزمنية التي من خلالها يمكن تحديد تقديرات التدفقات بدقة ومعقولية.

وعليه يجب التفريق بين طول الأفق الزمني (planning horizon) والعمر التشغيلي (working life) والعمر الإهلاكي (depreciable life) للأداة.

وعند مقارنة الخيارات يجب مقارنتها خلال فترة زمنية موحدة. لكن هنالك بعض الحالات التي يختلف فيها الأفق الزمني من خيار لأخر ويظهر عدم اليقين في أي فترة تُستخدم، فإن هنالك 4 طرق مستخدمة لتحديد الأفق الزمني المستخدم في الدراسة الاقتصادية. إذا كانت هذه هي الحالة:

1. المضاعف المشترك البسيط للأفق الزمني $(\hat{T})$.
2. أقل أفق زمني بين الخيارات (T_S).
3. أطول أفق زمني بين الخيارات (T_L).
4. فترات زمنية أخرى قياسية.

1. المضاعف المشترك البسيط للأفق الزمني (Least common multiple of life):

وهو أكثر الطرق استخداماً لتحديد الأفق الزمني، حيث يفترض أن كل خيار تدفقه النقدي يتكرر في المستقبل حتى نهاية الفترة الزمنية لكل الخيارات. مثلاً إذا كان هنالك ثلاث خيارات أفقها الزمني

3، 5، 6 سنوات. فالأفق الزمني لكل الخيارات $T_{P.H} = \hat{T} = 30\ years$ وعندها تظهر الأسئلة التالية:

ما هو شكل التدفق النقدي من السنة (4) أو السنة (6) أو السنة (7) إلى السنة 30 للخيار (3 سنوات) و (5 سنوات) و (6 سنوات) على التوالي؟

والإجابة أن الخيار (3 سنوات) يتكرر 10 مرات بينما الخيار (5 سنوات) يتكرر 6 مرات والخيار (6 سنوات) سوف يتكرر 5 مرات، مع ملاحظة أن التدفقات النقدية تتكرر بنفس القيمة خلال $(\hat{T})$ لكل الخيارات في حين أن تغيرات آثار التضخم والتقنيات الحديثة وطلب المستهلك اعتبرت ثابتة خلال الفترة وهي ليست كذلك.

2. أقل أفق زمني (Shortest planning horizon among alternatives):

إذا تم استخدام هذه الطريقة لتحديد الأفق الزمني، أي $T_{P.H} = T_S = 3\ years$. في هذه الحالة يجب تقدير القيمة الدفترية (book value) أو القيمة المتبقية (salvage value) لكل من الخيار (5 سنوات) و (6 سنوات) في نهاية السنة الثالثة.

3. أطول أفق زمني (Longest planning horizon among alternatives):

إذا استخدمت أطول أفق زمني للمقارنة $T_{P.H} = T_L = 6\ years$ ، هنالك قرارات يجب اتخاذها في الفترة بين T_S و T_L أي ما هو شكل التدفق النقدي للسنة (4) و (5) و (6) للخيار (3 سنوات) وللسنة (6) للخيار (5 سنوات) والإجابة هو شراء معدات جديدة نهاية السنة (3) للخيار (3 سنوات) ووحدة جديدة من الخيار (5 سنوات) في نهاية السنة (5) وتقدير قيمتها المتبقية بعد سنة من شرائها لتتم المقارنة على حسب هذا المبدأ، ولكن ليست هذه نظرة اقتصادية.

4. فترات زمنية أخرى قياسية (Some other standard periods of time):

إذا اختير الأفق الزمني يساوي فترة زمنية تساوي T ، هنالك عدة طرق مختلفة يمكن أن تختارها

المنشأة تعتمد على إذا ما كان $T_S > T$ أو $T_L > T > T_S$ أو $T_L > T$.

إذا كان $T_S > T$: يجب تحديد القيم المتبقية لكل خيار عند نهاية الفترة T .

إذا كان $T_L > T > T_S$ الخيارات التي لها عمر أقل من T تدفقاتها وخططها يجب أن تحدد خلال الفترة T. أما التي لها عمر أكبر من T سوف تجهل تدفقاتها وخططها بعد الفترة T.

إذا كان $T_L < T$ كل الخيارات تتطلب تحديد الخطط والتدفقات النقدية خلال الفترة أقل من $\hat{T}$ و T.

فإذا اختيرت فترات قياسية كأفق زمني مثلاً 2، 5، 8 سنوات سوف تثار نفس الأسئلة السابقة التي ظهرت عند $\hat{T}$ T_L, T_S للفترات القياسية أعلاه كما هو الحال في الجدول (7.3). الخيار 3، 2، 1 تدفقاتها تجاهلت أو تكررت إلى نهاية الأفق الزمني مع تقدير القيمة المتبقية لها في نهاية الفترة.

بالرغم من أن استخدام فترات قياسية لها فائدة في تقييم (مقارنة) الخيارات الاستثمارية أيضاً لها بعض الخطورة التي يمكن ملاحظتها في حالة أن معظم (العائدات) التي يشتمل عليها خيار ما احتمال حدوثها في المرحلة المتأخرة لأفقه الزمني كمشروع.

جدول رقم (7.2) يوضح المسار النقدي لثلاثة خيارات متنافية لها أفق زمني غير متساوٍ.

جدول رقم (7.2) المسار النقدي لثلاث خيارات متنافية لها أفق زمني غير متساوٍ

نهاية السنة (t) End of year EOY	العائدات Revenues	التكاليف Cost	صافي التدفقات النقدية Net cash flows	القيمة المتبقية إذا بيعت عند الزمن (t). Salvage value if sold at time (t)
(t)	R_t	C_t	$R_t - C_t$	S_t
Alternative (1)				
0				$0
1-3	$27,500	$23,000	$4,500	0
Alternative (2)				
0	-	$75,000	$75,000	75,000
1	$27,500	$7,500	$20,000	55,000

2	$32,500	$7,500	$25,000	40,000
3	$37,500	$7,500	$30,000	25,000
4	$42,500	$7,500	$35,000	10,000
5	$47,500	$7,500	$40,000	0
Alternative (3)				
0	-	$50,000	50,000	$50,000
1	$30,000	10,000	20,000	35,000
2	$30,000	10,000	20,000	25,000
3	$30,000	10,000	20,000	15,000
4	$30,000	10,000	20,000	5,000
5	$30,000	10,000	20,000	0
6	$30,000	10,000	20,000	0

جدول رقم (7.3) أدناه يوضح مسار التدفقات النقدية لأكثر من أفق زمني (T).

جدول (7.3) مسار التدفقات النقدية لأكثر من أفق زمني

نهاية السنة (t) **End of year (t)**	**صافي التدفقات النقدية للخيارات (3، 2، 1)** **Net cash flow alternatives**		
(t)	A_{1t}	A_{2t}	A_{3t}
$T = \hat{T} = 30\ years$			
0	−	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	25,000	20,000
3	4500	30,000	20,000
4	4500	35,000	20,000
5	4500	$^{(N)} - 75{,}000 + 40{,}000$	20,000
6	4500	20,000	$^{(N)} - 50{,}000 + 20{,}000$
7	4500	25,000	20,000

8	4500	30,000	20,000
:	:	:	:
29	4500	35,000	20,000
30	4500	40,000	20,000
$T = T_S = 3\ years$			
0	−	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	25,000	20,000
3	4500	$30{,}000 + 25{,}000^{(S)}$	$20{,}000 + 15{,}000^{(S)}$
$T = T_L = 6\ years$			
0	−	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	25,000	20,000
3	4500	30,000	20,000
4	4500	35,000	20,000
5	4500	40,000	20,000
6	4500	4,500*	20,000
$T < T_S = 2\ years$			
0	−	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	$25{,}000 + 40{,}000^{(S)}$	$20{,}000 + 25{,}000^{(S)}$
$T_S < T < \hat{T} = 5\ years$			
0	−	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	25,000	20,000

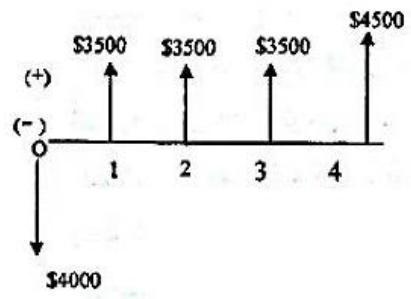
3	4500	30,000	20,000
4	4500	35,000	20,000
5	4500	40,000	$20{,}000 + 0^{(S)}$
$T_L < T < \hat{T} = 8\ years$			
0	–	−75,000	−50,000
1	4500	20,000	20,000
2	4500	20,000	20,000
3	4500	20,000	20,000
4	4500	20,000	20,000
5	4500	$^{(N)} - 75{,}000 + 40{,}000$	20,000
6	4500	20,000	$^{(N)} - 50{,}000 + 20{,}000$
7	4500	25,000	20,000
8	4500	$30{,}000 + 25{,}000^{(S)}$	$20{,}000 + 25{,}000^{(S)}$

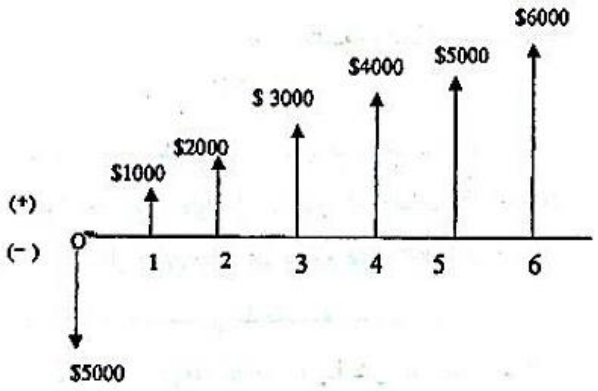
(s) تعني الفترة المتبقية إذا بيع الخيار المعني في نهاية الفترة (t).

(N) تعني شراء وحدة جديدة من الخيار المعني في نهاية الفترة (t).

مثال:

يتضمن الشكل أدناه تدفقات نقدية لخيارين استثماريين مطروحين أمام منشأة للاستثمار في أحدهما. ونسبة لأن المنشأة غير قادرة لتحديد أي الخيارين سوف يكون متاحاً في المستقبل، لكن وضعت في الحسبان احتمال أن تجني فائدة استعادة رأس المال إذا أعيد استثماره وتجني 15% كعائد فأي الخيارين تختار.





$$MARR = 15\%$$

الخيار (1) **الخيار (2)**

(أ) نختار أطول أفق زمني لهذه الحالة نفترض 6 سنوات عبارة عن أفق زمني لكلا الخيارين حيث تكون التدفقات النقدية مساوية لصفر تحدث في نهاية السنة (5) و (6) للخيار (1) ، عليه عند نهاية فترة المشروعين (الخيارين) سوف تكون القيمة المستقبلية الصافية :

$$FW_1@(15\%) = \$3500(P/A,15,3)(F/P,15,6) + \$4500(F/P,15,2)$$

$$-4000(F/P,15,6) = 3500(2.2832)(2.3131) + 4500(1.3225)$$

$$-4000(2.3131) = \$15,183.29$$

$$FW_2@(15\%) = \$1000(F/A,15,6) + \$1000(A/G,15,6)(F/A,15,6)$$

$$-\$5000(F/P,15,6) = \$(1000(8.7537) + 1000(2.0972)(8.7537)$$

$$-5000(2.3131) = \$15,546.6$$

$$\therefore FW_2(15\%) > FW_1(15\%)$$

عليه يفضل الخيار الاستثماري (2) .

(ب) إذا لم نضع اعتبار للفق الزمني المختلف ويتم ببساطة حساب العائد السنوي خلال 4 سنوات للخيار (1) و 6 سنوات للخيار (2) سوف نجد :

$$AW_1@(15\%, 4) = \$3000.15/year$$

$$AW_2@(15\%, 6) = \$1776.20/year$$

وهذا ينتج عنه أن المشروع (للخيار (1)) هو الأفضل .

7.4 إعداد مسار التدفقات النقدية (Developing Cash Flow Profiles):

عند الانتهاء من تحديد مجموعة الخيارات واتخاذ قرار تحديد الأفق الزمني يمكن إعداد شكل التدفقات النقدية للخيارات. وعادة يوضع في الحسبان الأحوال المستقبلية دون الاعتماد كلية على مسار التدفقات النقدية الماضية (السابقة) (past cash flow) للخيارات الاستثمارية. وكل خيار تدفقه النقدي يتم الحصول عليه بمجموع (aggregating) كل مسارات التدفقات النقدية لكل مقترحات الاستثمار الموجودة داخل كل خيار استثماري.

عند إعداد مسار التدفق النقدي لأي خيار فإنه يحتاج لأدق التقديرات عن التكاليف والعائدات السنوية خلال الأفق الزمني ويحتوي على تقدير القيم المتبقية (salvage values) أو القيم الدفترية (book values) أو القيم الكامنة (residual values) لكل الأصول (assets) عند نهاية فترة الأفق الزمني. يجب العناية بتقييم مردود كل خيار استثماري على الأداء الاقتصادي للمنشأة حتى خيار عدم الاستثمار في أي خيار أو الإبقاء على الحالة الراهنة للمنشأة (do nothing) إذا كان هو خيار منافس أو مجدي.

تقديرات التدفقات النقدية تعتمد على المنشأة حيث أنها تصمم نموذج خاص بها يساعد المحلل ويقوده لإعداد مسار التدفقات النقدية.

7.5 تحديد معدل العائد المجزي الأدنى (Specifying the MARR):

مقارنة الخيارات الاستثمارية على أساس القيمة الزمنية للنقود تحتاج للخبرة في تحديد أي قيمة زمنية ستستعمل. القيمة النقدية المستخدمة مع طرق التدفقات النقدية المتقطعة تسمى بمعدل العائد المجزي

الأدنى (minimum attractive rate of return) ، أو قيمة هاردل، أو معدل الفائدة المطلوب أو العائد (المردود) من الاستثمار. بغض النظر عن التسمية، تحديد معدل الفائدة مطلوب لتحويل مزيج التدفقات النقدية التي تحدث خلال الأفق الزمني لمقياس اقتصادي ذو معنى يستخدم للتقييم والمقارنة النسبوية للمشاريع أو البدائل الاستثمارية الهندسية.

مجموعة من المنشآت تعامل معدل الفائدة المجزي الأدنى (MARR) كمعامل تعتمد قيمته على نوع الاستثمار قيد الدراسة. والبعض الأخر يستخدم قيمة ثابتة. بغض النظر عن أسس تحديد قيمة هذا المعدل يجب أن تزيد قيمته عن قيمة تكلفة المحافظة على رأس المال (cost of securing capital) أو بالمثل قيمته يجب أن تمثل تكلفة الفرصة البديلة (opportunity cost) لعدم الاستثمار في بقية الخيارات المتاحة. القاعدة المعمول بها يجب أن لا تستثمر النقود (المال) في خيار إذا كان لا يعطي عائد على الأقل أكبر من قيمة معدل الفائدة المجزي الأدنى (MARR) والسبب يعود لأن بعض الفرص الأخرى للاستثمار موجودة وتستثمر بقيمة فائدة تساوي الـ (MARR).

7.6 مقارنة الخيارات الاستثمارية:
(Comparing the Investment Alternatives)

على أساس أن للنقود قيمة زمنية وبتطبيق واحد أو أكثر من مقاييس العائد (المردود) من الاستثمار يمكن مقارنة الخيارات الاستثمارية على أساس الاعتبارات الاقتصادية لاختيار البديل الأمثل. إلى هذه النقطة لم يتم التطرق لذكر ضرائب الدخل (income taxes) والإهلاك (depreciation) وهي قطعاً تؤثر على شكل التدفقات النقدية للخيارات. ولأجل تسهيل مقارنة الخيارات نفترض أن أي من التدفقات النقدية بعد الضرائب والإهلاك أو قبلهما مطلوبان في الدراسة الاقتصادية.

لتوضيح استخدام المقاييس المختلفة لمقارنة البدائل، اعتبر 4 خيارات لها تدفقات نقدية موضحة بالجدول (7.4) لأفق زمني مقداره 5 سنوات ومعدل فائدة مجزي أدنى مقداره 15% بالتالي يمكن إجراء التحليلات التالية:

جدول رقم (7.4) يوضح مسار التدفقات النقدية لخيارات استثمارية .

جدول (7.4) مسار التدفقات النقدية لخيارات استثمارية

نهاية السنة (t) End of year	صافي التدفقات النقدية للخيارات (3، 2، 1) Net cash flow alternatives			
(t)	A_0t	A_1t	A_2t	A_3t
0	$0	$0	$−50,000	$−75,000
1	$0	$4500	$20,000	$20,000
2	$0	$4500	$20,000	$25,000
3	$0	$4500	$20,000	$30,000
4	$0	$4500	$20,000	$35,000
5	$0	$4500	$20,000	$40,000

1. طريقة صافي القيمة الحالية (Net present worth method (NPW)):

هذه الطريقة تستخدم لمقارنة الخيارات الاستثمارية بحساب صافي القيمة الحالية لكل خيار عند السنة (0) ويفضل الخيار الذي له أكبر قيمة حالية.

(أ) طريقة الرتب (Ranking approach) :

$$PW_0@(15\%) = 0$$

$$PW_1@(15\%) = 4500(P/A, 15,5)$$

$$= 4500(3.3522)$$

$$= \$15,085$$

$$PW_2@(15\%) = -50,000 + 20,000(P/A, 15,5)$$

$$= -50,000 + 20,000(3.3522)$$

$$= \$17,044$$

$$PW_3@(15\%) = -75{,}000 + 20{,}000(P/A, 15{,}5) + 5000(P/G, 15{,}5)$$

$$= -75{,}000 + 20{,}000(3.3522) + 5000(5.7751)$$

$$= \$20{,}920$$

بما أن الخيار (3) له أكبر قيمة حالية فهو الأفضل .

(ب) طريقة الفرق (Incremental Approach):

تتم عن طريق طرح التدفقات النقدية من بعضها لكل خيارين واستخدام الفرق في التحليل مع ترتيب الخيارات على أساس القيمة الأولية للاستثمار تصاعدياً. فإذا كان صافي القيمة الحالية للفرق أكبر من (صفر) أي موجب يفضل الخيار المتحدي (challenger) عن الخيار المدافع (defender) وسوف يكون الخيار المتحدي أساس المقارنة للخيار التالي حيث يصبح الخيار المتحدي مدافع والخيار الجديد متحدي. فإذا كانت القيمة الحالية للفرق سالبة أي أقل من (صفر) يصبح الخيار المدافع أساس المقارنة مع الخيار التالي، وهكذا.

$PW_{1-0}@(15\%)$ $1 \rightarrow challenger$ متحدي

$0 \rightarrow defender$ مدافع

$$PW_{1-0}@(15\%) = 4500(P/A, 15{,}5)$$

$$= 4500(3.3522)$$

$$= \$15{,}085$$

بما أن $PW_{1-0} > 0$ فالخيار (1) يفضل على الخيار (0)، والخطوة التالية تستخدم الخيار (1) مدافعاً والخيار (2) متحدي.

$PW_{2-1}@(15\%)$ $2 \rightarrow challenger$ متحدي

$1 \rightarrow defender$ مدافع

$$PW_{2-1}@(15\%) = -50{,}000 + 15{,}500(P/A, 15{,}5)$$

$$= -50{,}000 + 15{,}500(3.3522)$$

$$= \$1959$$

بما $PW_{2-1} > 0$ فالخيار (2) يفضل على الخيار (1)، والخطوة التالية تستخدم الخيار (2) مدافعاً والخيار (3) متحدي.

$PW_{3-2}@(15\%)$ $\quad 3 \rightarrow challenger$ متحدي

$2 \rightarrow defender$ مدافع

$$PW_{3-2}@(15\%) = -25{,}000 + 5000(P/G, 15{,}5)$$

$$= -25{,}000 + 5000(5.7751)$$

$$= \$3876$$

بما $PW_{3-2} > 0$ فالخيار (3) يفضل على الخيار (2)، وحيث أنه لا توجد خيارات أخرى لمقارنتها إذن الخيار (3) هو الخيار الأفضل.

في طريقة الفرق إذا كانت صافي قيمة الفروقات يساوي الصفر أو أقل ونسبة لترتيب الخيارات فالخيار التالي المتاح (المتحدي) يقارن مع الخيار السابق (المدافع). مثلاً إذا كانت $PW_{2-1} \leq 0$ إذن الخيار رقم (3) يقارن مع الخيار رقم (1) وهكذا.

2. طريقة صافي قيمة الإيرادات (الدفعات) المنتظمة السنوية:

(Net annual worth method (NAW))

وفيهما يفضل الخيار صاحب أكبر قيمة للإيرادات السنوية. ويمكن تطبيقها على المثال السابق كالآتي:

(أ) طريقة الرتب:

$$AW_0@(15\%) = 0$$

$$AW_1@(15\%) = \$4500/year$$

$$AW_2@(15\%) = -50{,}000(A/P, 15{,}5) + 20{,}000$$

$$= -50{,}000(0.2983) + 20{,}000$$

$$= \$5085/year$$

$$AW_3@(15\%) = -75{,}000(A/P, 15{,}5) + 20{,}000 + 5000(A/G, 15{,}5)$$

$$= \$6242/year$$

بما أن $AW_3 > AW_2 > AW_1 > AW_0$ إذن يفضل الخيار رقم (3).

(ب) طريقة الفرق:

$$PW_{1-0}@(15\%) = \$4500/year > 0$$

(يفضل الخيار 1 على 0)

$$AW_{2-1}@(15\%) = -\$50{,}000(A/P, 15{,}5) + \$15{,}500$$

$$= \$585/year > 0$$

(يفضل الخيار 2 على 1)

$$AW_{3-2}@(15\%) = -\$25{,}000(A/P, 15{,}5) + \$5{,}000(A/P, 15{,}5)$$

$$= \$1157/year > 0$$

(يفضل الخيار 3 على 2)

وبما أنه لا توجد خيارات أخرى متاحة يمكن مقارنتها، نخلص إلى أن الخيار (3) هو أمثل الخيارات اقتصادياً.

3. طريقة صافي القيمة المستقبلية (Net future worth method (NFW)):

تستخدم طريقة صافي القيمة المستقبلية بنفس الطريقة السابقة. بالرغم من أنها تعتبر من أسهل الطرق في التطبيق إلا أنها لا تستخدم في معظم الأحيان وتستخدم بدلاً عنها الطرق السابقة.

والقاعدة هنا أنه يتم تفضيل الخيار صاحب أعلى قيمة مستقبلية، ويمكن تطبيقها على المثال السابق كالآتي:

(أ) طريقة الرتب:

$$FW_0@(15\%) = 0$$

$$FW_1@(15\%) = \$4500(F/A, 15,5)$$

$$= \$30,341$$

$$FW_1 > FW_0$$

$$PW_2@(15\%) = -50,000(F/P, 15,5) + 20,000(F/A, 15,5)$$

$$= \$34,278$$

$$FW_2 > FW_0$$

$$PW_3@(15\%) = -75,000(F/P, 15,5) + 20,000(F/A, 15,5) +$$

$$50,000(P/G, 15,5)(F/P, 15,5)$$

$$= \$42,073$$

بما أن $FW_3 > FW_2$ أي أن الخيار (3) صاحب أعلى قيمة مستقبلية فهو يفضل من دون الخيارات الأخرى.

(ب) طرقة الفرق:

$$FW_{1-0}@(15\%) = \$4500(F/A, 15,5)$$
$$= \$30,341 > 0$$

(يفضل الخيار 1 على 0)

$$FW_{2-1}@(15\%) = -\$50,000(F/P, 15,5) + \$15,500(F/A, 15,5)$$

$$= \$3937 > 0$$

(يفضل الخيار 2 على 1)

$$FW_{3-2}@(15\%) = -\$25{,}000(F/P,15{,}5) + \$5{,}000(P/G,15{,}5)(F/P,15{,}5)$$

$$= \$7795 > 0$$

(يفضل الخيار 3 على 2)

وبما أن الخيار (3) أخر ، إذن يفضل دون الخيارات الأخرى.

4. طريقة معدل العائد الداخلي (العائد على الاستثمار)

(Internal rate of return (IRR)):

يعرف معدل العائد الداخلي بأنه معدل الفائدة الذي يجعل صافي القيمة المستقبلية أو القيمة الحالية أو الدفعات المنتظمة (الإيرادات) للتدفقات النقدية تساوي (صفر). وهي من الطرق التي لا تستخدم بصورة صحيحة في المقارنة غالباً ويجب استخدام طريقة الفرق فقط. وتكون القاعدة تفضيل الخيار الذي قيمة معدله الداخلي أكبر من معدل الفائدة المغري الأدنى ويمكن تطبيق هذه الطريقة على المثال السابق.

$$(i)_{1-0}$$

$$FW_{1-0}@(i) = 0 = \$4500(F/A,i,5)$$

$$Since\ FW = \frac{A}{i}[(1+i)^n - 1]$$

إذن قيمة (i) التي تجعل المقدار FW يساوي صفر هي (∞)

$$\therefore FW_{1-0} = 0$$

$$\therefore i_{1-0} = \infty\%$$

$$i_{1-0} > MARR(15\%)$$

(يفضل الخيار 1 على 0)

$$FW_{2-1}@(i) = 0 = -\$50{,}000(F/P,i,5) + 15{,}500(F/A,i,5)$$

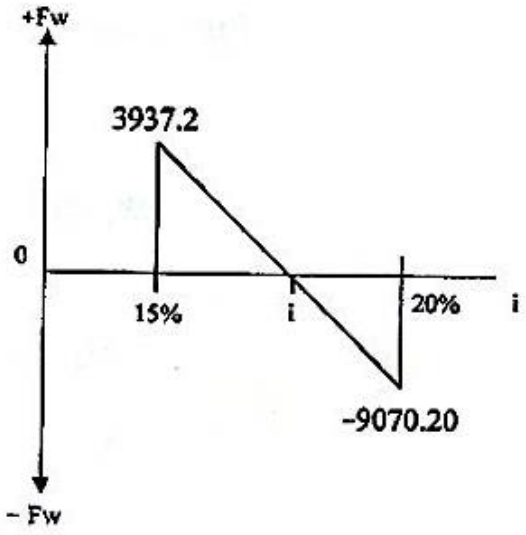
عند $i = 15\%$

$$@i = 15\% \ \$0 \neq -50{,}000(2.0114) + 15{,}500(6.7424) = 3937.2$$

عند $i = 20\%$

$$@i = 20\% \ \$0 \neq -50{,}000(2.4883) + 15{,}500(7.4416) = -9070.20$$

عن طريق الاستكمال (Interpolation) by:



$$i_{2-1} = \left[\frac{3937.2}{(3937.2 + 9070.20)}\right] \times 0.05 + 015$$

$$\therefore i_{2-1} = 0.1651$$

$$= 16.15\% > MARR(15\%)$$

(يفضل الخيار 2 على 1)

$$FW_{3-2}@(i) = \$0 = -25{,}000(F/P, i, 5) + 5{,}500(F/P, i, 5)$$

$$@i = 15\% \ \$0 \neq -25{,}000(2.0114) + 5{,}000(5.7751)(2.0114) = 7795.18$$

$$@i = 20\% \ \$0 \neq -25{,}000(2.4883) + 5{,}000(4.9061)(2.4883) = -1168.26$$

عن طريق الاستكمال (by Interpolation):

$$i_{3-2} = 0.1935$$

$$= 19.35 > MARR(15\%)$$

(يفضل الخيار 3 على 2)

بما أن الخيار (3) هو أخر خيار متاح للمقارنة ، إذن يفضل الخيار رقم 3 على بقية الخيارات.

كما ذكر آنفاً فعادة ما يستخدم متخذي القرار طريقة (IRR) بصورة خاطئة حيث يحسبون هذا المعدل (IRR) لكل خيار على حدة. ويتم اختيار صاحب أعلى قيمة معدل، وبالتالي يتم تجاهل الحقيقة التي تقول أن أي قيمة باقية للقرض (uncovered amount) سوف تجنى فقط الـ (MARR) . ولحالة هذا المثال الخيار رقم (1) يجنى معدل (IRR) ∞% والخيار رقم (2) يجنى حوالي 28.73% والخيار رقم (3) يجنى حوالي 24.90% إذا تمَّ احتساب كل خيار على حدة كما هي مرتبة ، فإن الخيار رقم (1) هو الأفضل. وهذا ليس صحيحاً.

5. طريقة نسبة المدخرات إلى الاستثمار أو نسبة الفوائد إلى التكاليف:

(Saving/Investment or benefit/costs ratio (SIR))

وهي النسبة بين صافي القيمة الحالية لكل التدفقات الموجبة على صافي القيمة الحالية لكل التدفقات السالبة. لكي يتم تفضيل خيار يستثمر بمعدل مغري MARR يجب أن تكون هذه النسبة أكبر من واحد (1) وتستخدم هذه الطريقة في مقارنة مشاريع القطاع العام (public sector projects)

$$SIR_j@(i) = \frac{\sum_{t=0}^{n} Rjt(1+t)^{-t}}{\sum_{t=0}^{n} Rjt(1+t)^{-t}}$$

A_{jt} = صافي التدفق النقدي للخيار المستثمر j في الفترة (t) .

$$R_{jt} = \begin{cases} A_{jt}, if \quad A_{jt} \geq 0 \\ 0, other\ wise \end{cases}$$

$$C_{jt} = \begin{cases} -A_{jt}, if \quad A_{jt} < 0 \\ 0, other\ wise \end{cases}$$

وبتطبيق الطريقة على المثال:

$$SIR_{1-0}@(15\%) = \frac{4{,}500(P/A, 15{,}5)}{0} = \infty$$

$$\therefore SIR_{1-0}@(15\%) > 1$$

(يفضل الخيار 1 على 0)

$$SIR_{2-1}@(15\%) = \frac{15{,}500(P/A, 15{,}5)}{50{,}000}$$

$$= \frac{15{,}500(3.3522)}{50{,}000} = 1.04$$

$$\therefore SIR_{2-1}@(15\%) > 1$$

(يفضل الخيار 2 على 1)

$$SIR_{3-2}@(15\%) = \frac{5{,}000(P/G, 15{,}5)}{25{,}000}$$

$$= \frac{5{,}000(5.7751)}{25{,}000} = 1.16$$

$$\therefore SIR_{3-2}@(15\%) > 1$$

(يفضل الخيار 3 على 2)

إذن يفضل الخيار (3) على باقي الخيارات.

6. طريقة فترة الاسترداد (Payback period method):

هذه الطريقة تحدد الفترة اللازمة لاسترداد رأس المال المستثمر باستخدام التدفقات النقدية التالية للاستثمار الأولي دون اعتبار قيمتها بالنسبة للزمن أي $(i = 0)$. وتستخدم كمقياس مساعد او ثانوي لاختيار البديل الأمثل. وفيها يفضل الخيار (البديل) صاحب أقل فترة استرداد (mj) .

$$\sum_{t=1}^{mi} R_{jt} \geq C_{jo}$$

C_{jo} هو رأس المال (الاستثمار) الأولي للخيار (j)

R_{jo} صافي التدفق النقدي المتحصل عليه للخيار (j) خلال الفترة (t)

وبتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق.

الخيار رقم (0): ليس له معنى عند استخدام فترة الاسترداد.

الخير رقم (1): نسبة لأن ليس لديه رأس مال مستثمر ففترة استرداده لحظية.

الخيار رقم (2):

$$\sum_{t=1}^{2} R_{2t} = 20{,}000 + 20{,}000 = 40{,}000 < C_{20} = 50{,}000$$

$$\sum_{t=1}^{3} R_{2t} = 20{,}000 + 20{,}000 + 20{,}000 = 60{,}000 > C_{20} = 50{,}000$$

∴ فترة الاسترداد هي 2.5 سنة أو 3 سنوات .

الخيار (3):

$$\sum_{t=1}^{3} R_{3t} = 20{,}000 + 25{,}000 + 30{,}000 = 75{,}000 > C_{30} = 75{,}000$$

∴ فترة الاسترداد بالضبط 3 سنوات.

بترتيب الخيارات على حسب فترة الاسترداد (أقل فترة mj).

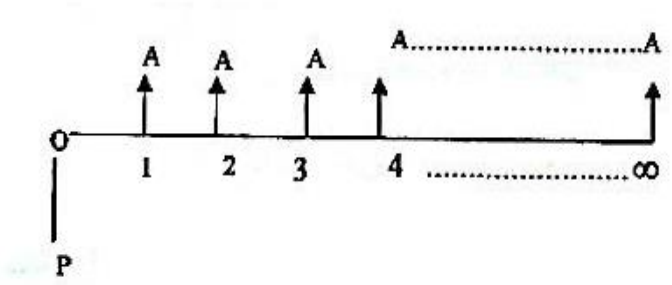
يأتي الخيار (1) في المقدمة، يليه الخيار (2)، ثم الخيار (3)، ويلاحظ أن ترتيبها عكسي تماماً بالنسبة لطرق المقارنة السابقة.

7. طريقة العائد على رأس المال والإيرادات الدائمة:

(Perpetuities and capitalized worth method)

وهي نوع خاص لسلسلة من التدفقات النقدية المنتظمة الدائمة (perpetuity) وهي مستمرة إلى ما لا نهاية وهي حالة خاصة لأن التدفقات النقدية التي تم اعتبارها غير منتهية وهي استخدمت مؤخراً في دنيا الأعمال، وهي تناسب المشاريع طويلة الأمد، مثل الكباري، طرق المرور، المشاريع الغابية أو المشاريع التي أعمارها تزيد عن 50 سنة.

إذا كانت P هي القيمة المودعة في قرض قيمة معدل فائدته (i) لكل فترة سحب و A تساوي قيمة الدفعات المسحوبة في كل فترة إلى ما لا نهاية.



من القانون:

$$P = A\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$$P = \frac{A}{i}\frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n} \qquad n = \infty$$

$$\therefore P = \frac{A}{i}$$

$$Cw_j = \frac{Aj/year}{MARR\ (i)}$$

والقاعدة يفضل الخيار صاحب أعلى قيمة لـ C_W

بالنسبة للمثال السابق:

الخيار (0):

$$Cw_0@(15\%) = \frac{0}{15} = 0$$

الخيار (1):

$$Cw_1@(15\%) = \frac{Aw_1@(15\%)}{15\%} = \frac{4{,}500}{0.15} = \$30{,}000$$

الخيار (2):

$$Cw_2@(15\%) = \frac{Aw_2@(15\%)}{15\%} = \frac{5085}{0.15} = \$33{,}900$$

الخيار (3):

$$Cw_3@(15\%) = \frac{Aw_3@(15\%)}{15\%} = \frac{62415}{0.15} = \$41{,}610$$

يفضل الخيار رقم (3) نسبة لأنه صاحب أعلى قيمة عائد لـ C_W أما إذا تم استخدامها في حالة تكاليف دائمة (capitalized cost) فيفضل الخيار صاحب أقل تكاليف.

7.7 تحليل الاستبدال (Replacement Analysis):

يعتبر من الطرق المستخدمة بكثرة في مقارنة الخيارات. في بعض المنشآت يجري هذا التحليل روتينياً في سبيل التأكد من أن أفضل المعدات والإمكانات تعمل في الخدمة مقارنة بفرص نجاحها.

هنالك مجموعة من الأسباب وراء إجراء إحلال المعدات منها:

1. الأصول الحالية لها مجموعة من المشاكل والضعف في بعض الجوانب مثل (التكاليف العالية للتجهيز والصيانة، قلة الكفاءة الإنتاجية، الاستغلال العالي للطاقة، التدهور الفيزيائي والتلف).

2. الأصول (الخيارات) المنافسة قد تتميز عنها بالتقنية الحديثة، سهولة التجهيز، تكلفة صيانتها قليلة، كفاءة إنتاجية أعلى، استغلال للطاقة بكفاءة، ...).

3. البيئة المحيطة تؤثر على قرار الإحلال مثل تغيرات الطلب وتفضيلات الزبون.

هي تحليل الإحلال (الاستبدال) أحد الخيارات الواجب مقارنتها هو الإبقاء على الوضع الراهن (status-quo) حيث يعطي نفس الفرصة مع الخيارات الأخرى. وبالتالي تتبع نفس الطريقة المنتظمة التي استخدمت من قبل في عملية المقارنة.

تحليل الاستبدال بالميول (emotional) أو التحيز للقرب والارتباط بالأصول الحالية خاصة إذا كنا من المزكيين لها من قبل.

هنالك طريقتين تستخدمان لإجراء تحليل الاستبدال:

الأولى: طريقة التدفقات النقدية (cash flow approach)، والثانية: طريقة وجهة النظر الخارجية (out sider viewpoint).

1. طريقة التدفقات النقدية (Cash flow approach):

تسمى وجهة النظر الداخلية (insider viewpoint). لا يتم فيها إضافة رأس المال إذا أبقي على الأصول الحالية. ويتم اعتبار قيمة السوق (trade-in) لهذه الأصول. ويتم النظر للتكاليف التاريخية غير المغطاة على أنها تكاليف غارقة (sunk costs) ولا يجب اعتبارها داخل الدراسة الاقتصادية التي تضع اعتبار للمستقبل، عدا تلك التكاليف التي تؤثر على ضريبة الدخل إذا تم التخلص وإحلال هذه الأصول.

الأفق الزمني الذي يجب استخدامه يجب ان يحدده المحلل أو متخذ القرار، وكما هو معلوم الأصول الحالية والخيارات البديلة لإحلالها يجب أن تقارن وفق فترة زمنية موحدة تستكمل خلالها التدفقات النقدية، لكنها لا تمتد لأكثر من الأفق الزمني لكل خيار. ونسبة لأن الأصول الحالية (المراد استبدالها) عمرها المتبقي دائماً أقل من الأصول الجديدة، تختار طريقة أقل أفق زمني بين الخيارات (shortest life among alternatives).

مثال:

منشأة كيميائية تمتلك مرشح (filter) تم شراءه قبل 3 سنوات من الآن بمبلغ 30,000$. تكاليف الصيانة والتشغيل الحقيقية (O & M) التي لا تتضمن تكاليف العمالة كانت 4,000$، 5,000$ و 6,000$ للثلاث سنوات الماضية، كما موضح بالجدول التالي. تم تقدير أن المرشح يمكن أن يستخدم

لفترة 5 سنوات قادمة وسوف تكون قيمته المتبقية عندها 2,000$.

العائد من الأصول الغير مهلكة (undepreciated) للمرشح ظهر في دفتر الحسابات بقيمة 12,600$. نسبة للتطور التكنولوجي خلال الثلاث سنوات أنتج نوع أخر ممتاز ومنافس لهذا المرشح. ونتيجة لذلك قيمة السوق الحالية لهذا النوع المستخدم تساوي فقط 9,000$. إذا تم الإبقاء على المرشح المستخدم فإنَّ تكاليف صيانته وتشغيله سوف تظهر كما تمَّ تقديرها في الجدول.

المرشح الجديد متاح ويمكن شراءه بمبلغ 36,000$ وعمره 10 سنوات، تكاليف صيانته وتشغيله السنوية والقيمة المتبقية موضحة بالجدول أدناه. حيث الخيار (1) المرشح قيد الاستعمال والخيار (2) المرشح الجديد.

الخيار (1)		**الخيار (2)**		
End of year (t) نهاية السنة (t)	**Operating and maintenance cost تكاليف الصيانة والتشغيل**	**End of year (t) نهاية السنة (t)**	**Operating and maintenance cost تكاليف الصيانة والتشغيل**	**Salvage (st) القيمة المتبقية (st)**
-3	-	0	-	360000
-2	-4000	1	-	30000
-1	-5000	2	-1000	24600
0	-6000	3	-2000	19800
1	-7000	4	-3000	15600
2	-8000	5	-4000	12000
3	-9000	6	-5000	9000
4	-10000	7	-6000	66000
5	-11000	8	-7000	4800
		9	-8000	3600
		10	-9000	3000

نسبة لأن المرشح القديم يمكن استخدامه فقط لفترة 5 سنوات أخرى، إذن الأفق الزمني المستخدم في المقارنة هو 5 سنوات. وسوف تكون القيمة المتبقية للمرشح الجديد 12000$ في نهاية 5 سنوات.

يمكن إعداد التدفقات النقدية لمقارنة الخيارين في الجدول التالي:

End of year (t) نهاية السنة (t)	Alternative (1) (NCF) الخيار (1) (NCF) A_1t	Alternative (2) (NCF) الخيار (2) (NCF) A_2t	Difference in (CF) الفرق (CF) $A_2t - A_1t$
0	0	-36000+9000	-27000
1	-7000	0	7000
2	-8000	-1000	7000
3	-9000	-2000	7000
4	-10000	-3000	7000
5	-11000+2000	-4000+12000	17000

قيمة السوق 9000 للمرشح القديم أظهرت تدفق نقدي موجب للخيار الثاني لأنه سوف يباع إذا تم شراء المرشح الجديد. إذا تم حساب العائدات السنوية لكل خيار بمعدل فائدة مغري أدنى مقداره 15% يمكن الحصول على النتائج التالية:

$$AW_1@15\% = -7000 - 1000(A/G, 15\%, 5) + 2000(A/F, 15\%, 5)$$
$$= -7000 - 1000(1.7228) + 2000(0.1483)$$
$$= -\$8426.20/year$$
$$AW_2@15\% = -27000(A/P, 15\%, 5) - 1000(A/G, 15\%, 5) + 12000(A/F, 15\%, 5)$$
$$= -27000(0.29883) - 1000(1.7228) + 12000(0.1483)$$
$$= -\$7997.30/year$$

على أساس العائدات السنوية هنالك فرق 428.90/year. عليه يفضل شراء المرشح الجديد وبيع أو إحلال القديم.

يلاحظ أنه يتم تجاهل تكاليف الصيانة والتشغيل التي تحدث بعد السنة الخامسة إذا تم شراء المرشح الجديد. السبب في عدم تضمين تلك التكاليف هو تحديد الأفق الزمني بخمس سنوات وهو أقصى عمر مفيد للمرشح القديم، والذي سوف يتم إحلاله بعدها إذا صار قيد الخدمة. وبالتالي إذا تم تضمين أي تدفقات نقدية تحدث لاحقاً لخيار معين يكون هنالك تحيز ما لم يتم تضمين التدفقات النقدية للخيارات الأخرى.

أيضاً يلاحظ أن التكلفة الأولية 30000 والقيمة الدفترية 12600 للمرشح القديم لم تظهر كتدفق نقدي. فالتكلفة الأولية صارت تكلفة تاريخية (إلا في حالة تأثيرها على ضريبة الدخل) والقيمة الدفترية 12600 ليست تدفق نقدي. الفرق بين القيمة المسجلة (الدفترية) وقيمة السوق 9000$ هو 3600 تعتبر تكاليف غارقة (sunk cost).

غالباً ما يلجأ المحللون لإضافة هذا الفرق للتكلفة الأولية للخيار المتحدي، في محاولة تغطيته وهذا غير صحيح وسوف يكون متخذ القرار متحيز ضد مقترحات الاستبدال الأخرى.

إذا تم إضافة التكلفة الغارقة 3600 للتكلفة الأولية سوف تنخفض العائدات السنوية للمرشح الجديد بما مقداره $3600\ (A/P, 15\%, 5)$ – أي:

$$-7997.30 - 3600(0.2983) = 9071.188/year$$

وعلى هذا سوف يتم تفضيل الخيار (1) أي المرشح القديم بطريقة خاطئة ويتم الاستمرار في تشغيل مرشح ردئ اقتصادياً.

مثال:

لنفس المثال السابق. إذا تمت الرغبة في استخدام أفق زمني مقداره 10 سنوات وسوف تكون قيمة المرشح القديم 31000 بعد نهاية 5 سنوات من الآن اعتماداً على تنبؤات نمو تقنية المرشحات. صافي تكاليف الصيانة والتشغيل السنوية والقيمة المتبقية بالجدول التالي. يمكن الحصول على الآتي:

End of year (t) نهاية السنة (t)	Alternative (1) (NCF) صافي التدفق النقدي للخيار (1) A_1t	Alternative (2) (NCF) صافي التدفق النقدي للخيار (2) A_2t
0	0	-36000+9000
1	-7000	0
2	-8000	-1000
3	-9000	-2000
4	-10000	-3000
5	-11000+2000-3000	-4000
6	0	-5000
7	-1000	-6000
8	-2000	-7000
9	-3000	-8000
10	-4000+15000	-9000+3000

$$AW_1@15\% = -7000(P/A,15\%,5) - 1000(P/G,15\%,5) - 29000(P/F,15\%,5)$$
$$-1000(P/G,15\%,5)(P/F,15\%,5) + 15000(P/F,15\%,5) \times$$
$$(A/P,15\%,10) = -8534.92/year$$

$$AW_2@15\% = -27000(A/P,15\%,5) - 1000(A/G,15\%,5) + 300(A/F,15\%,5)$$
$$= -8616.40/year$$

يلاحظ أن الفرق في العائدات السنوية للخيارين هو $81.48/year$ ، والخيار الأول أصبح أكثر اقتصادية.

هذا تم على أساس التنبؤات (forecasts) للتدفقات النقدية خلال الخمس سنوات القادمة للخيار الأول.

2. طريقة وجهة النظر الخارجية (Outsider viewpoint):

دائماً تفضل وجهة النظر الخارجية لأنها تدفع متخذ القرار (المحلل) للنظر للخيار العامل (current assets) ومنافسيه نظرة محايدة. أي لا يوجد خيار عامل، وبالتالي له كامل الحرية في أيهما يختار. في هذه الطريقة تمثل القيمة المتبقية للخيار العامل قيمة استثماره إذا أعيد للخدمة.

مثال:

باستخدام وجهة النظر الخارجية لنفس المثال السابق لأفق زمني مقداره 5 سنوات وبنفس معدل الفائدة. الجدول التالي يوضح التدفقات النقدية لكلا الخيارين.

End of year (t) نهاية السنة (t)	Alternative (1) (NCF) صافي التدفق للخيار (1) (NCF) A_1t	Alternative (2) (NCF) صافي التدفق للخيار (2) (NCF) A_2t	Difference in (CFS) فرق التدفقات النقدية $A_2t - A_1t$
0	-9000	-36000	-27000
1	-7000	0	7000
2	-8000	-1000	7000
3	-9000	-2000	7000
4	-10000	-3000	7000
5	-11000+2000	-4000+12000	17000

$$AW_1@15\% = -9000(A/P, 15\%, 5) - 7000 - 1000(A/G, 15\%, 5) + 2000(A/F, 15\%, 5)$$
$$= -9000(0.2983) - 7000 - 1000(1.7228) + 2000(0.1483)$$
$$= -\$111100/year$$

$$AW_2@15\% = -36000(A/P, 15\%, 5) - 1000(A/G, 15\%, 5) + 12000(A/F, 15\%, 5)$$
$$= -36000(0.2983) - 1000(1.7228) + 12000(0.1483)$$
$$= -\$1068200/year$$

يلاحظ أن الفرق في الدفعات السنوية هو $428.90/year$ لصالح المرشح الجديد.

7.8 فترة الاستبدال المثالية (Optimum Replacement Interval):

بالرغم من أن معاملة قرار الإحلال يمكن أن يعطي الحجة المنطقية كبديل أخر للمقارنة الاقتصادية، نجد هنالك مجموعة من المنشآت تفشل في العناية بالتدقيق (scrutiny) في تطبيق الأساس الزمني على معداتها الحالية.

بالرغم من حقيقة أن دراسات الإحلال يتمخض عنها تقليل معتبر في التكاليف، إلا أن هنالك منشآت تؤجل (postpone) استبدال الأصول ، وقد يكون السبب في ذلك أن قرار الإحلال يجلب التغيير، ومقاومة التغيير شيء متجذر في الأفراد.

بعض الأسباب لتأخير إحلال الأصول إلى ما بعد الفترة الاقتصادية للإحلال:

1. المنشأة تجني الربح من أصولها الحالية.
2. المعدات الحالية تعمل وتعطي جودة مقبولة.
3. هنالك مخاطرة وعدم تأكد في التنبؤ بتكاليف المعدات الجديدة، بينما نسبياً هنالك يقين أو تأكد عن تكاليف ومنصرفات المعدلات الحالية.
4. قد يكون التمويل المتاح محدود لجلب معدات جديدة بينما ليست هنالك محدودية لتمويل المعدات الحالية.
5. قد يكون هنالك عدم تأكد يتعلق بالطلب المستقبلي لخدمات ومنتجات المعدات الجديدة.

6. هنالك حدس (anticipation) في أن التحسن المستقبلي للتكنولوجيا قد يصير أو يجعل معه المعدات لمتوفرة حالياً متقادمة.

من المعلوم أن أي معدة تتقادم بازدياد استعمالها فإن تكاليف تشغيلها وصيانتها تزيد، وفي نفس الوقت فإن تكلفة استعادة رأس المال تنخفض (capital recovery cost) بمرور الزمن.

بجمع أو إضافة تكلفة استعادة رأس المال المتناقصة إلى تكاليف التشغيل والصيانة المتزايدة فإن ذلك يعطي التكاليف السنوية المنتظمة المكافئة.

إذا أمكن التنبؤ بتكاليف التشغيل والصيانة لكل سنة من سنوات الخدمة وتقدير القيمة المتبقية لمختلف أعمار الإحلال يمكن تحديد فترة الاستبدال المثلى للمعدة عندما تكون قيمة التكاليف السنوية المنتظمة المكافئة (EUAC) أقل ما يمكن. أرجع إلى الشكل (7.1).

أي عند:

$$\frac{d}{dn}(E.U.A.C) = 0$$

حيث: Equivalent Uniform Annual Cost = EUAC

بشرط أن:

1. يكون الأفق الزمني من مضاعفات فترة الإحلال المختارة.

2. في كل مرة يتم فيها إحلال المعدة بأخرى جديدة يكون لها نفس مسار التدفق النقدي.

مثال:

ضاغط صغير الحجم يمكن شراؤه بمبلغ 1000$. قيمته المتبقية يمكن تجاهلها بغض النظر عن فترة الاستبدال. تكاليف الصيانة والتشغيل السنوية قدرت أنها تزيد بحوالي $75/year (سنوياً). إذا كانت هذه التكاليف في السنة 150$ ، ومعدل الفائدة المغري الأدنى 20% . أحسب التكلفة السنوية المنتظمة المكافئة ومن ثم حدد متى يمكن إحلال الضاغط بأخر جديد من نفس النوع.

$$EUAC(n=1) = 1000(A/P, 20\%, 1) + 150 + 75(A/G, 20\%, 1)$$

$$= 1350.00/year$$

$$EUAC(n=2) = 1000(A/P, 20\%, 2) + 150 + 75(A/G, 20\%, 2)$$

$$= 838.59/year$$

$$EUAC(n=3) = 1000(A/P, 20\%, 3) + 150 + 75(A/G, 20\%, 3)$$

$$= 690.63/year$$

$$EUAC(n=4) = 1000(A/P, 20\%, 4) + 150 + 75(A/G, 20\%, 4)$$

$$= 631.87/year$$

$$EUAC(n=5) = 1000(A/P, 20\%, 5) + 150 + 75(A/G, 20\%, 5)$$

$$= 607.44/year$$

$$EUAC(n=6) = 1000(A/P, 20\%, 6) + 150 + 75(A/G, 20\%, 6)$$

$$= 599.11/year$$

$$EUAC(n=7) = 1000(A/P, 20\%, 7) + 150 + 75(A/G, 20\%, 7)$$

$$= 599.17/year$$

$$EUAC(n=8) = 1000(A/P, 20\%, 8) + 150 + 75(A/G, 20\%, 8)$$

$$= 603.77/year$$

$$EUAC(n=9) = 1000(A/P, 20\%, 9) + 150 + 75(A/G, 20\%, 9)$$

$$= 610.83/year$$

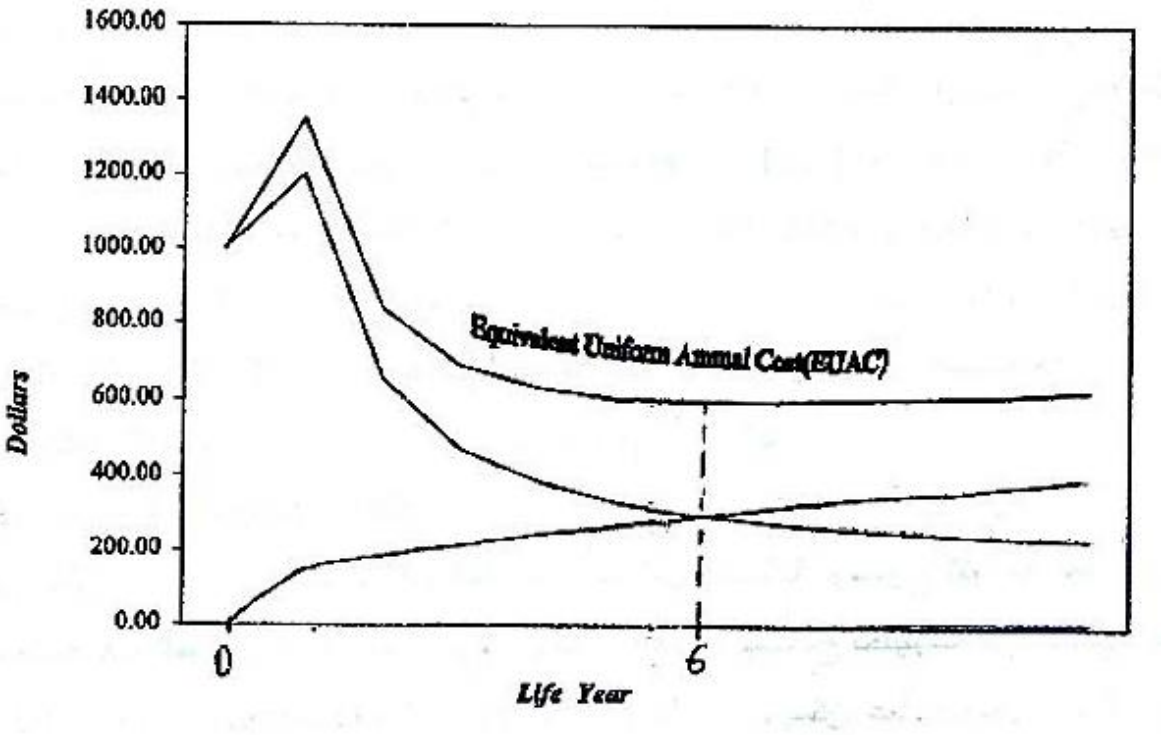
$$EUAC(n=10) = 1000(A/P, 20\%, 10) + 150 + 75(A/G, 20\%, 10)$$

$$= 619.04/year$$

$$EUAC(n=11) = 1000(A/P, 20\%, 11) + 150 + 75(A/G, 20\%, 11)$$

$$= 627.8/year$$

يلاحظ كلما زادت n عن 6 سنوات، فإن التكاليف السنوية المنتظمة المكافئة تزيد، عليه لهذا المثال أنسب فترة لاستبدال الضاغط بأخر جديد هي 6 سنوات.



شكل (7.1) Portrayal Components of Equivalent Annual Costs

7.9 القيام بالتحاليل الإضافية (Performing Supplementary Analysis):

في معظم الأحيان يكون للإدارة عدم ثقة في تقديرات التكاليف والعائدات والمدخرات لبعض الأجزاء التي من الصعوبة بمكان قياسها كمياً نتيجة لتجاهل تكاليف وعوائد التخزين، الطاقة تحسين الجودة، تقليل الحيز، زيادة المرونة، وهكذا.

التحليل الإضافي يتيح آلية لتقويم المردود من قرار الاختيار على القيم التي من الصعوبة بمكان قياس مردودها مثل التكاليف والعوائد الغير مرئية (الغير محسوسة) (intangible benefits and cost)، أيضاً يعطي مستوى عالي من الثقة للإدارة في النتائج المتحصلة من التقنين الاقتصادي لعملية

الاختيار وبالتالي فائدتها في رفع مستوى ثقة الإدارة في التحليل الاقتصادي. ومن بين طرق التحليل الإضافي الذي يمكن القيام به:

1. تحليل نقطة التعادل (Breakeven analysis):

يمكن القيام به عندما تكون هنالك ثقة لواحد أو أكثر من العوامل أن قيمته غير معروفة وذلك بالحكم على قيمته هل أقل أم أكبر من قيمة التعادل. كل حسابات التكافؤ هي أمثلة على تحليل نقطة التعادل.

2. تحليل الحساسية (Sensitivity analysis):

يهتم هذا المؤشر بأثر التغيرات في واحد أو أكثر لقيمة العوامل المستخدمة في الدراسة على العائد (المردود) الاقتصادي. والهدف منه تحديد استجابة قرار اختيار البديل لقيم العوامل التي تم استخدامها ومن بين هذه العوامل التي تخضع للتغيرات (أي لا تحدد قيمتها بثقة certain) تشمل الأفق الزمني، معدل العائد المغري (المجزي) (MARR) وأي قيمة تدفق نقدي. حيث نجد أن الطريقة التي نتحصل فيها على تقديرات التدفقات النقدية (MARR) والأفق الزمني ليست دقيقة فتحليل الحساسية يستخدم لمحاولة احتواء العناصر الغير صحيحة (inexact) في حكمنا الاقتصادي، وذلك بفرض نسبة خطأ في تقديراتها.

3. تحليل المخاطرة (Risk analysis):

في تحليل المخاطرة يتم تمثيل قيم العناصر (العوامل) الممكنة بوضوح كتوزيع احتمالي، وذلك بمعاملة هذه العوامل كمتغيرات عشوائية ويمكن عمل نماذج تحليلية أو نماذج محاكاة (simulation models) للأداء الاقتصادي للخيارات، ويمكن عمل مجموعة متتالية من المقارنات بين الخيارات على أساس التوزيع الاحتمالي لقياس العائد (المردود)، مثلاً التوزيع الاحتمالي للقيمة الحالية.

7.10 تدريبات عامة (General Exercises):

(1) شركة النيل للبترول. لديها 4 مقترحات D, C, B, A . المقترح B يعتمد على المقترح A أو D ، في حين أن المقترح A يعتمد على المقترح B أو C . رأس المال المستثمر الأولي لهذه المقترحات $420000، $60000، $450000، $300000 على الترتيب. إذا كانت ميزانية الشركة تسمح بتمويل أي استثمار في حدود $600000 . بوضوح تام حدد كل الخيارات التي يجب اعتبارها في المقارنة .

(2) شركة الكمالي الهندسية للتصنيع لديها الرغبة في اختيار أحد للماكينتين التاليتين:

التكاليف	الماكينة (1)	الماكينة (2)
التكلفة الأولية	$10000	$12000
الأفق الزمني	6 years	6 years
القيمة المتبقية	$1000	$1000
تكلفة الصيانة والتشغيل للسنة K	$(800+80K)	$(200+100K)

معدل الفائدة 12% .

a. بوضوح جد صافي التدفقات النقدية لكل خيار مستقلاً عن الآخر.

b. أي ماكينة يمكن أن تختارها، مستخدماً طريقة الرتب و

i. طريقة صافي القيمة الحالية (NPW).

ii. طريقة صافي القيمة المستقبلية (NFW).

iii. طريقة صافي الدفعات السنوية (NAW).

iv. طريقة معدل العائد الداخلي (IRR).

v. مستخدماً الفرق وطريقة صافي المدخرات على الاستثمار (SIR).

(3) مضختان غاطستان (submergible) قيد الدراسة من قبل شركة ما، بيانات تكاليفهما كالآتي:

التكاليف	Pump (1)	Pump (2)
التكلفة الأولية	$9000	$14000
القيمة المتبقية	$0	$1000
تكلفة التشغيل السنوية	$1600	$1100
العمر	5 years	10 years

كلا المضختان تحتاج لأفق زمني مقداره 10 سنوات. الشركة تستخدم معدل فائدة 15% كـ (MARR) لمقارنة استثماراتها.

a. أوجد صافي مسار التدفقات النقدية لكل خيار على حدة.

b. مستخدماً طريقة الرتب و

i. صافي القيمة الحالية (NPW).

ii. صافي القيمة المستقبلية (NFW).

iii. الدفعات السنوية (NAW).

iv. معدل العائد الداخلي (IRR).

v. مستخدماً الفرق وطريقة صافي المدخرات على التكاليف (B/C).

(4) شركة سوداتل للاتصالات اشترت كبانية رقمية قبل 5 سنوات من الآن بمبلغ 300000$. هذه الكبانية قيمتها حالياً تساوي 70000$. إذا استمرت في الخدمة فإن يجب أن تلحق بها أخرى X تكلف 200000$ عند نهاية 10 سنوات. إذا احتفظت بالكبانية القديمة في الخدمة تكلفة صيانتها وتشغيلها السنوية 55000$ وسوف تكون قيمتها المتبقية 15000$ في نهاية 10 سنوات. كخيار بديل لإعادة الكبانية القديمة في الخدمة يمكن إحلالها بكبانية من النوع Y والتي قدرت قيمتها بـ 400000$

، تكلفة تشغيلها وصيانتها قدرت بمبلغ 70000$ بينما قيمتها المتبقية في نهاية 10 سنوات هي 140000$.

مستخدماً MARR 20% وطريقة صافي القيمة الحالية (NPW) للمقارنة حدد الخيار الأفضل اقتصادياً.

(5) ماكينة تم شراؤها قبل 5 سنوات من الآن بمبلغ 12000$. في تلك الآونة تم تقدير عمرها بـ 10 سنوات وقيمتها المتبقية عند نهاية عمرها بما يساوي 1200$. تكاليف صيانتها وتشغيلها السنوية المتوسطة تم تقديرها بحوالي 14000$ وسوف تستمر على هذا المنوال لمدة 5 سنوات قادمة، بيد أن عائداتها السنوية تم توقعها أن تكون 20000$. الآن الشركة يمكنها أن تبيع هذه الماكينة بقيمة 5000$ لشراء أخرى جديدة. سعر الماكينة الجديدة 15000$ وعمرها المتوقع 10 سنوات. تكاليف صيانتها وتشغيلها السنوية 7500$ ، عائداتها السنوية 13000$ ويتم تحديد قيمتها المتبقية عند نهاية السنة j (jth year) تبعاً لـ

$$Sj = \$(15000 - 1500j) for\ j = 0, 1, 2, \dots, 10$$

حدد إذا ما كان يجب استبدال هذه الماكينة أم لا، مستخدماً طريقة العائدات السنوية (NAW) ، معدل فائدة 15% مركب سنوياً ووجهة النظر الخارجية.

(6) منشأة بها منظومة للموائع، تعتزم استبدال مضخة تعمل الآن، تكاليف تشغيلها وصيانتها السنوية 8000$/year، يمكن أن تعمل لمدة 4 سنوات قادمة. وسوف لا تكون لها قيمة متبقية في نهاية تلك الفترة (SV = 0) .

إذا تم عرض المضخة الآن في السوق لشراء المضخة الجديدة سوف تعطي 4000$ كقيمة سوق. المضخة الجديدة تكلف 18000$ ، وسوف تكون قيمتها 9000$ عند نهاية 4 سنوات من الخدمة، تكاليف تشغيلها وصيانتها 4500$ سنوياً. مستخدماً معدل فائدة مغري أدنى (MARR) 20% ، اختبر هذه الخيارات معتمداً على طريقة القيمة الحالية (NPW) وأفق زمني مقداره 4 سنوات:

a. استخدم طريقة وجهة النظر الداخلية.

b. استخدم طريقة وجهة النظر الخارجية.

(7) شركة للتشييد لها رافعة رأسية (overhead crane) ، ما تبقى لها من عمر قدر بـ 7 سنوات. الرافعة يمكن بيعها بمبلغ 14000$. إذا ظلت الرافعة في الخدمة يجب عمرتها في الحال بتكلفة 6000$ ، وسوف تكون تكاليف صيانتها وتشغيلها 5000$ سنوياً، وقيمتها المتبقية سوف تكون صفراً عند نهاية فترة الـ 7 سنوات. الرافعة الجديدة تكلف 36000$ ، وسوف تكون قيمتها المتبقية 8000$ عند نهاية تلك الفترة، وتكاليف صيانتها وتشغيلها 2500$ سنوياً. الشركة تستخدم معدل فائدة 15% في تقييم خيارات استثماراتها. معتمداً على تحليل التكاليف السنوية هل تشتري الشركة الرافعة الجديدة:

a. استخدم طريقة وجهة النظر الداخلية.

b. استخدم طريقة وجهة النظر الخارجية.

(8) مغسلة نعمة الاتوماتيكية للسيارات بالخرطوم ظهرت لها بعض الصعوبات في جعل معداتها تعمل بصورة جيدة. مالك هذه المغسلة أمامه خيار عمرة المعدات الحالية أو إحلالها بأخرى جديدة. عمرة المعدات الحالية تكلف 8500$ ، وسوف تكون تكلفة تشغيلها وصيانتها السنوية بعد العمرة 7500$ وسيتم التخلص منها بعد 5 سنوات وحينها ستكون قيمتها المتبقية صفراً. إذا لم تتم عمرتها فإن قيمتها في السوق تعادل 3200$ ، لصالح شراء المعدات الجديدة والتي تكلف 28000$ ، بينما صيانتها وتشغيلها سنوياً تكلف 3000$. تم توقيع إعادة بيعها في نهاية 5 سنوات بمبلغ 12000$.

مستخدماً MARR مقداره 12% ما توصيتك لمالك المغسلة. على أن تكون توصيتك مبنية على أساس المقارنة بالقيمة الحالية (NPW) وكمحلل خارجي.

(9) منشأة هندسية تستخدم ماكينة قيمتها في السوق حالياً 11000$ لتأدية غرض خاص. تتطلب

عملية الاستخدام أن تنتهي في 6 سنوات قادمة وبعدها ستتوقف. التكاليف والقيمة المتبقية للماكينة الحالية تم التنبؤ بها كما في الجدول التالي:

السنة	1	2	3	4	5	6
تكلفة التشغيل	$1500	$1800	$2100	$2400	$2700	$3000
القيمة المتبقية	$8000	$6000	$5000	$4000	$3000	$2000

تم تطوير ماكينة جديدة ويمكن شراؤها بمبلغ 17000$. بيانات تدفقاتها النقدية كما يلي:

السنة	1	2	3	4	5	6
تكلفة التشغيل	$1000	$1100	$1200	$1300	$1400	$1500
القيمة المتبقية	$1300	$1100	$10000	$9000	$8000	$7000

إذا كان معدل الفائدة مساوٍ 0% متى يتم شراء الماكينة الجديدة.

(10) معطى: الأفق الزمني المنتهي، مسار التدفقات النقدية خلال دورة الحياة، تكاليف التشغيل والصيانة C_t ، القيمة المتبقية F_n ، بدلالة سنة الخدمة (t) عند نهاية الخدمة بعد مرور (n) من السنوات لمعدة مستخدمة حالياً كالآتي:

$$C_t = \$4000(1.10)^t \qquad t = 1,2,\dots,12$$

$$F_n = \$44000(0.9)^n \qquad n = 0,1,2,\dots,12$$

i. حدد أنسب فترة استبدال بافتراض أن الـ MARR هو:

a. 0%

b. 15%

(أقصى عمر 12 سنة)

ii. حدد أنسب فترة استبدال إذا كان:

$$C_t = \$4000(1.4)^t \qquad t = 1,2,\dots,12$$

$$F_n = \$4000(0.9)^n \qquad n = 0,1,2,\dots,12$$

7.11 الإهلاك (Depreciation):

هو نقصان القيمة المادية للموجودات أو الأصول بمرور الزمن من جراء الاستعمال أو نتيجة لظروف أخرى كالحوادث، التقادم، تغير الأسعار.

تشمل الأصول أو المملوكات (assets) المباني، المعدات، الماكينات والتي يستفاد منها في تقديم خدمات لها عائدات. وبالتالي مقدرتها على جلب هذه العائدات تتناقص بمرور الزمن.

والإهلاك هو جزء أو مقدار معين من رأس المال يجنب من طائلة الضرائب، حيث تسمح قوانينها باستقطاع جزء معقول من قيمة أصل الممتلكات نتيجة لـ:

1. التآكل والتمزق (wear and tear) أو التحلل.
2. التقادم (obsolescence) (ظهور اختراعات جديدة تقلل من قيمة الأصل).
3. الحوادث ، والبيئة.

طرق تقدير/ حساب الإهلاك:

1. طريقة الخط المستقيم (Straight-line depreciation):

تعطي هذه الطريقة قيمة ثابتة للإهلاك خلال فترة التشغيل ويحسب بالعلاقة:

$$D_t = \frac{P - F}{n}$$

حيث:

P قيمة الأصل (الاستثمار الأولي)

F القيمة المتبقية

n عدد سنوات التشغيل

وتحسب القيمة المسجلة (book value) أو رأس المال (المستثمر) الغير مغطى كالآتي:

$$B_t = P - \left(\frac{P - F}{n}\right).t$$

$$B_t = P - D_t.t$$

مثال:

قيمة حاسب آلي 82000$ عند شرائه وهو جديد، قدرت قيمته المتبقية بـ 5000$ عند نهاية فترة خدمته وهي 7 سنوات. أحسب قيمة الإهلاك وقيمته الدفترية عند كل سنة من سنوات تشغيله.

نهاية السنة EOY	الإهلاك Depreciation	القيمة الدفترية B_t
0	-	82000
1	11000	71000
2	11000	60000
3	11000	49000
4	11000	38000
5	11000	27000
6	11000	16000
7	11000	5000

$$D_t = \frac{P - F}{n} = \frac{82000 - 5000}{7} \$11000$$

$$B_t = P - D_t.t$$

$$B_1 = 82000 - 11000 \times 1 = 71000$$

$$B_2 = 82000 - 11000 \times 2 = 60000$$

$$B_7 = 84000 - 11000 \times 7 = 5000$$

$$OR$$

$$B_t = B_{t-1} - D_t$$

$$B_6 = B_5 - D_6 = 27000 - 11000 = 16000$$

يلاحظ أنه في نهاية الفترة $(n = 7)$ أن القيمة المتبقية تساوي القيمة الدفترية.

2. طريقة مجموع أرقام السنوات (Sum of year digit depreciation (SOYD)):

تستند هذه الطريقة على أن الخدمات المستفادة من الأصل تكون في بداية عمره عندما تكون حالته جيدة وتقل وتتناقص كلما انقضى جزء كبير من عمره. لذا يكون استقطاع الإهلاك في فترة تشغيله الأولى قيمته أكبر ويتناقص تدريجياً. وأيضاً القيمة الدفترية تساوي القيمة المتبقية عند نهاية العمر.

طريقة الحساب:

أحسب مجموع أرقام سنوات العمر الاقتصادي

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \cdots, +(n-1) + n = n\frac{(n-1)}{2}$$

$$D_t = \frac{n-(t-1)}{n(n+1)/2}.(P-F)$$

حيث:

n العمر الاقتصادي

P قيمة الأصل

F القيمة المتبقية

$$B_t = (P-F)\frac{(n-t)(n-t+1)}{n(n+1)}.$$

$$B_t = B_{t-1} - D_t$$

لسهولة الحساب جهز الكسر $\frac{n-(t-1)}{n(n+1)/2}$ في جدول ثم أضرب في القيمة الدفترية السابقة أي:

$$D_t = \frac{n-(t-1)}{n(n+1)/2}.B_{t-1}$$

مثال:

لنفس المثال السابق:

نهاية السنة EOY (t)	قيمة الكسر $\frac{n-(t-1)}{n(n+1)/2}$	الإهلاك Depreciation D_t	القيمة الدفترية رأس المال الغير مغطى B_t
0	-	-	82000
1	7/28	19250	62750
2	6/28	16500	46250
3	5/28	13750	32500
4	4/28	11000	21500
5	3/28	8250	13250
6	2/28	5500	7750
7	1/28	2750	5000

3. طريقة استعادة رأس المال المتسارعة المعدلة:

(Modified accelerated cost recovery system (MACRS))

في هذا النظام تصنف الأصول على حسب فصلية ملكيتها وهي الفترة الزمنية التي يتهالك فيها الأصل

لـ 8 مجموعات من فصائل الملكية هي:

3, 5, 7, 10, 15, 20, 27.5, 31.5 year property

لكل فصيلة ملكية هناك نسبة مئوية عند أي سنة من فترة حياته ستجعل هذه الطريقة القيمة المتبقية (القيمة الدفترية) في نهاية الفترة صفراً.

يحسب الإهلاك كالآتي:

$$D_t = d_t . P$$

حيث:

D_t الإهلاك في السنة

d_t نسبة الإهلاك

P قيمة الأصل

بينما القيمة الدفترية B_t تحسب كالآتي:

$$B_t = P - \sum_{j=1}^{t} D_j = P\left(1 - \sum_{j=1}^{t} d_j\right)$$

$$OR$$

$$B_t = B_{t-1} - D_t$$

مثال:

المثال السابق، الحاسب من فصيلة الملكية 5 سنوات

نهاية السنة (t) EOY (t)	استقطاع إهلاك (MACRS) deduction $D_t = d_t.P$	Book value unrecovered investment B_t
0		882000
1	16400	65600
2	26240	39360
3	15744	23616
4	9446.4	14169.6
5	9446.4	4723.2
6	4723.2	0.00
7	0.00	0.00

نهاية السنة (t) EOY (t)	5-year property (dt)
0	–
1	20%
2	32%
3	
4	19%
5	11.52
6	5.76
7	–

4. طريقة الموازنة المتناقصة للإهلاك (Double declining balance):

تشبه طريقة الإهلاك بمجموع أرقام السنوات لتسارعها في حذف قيمة الأصول. في هذه الطريقة الإهلاك المسموح به عند نهاية كل سنة عبارة عن كسر ثابت (P) من قيمة الاستثمار الغير مغطاة (القيمة الدفترية B_t Book value) للسنة السابقة.

الاستثمار الغير مغطى B_t عند نهاية السنة (t) يعطى بـ :

$$B_t = P(1-P)^t \qquad (2)$$

بتعويض (1) في (2) يمكننا أن نحسب الإهلاك للسنة مباشرة:

$$D_{t=P} = P(1-P)^{t-1}$$

يلاحظ في هذه الطريقة أن القيمة المتبقية المقدرة لم تظهر في حساب استقطاع الإهلاك، ومع ذلك قيمة الاستثمار الغير مغطاة B_t يجب أن لا تنخفض أقل من القيمة المتبقية. أقصى قيمة يسمح بها القانون للكسر (P) هي $P = 2/n$ وفي هذه الحالة تسمى طريقة الموازنة المتناقصة المضاعفة (double declining balance) 200% وتختار للأصول الجديدة في الخدمة والتي تزيد أعمارها عن 3 سنوات. أما الأصول المستعملة يستخدم لها 150% أو 125% موازنة متناقصة.

هذه الطريقة يمكن أن تستخدم منفردة، ومع ذلك تسمح بالتحويل (switching) من 200%، 150%، 125% موازنة متناقصة (declining balance) إلى طريقة الخط المستقيم. وأمثل تحويل يتم حينما يكون الإهلاك بطريقة الخط المستقيم للجزء الغير مغطى من قيمة الأصل يزيد عن قيمة سماح إهلاك الموازنة المتناقصة وذلك لإعطاء القيمة المتبقية في نهاية عمر الأصل. لذا يجب التحويل للخط المستقيم عند أول سنة يكون فيها:

$$\frac{B_{t-1} - F}{n-(t-1)} P^{B_{t-1}}$$

القيمة المتبقية (F) تستخدم في حساب الإهلاك بطريقة الخط المستقيم بالرغم من أنها أهملت في هذه الطريقة. التحويل لطريقة الخط المستقيم يكون من غير المرغوب فيه إذا كانت القيمة المتبقية المقدرة

(F) تزيد عن القيمة الغير مغطاة (book value) لطريقة الموازنة المتناقصة المضاعفة عند نهاية السنة B_t ، مما يجعل الإهلاك مبتور (truncated) .

مثال:

يمكن استخدام مثال الحاسب السابق حيث أن:

$$n = 7year, F = \$5000, P = \$8200$$

وباستخدام موازنة متناقصة مضاعفة (declining balance) 200% . نجد أن قيمة $P = 2/7$ ، وبالتالي يمكن الحصول على الجدول التالي:

End of year (t) نهاية السنة (t)	200%DDB depreciation (D_t) إهلاك متوازن مضاعف (D_t)	Straight-line dep. On remaining life (D_t) إهلاك الخط المستقيم لما بقي من عمر (D_t)	Unrecovered investment الاستثمار الغير مغطى B_t
0	–	–	82000.00
1	23428.58*	11000.00	58571.43
2	16734.69*	8928.57	41836.73
3	11953.53*	7367.35	29883.38
4	8538.11*	6220.85	21345.27
5	6098.56*	5448.42	15246.62
6	1356.18	5123.31*	10123.31
7	3111.56	5123.31*	5000.00

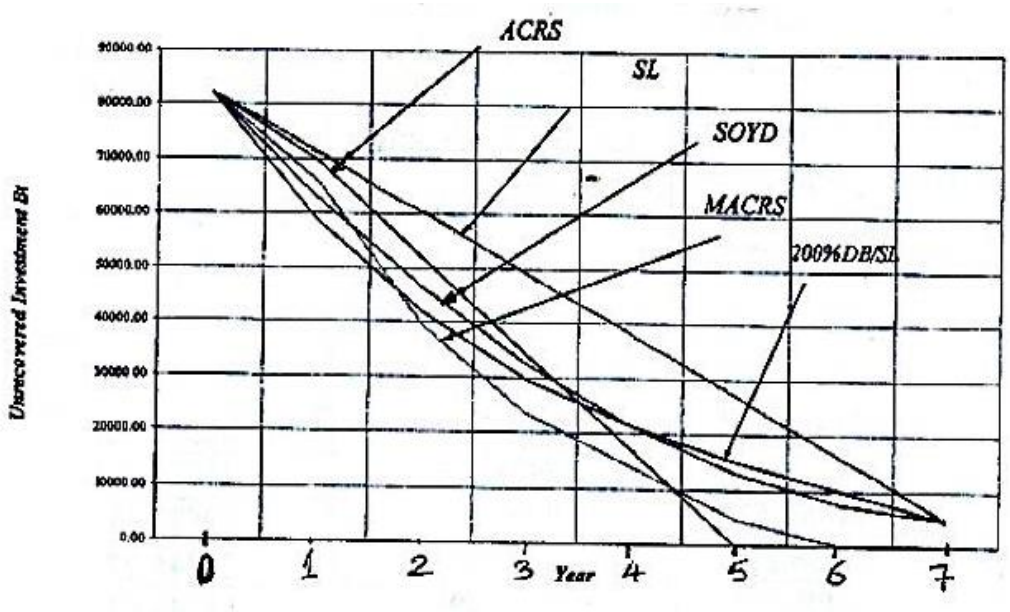
حيث * توضح قيمة سماح الإهلاك المستخدم فعلياً. التحويل للخط المستقيم يحدث عند السنة (6).

5. مقارنة طرق الإهلاك المعتمدة على السنوات وهي:

Accelerated cost recovery system (ACRS), Modified cost recovery system (MACRS), Straight line (SL), Double declining balance (200%DB/SL, or DDB/SL), and Sum of years digits (SOYD).

والتي تظهر في منحنى قيمة الاستثمار الغير مغطاة B_t ضد الزمن لهذه الطرق أدناه كما هو واضح في الجدول والشكل التالي.

End of year نهاية السنة	**قيمة الاستثمار الغير مغطاة (القيمة الدفترية B_t)**				
(t)	ACRS	MACRS	SL	SOYD	DDB/SL
0	82000.00	82000.00	82000.00	82000.00	82000.00
1	69700.00	65600.00	71000.00	62750.00	58571.43
2	51660.00	39360.00	60000.00	46250.00	41836.73
3	34440.00	23616.00	49000.00	32500.00	29883.38
4	17220.00	14169.60	38000.00	21500.00	21345.27
5	0.00	4723.20	27000.00	13250.00	15246.62
6	0.00	0.00	16000.00	7750.00	10123.31
7	0.00	0.00	5000.00	5000.00	5000.00



Unrecovered Investment – Time

6. طرق أخرى للإهلاك لا تعتمد على السنوات:

1. الإهلاك بعدد الوحدات المنتجة (Unit of production depreciation):

يستخدم للأصول التي تنتهي بالتآكل والتمزق (tear & wear) وليس التقادم. كل وحدة منتجة تأخذ نفس الكمية من الخدمات المستفادة من المملوك (الأصل). يعتمد الإهلاك على عدد الوحدات في فترة معينة. ويحسب من المعادلة:

$$D_t = (P - F)\frac{u_t}{u}$$

u_t عدد الوحدات المنتهية خلال السنة (t)

u عدد الوحدات الكلية المتوقع إنتاجها خلال عمر الأصل

مثال:

معدة تُشترى بـ 125000$ وعمرها الاقتصادي 10 سنوات قيمتها المتبقية 15000$. عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها خلال عمرها 220000 وحدة. إذا كان عدد الوحدات المنتجة في السنة الأولى 10000، وفي الثانية 24000 وحدة. أحسب الإهلاك في السنة 1 ، 2 .

الحل:

$$D_t = (P - F)\frac{u_t}{u}$$

$$P = 125000$$

$$F = \$15000$$

$$u = 220000\ units$$

$$u_1 = 10000\ units$$

$$u_2 = 24000\ units$$

$$D_1 = (125000 - 15000).\frac{10000}{22000} = \$5000$$

$$D_2 = (125000 - 15000).\frac{24000}{220000} = \$12000$$

2. الإهلاك لعدد ساعات العمل اليومية (Operating day (hour) depreciation):

يشبه الطريقة السابقة ويحسب كالآتي:

$$D_t = (P - F)\frac{Q_t}{Q}$$

حيث:

Q_t عدد ساعات العمل اليومية

Q عدد الساعات المتوقعة خلال عمره التشغيلي

3. الإهلاك بتنبؤ تقديرات الدخل (Income forecast depreciation):

تستخدم هذه الطريقة لإهلاك الأصول المؤجرة (rental property) ، مثل أشرطة الفيديو، أجهزة التسجيلات الصوتية وأفلام الصور المتحركة، ويحسب من العلاقة:

$$D_t = (P - F)\frac{R_t}{R}$$

حيث:

R_t عائدات الإيجار خلال السنة (t)

R جملة العائدات خلال عمر التشغيل

7.12 ضرائب الدخل (Income tax):

ضريبة الدخل ليست مقصورة على مجال منظمات الأعمال (firms & organizations) بل تشمل أيضاً فئات المهندسين، المحامين، القضاة، الاستشاريين والخبراء.

الجدول التالي يوضح حدود الدخل ومعدل الضريبة.

حدود الدخل ومعدل الضريبة

معدل/ نسبة الضريبة	Taxable incomes ($)
15%	$0 < T.I \leq 50000$
25%	$50000 < T.I \leq 7500$
34%	$75000 < T.I \leq 100000$
39%	$100000 < T.I \leq 335000$
34%	$335000 < T.I$

1. التدفق النقدي ما بعد الضرائب (After tax cash flow):

يمثل التدفق الذي يجب الاعتماد عليه في التحليل الاقتصادي وهو التدفق الصافي بعد خصم استقطاع الضرائب، الإهلاك والفوائد.

مثال:

للمثال السابق:

يستخدم جهاز حاسوب قيمته 82000$ لفترة 7 سنوات لمراقبة ورصد ماكينة إنتاجية. قيمته المتبقية في نهاية الفترة قدرت بـ 5000$. يتوقع أن تقل تكاليف التشغيل بما مقداره 23500$ في كل سنة. اعتمدت طريقة استعادة التكلفة المتسارعة المعدلة (MACRS) كطريقة لحساب الإهلاك. علماً بأن الجهاز يصنف من فصيلة ملكية 5 سنوات. مستخدماً طريقة صافي القيمة الحالية، معدل فائدة مغري أدنى (MARR)، مقداره 15% ونسبة ضريبية 34% . هل سيكون الحاسوب مجدياً؟ ومن ثم استخدم طريقة الإهلاك بأرقام السنوات لإعداد التدفقات النقدية بعد الإهلاك والضرائب.

نهاية السنة (t) EOY	ما قبل الضرائب Before tax cash flow	استقطاع الإهلاك (MACRS) deduction	الدخل الخاضع للضريبة Taxable income B-C	الضريبة Tax D×0.34	التدفق ما بعد الضريبة After tax cash B-E
A	B	C	D	E	F
0	−82000	-	-	-	-82000
1	23500	16400	7100	2414	21086
2	23500	26240	−2740	−931.6	24431.6
3	23500	15744	7756	2637.04	20862.96
4	23500	9446.4	14053.6	47788.22	18721.78
5	23500	9446.4	14053.6	47788.22	18721.89
6	23500	4723.2	18776.8	6384.11	17115.89
7	23500	000	23500	7990	15510
8	5000 salvage	000	5000	1700	3300

$$NPW@15\% = -82000 + 21086(P/F, 15\%, 1)$$

$$+24431.6(P/F, 15\%, 2) + \cdots + \cdots + 15510(P/F, 15\%, 7)$$

$$+3300(P/F, 15\%, 7) = \$3010.5$$

طريقة مجموع أرقام السنوات (SOYD):

نهاية السنة (t) EOY A	التدفق النقدي قبل الضرائب Before tax cash flow B	استقطاع الإهلاك Deduction SOYD C	الدخل الخاضع للضريبة Taxable income B-C D	الضريبة Tax D×0.34 E	التدفق ما بعد الضريبة After tax cash B-E F
0	-82000	-	-	-	-82000
1	23500	19250	4250	1445	2055
2	23500	16500	7000	2380	21120
3	23500	13750	9750	3315	20185
4	23500	11000	12500	4250	19250
5	23500	8250	15250	5185	18315
6	23500	5500	18000	6120	17380
7	23500	2750	20750	7055	16445
7	5000	5000 تغطى من القيمة المتبقية	000	000	5000

جدول MACRS :

EOY	3-year property	5-year property	7-year property	10-year property	15-year property	20-year property
0						
1	33.33%	20.00%	14.29%	10.00%	5.00%	3.750%
2	44.45	32.00	24.49	18.00	9.5	7.219
3	14.81	19.20	17.49	14.40	8.55	6.677
4	7.41	11.52	12.49	11.52	7.70	6.177
5		11.52	8.93	9.22	6.93	5.713
6		5.76	8.93	7.37	6.23	5.285
7			8.93	6.55	5.90	4.888
8			4.46	6.55	5.90	4.522
9				6.55	5.91	4.462
10				6.55	5.90	4.461
11				3.28	5.91	4.462
12					5.90	4.461
13					5.91	4.462
14					5.90	4.461
15					5.91	4.462
16					5.95	4.461
17						4.462
18						4.461
19						4.462
20						4.461
21						2.231

7.13 تدريبات عامة (General Exercises):

1. جرار صغير تم شراؤه بمبلغ 12000$ ، يتوقع أن تستخدمه شركة لمدة 6 سنوات وبعدها سوف يتم بيعه بمبلغ 2500$. أحسب استقطاع الإهلاك وناتج الاستثمار الغير مغطى B_t في كل سنة من عمر الأصل مستخدماً إهلاك (MACRS) .

2. ماكينة تصوير تستخدم في محل للطباعة (فصيلة ملكيتها 5 سنوات). قيمتها 40000$ يتوقع أن تستخدم لمدة 6 سنوات وبعدها سوف تكون قيمتها المتبقية 4000$. أحسب استقطاع الإهلاك مستخدماً :

a. MACRS
b. SL
c. SOYD
d. DDB/SL

3. منظف فلاتر من فصيلة الملكية 5 سنوات وعمره من صنف 6 سنوات (6-year class life) تكلفته الأولية 50000$. تم تشغيله ويتوقع أن يعيش لمدة 8 سنوات. عائداته السنوية تفوق تكاليف تشغيله بما مقداره 14000$ وسوف لا تكون لديه قيمة متبقية عند نهاية فترة التشغيل. معدل الضريبة النافذ المفعول 34% . أوجد التدفقات النقدية ما بعد الإهلاك والضرائب للسنوات: مستخدماً:

a. سماح إهلاك MACRS
b. سماح إهلاك SL

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية

1. د. السغبيني الباشا ، أحمد ، التنظيم الصناعي ، سوريا ، جامعة حلب ، (1993م).

2. د. الهيتي ، خالد ، أساسيات التنظيم الصناعي ، الأردن ، دار زهران ، (1997م).

3. د. الفضل ، مؤيد ، د. محمد ، حاكم ، إدارة الإنتاج والعمليات ، الأردن ، دار زهران ، (2006).

4. د. الور ، فوزي ، الإشراف والتنظيم الصناعي ، الأردن ، دار صفاء ، (1998م).

5. د. حجازي ، جمال طاهر ، إدارة إنتاج العمليات (مدخل لإدارة الجودة الشاملة) ، مصر ، مكتب القاهرة للطباعة والنشر ، (2002م).

6. د. زمزير ، منعم ، إدارة الإنتاج والعمليات ، مصر ، دار زهران للنشر والتوزيع ، (1995م).

7. د. سالم ، فؤاد ، د. حسن ، فالح ، إدارة الإنتاج والتنظيم الصناعي ، الأردن ، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع ، (2000م).

8. أسامة محمد المرضي سليمان ، مذكرة التحليل الاقتصادي الهندسي ، جامعة وادي النيل ، عطبرة ، السودان ، (1996م).

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. G. Constable and B. Somerville, A century of innovation: Twenty engineering achievements that transformed our lives, the national academies press, Washington DC, (2003).

2. W.G. Sullivan, E.M. Wicks, and C.P. Koelling, Engineering economy, 14th edition, Pearson prentice hall, Upper saddle river, (2009).

3. N.M. Fraser and E.M. Jewkes, Engineering economics: Financial decision making for engineers, 5th edition, Pearson, Toronto, Ontario, (2013).

4. D.G. Newnan, J. Whittaker, T.G. Eschenbach and J.P. Lavelle, Engineering economic analysis, 3rd edition, Don mills, Toronto, Ontario, (2014).

5. J.A. White, K.E. Case and D.B. Pratt, Principles of engineering economic analysis, 5th edition, Hoboken, NJ, USA, (2010).

6. Osama Mohammed Elmardi Suleiman , Engineering Economic Analysis , Nile Valley University , Atbara , Sudan , (1998).

ملحقات

Compound Interest Tables

From Engineering Economic Analysis Donald G. Newnan

©Copyright 1992, Engineering Press Inc.
All rights reserved.

Values Of Interest Factors When *N* Equals Infinity

Single Payment:

$(F/P,i,\infty) = \infty$

$(P/F,i,\infty) = 0$

Arithmetic Gradient Series:

$(A/G,i,\infty) = 1/i$

$(P/G,i,\infty) = 1/i^2$

Uniform Payment Series:

$(A/F,i,\infty) = 0$

$(A/P,i,\infty) = i$

$(F/A,i,\infty) = \infty$

$(P/A,i,\infty) = 1/i$

1/4% Compound Interest Factors 1/4%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.003	.9975	1.0000	1.0025	1.000	0.998	0	0	1
2	1.005	.9950	.4994	.5019	2.003	1.993	0.504	1.005	2
3	1.008	.9925	.3325	.3350	3.008	2.985	1.005	2.999	3
4	1.010	.9901	.2491	.2516	4.015	3.975	1.501	5.966	4
5	1.013	.9876	.1990	.2015	5.025	4.963	1.998	9.916	5
6	1.015	.9851	.1656	.1681	6.038	5.948	2.498	14.861	6
7	1.018	.9827	.1418	.1443	7.053	6.931	2.995	20.755	7
8	1.020	.9802	.1239	.1264	8.070	7.911	3.490	27.611	8
9	1.023	.9778	.1100	.1125	9.091	8.889	3.987	35.440	9
10	1.025	.9753	.0989	.1014	10.113	9.864	4.483	44.216	10
11	1.028	.9729	.0898	.0923	11.139	10.837	4.978	53.950	11
12	1.030	.9705	.0822	.0847	12.167	11.807	5.474	64.634	12
13	1.033	.9681	.0758	.0783	13.197	12.775	5.968	76.244	13
14	1.036	.9656	.0703	.0728	14.230	13.741	6.464	88.826	14
15	1.038	.9632	.0655	.0680	15.266	14.704	6.957	102.301	15
16	1.041	.9608	.0613	.0638	16.304	15.665	7.451	116.716	16
17	1.043	.9584	.0577	.0602	17.344	16.624	7.944	132.063	17
18	1.046	.9561	.0544	.0569	18.388	17.580	8.437	148.319	18
19	1.049	.9537	.0515	.0540	19.434	18.533	8.929	165.492	19
20	1.051	.9513	.0488	.0513	20.482	19.485	9.421	183.559	20
21	1.054	.9489	.0464	.0489	21.534	20.434	9.912	202.531	21
22	1.056	.9465	.0443	.0468	22.587	21.380	10.404	222.435	22
23	1.059	.9442	.0423	.0448	23.644	22.324	10.894	243.212	23
24	1.062	.9418	.0405	.0430	24.703	23.266	11.384	264.854	24
25	1.064	.9395	.0388	.0413	25.765	24.206	11.874	287.407	25
26	1.067	.9371	.0373	.0398	26.829	25.143	12.363	310.848	26
27	1.070	.9348	.0358	.0383	27.896	26.078	12.852	335.150	27
28	1.072	.9325	.0345	.0370	28.966	27.010	13.341	360.343	28
29	1.075	.9301	.0333	.0358	30.038	27.940	13.828	386.366	29
30	1.078	.9278	.0321	.0346	31.114	28.868	14.317	413.302	30
36	1.094	.9140	.0266	.0291	37.621	34.387	17.234	592.632	36
40	1.105	.9049	.0238	.0263	42.014	38.020	19.171	728.882	40
48	1.127	.8871	.0196	.0221	50.932	45.179	23.025	1 040.22	48
50	1.133	.8826	.0188	.0213	53.189	46.947	23.984	1 125.96	50
52	1.139	.8782	.0180	.0205	55.458	48.705	24.941	1 214.76	52
60	1.162	.8609	.0155	.0180	64.647	55.653	28.755	1 600.31	60
70	1.191	.8396	.0131	.0156	76.395	64.144	33.485	2 147.87	70
72	1.197	.8355	.0127	.0152	78.780	65.817	34.426	2 265.81	72
80	1.221	.8189	.0113	.0138	88.440	72.427	38.173	2 764.74	80
84	1.233	.8108	.0107	.0132	93.343	75.682	40.037	3 030.06	84
90	1.252	.7987	.00992	.0124	100.789	80.504	42.820	3 447.19	90
96	1.271	.7869	.00923	.0117	108.349	85.255	45.588	3 886.62	96
100	1.284	.7790	.00881	.0113	113.451	88.383	47.425	4 191.60	100
104	1.297	.7713	.00843	.0109	118.605	91.480	49.256	4 505.93	104
120	1.349	.7411	.00716	.00966	139.743	103.563	56.512	5 852.52	120
240	1.821	.5492	.00305	.00555	328.306	180.312	107.590	19 399.75	240
360	2.457	.4070	.00172	.00422	582.745	237.191	152.894	36 264.96	360
480	3.315	.3016	.00108	.00358	926.074	279.343	192.673	53 821.93	480

/2% Compound Interest Factors 1/2%

	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
n	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	n
1	1.005	.9950	1.0000	1.0050	1.000	0.995	0	0	1
2	1.010	.9901	.4988	.5038	2.005	1.985	0.499	0.991	2
3	1.015	.9851	.3317	.3367	3.015	2.970	0.996	2.959	3
4	1.020	.9802	.2481	.2531	4.030	3.951	1.494	5.903	4
5	1.025	.9754	.1980	.2030	5.050	4.926	1.990	9.803	5
6	1.030	.9705	.1646	.1696	6.076	5.896	2.486	14.660	6
7	1.036	.9657	.1407	.1457	7.106	6.862	2.980	20.448	7
8	1.041	.9609	.1228	.1278	8.141	7.823	3.474	27.178	8
9	1.046	.9561	.1089	.1139	9.182	8.779	3.967	34.825	9
10	1.051	.9513	.0978	.1028	10.228	9.730	4.459	43.389	10
11	1.056	.9466	.0887	.0937	11.279	10.677	4.950	52.855	11
12	1.062	.9419	.0811	.0861	12.336	11.619	5.441	63.218	12
13	1.067	.9372	.0746	.0796	13.397	12.556	5.931	74.465	13
14	1.072	.9326	.0691	.0741	14.464	13.489	6.419	86.590	14
15	1.078	.9279	.0644	.0694	15.537	14.417	6.907	99.574	15
16	1.083	.9233	.0602	.0652	16.614	15.340	7.394	113.427	16
17	1.088	.9187	.0565	.0615	17.697	16.259	7.880	128.125	17
18	1.094	.9141	.0532	.0582	18.786	17.173	8.366	143.668	18
19	1.099	.9096	.0503	.0553	19.880	18.082	8.850	160.037	19
20	1.105	.9051	.0477	.0527	20.979	18.987	9.334	177.237	20
21	1.110	.9006	.0453	.0503	22.084	19.888	9.817	195.245	21
22	1.116	.8961	.0431	.0481	23.194	20.784	10.300	214.070	22
23	1.122	.8916	.0411	.0461	24.310	21.676	10.781	233.680	23
24	1.127	.8872	.0393	.0443	25.432	22.563	11.261	254.088	24
25	1.133	.8828	.0377	.0427	26.559	23.446	11.741	275.273	25
26	1.138	.8784	.0361	.0411	27.692	24.324	12.220	297.233	26
27	1.144	.8740	.0347	.0397	28.830	25.198	12.698	319.955	27
28	1.150	.8697	.0334	.0384	29.975	26.068	13.175	343.439	28
29	1.156	.8653	.0321	.0371	31.124	26.933	13.651	367.672	29
30	1.161	.8610	.0310	.0360	32.280	27.794	14.127	392.640	30
36	1.197	.8356	.0254	.0304	39.336	32.871	16.962	557.564	36
40	1.221	.8191	.0226	.0276	44.159	36.172	18.836	681.341	40
48	1.270	.7871	.0185	.0235	54.098	42.580	22.544	959.928	48
50	1.283	.7793	.0177	.0227	56.645	44.143	23.463	1 035.70	50
52	1.296	.7716	.0169	.0219	59.218	45.690	24.378	1 113.82	52
60	1.349	.7414	.0143	.0193	69.770	51.726	28.007	1 448.65	60
70	1.418	.7053	.0120	.0170	83.566	58.939	32.468	1 913.65	70
72	1.432	.6983	.0116	.0166	86.409	60.340	33.351	2 012.35	72
80	1.490	.6710	.0102	.0152	98.068	65.802	36.848	2 424.65	80
84	1.520	.6577	.00961	.0146	104.074	68.453	38.576	2 640.67	84
90	1.567	.6383	.00883	.0138	113.311	72.331	41.145	2 976.08	90
96	1.614	.6195	.00814	.0131	122.829	76.095	43.685	3 324.19	96
100	1.647	.6073	.00773	.0127	129.334	78.543	45.361	3 562.80	100
104	1.680	.5953	.00735	.0124	135.970	80.942	47.025	3 806.29	104
120	1.819	.5496	.00610	.0111	163.880	90.074	53.551	4 823.52	120
240	3.310	.3021	.00216	.00716	462.041	139.581	96.113	13 415.56	240
360	6.023	.1660	.00100	.00600	1 004.5	166.792	128.324	21 403.32	360
480	10.957	.0913	.00050	.00550	1 991.5	181.748	151.795	27 588.37	480

3/4% Compound Interest Factors 3/4%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.008	.9926	1.0000	1.0075	1.000	0.993	0	0	1
2	1.015	.9852	.4981	.5056	2.008	1.978	0.499	0.987	2
3	1.023	.9778	.3308	.3383	3.023	2.956	0.996	2.943	3
4	1.030	.9706	.2472	.2547	4.045	3.926	1.492	5.857	4
5	1.038	.9633	.1970	.2045	5.076	4.889	1.986	9.712	5
6	1.046	.9562	.1636	.1711	6.114	5.846	2.479	14.494	6
7	1.054	.9490	.1397	.1472	7.160	6.795	2.971	20.187	7
8	1.062	.9420	.1218	.1293	8.213	7.737	3.462	26.785	8
9	1.070	.9350	.1078	.1153	9.275	8.672	3.951	34.265	9
10	1.078	.9280	.0967	.1042	10.344	9.600	4.440	42.619	10
11	1.086	.9211	.0876	.0951	11.422	10.521	4.927	51.831	11
12	1.094	.9142	.0800	.0875	12.508	11.435	5.412	61.889	12
13	1.102	.9074	.0735	.0810	13.602	12.342	5.897	72.779	13
14	1.110	.9007	.0680	.0755	14.704	13.243	6.380	84.491	14
15	1.119	.8940	.0632	.0707	15.814	14.137	6.862	97.005	15
16	1.127	.8873	.0591	.0666	16.932	15.024	7.343	110.318	16
17	1.135	.8807	.0554	.0629	18.059	15.905	7.822	124.410	17
18	1.144	.8742	.0521	.0596	19.195	16.779	8.300	139.273	18
19	1.153	.8676	.0492	.0567	20.339	17.647	8.777	154.891	19
20	1.161	.8612	.0465	.0540	21.491	18.508	9.253	171.254	20
21	1.170	.8548	.0441	.0516	22.653	19.363	9.727	188.352	21
22	1.179	.8484	.0420	.0495	23.823	20.211	10.201	206.170	22
23	1.188	.8421	.0400	.0475	25.001	21.053	10.673	224.695	23
24	1.196	.8358	.0382	.0457	26.189	21.889	11.143	243.924	24
25	1.205	.8296	.0365	.0440	27.385	22.719	11.613	263.834	25
26	1.214	.8234	.0350	.0425	28.591	23.542	12.081	284.421	26
27	1.224	.8173	.0336	.0411	29.805	24.360	12.548	305.672	27
28	1.233	.8112	.0322	.0397	31.029	25.171	13.014	327.576	28
29	1.242	.8052	.0310	.0385	32.261	25.976	13.479	350.122	29
30	1.251	.7992	.0298	.0373	33.503	26.775	13.942	373.302	30
36	1.309	.7641	.0243	.0318	41.153	31.447	16.696	525.038	36
40	1.348	.7416	.0215	.0290	46.447	34.447	18.507	637.519	40
48	1.431	.6986	.0174	.0249	57.521	40.185	22.070	886.899	48
50	1.453	.6882	.0166	.0241	60.395	41.567	22.949	953.911	50
52	1.475	.6780	.0158	.0233	63.312	42.928	23.822	1 022.64	52
60	1.566	.6387	.0133	.0208	75.425	48.174	27.268	1 313.59	60
70	1.687	.5927	.0109	.0184	91.621	54.305	31.465	1 708.68	70
72	1.713	.5839	.0105	.0180	95.008	55.477	32.289	1 791.33	72
80	1.818	.5500	.00917	.0167	109.074	59.995	35.540	2 132.23	80
84	1.873	.5338	.00859	.0161	116.428	62.154	37.137	2 308.22	84
90	1.959	.5104	.00782	.0153	127.881	65.275	39.496	2 578.09	90
96	2.049	.4881	.00715	.0147	139.858	68.259	41.812	2 854.04	96
100	2.111	.4737	.00675	.0143	148.147	70.175	43.332	3 040.85	100
104	2.175	.4597	.00638	.0139	156.687	72.035	44.834	3 229.60	104
120	2.451	.4079	.00517	.0127	193.517	78.942	50.653	3 998.68	120
240	6.009	.1664	.00150	.00900	667.901	111.145	85.422	9 494.26	240
360	14.731	.0679	.00055	.00805	1 830.8	124.282	107.115	13 312.50	360
480	36.111	.0277	.00021	.00771	4 681.5	129.641	119.662	15 513.16	480

1% Compound Interest Factors 1%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.010	.9901	1.0000	1.0100	1.000	0.990	0	0	1
2	1.020	.9803	.4975	.5075	2.010	1.970	0.498	0.980	2
3	1.030	.9706	.3300	.3400	3.030	2.941	0.993	2.921	3
4	1.041	.9610	.2463	.2563	4.060	3.902	1.488	5.804	4
5	1.051	.9515	.1960	.2060	5.101	4.853	1.980	9.610	5
6	1.062	.9420	.1625	.1725	6.152	5.795	2.471	14.320	6
7	1.072	.9327	.1386	.1486	7.214	6.728	2.960	19.917	7
8	1.083	.9235	.1207	.1307	8.286	7.652	3.448	26.381	8
9	1.094	.9143	.1067	.1167	9.369	8.566	3.934	33.695	9
10	1.105	.9053	.0956	.1056	10.462	9.471	4.418	41.843	10
11	1.116	.8963	.0865	.0965	11.567	10.368	4.900	50.806	11
12	1.127	.8874	.0788	.0888	12.682	11.255	5.381	60.568	12
13	1.138	.8787	.0724	.0824	13.809	12.134	5.861	71.112	13
14	1.149	.8700	.0669	.0769	14.947	13.004	6.338	82.422	14
15	1.161	.8613	.0621	.0721	16.097	13.865	6.814	94.481	15
16	1.173	.8528	.0579	.0679	17.258	14.718	7.289	107.273	16
17	1.184	.8444	.0543	.0643	18.430	15.562	7.761	120.783	17
18	1.196	.8360	.0510	.0610	19.615	16.398	8.232	134.995	18
19	1.208	.8277	.0481	.0581	20.811	17.226	8.702	149.895	19
20	1.220	.8195	.0454	.0554	22.019	18.046	9.169	165.465	20
21	1.232	.8114	.0430	.0530	23.239	18.857	9.635	181.694	21
22	1.245	.8034	.0409	.0509	24.472	19.660	10.100	198.565	22
23	1.257	.7954	.0389	.0489	25.716	20.456	10.563	216.065	23
24	1.270	.7876	.0371	.0471	26.973	21.243	11.024	234.179	24
25	1.282	.7798	.0354	.0454	28.243	22.023	11.483	252.892	25
26	1.295	.7720	.0339	.0439	29.526	22.795	11.941	272.195	26
27	1.308	.7644	.0324	.0424	30.821	23.560	12.397	292.069	27
28	1.321	.7568	.0311	.0411	32.129	24.316	12.852	312.504	28
29	1.335	.7493	.0299	.0399	33.450	25.066	13.304	333.486	29
30	1.348	.7419	.0287	.0387	34.785	25.808	13.756	355.001	30
36	1.431	.6989	.0232	.0332	43.077	30.107	16.428	494.620	36
40	1.489	.6717	.0205	.0305	48.886	32.835	18.178	596.854	40
48	1.612	.6203	.0163	.0263	61.223	37.974	21.598	820.144	48
50	1.645	.6080	.0155	.0255	64.463	39.196	22.436	879.417	50
52	1.678	.5961	.0148	.0248	67.769	40.394	23.269	939.916	52
60	1.817	.5504	.0122	.0222	81.670	44.955	26.533	1 192.80	60
70	2.007	.4983	.00993	.0199	100.676	50.168	30.470	1 528.64	70
72	2.047	.4885	.00955	.0196	104.710	51.150	31.239	1 597.86	72
80	2.217	.4511	.00822	.0182	121.671	54.888	34.249	1 879.87	80
84	2.307	.4335	.00765	.0177	130.672	56.648	35.717	2 023.31	84
90	2.449	.4084	.00690	.0169	144.863	59.161	37.872	2 240.56	90
96	2.599	.3847	.00625	.0163	159.927	61.528	39.973	2 459.42	96
100	2.705	.3697	.00587	.0159	170.481	63.029	41.343	2 605.77	100
104	2.815	.3553	.00551	.0155	181.464	64.471	42.688	2 752.17	104
120	3.300	.3030	.00435	.0143	230.039	69.701	47.835	3 334.11	120
240	10.893	.0918	.00101	.0110	989.254	90.819	75.739	6 878.59	240
360	35.950	.0278	.00029	.0103	3 495.0	97.218	89.699	8 720.43	360
480	118.648	.00843	.00008	.0101	11 764.8	99.157	95.920	9 511.15	480

1¼% Compound Interest Factors 1¼%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.013	.9877	1.0000	1.0125	1.000	0.988	0	0	1
2	1.025	.9755	.4969	.5094	2.013	1.963	0.497	0.976	2
3	1.038	.9634	.3292	.3417	3.038	2.927	0.992	2.904	3
4	1.051	.9515	.2454	.2579	4.076	3.878	1.485	5.759	4
5	1.064	.9398	.1951	.2076	5.127	4.818	1.976	9.518	5
6	1.077	.9282	.1615	.1740	6.191	5.746	2.464	14.160	6
7	1.091	.9167	.1376	.1501	7.268	6.663	2.951	19.660	7
8	1.104	.9054	.1196	.1321	8.359	7.568	3.435	25.998	8
9	1.118	.8942	.1057	.1182	9.463	8.462	3.918	33.152	9
10	1.132	.8832	.0945	.1070	10.582	9.346	4.398	41.101	10
11	1.146	.8723	.0854	.0979	11.714	10.218	4.876	49.825	11
12	1.161	.8615	.0778	.0903	12.860	11.079	5.352	59.302	12
13	1.175	.8509	.0713	.0838	14.021	11.930	5.827	69.513	13
14	1.190	.8404	.0658	.0783	15.196	12.771	6.299	80.438	14
15	1.205	.8300	.0610	.0735	16.386	13.601	6.769	92.058	15
16	1.220	.8197	.0568	.0693	17.591	14.420	7.237	104.355	16
17	1.235	.8096	.0532	.0657	18.811	15.230	7.702	117.309	17
18	1.251	.7996	.0499	.0624	20.046	16.030	8.166	130.903	18
19	1.266	.7898	.0470	.0595	21.297	16.819	8.628	145.119	19
20	1.282	.7800	.0443	.0568	22.563	17.599	9.088	159.940	20
21	1.298	.7704	.0419	.0544	23.845	18.370	9.545	175.348	21
22	1.314	.7609	.0398	.0523	25.143	19.131	10.001	191.327	22
23	1.331	.7515	.0378	.0503	26.458	19.882	10.455	207.859	23
24	1.347	.7422	.0360	.0485	27.788	20.624	10.906	224.930	24
25	1.364	.7330	.0343	.0468	29.136	21.357	11.355	242.523	25
26	1.381	.7240	.0328	.0453	30.500	22.081	11.803	260.623	26
27	1.399	.7150	.0314	.0439	31.881	22.796	12.248	279.215	27
28	1.416	.7062	.0300	.0425	33.280	23.503	12.691	298.284	28
29	1.434	.6975	.0288	.0413	34.696	24.200	13.133	317.814	29
30	1.452	.6889	.0277	.0402	36.129	24.889	13.572	337.792	30
36	1.564	.6394	.0222	.0347	45.116	28.847	16.164	466.297	36
40	1.644	.6084	.0194	.0319	51.490	31.327	17.852	559.247	40
48	1.815	.5509	.0153	.0278	65.229	35.932	21.130	759.248	48
50	1.861	.5373	.0145	.0270	68 882	37.013	21.930	811.692	50
52	1.908	.5242	.0138	.0263	72 628	38.068	22.722	864.960	52
60	2.107	.4746	.0113	.0238	88.575	42.035	25.809	1 084.86	60
70	2.386	.4191	.00902	.0215	110.873	46.470	29.492	1 370.47	70
72	2.446	.4088	.00864	.0211	115.675	47.293	30.205	1 428.48	72
80	2.701	.3702	.00735	.0198	136.120	50.387	32.983	1 661.89	80
84	2.839	.3522	.00680	.0193	147.130	51.822	34.326	1 778.86	84
90	3.059	.3269	.00607	.0186	164.706	53.846	36.286	1 953.85	90
96	3.296	.3034	.00545	.0179	183.643	55.725	38.180	2 127.55	96
100	3.463	.2887	.00507	.0176	197.074	56.901	39.406	2 242.26	100
104	3.640	.2747	.00474	.0172	211.190	58.021	40.604	2 355.90	104
120	4.440	.2252	.00363	.0161	275.220	61.983	45.119	2 796.59	120
240	19.716	.0507	.00067	.0132	1 497.3	75.942	67.177	5 101.55	240
360	87.543	.0114	.00014	.0126	6 923.4	79.086	75.840	5 997.91	360
480	388.713	.00257	.00003	.0125	31 017.1	79.794	78.762	6 284.74	480

1½% Compound Interest Factors 1½%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.015	.9852	1.0000	1.0150	1.000	0.985	0	0	1
2	1.030	.9707	.4963	.5113	2.015	1.956	0.496	0.970	2
3	1.046	.9563	.3284	.3434	3.045	2.912	0.990	2.883	3
4	1.061	.9422	.2444	.2594	4.091	3.854	1.481	5.709	4
5	1.077	.9285	.1941	.2091	5.152	4.783	1.970	9.422	5
6	1.093	.9145	.1605	.1755	6.230	5.697	2.456	13.994	6
7	1.110	.9010	.1366	.1516	7.323	6.598	2.940	19.400	7
8	1.126	.8877	.1186	.1336	8.433	7.486	3.422	25.614	8
9	1.143	.8746	.1046	.1196	9.559	8.360	3.901	32.610	9
10	1.161	.8617	.0934	.1084	10.703	9.222	4.377	40.365	10
11	1.178	.8489	.0843	.0993	11.863	10.071	4.851	48.855	11
12	1.196	.8364	.0767	.0917	13.041	10.907	5.322	58.054	12
13	1.214	.8240	.0702	.0852	14.237	11.731	5.791	67.943	13
14	1.232	.8118	.0647	.0797	15.450	12.543	6.258	78.496	14
15	1.250	.7999	.0599	.0749	16.682	13.343	6.722	89.694	15
16	1.269	.7880	.0558	.0708	17.932	14.131	7.184	101.514	16
17	1.288	.7764	.0521	.0671	19.201	14.908	7.643	113.937	17
18	1.307	.7649	.0488	.0638	20.489	15.673	8.100	126.940	18
19	1.327	.7536	.0459	.0609	21.797	16.426	8.554	140.505	19
20	1.347	.7425	.0432	.0582	23.124	17.169	9.005	154.611	20
21	1.367	.7315	.0409	.0559	24.470	17.900	9.455	169.241	21
22	1.388	.7207	.0387	.0537	25.837	18.621	9.902	184.375	22
23	1.408	.7100	.0367	.0517	27.225	19.331	10.346	199.996	23
24	1.430	.6995	.0349	.0499	28.633	20.030	10.788	216.085	24
25	1.451	.6892	.0333	.0483	30.063	20.720	11.227	232.626	25
26	1.473	.6790	.0317	.0467	31.514	21.399	11.664	249.601	26
27	1.495	.6690	.0303	.0453	32.987	22.068	12.099	266.995	27
28	1.517	.6591	.0290	.0440	34.481	22.727	12.531	284.790	28
29	1.540	.6494	.0278	.0428	35.999	23.376	12.961	302.972	29
30	1.563	.6398	.0266	.0416	37.539	24.016	13.388	321.525	30
36	1.709	.5851	.0212	.0362	47.276	27.661	15.901	439.823	36
40	1.814	.5513	.0184	.0334	54.268	29.916	17.528	524.349	40
48	2.043	.4894	.0144	.0294	69.565	34.042	20.666	703.537	48
50	2.105	.4750	.0136	.0286	73.682	35.000	21.428	749.955	50
52	2.169	.4611	.0128	.0278	77.925	35.929	22.179	796.868	52
60	2.443	.4093	.0104	.0254	96.214	39.380	25.093	988.157	60
70	2.835	.3527	.00817	.0232	122.363	43.155	28.529	1 231.15	70
72	2.921	.3423	.00781	.0228	128.076	43.845	29.189	1 279.78	72
80	3.291	.3039	.00655	.0215	152.710	46.407	31.742	1 473.06	80
84	3.493	.2863	.00602	.0210	166.172	47.579	32.967	1 568.50	84
90	3.819	.2619	.00532	.0203	187.929	49.210	34.740	1 709.53	90
96	4.176	.2395	.00472	.0197	211.719	50.702	36.438	1 847.46	96
100	4.432	.2256	.00437	.0194	228.802	51.625	37.529	1 937.43	100
104	4.704	.2126	.00405	.0190	246.932	52.494	38.589	2 025.69	104
120	5.969	.1675	.00302	.0180	331.286	55.498	42.518	2 359.69	120
240	35.632	.0281	.00043	.0154	2 308.8	64.796	59.737	3 870.68	240
360	212.700	.00470	.00007	.0151	14 113.3	66.353	64.966	4 310.71	360
480	1 269.7	.00079	.00001	.0150	84 577.8	66.614	66.288	4 415.74	480

1¾% Compound Interest Factors 1¾%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.018	.9828	1.0000	1.0175	1.000	0.983	0	0	1
2	1.035	.9659	.4957	.5132	2.018	1.949	0.496	0.966	2
3	1.053	.9493	.3276	.3451	3.053	2.898	0.989	2.865	3
4	1.072	.9330	.2435	.2610	4.106	3.831	1.478	5.664	4
5	1.091	.9169	.1931	.2106	5.178	4.748	1.965	9.332	5
6	1.110	.9011	.1595	.1770	6.269	5.649	2.450	13.837	6
7	1.129	.8856	.1355	.1530	7.378	6.535	2.931	19.152	7
8	1.149	.8704	.1175	.1350	8.508	7.405	3.409	25.245	8
9	1.169	.8554	.1036	.1211	9.656	8.261	3.885	32.088	9
10	1.189	.8407	.0924	.1099	10.825	9.101	4.357	39.655	10
11	1.210	.8263	.0832	.1007	12.015	9.928	4.827	47.918	11
12	1.231	.8121	.0756	.0931	13.225	10.740	5.294	56.851	12
13	1.253	.7981	.0692	.0867	14.457	11.538	5.758	66.428	13
14	1.275	.7844	.0637	.0812	15.710	12.322	6.219	76.625	14
15	1.297	.7709	.0589	.0764	16.985	13.093	6.677	87.417	15
16	1.320	.7576	.0547	.0722	18.282	13.851	7.132	98.782	16
17	1.343	.7446	.0510	.0685	19.602	14.595	7.584	110.695	17
18	1.367	.7318	.0477	.0652	20.945	15.327	8.034	123.136	18
19	1.390	.7192	.0448	.0623	22.311	16.046	8.481	136.081	19
20	1.415	.7068	.0422	.0597	23.702	16.753	8.924	149.511	20
21	1.440	.6947	.0398	.0573	25.116	17.448	9.365	163.405	21
22	1.465	.6827	.0377	.0552	26.556	18.130	9.804	177.742	22
23	1.490	.6710	.0357	.0532	28.021	18.801	10.239	192.503	23
24	1.516	.6594	.0339	.0514	29.511	19.461	10.671	207.671	24
25	1.543	.6481	.0322	.0497	31.028	20.109	11.101	223.225	25
26	1.570	.6369	.0307	.0482	32.571	20.746	11.528	239.149	26
27	1.597	.6260	.0293	.0468	34.141	21.372	11.952	255.425	27
28	1.625	.6152	.0280	.0455	35.738	21.987	12.373	272.036	28
29	1.654	.6046	.0268	.0443	37.363	22.592	12.791	288.967	29
30	1.683	.5942	.0256	.0431	39.017	23.186	13.206	306.200	30
36	1.867	.5355	.0202	.0377	49.566	26.543	15.640	415.130	36
40	2.002	.4996	.0175	.0350	57.234	28.594	17.207	492.017	40
48	2.300	.4349	.0135	.0310	74.263	32.294	20.209	652.612	48
50	2.381	.4200	.0127	.0302	78.903	33.141	20.932	693.708	50
52	2.465	.4057	.0119	.0294	83.706	33.960	21.644	735.039	52
60	2.832	.3531	.00955	.0271	104.676	36.964	24.389	901.503	60
70	3.368	.2969	.00739	.0249	135.331	40.178	27.586	1 108.34	70
72	3.487	.2868	.00704	.0245	142.127	40.757	28.195	1 149.12	72
80	4.006	.2496	.00582	.0233	171.795	42.880	30.533	1 309.25	80
84	4.294	.2329	.00531	.0228	188.246	43.836	31.644	1 387.16	84
90	4.765	.2098	.00465	.0221	215.166	45.152	33.241	1 500.88	90
96	5.288	.1891	.00408	.0216	245.039	46.337	34.756	1 610.48	96
100	5.668	.1764	.00375	.0212	266.753	47.062	35.721	1 681.09	100
104	6.075	.1646	.00345	.0209	290.028	47.737	36.652	1 749.68	104
120	8.019	.1247	.00249	.0200	401.099	50.017	40.047	2 003.03	120
240	64.308	.0156	.00028	.0178	3 617.6	56.254	53.352	3 001.27	240
360	515.702	.00194	.00003	.0175	29 411.5	57.032	56.443	3 219.08	360
480	4 135.5	.00024		.0175	236 259.0	57.129	57.027	3 257.88	480

2% Compound Interest Factors 2%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.020	.9804	1.0000	1.0200	1.000	0.980	0	0	1
2	1.040	.9612	.4951	.5151	2.020	1.942	0.495	0.961	2
3	1.061	.9423	.3268	.3468	3.060	2.884	0.987	2.846	3
4	1.082	.9238	.2426	.2626	4.122	3.808	1.475	5.617	4
5	1.104	.9057	.1922	.2122	5.204	4.713	1.960	9.240	5
6	1.126	.8880	.1585	.1785	6.308	5.601	2.442	13.679	6
7	1.149	.8706	.1345	.1545	7.434	6.472	2.921	18.903	7
8	1.172	.8535	.1165	.1365	8.583	7.325	3.396	24.877	8
9	1.195	.8368	.1025	.1225	9.755	8.162	3.868	31.571	9
10	1.219	.8203	.0913	.1113	10.950	8.983	4.337	38.954	10
11	1.243	.8043	.0822	.1022	12.169	9.787	4.802	46.996	11
12	1.268	.7885	.0746	.0946	13.412	10.575	5.264	55.669	12
13	1.294	.7730	.0681	.0881	14.680	11.348	5.723	64.946	13
14	1.319	.7579	.0626	.0826	15.974	12.106	6.178	74.798	14
15	1.346	.7430	.0578	.0778	17.293	12.849	6.631	85.200	15
16	1.373	.7284	.0537	.0737	18.639	13.578	7.080	96.127	16
17	1.400	.7142	.0500	.0700	20.012	14.292	7.526	107.553	17
18	1.428	.7002	.0467	.0667	21.412	14.992	7.968	119.456	18
19	1.457	.6864	.0438	.0638	22.840	15.678	8.407	131.812	19
20	1.486	.6730	.0412	.0612	24.297	16.351	8.843	144.598	20
21	1.516	.6598	.0388	.0588	25.783	17.011	9.276	157.793	21
22	1.546	.6468	.0366	.0566	27.299	17.658	9.705	171.377	22
23	1.577	.6342	.0347	.0547	28.845	18.292	10.132	185.328	23
24	1.608	.6217	.0329	.0529	30.422	18.914	10.555	199.628	24
25	1.641	.6095	.0312	.0512	32.030	19.523	10.974	214.256	25
26	1.673	.5976	.0297	.0497	33.671	20.121	11.391	229.196	26
27	1.707	.5859	.0283	.0483	35.344	20.707	11.804	244.428	27
28	1.741	.5744	.0270	.0470	37.051	21.281	12.214	259.936	28
29	1.776	.5631	.0258	.0458	38.792	21.844	12.621	275.703	29
30	1.811	.5521	.0247	.0447	40.568	22.396	13.025	291.713	30
36	2.040	.4902	.0192	.0392	51.994	25.489	15.381	392.036	36
40	2.208	.4529	.0166	.0366	60.402	27.355	16.888	461.989	40
48	2.587	.3865	.0126	.0326	79.353	30.673	19.755	605.961	48
50	2.692	.3715	.0118	.0318	84.579	31.424	20.442	642.355	50
52	2.800	.3571	.0111	.0311	90.016	32.145	21.116	678.779	52
60	3.281	.3048	.00877	.0288	114.051	34.761	23.696	823.692	60
70	4.000	.2500	.00667	.0267	149.977	37.499	26.663	999.829	70
72	4.161	.2403	.00633	.0263	158.056	37.984	27.223	1 034.050	72
80	4.875	.2051	.00516	.0252	193.771	39.744	29.357	1 166.781	80
84	5.277	.1895	.00468	.0247	213.865	40.525	30.361	1 230.413	84
90	5.943	.1683	.00405	.0240	247.155	41.587	31.793	1 322.164	90
96	6.693	.1494	.00351	.0235	284.645	42.529	33.137	1 409.291	96
100	7.245	.1380	.00320	.0232	312.230	43.098	33.986	1 464.747	100
104	7.842	.1275	.00292	.0229	342.090	43.624	34.799	1 518.082	104
120	10.765	.0929	.00205	.0220	488.255	45.355	37.711	1 710.411	120
240	115.887	.00863	.00017	.0202	5 744.4	49.569	47.911	2 374.878	240
360	1 247.5	.00080	.00002	.0200	62 326.8	49.960	49.711	2 483.567	360
480	13 429.8	.00007		.0200	671 442.0	49.996	49.964	2 498.027	480

2½% Compound Interest Factors 2½%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.025	.9756	1.0000	1.0250	1.000	0.976	0	0	1
2	1.051	.9518	.4938	.5188	2.025	1.927	0.494	0.952	2
3	1.077	.9286	.3251	.3501	3.076	2.856	0.984	2.809	3
4	1.104	.9060	.2408	.2658	4.153	3.762	1.469	5.527	4
5	1.131	.8839	.1902	.2152	5.256	4.646	1.951	9.062	5
6	1.160	.8623	.1566	.1816	6.388	5.508	2.428	13.374	6
7	1.189	.8413	.1325	.1575	7.547	6.349	2.901	18.421	7
8	1.218	.8207	.1145	.1395	8.736	7.170	3.370	24.166	8
9	1.249	.8007	.1005	.1255	9.955	7.971	3.835	30.572	9
10	1.280	.7812	.0893	.1143	11.203	8.752	4.296	37.603	10
11	1.312	.7621	.0801	.1051	12.483	9.514	4.753	45.224	11
12	1.345	.7436	.0725	.0975	13.796	10.258	5.206	53.403	12
13	1.379	.7254	.0660	.0910	15.140	10.983	5.655	62.108	13
14	1.413	.7077	.0605	.0855	16.519	11.691	6.100	71.309	14
15	1.448	.6905	.0558	.0808	17.932	12.381	6.540	80.975	15
16	1.485	.6736	.0516	.0766	19.380	13.055	6.977	91.080	16
17	1.522	.6572	.0479	.0729	20.865	13.712	7.409	101.595	17
18	1.560	.6412	.0447	.0697	22.386	14.353	7.838	112.495	18
19	1.599	.6255	.0418	.0668	23.946	14.979	8.262	123.754	19
20	1.639	.6103	.0391	.0641	25.545	15.589	8.682	135.349	20
21	1.680	.5954	.0368	.0618	27.183	16.185	9.099	147.257	21
22	1.722	.5809	.0346	.0596	28.863	16.765	9.511	159.455	22
23	1.765	.5667	.0327	.0577	30.584	17.332	9.919	171.922	23
24	1.809	.5529	.0309	.0559	32.349	17.885	10.324	184.638	24
25	1.854	.5394	.0293	.0543	34.158	18.424	10.724	197.584	25
26	1.900	.5262	.0278	.0528	36.012	18.951	11.120	210.740	26
27	1.948	.5134	.0264	.0514	37.912	19.464	11.513	224.088	27
28	1.996	.5009	.0251	.0501	39.860	19.965	11.901	237.612	28
29	2.046	.4887	.0239	.0489	41.856	20.454	12.286	251.294	29
30	2.098	.4767	.0228	.0478	43.903	20.930	12.667	265.120	30
31	2.150	.4651	.0217	.0467	46.000	21.395	13.044	279.073	31
32	2.204	.4538	.0208	.0458	48.150	21.849	13.417	293.140	32
33	2.259	.4427	.0199	.0449	50.354	22.292	13.786	307.306	33
34	2.315	.4319	.0190	.0440	52.613	22.724	14.151	321.559	34
35	2.373	.4214	.0182	.0432	54.928	23.145	14.512	335.886	35
40	2.685	.3724	.0148	.0398	67.402	25.103	16.262	408.221	40
45	3.038	.3292	.0123	.0373	81.516	26.833	17.918	480.806	45
50	3.437	.2909	.0103	.0353	97.484	28.362	19.484	552.607	50
55	3.889	.2572	.00865	.0337	115.551	29.714	20.961	622.827	55
60	4.400	.2273	.00735	.0324	135.991	30.909	22.352	690.865	60
65	4.978	.2009	.00628	.0313	159.118	31.965	23.660	756.280	65
70	5.632	.1776	.00540	.0304	185.284	32.898	24.888	818.763	70
75	6.372	.1569	.00465	.0297	214.888	33.723	26.039	878.114	75
80	7.210	.1387	.00403	.0290	248.382	34.452	27.117	934.217	80
85	8.157	.1226	.00349	.0285	286.278	35.096	28.123	987.026	85
90	9.229	.1084	.00304	.0280	329.154	35.666	29.063	1 036.54	90
95	10.442	.0958	.00265	.0276	377.663	36.169	29.938	1 082.83	95
100	11.814	.0846	.00231	.0273	432.548	36.614	30.752	1 125.97	100

3% Compound Interest Factors 3%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.030	.9709	1.0000	1.0300	1.000	0.971	0	0	1
2	1.061	.9426	.4926	.5226	2.030	1.913	0.493	0.943	2
3	1.093	.9151	.3235	.3535	3.091	2.829	0.980	2.773	3
4	1.126	.8885	.2390	.2690	4.184	3.717	1.463	5.438	4
5	1.159	.8626	.1884	.2184	5.309	4.580	1.941	8.889	5
6	1.194	.8375	.1546	.1846	6.468	5.417	2.414	13.076	6
7	1.230	.8131	.1305	.1605	7.662	6.230	2.882	17.955	7
8	1.267	.7894	.1125	.1425	8.892	7.020	3.345	23.481	8
9	1.305	.7664	.0984	.1284	10.159	7.786	3.803	29.612	9
10	1.344	.7441	.0872	.1172	11.464	8.530	4.256	36.309	10
11	1.384	.7224	.0781	.1081	12.808	9.253	4.705	43.533	11
12	1.426	.7014	.0705	.1005	14.192	9.954	5.148	51.248	12
13	1.469	.6810	.0640	.0940	15.618	10.635	5.587	59.419	13
14	1.513	.6611	.0585	.0885	17.086	11.296	6.021	68.014	14
15	1.558	.6419	.0538	.0838	18.599	11.938	6.450	77.000	15
16	1.605	.6232	.0496	.0796	20.157	12.561	6.874	86.348	16
17	1.653	.6050	.0460	.0760	21.762	13.166	7.294	96.028	17
18	1.702	.5874	.0427	.0727	23.414	13.754	7.708	106.014	18
19	1.754	.5703	.0398	.0698	25.117	14.324	8.118	116.279	19
20	1.806	.5537	.0372	.0672	26.870	14.877	8.523	126.799	20
21	1.860	.5375	.0349	.0649	28.676	15.415	8.923	137.549	21
22	1.916	.5219	.0327	.0627	30.537	15.937	9.319	148.509	22
23	1.974	.5067	.0308	.0608	32.453	16.444	9.709	159.656	23
24	2.033	.4919	.0290	.0590	34.426	16.936	10.095	170.971	24
25	2.094	.4776	.0274	.0574	36.459	17.413	10.477	182.433	25
26	2.157	.4637	.0259	.0559	38.553	17.877	10.853	194.026	26
27	2.221	.4502	.0246	.0546	40.710	18.327	11.226	205.731	27
28	2.288	.4371	.0233	.0533	42.931	18.764	11.593	217.532	28
29	2.357	.4243	.0221	.0521	45.219	19.188	11.956	229.413	29
30	2.427	.4120	.0210	.0510	47.575	19.600	12.314	241.361	30
31	2.500	.4000	.0200	.0500	50.003	20.000	12.668	253.361	31
32	2.575	.3883	.0190	.0490	52.503	20.389	13.017	265.399	32
33	2.652	.3770	.0182	.0482	55.078	20.766	13.362	277.464	33
34	2.732	.3660	.0173	.0473	57.730	21.132	13.702	289.544	34
35	2.814	.3554	.0165	.0465	60.462	21.487	14.037	301.627	35
40	3.262	.3066	.0133	.0433	75.401	23.115	15.650	361.750	40
45	3.782	.2644	.0108	.0408	92.720	24.519	17.156	420.632	45
50	4.384	.2281	.00887	.0389	112.797	25.730	18.558	477.480	50
55	5.082	.1968	.00735	.0373	136.072	26.774	19.860	531.741	55
60	5.892	.1697	.00613	.0361	163.053	27.676	21.067	583.052	60
65	6.830	.1464	.00515	.0351	194.333	28.453	22.184	631.201	65
70	7.918	.1263	.00434	.0343	230.594	29.123	23.215	676.087	70
75	9.179	.1089	.00367	.0337	272.631	29.702	24.163	717.698	75
80	10.641	.0940	.00311	.0331	321.363	30.201	25.035	756.086	80
85	12.336	.0811	.00265	.0326	377.857	30.631	25.835	791.353	85
90	14.300	.0699	.00226	.0323	443.349	31.002	26.567	823.630	90
95	16.578	.0603	.00193	.0319	519.272	31.323	27.235	853.074	95
100	19.219	.0520	.00165	.0316	607.287	31.599	27.844	879.854	100

3½% Compound Interest Factors 3½%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.035	.9662	1.0000	1.0350	1.000	0.966	0	0	1
2	1.071	.9335	.4914	.5264	2.035	1.900	0.491	0.933	2
3	1.109	.9019	.3219	.3569	3.106	2.802	0.977	2.737	3
4	1.148	.8714	.2373	.2723	4.215	3.673	1.457	5.352	4
5	1.188	.8420	.1865	.2215	5.362	4.515	1.931	8.719	5
6	1.229	.8135	.1527	.1877	6.550	5.329	2.400	12.787	6
7	1.272	.7860	.1285	.1635	7.779	6.115	2.862	17.503	7
8	1.317	.7594	.1105	.1455	9.052	6.874	3.320	22.819	8
9	1.363	.7337	.0964	.1314	10.368	7.608	3.771	28.688	9
10	1.411	.7089	.0852	.1202	11.731	8.317	4.217	35.069	10
11	1.460	.6849	.0761	.1111	13.142	9.002	4.657	41.918	11
12	1.511	.6618	.0685	.1035	14.602	9.663	5.091	49.198	12
13	1.564	.6394	.0621	.0971	16.113	10.303	5.520	56.871	13
14	1.619	.6178	.0566	.0916	17.677	10.921	5.943	64.902	14
15	1.675	.5969	.0518	.0868	19.296	11.517	6.361	73.258	15
16	1.734	.5767	.0477	.0827	20.971	12.094	6.773	81.909	16
17	1.795	.5572	.0440	.0790	22.705	12.651	7.179	90.824	17
18	1.857	.5384	.0408	.0758	24.500	13.190	7.580	99.976	18
19	1.922	.5202	.0379	.0729	26.357	13.710	7.975	109.339	19
20	1.990	.5026	.0354	.0704	28.280	14.212	8.365	118.888	20
21	2.059	.4856	.0330	.0680	30.269	14.698	8.749	128.599	21
22	2.132	.4692	.0309	.0659	32.329	15.167	9.128	138.451	22
23	2.206	.4533	.0290	.0640	34.460	15.620	9.502	148.423	23
24	2.283	.4380	.0273	.0623	36.666	16.058	9.870	158.496	24
25	2.363	.4231	.0257	.0607	38.950	16.482	10.233	168.652	25
26	2.446	.4088	.0242	.0592	41.313	16.890	10.590	178.873	26
27	2.532	.3950	.0229	.0579	43.759	17.285	10.942	189.143	27
28	2.620	.3817	.0216	.0566	46.291	17.667	11.289	199.448	28
29	2.712	.3687	.0204	.0554	48.911	18.036	11.631	209.773	29
30	2.807	.3563	.0194	.0544	51.623	18.392	11.967	220.105	30
31	2.905	.3442	.0184	.0534	54.429	18.736	12.299	230.432	31
32	3.007	.3326	.0174	.0524	57.334	19.069	12.625	240.742	32
33	3.112	.3213	.0166	.0516	60.341	19.390	12.946	251.025	33
34	3.221	.3105	.0158	.0508	63.453	19.701	13.262	261.271	34
35	3.334	.3000	.0150	.0500	66.674	20.001	13.573	271.470	35
40	3.959	.2526	.0118	.0468	84.550	21.355	15.055	321.490	40
45	4.702	.2127	.00945	.0445	105.781	22.495	16.417	369.307	45
50	5.585	.1791	.00763	.0426	130.998	23.456	17.666	414.369	50
55	6.633	.1508	.00621	.0412	160.946	24.264	18.808	456.352	55
60	7.878	.1269	.00509	.0401	196.516	24.945	19.848	495.104	60
65	9.357	.1069	.00419	.0392	238.762	25.518	20.793	530.598	65
70	11.113	.0900	.00346	.0385	288.937	26.000	21.650	562.895	70
75	13.199	.0758	.00287	.0379	348.529	26.407	22.423	592.121	75
80	15.676	.0638	.00238	.0374	419.305	26.749	23.120	618.438	80
85	18.618	.0537	.00199	.0370	503.365	27.037	23.747	642.036	85
90	22.112	.0452	.00166	.0367	603.202	27.279	24.308	663.118	90
95	26.262	.0381	.00139	.0364	721.778	27.483	24.811	681.890	95
100	31.191	.0321	.00116	.0362	862.608	27.655	25.259	698.554	100

4% Compound Interest Factors 4%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.040	.9615	1.0000	1.0400	1.000	0.962	0	0	1
2	1.082	.9246	.4902	.5302	2.040	1.886	0.490	0.925	2
3	1.125	.8890	.3203	.3603	3.122	2.775	0.974	2.702	3
4	1.170	.8548	.2355	.2755	4.246	3.630	1.451	5.267	4
5	1.217	.8219	.1846	.2246	5.416	4.452	1.922	8.555	5
6	1.265	.7903	.1508	.1908	6.633	5.242	2.386	12.506	6
7	1.316	.7599	.1266	.1666	7.898	6.002	2.843	17.066	7
8	1.369	.7307	.1085	.1485	9.214	6.733	3.294	22.180	8
9	1.423	.7026	.0945	.1345	10.583	7.435	3.739	27.801	9
10	1.480	.6756	.0833	.1233	12.006	8.111	4.177	33.881	10
11	1.539	.6496	.0741	.1141	13.486	8.760	4.609	40.377	11
12	1.601	.6246	.0666	.1066	15.026	9.385	5.034	47.248	12
13	1.665	.6006	.0601	.1001	16.627	9.986	5.453	54.454	13
14	1.732	.5775	.0547	.0947	18.292	10.563	5.866	61.962	14
15	1.801	.5553	.0499	.0899	20.024	11.118	6.272	69.735	15
16	1.873	.5339	.0458	.0858	21.825	11.652	6.672	77.744	16
17	1.948	.5134	.0422	.0822	23.697	12.166	7.066	85.958	17
18	2.026	.4936	.0390	.0790	25.645	12.659	7.453	94.350	18
19	2.107	.4746	.0361	.0761	27.671	13.134	7.834	102.893	19
20	2.191	.4564	.0336	.0736	29.778	13.590	8.209	111.564	20
21	2.279	.4388	.0313	.0713	31.969	14.029	8.578	120.341	21
22	2.370	.4220	.0292	.0692	34.248	14.451	8.941	129.202	22
23	2.465	.4057	.0273	.0673	36.618	14.857	9.297	138.128	23
24	2.563	.3901	.0256	.0656	39.083	15.247	9.648	147.101	24
25	2.666	.3751	.0240	.0640	41.646	15.622	9.993	156.104	25
26	2.772	.3607	.0226	.0626	44.312	15.983	10.331	165.121	26
27	2.883	.3468	.0212	.0612	47.084	16.330	10.664	174.138	27
28	2.999	.3335	.0200	.0600	49.968	16.663	10.991	183.142	28
29	3.119	.3207	.0189	.0589	52.966	16.984	11.312	192.120	29
30	3.243	.3083	.0178	.0578	56.085	17.292	11.627	201.062	30
31	3.373	.2965	.0169	.0569	59.328	17.588	11.937	209.955	31
32	3.508	.2851	.0159	.0559	62.701	17.874	12.241	218.792	32
33	3.648	.2741	.0151	.0551	66.209	18.148	12.540	227.563	33
34	3.794	.2636	.0143	.0543	69.858	18.411	12.832	236.260	34
35	3.946	.2534	.0136	.0536	73.652	18.665	13.120	244.876	35
40	4.801	.2083	.0105	.0505	95.025	19.793	14.476	286.530	40
45	5.841	.1712	.00826	.0483	121.029	20.720	15.705	325.402	45
50	7.107	.1407	.00655	.0466	152.667	21.482	16.812	361.163	50
55	8.646	.1157	.00523	.0452	191.159	22.109	17.807	393.689	55
60	10.520	.0951	.00420	.0442	237.990	22.623	18.697	422.996	60
65	12.799	.0781	.00339	.0434	294.968	23.047	19.491	449.201	65
70	15.572	.0642	.00275	.0427	364.290	23.395	20.196	472.479	70
75	18.945	.0528	.00223	.0422	448.630	23.680	20.821	493.041	75
80	23.050	.0434	.00181	.0418	551.244	23.915	21.372	511.116	80
85	28.044	.0357	.00148	.0415	676.089	24.109	21.857	526.938	85
90	34.119	.0293	.00121	.0412	827.981	24.267	22.283	540.737	90
95	41.511	.0241	.00099	.0410	1 012.8	24.398	22.655	552.730	95
100	50.505	.0198	.00081	.0408	1 237.6	24.505	22.980	563.125	100

4½% Compound Interest Factors 4½%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.045	.9569	1.0000	1.0450	1.000	0.957	0	0	1
2	1.092	.9157	.4890	.5340	2.045	1.873	0.489	0.916	2
3	1.141	.8763	.3188	.3638	3.137	2.749	0.971	2.668	3
4	1.193	.8386	.2337	.2787	4.278	3.588	1.445	5.184	4
5	1.246	.8025	.1828	.2278	5.471	4.390	1.912	8.394	5
6	1.302	.7679	.1489	.1939	6.717	5.158	2.372	12.233	6
7	1.361	.7348	.1247	.1697	8.019	5.893	2.824	16.642	7
8	1.422	.7032	.1066	.1516	9.380	6.596	3.269	21.564	8
9	1.486	.6729	.0926	.1376	10.802	7.269	3.707	26.948	9
10	1.553	.6439	.0814	.1264	12.288	7.913	4.138	32.743	10
11	1.623	.6162	.0722	.1172	13.841	8.529	4.562	38.905	11
12	1.696	.5897	.0647	.1097	15.464	9.119	4.978	45.391	12
13	1.772	.5643	.0583	.1033	17.160	9.683	5.387	52.163	13
14	1.852	.5400	.0528	.0978	18.932	10.223	5.789	59.182	14
15	1.935	.5167	.0481	.0931	20.784	10.740	6.184	66.416	15
16	2.022	.4945	.0440	.0890	22.719	11.234	6.572	73.833	16
17	2.113	.4732	.0404	.0854	24.742	11.707	6.953	81.404	17
18	2.208	.4528	.0372	.0822	26.855	12.160	7.327	89.102	18
19	2.308	.4333	.0344	.0794	29.064	12.593	7.695	96.901	19
20	2.412	.4146	.0319	.0769	31.371	13.008	8.055	104.779	20
21	2.520	.3968	.0296	.0746	33.783	13.405	8.409	112.715	21
22	2.634	.3797	.0275	.0725	36.303	13.784	8.755	120.689	22
23	2.752	.3634	.0257	.0707	38.937	14.148	9.096	128.682	23
24	2.876	.3477	.0240	.0690	41.689	14.495	9.429	136.680	24
25	3.005	.3327	.0224	.0674	44.565	14.828	9.756	144.665	25
26	3.141	.3184	.0210	.0660	47.571	15.147	10.077	152.625	26
27	3.282	.3047	.0197	.0647	50.711	15.451	10.391	160.547	27
28	3.430	.2916	.0185	.0635	53.993	15.743	10.698	168.420	28
29	3.584	.2790	.0174	.0624	57.423	16.022	10.999	176.232	29
30	3.745	.2670	.0164	.0614	61.007	16.289	11.295	183.975	30
31	3.914	.2555	.0154	.0604	64.752	16.544	11.583	191.640	31
32	4.090	.2445	.0146	.0596	68.666	16.789	11.866	199.220	32
33	4.274	.2340	.0137	.0587	72.756	17.023	12.143	206.707	33
34	4.466	.2239	.0130	.0580	77.030	17.247	12.414	214.095	34
35	4.667	.2143	.0123	.0573	81.497	17.461	12.679	221.380	35
40	5.816	.1719	.00934	.0543	107.030	18.402	13.917	256.098	40
45	7.248	.1380	.00720	.0522	138.850	19.156	15.020	287.732	45
50	9.033	.1107	.00560	.0506	178.503	19.762	15.998	316.145	50
55	11.256	.0888	.00439	.0494	227.918	20.248	16.860	341.375	55
60	14.027	.0713	.00345	.0485	289.497	20.638	17.617	363.571	60
65	17.481	.0572	.00273	.0477	366.237	20.951	18.278	382.946	65
70	21.784	.0459	.00217	.0472	461.869	21.202	18.854	399.750	70
75	27.147	.0368	.00172	.0467	581.043	21.404	19.354	414.242	75
80	33.830	.0296	.00137	.0464	729.556	21.565	19.785	426.680	80
85	42.158	.0237	.00109	.0461	914.630	21.695	20.157	437.309	85
90	52.537	.0190	.00087	.0459	1 145.3	21.799	20.476	446.359	90
95	65.471	.0153	.00070	.0457	1 432.7	21.883	20.749	454.039	95
100	81.588	.0123	.00056	.0456	1 790.9	21.950	20.981	460.537	100

5% Compound Interest Factors 5%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.050	.9524	1.0000	1.0500	1.000	0.952	0	0	1
2	1.102	.9070	.4878	.5378	2.050	1.859	0.488	0.907	2
3	1.158	.8638	.3172	.3672	3.152	2.723	0.967	2.635	3
4	1.216	.8227	.2320	.2820	4.310	3.546	1.439	5.103	4
5	1.276	.7835	.1810	.2310	5.526	4.329	1.902	8.237	5
6	1.340	.7462	.1470	.1970	6.802	5.076	2.358	11.968	6
7	1.407	.7107	.1228	.1728	8.142	5.786	2.805	16.232	7
8	1.477	.6768	.1047	.1547	9.549	6.463	3.244	20.970	8
9	1.551	.6446	.0907	.1407	11.027	7.108	3.676	26.127	9
10	1.629	.6139	.0795	.1295	12.578	7.722	4.099	31.652	10
11	1.710	.5847	.0704	.1204	14.207	8.306	4.514	37.499	11
12	1.796	.5568	.0628	.1128	15.917	8.863	4.922	43.624	12
13	1.886	.5303	.0565	.1065	17.713	9.394	5.321	49.988	13
14	1.980	.5051	.0510	.1010	19.599	9.899	5.713	56.553	14
15	2.079	.4810	.0463	.0963	21.579	10.380	6.097	63.288	15
16	2.183	.4581	.0423	.0923	23.657	10.838	6.474	70.159	16
17	2.292	.4363	.0387	.0887	25.840	11.274	6.842	77.140	17
18	2.407	.4155	.0355	.0855	28.132	11.690	7.203	84.204	18
19	2.527	.3957	.0327	.0827	30.539	12.085	7.557	91.327	19
20	2.653	.3769	.0302	.0802	33.066	12.462	7.903	98.488	20
21	2.786	.3589	.0280	.0780	35.719	12.821	8.242	105.667	21
22	2.925	.3419	.0260	.0760	38.505	13.163	8.573	112.846	22
23	3.072	.3256	.0241	.0741	41.430	13.489	8.897	120.008	23
24	3.225	.3101	.0225	.0725	44.502	13.799	9.214	127.140	24
25	3.386	.2953	.0210	.0710	47.727	14.094	9.524	134.227	25
26	3.556	.2812	.0196	.0696	51.113	14.375	9.827	141.258	26
27	3.733	.2678	.0183	.0683	54.669	14.643	10.122	148.222	27
28	3.920	.2551	.0171	.0671	58.402	14.898	10.411	155.110	28
29	4.116	.2429	.0160	.0660	62.323	15.141	10.694	161.912	29
30	4.322	.2314	.0151	.0651	66.439	15.372	10.969	168.622	30
31	4.538	.2204	.0141	.0641	70.761	15.593	11.238	175.233	31
32	4.765	.2099	.0133	.0633	75.299	15.803	11.501	181.739	32
33	5.003	.1999	.0125	.0625	80.063	16.003	11.757	188.135	33
34	5.253	.1904	.0118	.0618	85.067	16.193	12.006	194.416	34
35	5.516	.1813	.0111	.0611	90.320	16.374	12.250	200.580	35
40	7.040	.1420	.00828	.0583	120.799	17.159	13.377	229.545	40
45	8.985	.1113	.00626	.0563	159.699	17.774	14.364	255.314	45
50	11.467	.0872	.00478	.0548	209.347	18.256	15.223	277.914	50
55	14.636	.0683	.00367	.0537	272.711	18.633	15.966	297.510	55
60	18.679	.0535	.00283	.0528	353.582	18.929	16.606	314.343	60
65	23.840	.0419	.00219	.0522	456.795	19.161	17.154	328.691	65
70	30.426	.0329	.00170	.0517	588.525	19.343	17.621	340.841	70
75	38.832	.0258	.00132	.0513	756.649	19.485	18.018	351.072	75
80	49.561	.0202	.00103	.0510	971.222	19.596	18.353	359.646	80
85	63.254	.0158	.00080	.0508	1 245.1	19.684	18.635	366.800	85
90	80.730	.0124	.00063	.0506	1 594.6	19.752	18.871	372.749	90
95	103.034	.00971	.00049	.0505	2 040.7	19.806	19.069	377.677	95
100	131.500	.00760	.00038	.0504	2 610.0	19.848	19.234	381.749	100

6% Compound Interest Factors 6%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.060	.9434	1.0000	1.0600	1.000	0.943	0	0	1
2	1.124	.8900	.4854	.5454	2.060	1.833	0.485	0.890	2
3	1.191	.8396	.3141	.3741	3.184	2.673	0.961	2.569	3
4	1.262	.7921	.2286	.2886	4.375	3.465	1.427	4.945	4
5	1.338	.7473	.1774	.2374	5.637	4.212	1.884	7.934	5
6	1.419	.7050	.1434	.2034	6.975	4.917	2.330	11.459	6
7	1.504	.6651	.1191	.1791	8.394	5.582	2.768	15.450	7
8	1.594	.6274	.1010	.1610	9.897	6.210	3.195	19.841	8
9	1.689	.5919	.0870	.1470	11.491	6.802	3.613	24.577	9
10	1.791	.5584	.0759	.1359	13.181	7.360	4.022	29.602	10
11	1.898	.5268	.0668	.1268	14.972	7.887	4.421	34.870	11
12	2.012	.4970	.0593	.1193	16.870	8.384	4.811	40.337	12
13	2.133	.4688	.0530	.1130	18.882	8.853	5.192	45.963	13
14	2.261	.4423	.0476	.1076	21.015	9.295	5.564	51.713	14
15	2.397	.4173	.0430	.1030	23.276	9.712	5.926	57.554	15
16	2.540	.3936	.0390	.0990	25.672	10.106	6.279	63.459	16
17	2.693	.3714	.0354	.0954	28.213	10.477	6.624	69.401	17
18	2.854	.3503	.0324	.0924	30.906	10.828	6.960	75.357	18
19	3.026	.3305	.0296	.0896	33.760	11.158	7.287	81.306	19
20	3.207	.3118	.0272	.0872	36.786	11.470	7.605	87.230	20
21	3.400	.2942	.0250	.0850	39.993	11.764	7.915	93.113	21
22	3.604	.2775	.0230	.0830	43.392	12.042	8.217	98.941	22
23	3.820	.2618	.0213	.0813	46.996	12.303	8.510	104.700	23
24	4.049	.2470	.0197	.0797	50.815	12.550	8.795	110.381	24
25	4.292	.2330	.0182	.0782	54.864	12.783	9.072	115.973	25
26	4.549	.2198	.0169	.0769	59.156	13.003	9.341	121.468	26
27	4.822	.2074	.0157	.0757	63.706	13.211	9.603	126.860	27
28	5.112	.1956	.0146	.0746	68.528	13.406	9.857	132.142	28
29	5.418	.1846	.0136	.0736	73.640	13.591	10.103	137.309	29
30	5.743	.1741	.0126	.0726	79.058	13.765	10.342	142.359	30
31	6.088	.1643	.0118	.0718	84.801	13.929	10.574	147.286	31
32	6.453	.1550	.0110	.0710	90.890	14.084	10.799	152.090	32
33	6.841	.1462	.0103	.0703	97.343	14.230	11.017	156.768	33
34	7.251	.1379	.00960	.0696	104.184	14.368	11.228	161.319	34
35	7.686	.1301	.00897	.0690	111.435	14.498	11.432	165.743	35
40	10.286	.0972	.00646	.0665	154.762	15.046	12.359	185.957	40
45	13.765	.0727	.00470	.0647	212.743	15.456	13.141	203.109	45
50	18.420	.0543	.00344	.0634	290.335	15.762	13.796	217.457	50
55	24.650	.0406	.00254	.0625	394.171	15.991	14.341	229.322	55
60	32.988	.0303	.00188	.0619	533.126	16.161	14.791	239.043	60
65	44.145	.0227	.00139	.0614	719.080	16.289	15.160	246.945	65
70	59.076	.0169	.00103	.0610	967.928	16.385	15.461	253.327	70
75	79.057	.0126	.00077	.0608	1 300.9	16.456	15.706	258.453	75
80	105.796	.00945	.00057	.0606	1 746.6	16.509	15.903	262.549	80
85	141.578	.00706	.00043	.0604	2 343.0	16.549	16.062	265.810	85
90	189.464	.00528	.00032	.0603	3 141.1	16.579	16.189	268.395	90
95	253.545	.00394	.00024	.0602	4 209.1	16.601	16.290	270.437	95
100	339.300	.00295	.00018	.0602	5 638.3	16.618	16.371	272.047	100

7% Compound Interest Factors 7%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.070	.9346	1.0000	1.0700	1.000	0.935	0	0	1
2	1.145	.8734	.4831	.5531	2.070	1.808	0.483	0.873	2
3	1.225	.8163	.3111	.3811	3.215	2.624	0.955	2.506	3
4	1.311	.7629	.2252	.2952	4.440	3.387	1.416	4.795	4
5	1.403	.7130	.1739	.2439	5.751	4.100	1.865	7.647	5
6	1.501	.6663	.1398	.2098	7.153	4.767	2.303	10.978	6
7	1.606	.6227	.1156	.1856	8.654	5.389	2.730	14.715	7
8	1.718	.5820	.0975	.1675	10.260	5.971	3.147	18.789	8
9	1.838	.5439	.0835	.1535	11.978	6.515	3.552	23.140	9
10	1.967	.5083	.0724	.1424	13.816	7.024	3.946	27.716	10
11	2.105	.4751	.0634	.1334	15.784	7.499	4.330	32.467	11
12	2.252	.4440	.0559	.1259	17.888	7.943	4.703	37.351	12
13	2.410	.4150	.0497	.1197	20.141	8.358	5.065	42.330	13
14	2.579	.3878	.0443	.1143	22.551	8.745	5.417	47.372	14
15	2.759	.3624	.0398	.1098	25.129	9.108	5.758	52.446	15
16	2.952	.3387	.0359	.1059	27.888	9.447	6.090	57.527	16
17	3.159	.3166	.0324	.1024	30.840	9.763	6.411	62.592	17
18	3.380	.2959	.0294	.0994	33.999	10.059	6.722	67.622	18
19	3.617	.2765	.0268	.0968	37.379	10.336	7.024	72.599	19
20	3.870	.2584	.0244	.0944	40.996	10.594	7.316	77.509	20
21	4.141	.2415	.0223	.0923	44.865	10.836	7.599	82.339	21
22	4.430	.2257	.0204	.0904	49.006	11.061	7.872	87.079	22
23	4.741	.2109	.0187	.0887	53.436	11.272	8.137	91.720	23
24	5.072	.1971	.0172	.0872	58.177	11.469	8.392	96.255	24
25	5.427	.1842	.0158	.0858	63.249	11.654	8.639	100.677	25
26	5.807	.1722	.0146	.0846	68.677	11.826	8.877	104.981	26
27	6.214	.1609	.0134	.0834	74.484	11.987	9.107	109.166	27
28	6.649	.1504	.0124	.0824	80.698	12.137	9.329	113.227	28
29	7.114	.1406	.0114	.0814	87.347	12.278	9.543	117.162	29
30	7.612	.1314	.0106	.0806	94.461	12.409	9.749	120.972	30
31	8.145	.1228	.00980	.0798	102.073	12.532	9.947	124.655	31
32	8.715	.1147	.00907	.0791	110.218	12.647	10.138	128.212	32
33	9.325	.1072	.00841	.0784	118.934	12.754	10.322	131.644	33
34	9.978	.1002	.00780	.0778	128.259	12.854	10.499	134.951	34
35	10.677	.0937	.00723	.0772	138.237	12.948	10.669	138.135	35
40	14.974	.0668	.00501	.0750	199.636	13.332	11.423	152.293	40
45	21.002	.0476	.00350	.0735	285.750	13.606	12.036	163.756	45
50	29.457	.0339	.00246	.0725	406.530	13.801	12.529	172.905	50
55	41.315	.0242	.00174	.0717	575.930	13.940	12.921	180.124	55
60	57.947	.0173	.00123	.0712	813.523	14.039	13.232	185.768	60
65	81.273	.0123	.00087	.0709	1 146.8	14.110	13.476	190.145	65
70	113.990	.00877	.00062	.0706	1 614.1	14.160	13.666	193.519	70
75	159.877	.00625	.00044	.0704	2 269.7	14.196	13.814	196.104	75
80	224.235	.00446	.00031	.0703	3 189.1	14.222	13.927	198.075	80
85	314.502	.00318	.00022	.0702	4 478.6	14.240	14.015	199.572	85
90	441.105	.00227	.00016	.0702	6 287.2	14.253	14.081	200.704	90
95	618.673	.00162	.00011	.0701	8 823.9	14.263	14.132	201.558	95
100	867.720	.00115	.00008	.0701	12 381.7	14.269	14.170	202.200	100

8% Compound Interest Factors 8%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.080	.9259	1.0000	1.0800	1.000	0.926	0	0	1
2	1.166	.8573	.4808	.5608	2.080	1.783	0.481	0.857	2
3	1.260	.7938	.3080	.3880	3.246	2.577	0.949	2.445	3
4	1.360	.7350	.2219	.3019	4.506	3.312	1.404	4.650	4
5	1.469	.6806	.1705	.2505	5.867	3.993	1.846	7.372	5
6	1.587	.6302	.1363	.2163	7.336	4.623	2.276	10.523	6
7	1.714	.5835	.1121	.1921	8.923	5.206	2.694	14.024	7
8	1.851	.5403	.0940	.1740	10.637	5.747	3.099	17.806	8
9	1.999	.5002	.0801	.1601	12.488	6.247	3.491	21.808	9
10	2.159	.4632	.0690	.1490	14.487	6.710	3.871	25.977	10
11	2.332	.4289	.0601	.1401	16.645	7.139	4.240	30.266	11
12	2.518	.3971	.0527	.1327	18.977	7.536	4.596	34.634	12
13	2.720	.3677	.0465	.1265	21.495	7.904	4.940	39.046	13
14	2.937	.3405	.0413	.1213	24.215	8.244	5.273	43.472	14
15	3.172	.3152	.0368	.1168	27.152	8.559	5.594	47.886	15
16	3.426	.2919	.0330	.1130	30.324	8.851	5.905	52.264	16
17	3.700	.2703	.0296	.1096	33.750	9.122	6.204	56.588	17
18	3.996	.2502	.0267	.1067	37.450	9.372	6.492	60.843	18
19	4.316	.2317	.0241	.1041	41.446	9.604	6.770	65.013	19
20	4.661	.2145	.0219	.1019	45.762	9.818	7.037	69.090	20
21	5.034	.1987	.0198	.0998	50.423	10.017	7.294	73.063	21
22	5.437	.1839	.0180	.0980	55.457	10.201	7.541	76.926	22
23	5.871	.1703	.0164	.0964	60.893	10.371	7.779	80.673	23
24	6.341	.1577	.0150	.0950	66.765	10.529	8.007	84.300	24
25	6.848	.1460	.0137	.0937	73.106	10.675	8.225	87.804	25
26	7.396	.1352	.0125	.0925	79.954	10.810	8.435	91.184	26
27	7.988	.1252	.0114	.0914	87.351	10.935	8.636	94.439	27
28	8.627	.1159	.0105	.0905	95.339	11.051	8.829	97.569	28
29	9.317	.1073	.00962	.0896	103.966	11.158	9.013	100.574	29
30	10.063	.0994	.00883	.0888	113.283	11.258	9.190	103.456	30
31	10.868	.0920	.00811	.0881	123.346	11.350	9.358	106.216	31
32	11.737	.0852	.00745	.0875	134.214	11.435	9.520	108.858	32
33	12.676	.0789	.00685	.0869	145.951	11.514	9.674	111.382	33
34	13.690	.0730	.00630	.0863	158.627	11.587	9.821	113.792	34
35	14.785	.0676	.00580	.0858	172.317	11.655	9.961	116.092	35
40	21.725	.0460	.00386	.0839	259.057	11.925	10.570	126.042	40
45	31.920	.0313	.00259	.0826	386.506	12.108	11.045	133.733	45
50	46.902	.0213	.00174	.0817	573.771	12.233	11.411	139.593	50
55	68.914	.0145	.00118	.0812	848.925	12.319	11.690	144.006	55
60	101.257	.00988	.00080	.0808	1 253.2	12.377	11.902	147.300	60
65	148.780	.00672	.00054	.0805	1 847.3	12.416	12.060	149.739	65
70	218.607	.00457	.00037	.0804	2 720.1	12.443	12.178	151.533	70
75	321.205	.00311	.00025	.0802	4 002.6	12.461	12.266	152.845	75
80	471.956	.00212	.00017	.0802	5 887.0	12.474	12.330	153.800	80
85	693.458	.00144	.00012	.0801	8 655.7	12.482	12.377	154.492	85
90	1 018.9	.00098	.00008	.0801	12 724.0	12.488	12.412	154.993	90
95	1 497.1	.00067	.00005	.0801	18 701.6	12.492	12.437	155.352	95
100	2 199.8	.00045	.00004	.0800	27 484.6	12.494	12.455	155.611	100

9% Compound Interest Factors 9%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.090	.9174	1.0000	1.0900	1.000	0.917	0	0	1
2	1.188	.8417	.4785	.5685	2.090	1.759	0.478	0.842	2
3	1.295	.7722	.3051	.3951	3.278	2.531	0.943	2.386	3
4	1.412	.7084	.2187	.3087	4.573	3.240	1.393	4.511	4
5	1.539	.6499	.1671	.2571	5.985	3.890	1.828	7.111	5
6	1.677	.5963	.1329	.2229	7.523	4.486	2.250	10.092	6
7	1.828	.5470	.1087	.1987	9.200	5.033	2.657	13.375	7
8	1.993	.5019	.0907	.1807	11.028	5.535	3.051	16.888	8
9	2.172	.4604	.0768	.1668	13.021	5.995	3.431	20.571	9
10	2.367	.4224	.0658	.1558	15.193	6.418	3.798	24.373	10
11	2.580	.3875	.0569	.1469	17.560	6.805	4.151	28.248	11
12	2.813	.3555	.0497	.1397	20.141	7.161	4.491	32.159	12
13	3.066	.3262	.0436	.1336	22.953	7.487	4.818	36.073	13
14	3.342	.2992	.0384	.1284	26.019	7.786	5.133	39.963	14
15	3.642	.2745	.0341	.1241	29.361	8.061	5.435	43.807	15
16	3.970	.2519	.0303	.1203	33.003	8.313	5.724	47.585	16
17	4.328	.2311	.0270	.1170	36.974	8.544	6.002	51.282	17
18	4.717	.2120	.0242	.1142	41.301	8.756	6.269	54.886	18
19	5.142	.1945	.0217	.1117	46.019	8.950	6.524	58.387	19
20	5.604	.1784	.0195	.1095	51.160	9.129	6.767	61.777	20
21	6.109	.1637	.0176	.1076	56.765	9.292	7.001	65.051	21
22	6.659	.1502	.0159	.1059	62.873	9.442	7.223	68.205	22
23	7.258	.1378	.0144	.1044	69.532	9.580	7.436	71.236	23
24	7.911	.1264	.0130	.1030	76.790	9.707	7.638	74.143	24
25	8.623	.1160	.0118	.1018	84.701	9.823	7.832	76.927	25
26	9.399	.1064	.0107	.1007	93.324	9.929	8.016	79.586	26
27	10.245	.0976	.00973	.0997	102.723	10.027	8.191	82.124	27
28	11.167	.0895	.00885	.0989	112.968	10.116	8.357	84.542	28
29	12.172	.0822	.00806	.0981	124.136	10.198	8.515	86.842	29
30	13.268	.0754	.00734	.0973	136.308	10.274	8.666	89.028	30
31	14.462	.0691	.00669	.0967	149.575	10.343	8.808	91.102	31
32	15.763	.0634	.00610	.0961	164.037	10.406	8.944	93.069	32
33	17.182	.0582	.00556	.0956	179.801	10.464	9.072	94.931	33
34	18.728	.0534	.00508	.0951	196.983	10.518	9.193	96.693	34
35	20.414	.0490	.00464	.0946	215.711	10.567	9.308	98.359	35
40	31.409	.0318	.00296	.0930	337.883	10.757	9.796	105.376	40
45	48.327	.0207	.00190	.0919	525.860	10.881	10.160	110.556	45
50	74.358	.0134	.00123	.0912	815.085	10.962	10.430	114.325	50
55	114.409	.00874	.00079	.0908	1 260.1	11.014	10.626	117.036	55
60	176.032	.00568	.00051	.0905	1 944.8	11.048	10.768	118.968	60
65	270.847	.00369	.00033	.0903	2 998.3	11.070	10.870	120.334	65
70	416.731	.00240	.00022	.0902	4 619.2	11.084	10.943	121.294	70
75	641.193	.00156	.00014	.0901	7 113.3	11.094	10.994	121.965	75
80	986.555	.00101	.00009	.0901	10 950.6	11.100	11.030	122.431	80
85	1 517.9	.00066	.00006	.0901	16 854.9	11.104	11.055	122.753	85
90	2 335.5	.00043	.00004	.0900	25 939.3	11.106	11.073	122.976	90
95	3 593.5	.00028	.00003	.0900	39 916.8	11.108	11.085	123.129	95
100	5 529.1	.00018	.00002	.0900	61 422.9	11.109	11.093	123.233	100

10% Compound Interest Factors 10%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.100	.9091	1.0000	1.1000	1.000	0.909	0	0	1
2	1.210	.8264	.4762	.5762	2.100	1.736	0.476	0.826	2
3	1.331	.7513	.3021	.4021	3.310	2.487	0.937	2.329	3
4	1.464	.6830	.2155	.3155	4.641	3.170	1.381	4.378	4
5	1.611	.6209	.1638	.2638	6.105	3.791	1.810	6.862	5
6	1.772	.5645	.1296	.2296	7.716	4.355	2.224	9.684	6
7	1.949	.5132	.1054	.2054	9.487	4.868	2.622	12.763	7
8	2.144	.4665	.0874	.1874	11.436	5.335	3.004	16.029	8
9	2.358	.4241	.0736	.1736	13.579	5.759	3.372	19.421	9
10	2.594	.3855	.0627	.1627	15.937	6.145	3.725	22.891	10
11	2.853	.3505	.0540	.1540	18.531	6.495	4.064	26.396	11
12	3.138	.3186	.0468	.1468	21.384	6.814	4.388	29.901	12
13	3.452	.2897	.0408	.1408	24.523	7.103	4.699	33.377	13
14	3.797	.2633	.0357	.1357	27.975	7.367	4.996	36.801	14
15	4.177	.2394	.0315	.1315	31.772	7.606	5.279	40.152	15
16	4.595	.2176	.0278	.1278	35.950	7.824	5.549	43.416	16
17	5.054	.1978	.0247	.1247	40.545	8.022	5.807	46.582	17
18	5.560	.1799	.0219	.1219	45.599	8.201	6.053	49.640	18
19	6.116	.1635	.0195	.1195	51.159	8.365	6.286	52.583	19
20	6.728	.1486	.0175	.1175	57.275	8.514	6.508	55.407	20
21	7.400	.1351	.0156	.1156	64.003	8.649	6.719	58.110	21
22	8.140	.1228	.0140	.1140	71.403	8.772	6.919	60.689	22
23	8.954	.1117	.0126	.1126	79.543	8.883	7.108	63.146	23
24	9.850	.1015	.0113	.1113	88.497	8.985	7.288	65.481	24
25	10.835	.0923	.0102	.1102	98.347	9.077	7.458	67.696	25
26	11.918	.0839	.00916	.1092	109.182	9.161	7.619	69.794	26
27	13.110	.0763	.00826	.1083	121.100	9.237	7.770	71.777	27
28	14.421	.0693	.00745	.1075	134.210	9.307	7.914	73.650	28
29	15.863	.0630	.00673	.1067	148.631	9.370	8.049	75.415	29
30	17.449	.0573	.00608	.1061	164.494	9.427	8.176	77.077	30
31	19.194	.0521	.00550	.1055	181.944	9.479	8.296	78.640	31
32	21.114	.0474	.00497	.1050	201.138	9.526	8.409	80.108	32
33	23.225	.0431	.00450	.1045	222.252	9.569	8.515	81.486	33
34	25.548	.0391	.00407	.1041	245.477	9.609	8.615	82.777	34
35	28.102	.0356	.00369	.1037	271.025	9.644	8.709	83.987	35
40	45.259	.0221	.00226	.1023	442.593	9.779	9.096	88.953	40
45	72.891	.0137	.00139	.1014	718.905	9.863	9.374	92.454	45
50	117.391	.00852	.00086	.1009	1 163.9	9.915	9.570	94.889	50
55	189.059	.00529	.00053	.1005	1 880.6	9.947	9.708	96.562	55
60	304.482	.00328	.00033	.1003	3 034.8	9.967	9.802	97.701	60
65	490.371	.00204	.00020	.1002	4 893.7	9.980	9.867	98.471	65
70	789.748	.00127	.00013	.1001	7 887.5	9.987	9.911	98.987	70
75	1 271.9	.00079	.00008	.1001	12 709 0	9.992	9.941	99.332	75
80	2 048.4	.00049	.00005	.1000	20 474.0	9.995	9.961	99.561	80
85	3 299.0	.00030	.00003	.1000	32 979.7	9.997	9.974	99.712	85
90	5 313.0	.00019	.00002	.1000	53 120.3	9.998	9.983	99.812	90
95	8 556.7	.00012	.00001	.1000	85 556.9	9.999	9.989	99.877	95
100	13 780.6	.00007	.00001	.1000	137 796.3	9.999	9.993	99.920	100

12% Compound Interest Factors 12%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.120	.8929	1.0000	1.1200	1.000	0.893	0	0	1
2	1.254	.7972	.4717	.5917	2.120	1.690	0.472	0.797	2
3	1.405	.7118	.2963	.4163	3.374	2.402	0.925	2.221	3
4	1.574	.6355	.2092	.3292	4.779	3.037	1.359	4.127	4
5	1.762	.5674	.1574	.2774	6.353	3.605	1.775	6.397	5
6	1.974	.5066	.1232	.2432	8.115	4.111	2.172	8.930	6
7	2.211	.4523	.0991	.2191	10.089	4.564	2.551	11.644	7
8	2.476	.4039	.0813	.2013	12.300	4.968	2.913	14.471	8
9	2.773	.3606	.0677	.1877	14.776	5.328	3.257	17.356	9
10	3.106	.3220	.0570	.1770	17.549	5.650	3.585	20.254	10
11	3.479	.2875	.0484	.1684	20.655	5.938	3.895	23.129	11
12	3.896	.2567	.0414	.1614	24.133	6.194	4.190	25.952	12
13	4.363	.2292	.0357	.1557	28.029	6.424	4.468	28.702	13
14	4.887	.2046	.0309	.1509	32.393	6.628	4.732	31.362	14
15	5.474	.1827	.0268	.1468	37.280	6.811	4.980	33.920	15
16	6.130	.1631	.0234	.1434	42.753	6.974	5.215	36.367	16
17	6.866	.1456	.0205	.1405	48.884	7.120	5.435	38.697	17
18	7.690	.1300	.0179	.1379	55.750	7.250	5.643	40.908	18
19	8.613	.1161	.0158	.1358	63.440	7.366	5.838	42.998	19
20	9.646	.1037	.0139	.1339	72.052	7.469	6.020	44.968	20
21	10.804	.0926	.0122	.1322	81.699	7.562	6.191	46.819	21
22	12.100	.0826	.0108	.1308	92.503	7.645	6.351	48.554	22
23	13.552	.0738	.00956	.1296	104.603	7.718	6.501	50.178	23
24	15.179	.0659	.00846	.1285	118.155	7.784	6.641	51.693	24
25	17.000	.0588	.00750	.1275	133.334	7.843	6.771	53.105	25
26	19.040	.0525	.00665	.1267	150.334	7.896	6.892	54.418	26
27	21.325	.0469	.00590	.1259	169.374	7.943	7.005	55.637	27
28	23.884	.0419	.00524	.1252	190.699	7.984	7.110	56.767	28
29	26.750	.0374	.00466	.1247	214.583	8.022	7.207	57.814	29
30	29.960	.0334	.00414	.1241	241.333	8.055	7.297	58.782	30
31	33.555	.0298	.00369	.1237	271.293	8.085	7.381	59.676	31
32	37.582	.0266	.00328	.1233	304.848	8.112	7.459	60.501	32
33	42.092	.0238	.00292	.1229	342.429	8.135	7.530	61.261	33
34	47.143	.0212	.00260	.1226	384.521	8.157	7.596	61.961	34
35	52.800	.0189	.00232	.1223	431.663	8.176	7.658	62.605	35
40	93.051	.0107	.00130	.1213	767.091	8.244	7.899	65.116	40
45	163.988	.00610	.00074	.1207	1 358.2	8.283	8.057	66.734	45
50	289.002	.00346	.00042	.1204	2 400.0	8.304	8.160	67.762	50
55	509.321	.00196	.00024	.1202	4 236.0	8.317	8.225	68.408	55
60	897.597	.00111	.00013	.1201	7 471.6	8.324	8.266	68.810	60
65	1 581.9	.00063	.00008	.1201	13 173.9	8.328	8.292	69.058	65
70	2 787.8	.00036	.00004	.1200	23 223.3	8.330	8.308	69.210	70
75	4 913.1	.00020	.00002	.1200	40 933.8	8.332	8.318	69.303	75
80	8 658.5	.00012	.00001	.1200	72 145.7	8.332	8.324	69.359	80
85	15 259.2	.00007	.00001	.1200	127 151.7	8.333	8.328	69.393	85
90	26 891.9	.00004		.1200	224 091.1	8.333	8.330	69.414	90
95	47 392.8	.00002		.1200	394 931.4	8.333	8.331	69.426	95
100	83 522.3	.00001		.1200	696 010.5	8.333	8.332	69.434	100

15% Compound Interest Factors 15%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.150	.8696	1.0000	1.1500	1.000	0.870	0	0	1
2	1.322	.7561	.4651	.6151	2.150	1.626	0.465	0.756	2
3	1.521	.6575	.2880	.4380	3.472	2.283	0.907	2.071	3
4	1.749	.5718	.2003	.3503	4.993	2.855	1.326	3.786	4
5	2.011	.4972	.1483	.2983	6.742	3.352	1.723	5.775	5
6	2.313	.4323	.1142	.2642	8.754	3.784	2.097	7.937	6
7	2.660	.3759	.0904	.2404	11.067	4.160	2.450	10.192	7
8	3.059	.3269	.0729	.2229	13.727	4.487	2.781	12.481	8
9	3.518	.2843	.0596	.2096	16.786	4.772	3.092	14.755	9
10	4.046	.2472	.0493	.1993	20.304	5.019	3.383	16.979	10
11	4.652	.2149	.0411	.1911	24.349	5.234	3.655	19.129	11
12	5.350	.1869	.0345	.1845	29.002	5.421	3.908	21.185	12
13	6.153	.1625	.0291	.1791	34.352	5.583	4.144	23.135	13
14	7.076	.1413	.0247	.1747	40.505	5.724	4.362	24.972	14
15	8.137	.1229	.0210	.1710	47.580	5.847	4.565	26.693	15
16	9.358	.1069	.0179	.1679	55.717	5.954	4.752	28.296	16
17	10.761	.0929	.0154	.1654	65.075	6.047	4.925	29.783	17
18	12.375	.0808	.0132	.1632	75.836	6.128	5.084	31.156	18
19	14.232	.0703	.0113	.1613	88.212	6.198	5.231	32.421	19
20	16.367	.0611	.00976	.1598	102.444	6.259	5.365	33.582	20
21	18.822	.0531	.00842	.1584	118.810	6.312	5.488	34.645	21
22	21.645	.0462	.00727	.1573	137.632	6.359	5.601	35.615	22
23	24.891	.0402	.00628	.1563	159.276	6.399	5.704	36.499	23
24	28.625	.0349	.00543	.1554	184.168	6.434	5.798	37.302	24
25	32.919	.0304	.00470	.1547	212.793	6.464	5.883	38.031	25
26	37.857	.0264	.00407	.1541	245.712	6.491	5.961	38.692	26
27	43.535	.0230	.00353	.1535	283.569	6.514	6.032	39.289	27
28	50.066	.0200	.00306	.1531	327.104	6.534	6.096	39.828	28
29	57.575	.0174	.00265	.1527	377.170	6.551	6.154	40.315	29
30	66.212	.0151	.00230	.1523	434.745	6.566	6.207	40.753	30
31	76.144	.0131	.00200	.1520	500.957	6.579	6.254	41.147	31
32	87.565	.0114	.00173	.1517	577.100	6.591	6.297	41.501	32
33	100.700	.00993	.00150	.1515	664.666	6.600	6.336	41.818	33
34	115.805	.00864	.00131	.1513	765.365	6.609	6.371	42.103	34
35	133.176	.00751	.00113	.1511	881.170	6.617	6.402	42.359	35
40	267.864	.00373	.00056	.1506	1 779.1	6.642	6.517	43.283	40
45	538.769	.00186	.00028	.1503	3 585.1	6.654	6.583	43.805	45
50	1 083.7	.00092	.00014	.1501	7 217.7	6.661	6.620	44.096	50
55	2 179.6	.00046	.00007	.1501	14 524.1	6.664	6.641	44.256	55
60	4 384.0	.00023	.00003	.1500	29 220.0	6.665	6.653	44.343	60
65	8 817.8	.00011	.00002	.1500	58 778.6	6.666	6.659	44.390	65
70	17 735.7	.00006	.00001	.1500	118 231.5	6.666	6.663	44.416	70
75	35 672.9	.00003		.1500	237 812.5	6.666	6.665	44.429	75
80	71 750.9	.00001		.1500	478 332.6	6.667	6.666	44.436	80
85	144 316.7	.00001		.1500	962 104.4	6.667	6.666	44.440	85

18% Compound Interest Factors 18%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.180	.8475	1.0000	1.1800	1.000	0.847	0	0	1
2	1.392	.7182	.4587	.6387	2.180	1.566	0.459	0.718	2
3	1.643	.6086	.2799	.4599	3.572	2.174	0.890	1.935	3
4	1.939	.5158	.1917	.3717	5.215	2.690	1.295	3.483	4
5	2.288	.4371	.1398	.3198	7.154	3.127	1.673	5.231	5
6	2.700	.3704	.1059	.2859	9.442	3.498	2.025	7.083	6
7	3.185	.3139	.0824	.2624	12.142	3.812	2.353	8.967	7
8	3.759	.2660	.0652	.2452	15.327	4.078	2.656	10.829	8
9	4.435	.2255	.0524	.2324	19.086	4.303	2.936	12.633	9
10	5.234	.1911	.0425	.2225	23.521	4.494	3.194	14.352	10
11	6.176	.1619	.0348	.2148	28.755	4.656	3.430	15.972	11
12	7.288	.1372	.0286	.2086	34.931	4.793	3.647	17.481	12
13	8.599	.1163	.0237	.2037	42.219	4.910	3.845	18.877	13
14	10.147	.0985	.0197	.1997	50.818	5.008	4.025	20.158	14
15	11.974	.0835	.0164	.1964	60.965	5.092	4.189	21.327	15
16	14.129	.0708	.0137	.1937	72.939	5.162	4.337	22.389	16
17	16.672	.0600	.0115	.1915	87.068	5.222	4.471	23.348	17
18	19.673	.0508	.00964	.1896	103.740	5.273	4.592	24.212	18
19	23.214	.0431	.00810	.1881	123.413	5.316	4.700	24.988	19
20	27.393	.0365	.00682	.1868	146.628	5.353	4.798	25.681	20
21	32.324	.0309	.00575	.1857	174.021	5.384	4.885	26.300	21
22	38.142	.0262	.00485	.1848	206.345	5.410	4.963	26.851	22
23	45.008	.0222	.00409	.1841	244.487	5.432	5.033	27.339	23
24	53.109	.0188	.00345	.1835	289.494	5.451	5.095	27.772	24
25	62.669	.0160	.00292	.1829	342.603	5.467	5.150	28.155	25
26	73.949	.0135	.00247	.1825	405.272	5.480	5.199	28.494	26
27	87.260	.0115	.00209	.1821	479.221	5.492	5.243	28.791	27
28	102.966	.00971	.00177	.1818	566.480	5.502	5.281	29.054	28
29	121.500	.00823	.00149	.1815	669.447	5.510	5.315	29.284	29
30	143.370	.00697	.00126	.1813	790.947	5.517	5.345	29.486	30
31	169.177	.00591	.00107	.1811	934.317	5.523	5.371	29.664	31
32	199.629	.00501	.00091	.1809	1 103.5	5.528	5.394	29.819	32
33	235.562	.00425	.00077	.1808	1 303.1	5.532	5.415	29.955	33
34	277.963	.00360	.00065	.1806	1 538.7	5.536	5.433	30.074	34
35	327.997	.00305	.00055	.1806	1 816.6	5.539	5.449	30.177	35
40	750.377	.00133	.00024	.1802	4 163.2	5.548	5.502	30.527	40
45	1 716.7	.00058	.00010	.1801	9 531.6	5.552	5.529	30.701	45
50	3 927.3	.00025	.00005	.1800	21 813.0	5.554	5.543	30.786	50
55	8 984.8	.00011	.00002	.1800	49 910.1	5.555	5.549	30.827	55
60	20 555.1	.00005	.00001	.1800	114 189.4	5.555	5.553	30.846	60
65	47 025.1	.00002		.1800	261 244.7	5.555	5.554	30.856	65
70	107 581.9	.00001		.1800	597.671.7	5.556	5.555	30.860	70

20% Compound Interest Factors 20%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.200	.8333	1.0000	1.2000	1.000	0.833	0	0	1
2	1.440	.6944	.4545	.6545	2.200	1.528	0.455	0.694	2
3	1.728	.5787	.2747	.4747	3.640	2.106	0.879	1.852	3
4	2.074	.4823	.1863	.3863	5.368	2.589	1.274	3.299	4
5	2.488	.4019	.1344	.3344	7.442	2.991	1.641	4.906	5
6	2.986	.3349	.1007	.3007	9.930	3.326	1.979	6.581	6
7	3.583	.2791	.0774	.2774	12.916	3.605	2.290	8.255	7
8	4.300	.2326	.0606	.2606	16.499	3.837	2.576	9.883	8
9	5.160	.1938	.0481	.2481	20.799	4.031	2.836	11.434	9
10	6.192	.1615	.0385	.2385	25.959	4.192	3.074	12.887	10
11	7.430	.1346	.0311	.2311	32.150	4.327	3.289	14.233	11
12	8.916	.1122	.0253	.2253	39.581	4.439	3.484	15.467	12
13	10.699	.0935	.0206	.2206	48.497	4.533	3.660	16.588	13
14	12.839	.0779	.0169	.2169	59.196	4.611	3.817	17.601	14
15	15.407	.0649	.0139	.2139	72.035	4.675	3.959	18.509	15
16	18.488	.0541	.0114	.2114	87.442	4.730	4.085	19.321	16
17	22.186	.0451	.00944	.2094	105.931	4.775	4.198	20.042	17
18	26.623	.0376	.00781	.2078	128.117	4.812	4.298	20.680	18
19	31.948	.0313	.00646	.2065	154.740	4.843	4.386	21.244	19
20	38.338	.0261	.00536	.2054	186.688	4.870	4.464	21.739	20
21	46.005	.0217	.00444	.2044	225.026	4.891	4.533	22.174	21
22	55.206	.0181	.00369	.2037	271.031	4.909	4.594	22.555	22
23	66.247	.0151	.00307	.2031	326.237	4.925	4.647	22.887	23
24	79.497	.0126	.00255	.2025	392.484	4.937	4.694	23.176	24
25	95.396	.0105	.00212	.2021	471.981	4.948	4.735	23.428	25
26	114.475	.00874	.00176	.2018	567.377	4.956	4.771	23.646	26
27	137.371	.00728	.00147	.2015	681.853	4.964	4.802	23.835	27
28	164.845	.00607	.00122	.2012	819.223	4.970	4.829	23.999	28
29	197.814	.00506	.00102	.2010	984.068	4.975	4.853	24.141	29
30	237.376	.00421	.00085	.2008	1 181.9	4.979	4.873	24.263	30
31	284.852	.00351	.00070	.2007	1 419.3	4.982	4.891	24.368	31
32	341.822	.00293	.00059	.2006	1 704.1	4.985	4.906	24.459	32
33	410.186	.00244	.00049	.2005	2 045.9	4.988	4.919	24.537	33
34	492.224	.00203	.00041	.2004	2 456.1	4.990	4.931	24.604	34
35	590.668	.00169	.00034	.2003	2 948.3	4.992	4.941	24.661	35
40	1 469.8	.00068	.00014	.2001	7 343.9	4.997	4.973	24.847	40
45	3 657.3	.00027	.00005	.2001	18 281.3	4.999	4.988	24.932	45
50	9 100.4	.00011	.00002	.2000	45 497.2	4.999	4.995	24.970	50
55	22 644.8	.00004	.00001	.2000	113 219.0	5.000	4.998	24.987	55
60	56 347.5	.00002		.2000	281 732.6	5.000	4.999	24.994	60

25% Compound Interest Factors 25%

n	Single Payment: Compound Amount Factor — Find F Given P F/P	Single Payment: Present Worth Factor — Find P Given F P/F	Uniform Payment Series: Sinking Fund Factor — Find A Given F A/F	Uniform Payment Series: Capital Recovery Factor — Find A Given P A/P	Uniform Payment Series: Compound Amount Factor — Find F Given A F/A	Uniform Payment Series: Present Worth Factor — Find P Given A P/A	Arithmetic Gradient: Gradient Uniform Series — Find A Given G A/G	Arithmetic Gradient: Gradient Present Worth — Find P Given G P/G	n
1	1.250	.8000	1.0000	1.2500	1.000	0.800	0	0	1
2	1.563	.6400	.4444	.6944	2.250	1.440	0.444	0.640	2
3	1.953	.5120	.2623	.5123	3.813	1.952	0.852	1.664	3
4	2.441	.4096	.1734	.4234	5.766	2.362	1.225	2.893	4
5	3.052	.3277	.1218	.3718	8.207	2.689	1.563	4.204	5
6	3.815	.2621	.0888	.3388	11.259	2.951	1.868	5.514	6
7	4.768	.2097	.0663	.3163	15.073	3.161	2.142	6.773	7
8	5.960	.1678	.0504	.3004	19.842	3.329	2.387	7.947	8
9	7.451	.1342	.0388	.2888	25.802	3.463	2.605	9.021	9
10	9.313	.1074	.0301	.2801	33.253	3.571	2.797	9.987	10
11	11.642	.0859	.0235	.2735	42.566	3.656	2.966	10.846	11
12	14.552	.0687	.0184	.2684	54.208	3.725	3.115	11.602	12
13	18.190	.0550	.0145	.2645	68.760	3.780	3.244	12.262	13
14	22.737	.0440	.0115	.2615	86.949	3.824	3.356	12.833	14
15	28.422	.0352	.00912	.2591	109.687	3.859	3.453	13.326	15
16	35.527	.0281	.00724	.2572	138.109	3.887	3.537	13.748	16
17	44.409	.0225	.00576	.2558	173.636	3.910	3.608	14.108	17
18	55.511	.0180	.00459	.2546	218.045	3.928	3.670	14.415	18
19	69.389	.0144	.00366	.2537	273.556	3.942	3.722	14.674	19
20	86.736	.0115	.00292	.2529	342.945	3.954	3.767	14.893	20
21	108.420	.00922	.00233	.2523	429.681	3.963	3.805	15.078	21
22	135.525	.00738	.00186	.2519	538.101	3.970	3.836	15.233	22
23	169.407	.00590	.00148	.2515	673.626	3.976	3.863	15.362	23
24	211.758	.00472	.00119	.2512	843.033	3.981	3.886	15.471	24
25	264.698	.00378	.00095	.2509	1 054.8	3.985	3.905	15.562	25
26	330.872	.00302	.00076	.2508	1 319.5	3.988	3.921	15.637	26
27	413.590	.00242	.00061	.2506	1 650.4	3.990	3.935	15.700	27
28	516.988	.00193	.00048	.2505	2 064.0	3.992	3.946	15.752	28
29	646.235	.00155	.00039	.2504	2 580.9	3.994	3.955	15.796	29
30	807.794	.00124	.00031	.2503	3 227.2	3.995	3.963	15.832	30
31	1 009.7	.00099	.00025	.2502	4 035.0	3.996	3.969	15.861	31
32	1 262.2	.00079	.00020	.2502	5 044.7	3.997	3.975	15.886	32
33	1 577.7	.00063	.00016	.2502	6 306.9	3.997	3.979	15.906	33
34	1 972.2	.00051	.00013	.2501	7 884.6	3.998	3.983	15.923	34
35	2 465.2	.00041	.00010	.2501	9 856.8	3.998	3.986	15.937	35
40	7 523.2	.00013	.00003	.2500	30 088.7	3.999	3.995	15.977	40
45	22 958.9	.00004	.00001	.2500	91 831.5	4.000	3.998	15.991	45
50	70 064.9	.00001		.2500	280 255.7	4.000	3.999	15.997	50
55	213 821.2			.2500	855 280.7	4.000	4.000	15.999	55

30% Compound Interest Factors 30%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.300	.7692	1.0000	1.3000	1.000	0.769	0	0	1
2	1.690	.5917	.4348	.7348	2.300	1.361	0.435	0.592	2
3	2.197	.4552	.2506	.5506	3.990	1.816	0.827	1.502	3
4	2.856	.3501	.1616	.4616	6.187	2.166	1.178	2.552	4
5	3.713	.2693	.1106	.4106	9.043	2.436	1.490	3.630	5
6	4.827	.2072	.0784	.3784	12.756	2.643	1.765	4.666	6
7	6.275	.1594	.0569	.3569	17.583	2.802	2.006	5.622	7
8	8.157	.1226	.0419	.3419	23.858	2.925	2.216	6.480	8
9	10.604	.0943	.0312	.3312	32.015	3.019	2.396	7.234	9
10	13.786	.0725	.0235	.3235	42.619	3.092	2.551	7.887	10
11	17.922	.0558	.0177	.3177	56.405	3.147	2.683	8.445	11
12	23.298	.0429	.0135	.3135	74.327	3.190	2.795	8.917	12
13	30.287	.0330	.0102	.3102	97.625	3.223	2.889	9.314	13
14	39.374	.0254	.00782	.3078	127.912	3.249	2.969	9.644	14
15	51.186	.0195	.00598	.3060	167.286	3.268	3.034	9.917	15
16	66.542	.0150	.00458	.3046	218.472	3.283	3.089	10.143	16
17	86.504	.0116	.00351	.3035	285.014	3.295	3.135	10.328	17
18	112.455	.00889	.00269	.3027	371.518	3.304	3.172	10.479	18
19	146.192	.00684	.00207	.3021	483.973	3.311	3.202	10.602	19
20	190.049	.00526	.00159	.3016	630.165	3.316	3.228	10.702	20
21	247.064	.00405	.00122	.3012	820.214	3.320	3.248	10.783	21
22	321.184	.00311	.00094	.3009	1 067.3	3.323	3.265	10.848	22
23	417.539	.00239	.00072	.3007	1 388.5	3.325	3.278	10.901	23
24	542.800	.00184	.00055	.3006	1 806.0	3.327	3.289	10.943	24
25	705.640	.00142	.00043	.3004	2 348.8	3.329	3.298	10.977	25
26	917.332	.00109	.00033	.3003	3 054.4	3.330	3.305	11.005	26
27	1 192.5	.00084	.00025	.3003	3 971.8	3.331	3.311	11.026	27
28	1 550.3	.00065	.00019	.3002	5 164.3	3.331	3.315	11.044	28
29	2 015.4	.00050	.00015	.3001	6 714.6	3.332	3.319	11.058	29
30	2 620.0	.00038	.00011	.3001	8 730.0	3.332	3.322	11.069	30
31	3 406.0	.00029	.00009	.3001	11 350.0	3.332	3.324	11.078	31
32	4 427.8	.00023	.00007	.3001	14 756.0	3.333	3.326	11.085	32
33	5 756.1	.00017	.00005	.3001	19 183.7	3.333	3.328	11.090	33
34	7 483.0	.00013	.00004	.3000	24 939.9	3.333	3.329	11.094	34
35	9 727.8	.00010	.00003	.3000	32 422.8	3.333	3.330	11.098	35
40	36 118.8	.00003	.00001	.3000	120 392.6	3.333	3.332	11.107	40
45	134 106.5	.00001		.3000	447 018.3	3.333	3.333	11.110	45

35% Compound Interest Factors 35%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find *F* Given *P* *F/P*	Find *P* Given *F* *P/F*	Find *A* Given *F* *A/F*	Find *A* Given *P* *A/P*	Find *F* Given *A* *F/A*	Find *P* Given *A* *P/A*	Find *A* Given *G* *A/G*	Find *P* Given *G* *P/G*	
1	1.350	.7407	1.0000	1.3500	1.000	0.741	0	0	1
2	1.822	.5487	.4255	.7755	2.350	1.289	0.426	0.549	2
3	2.460	.4064	.2397	.5897	4.173	1.696	0.803	1.362	3
4	3.322	.3011	.1508	.5008	6.633	1.997	1.134	2.265	4
5	4.484	.2230	.1005	.4505	9.954	2.220	1.422	3.157	5
6	6.053	.1652	.0693	.4193	14.438	2.385	1.670	3.983	6
7	8.172	.1224	.0488	.3988	20.492	2.508	1.881	4.717	7
8	11.032	.0906	.0349	.3849	28.664	2.598	2.060	5.352	8
9	14.894	.0671	.0252	.3752	39.696	2.665	2.209	5.889	9
10	20.107	.0497	.0183	.3683	54.590	2.715	2.334	6.336	10
11	27.144	.0368	.0134	.3634	74.697	2.752	2.436	6.705	11
12	36.644	.0273	.00982	.3598	101.841	2.779	2.520	7.005	12
13	49.470	.0202	.00722	.3572	138.485	2.799	2.589	7.247	13
14	66.784	.0150	.00532	.3553	187.954	2.814	2.644	7.442	14
15	90.158	.0111	.00393	.3539	254.739	2.825	2.689	7.597	15
16	121.714	.00822	.00290	.3529	344.897	2.834	2.725	7.721	16
17	164.314	.00609	.00214	.3521	466.611	2.840	2.753	7.818	17
18	221.824	.00451	.00158	.3516	630.925	2.844	2.776	7.895	18
19	299.462	.00334	.00117	.3512	852.748	2.848	2.793	7.955	19
20	404.274	.00247	.00087	.3509	1 152.2	2.850	2.808	8.002	20
21	545.769	.00183	.00064	.3506	1 556.5	2.852	2.819	8.038	21
22	736.789	.00136	.00048	.3505	2 102.3	2.853	2.827	8.067	22
23	994.665	.00101	.00035	.3504	2 839.0	2.854	2.834	8.089	23
24	1 342.8	.00074	.00026	.3503	3 833.7	2.855	2.839	8.106	24
25	1 812.8	.00055	.00019	.3502	5 176.5	2.856	2.843	8.119	25
26	2 447.2	.00041	.00014	.3501	6 989.3	2.856	2.847	8.130	26
27	3 303.8	.00030	.00011	.3501	9 436.5	2.856	2.849	8.137	27
28	4 460.1	.00022	.00008	.3501	12 740.3	2.857	2.851	8.143	28
29	6 021.1	.00017	.00006	.3501	17 200.4	2.857	2.852	8.148	29
30	8 128.5	.00012	.00004	.3500	23 221.6	2.857	2.853	8.152	30
31	10 973.5	.00009	.00003	.3500	31 350.1	2.857	2.854	8.154	31
32	14 814.3	.00007	.00002	.3500	42 323.7	2.857	2.855	8.157	32
33	19 999.3	.00005	.00002	.3500	57 137.9	2.857	2.855	8.158	33
34	26 999.0	.00004	.00001	.3500	77 137.2	2.857	2.856	8.159	34
35	36 448.7	.00003	.00001	.3500	104 136.3	2.857	2.856	8.160	35

40% Compound Interest Factors 40%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.400	.7143	1.0000	1.4000	1.000	0.714	0	0	1
2	1.960	.5102	.4167	.8167	2.400	1.224	0.417	0.510	2
3	2.744	.3644	.2294	.6294	4.360	1.589	0.780	1.239	3
4	3.842	.2603	.1408	.5408	7.104	1.849	1.092	2.020	4
5	5.378	.1859	.0914	.4914	10.946	2.035	1.358	2.764	5
6	7.530	.1328	.0613	.4613	16.324	2.168	1.581	3.428	6
7	10.541	.0949	.0419	.4419	23.853	2.263	1.766	3.997	7
8	14.758	.0678	.0291	.4291	34.395	2.331	1.919	4.471	8
9	20.661	.0484	.0203	.4203	49.153	2.379	2.042	4.858	9
10	28.925	.0346	.0143	.4143	69.814	2.414	2.142	5.170	10
11	40.496	.0247	.0101	.4101	98.739	2.438	2.221	5.417	11
12	56.694	.0176	.00718	.4072	139.235	2.456	2.285	5.611	12
13	79.371	.0126	.00510	.4051	195.929	2.469	2.334	5.762	13
14	111.120	.00900	.00363	.4036	275.300	2.478	2.373	5.879	14
15	155.568	.00643	.00259	.4026	386.420	2.484	2.403	5.969	15
16	217.795	.00459	.00185	.4018	541.988	2.489	2.426	6.038	16
17	304.913	.00328	.00132	.4013	759.783	2.492	2.444	6.090	17
18	426.879	.00234	.00094	.4009	1 064.7	2.494	2.458	6.130	18
19	597.630	.00167	.00067	.4007	1 419.6	2.496	2.468	6.160	19
20	836.682	.00120	.00048	.4005	2 089.2	2.497	2.476	6.183	20
21	1 171.4	.00085	.00034	.4003	2 925.9	2.498	2.482	6.200	21
22	1 639.9	.00061	.00024	.4002	4 097.2	2.498	2.487	6.213	22
23	2 295.9	.00044	.00017	.4002	5 737.1	2.499	2.490	6.222	23
24	3 214.2	.00031	.00012	.4001	8 033.0	2.499	2.493	6.229	24
25	4 499.9	.00022	.00009	.4001	11 247 2	2.499	2.494	6.235	25
26	6 299.8	.00016	.00006	.4001	15 747.1	2.500	2.496	6.239	26
27	8 819.8	.00011	.00005	.4000	22 046.9	2.500	2.497	6.242	27
28	12 347.7	.00008	.00003	.4000	30 866.7	2.500	2.498	6.244	28
29	17 286.7	.00006	.00002	.4000	43 214.3	2.500	2.498	6.245	29
30	24 201.4	.00004	.00002	.4000	60 501.0	2.500	2.499	6.247	30
31	33 882.0	.00003	.00001	.4000	84 702.5	2.500	2.499	6.248	31
32	47 434.8	.00002	.00001	.4000	118 584.4	2.500	2.499	6.248	32
33	66 408.7	.00002	.00001	.4000	166 019.2	2.500	2.500	6.249	33
34	92 972.1	.00001		.4000	232 427.9	2.500	2.500	6.249	34
35	130 161.0	.00001		.4000	325 400.0	2.500	2.500	6.249	35

45% Compound Interest Factors 45%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.450	.6897	1.0000	1.4500	1.000	0.690	0	0	1
2	2.103	.4756	.4082	.8582	2.450	1.165	0.408	0.476	2
3	3.049	.3280	.2197	.6697	4.553	1.493	0.758	1.132	3
4	4.421	.2262	.1316	.5816	7.601	1.720	1.053	1.810	4
5	6.410	.1560	.0832	.5332	12.022	1.876	1.298	2.434	5
6	9.294	.1076	.0543	.5043	18.431	1.983	1.499	2.972	6
7	13.476	.0742	.0361	.4861	27.725	2.057	1.661	3.418	7
8	19.541	.0512	.0243	.4743	41.202	2.109	1.791	3.776	8
9	28.334	.0353	.0165	.4665	60.743	2.144	1.893	4.058	9
10	41.085	.0243	.0112	.4612	89.077	2.168	1.973	4.277	10
11	59.573	.0168	.00768	.4577	130.162	2.185	2.034	4.445	11
12	86.381	.0116	.00527	.4553	189.735	2.196	2.082	4.572	12
13	125.252	.00798	.00362	.4536	276.115	2.204	2.118	4.668	13
14	181.615	.00551	.00249	.4525	401.367	2.210	2.145	4.740	14
15	263.342	.00380	.00172	.4517	582.982	2.214	2.165	4.793	15
16	381.846	.00262	.00118	.4512	846.325	2.216	2.180	4.832	16
17	553.677	.00181	.00081	.4508	1 228.2	2.218	2.191	4.861	17
18	802.831	.00125	.00056	.4506	1 781.8	2.219	2.200	4.882	18
19	1 164.1	.00086	.00039	.4504	2 584.7	2.220	2.206	4.898	19
20	1 688.0	.00059	.00027	.4503	3 748.8	2.221	2.210	4.909	20
21	2 447.5	.00041	.00018	.4502	5 436.7	2.221	2.214	4.917	21
22	3 548.9	.00028	.00013	.4501	7 884.3	2.222	2.216	4.923	22
23	5 145.9	.00019	.00009	.4501	11 433.2	2.222	2.218	4.927	23
24	7 461.6	.00013	.00006	.4501	16 579.1	2.222	2.219	4.930	24
25	10 819.3	.00009	.00004	.4500	24 040.7	2.222	2.220	4.933	25
26	15 688.0	.00006	.00003	.4500	34 860.1	2.222	2.221	4.934	26
27	22 747.7	.00004	.00002	.4500	50 548.1	2.222	2.221	4.935	27
28	32 984.1	.00003	.00001	.4500	73 295.8	2.222	2.221	4.936	28
29	47 826.9	.00002	.00001	.4500	106 279.9	2.222	2.222	4.937	29
30	69 349.1	.00001	.00001	.4500	154 106.8	2.222	2.222	4.937	30
31	100 556.1	.00001		.4500	223 455.9	2.222	2.222	4.938	31
32	145 806.4	.00001		.4500	324 012.0	2.222	2.222	4.938	32
33	211 419.3			.4500	469 818.5	2.222	2.222	4.938	33
34	306 558.0			.4500	681 237.8	2.222	2.222	4.938	34
35	444 509.2			.4500	987 795.9	2.222	2.222	4.938	35

50% Compound Interest Factors 50%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.500	.6667	1.0000	1.5000	1.000	0.667	0	0	1
2	2.250	.4444	.4000	.9000	2.500	1.111	0.400	0.444	2
3	3.375	.2963	.2105	.7105	4.750	1.407	0.737	1.037	3
4	5.063	.1975	.1231	.6231	8.125	1.605	1.015	1.630	4
5	7.594	.1317	.0758	.5758	13.188	1.737	1.242	2.156	5
6	11.391	.0878	.0481	.5481	20.781	1.824	1.423	2.595	6
7	17.086	.0585	.0311	.5311	32.172	1.883	1.565	2.947	7
8	25.629	.0390	.0203	.5203	49.258	1.922	1.675	3.220	8
9	38.443	.0260	.0134	.5134	74.887	1.948	1.760	3.428	9
10	57.665	.0173	.00882	.5088	113.330	1.965	1.824	3.584	10
11	86.498	.0116	.00585	.5058	170.995	1.977	1.871	3.699	11
12	129.746	.00771	.00388	.5039	257.493	1.985	1.907	3.784	12
13	194.620	.00514	.00258	.5026	387.239	1.990	1.933	3.846	13
14	291.929	.00343	.00172	.5017	581.859	1.993	1.952	3.890	14
15	437.894	.00228	.00114	.5011	873.788	1.995	1.966	3.922	15
16	656.841	.00152	.00076	.5008	1 311.7	1.997	1.976	3.945	16
17	985.261	.00101	.00051	.5005	1 968.5	1.998	1.983	3.961	17
18	1 477.9	.00068	.00034	.5003	2 953.8	1.999	1.988	3.973	18
19	2 216.8	.00045	.00023	.5002	4 431.7	1.999	1.991	3.981	19
20	3 325.3	.00030	.00015	.5002	6 648.5	1.999	1.994	3.987	20
21	4 987.9	.00020	.00010	.5001	9 973.8	2.000	1.996	3.991	21
22	7 481.8	.00013	.00007	.5001	14 961.7	2.000	1.997	3.994	22
23	11 222.7	.00009	.00004	.5000	22 443.5	2.000	1.998	3.996	23
24	16 834.1	.00006	.00003	.5000	33 666.2	2.000	1.999	3.997	24
25	25 251.2	.00004	.00002	.5000	50 500.3	2.000	1.999	3.998	25
26	37 876.8	.00003	.00001	.5000	75 751.5	2.000	1.999	3.999	26
27	56 815.1	.00002	.00001	.5000	113 628.3	2.000	2.000	3.999	27
28	85 222.7	.00001	.00001	.5000	170 443.4	2.000	2.000	3.999	28
29	127 834.0	.00001		.5000	255 666.1	2.000	2.000	4.000	29
30	191 751.1	.00001		.5000	383 500.1	2.000	2.000	4.000	30
31	287 626.6			.5000	575 251.2	2.000	2.000	4.000	31
32	431 439.9			.5000	862 877.8	2.000	2.000	4.000	32

60% Compound Interest Factors 60%

n	Single Payment		Uniform Payment Series				Arithmetic Gradient		n
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Capital Recovery Factor	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Gradient Uniform Series	Gradient Present Worth	
	Find F Given P F/P	Find P Given F P/F	Find A Given F A/F	Find A Given P A/P	Find F Given A F/A	Find P Given A P/A	Find A Given G A/G	Find P Given G P/G	
1	1.600	.6250	1.0000	1.6000	1.000	0.625	0	0	1
2	2.560	.3906	.3846	.9846	2.600	1.016	0.385	0.391	2
3	4.096	.2441	.1938	.7938	5.160	1.260	0.698	0.879	3
4	6.554	.1526	.1080	.7080	9.256	1.412	0.946	1.337	4
5	10.486	.0954	.0633	.6633	15.810	1.508	1.140	1.718	5
6	16.777	.0596	.0380	.6380	26.295	1.567	1.286	2.016	6
7	26.844	.0373	.0232	.6232	43.073	1.605	1.396	2.240	7
8	42.950	.0233	.0143	.6143	69.916	1.628	1.476	2.403	8
9	68.719	.0146	.00886	.6089	112.866	1.642	1.534	2.519	9
10	109.951	.00909	.00551	.6055	181.585	1.652	1.575	2.601	10
11	175.922	.00568	.00343	.6034	291.536	1.657	1.604	2.658	11
12	281.475	.00355	.00214	.6021	467.458	1.661	1.624	2.697	12
13	450.360	.00222	.00134	.6013	748.933	1.663	1.638	2.724	13
14	720.576	.00139	.00083	.6008	1 199.3	1.664	1.647	2.742	14
15	1 152.9	.00087	.00052	.6005	1 919.9	1.665	1.654	2.754	15
16	1 844.7	.00054	.00033	.6003	3 072.8	1.666	1.658	2.762	16
17	2 951.5	.00034	.00020	.6002	4 917.5	1.666	1.661	2.767	17
18	4 722.4	.00021	.00013	.6001	7 868.9	1.666	1.663	2.771	18
19	7 555.8	.00013	.00008	.6011	12 591.3	1.666	1.664	2.773	19
20	12 089.3	.00008	.00005	.6000	20 147.1	1.667	1.665	2.775	20
21	19 342.8	.00005	.00003	.6000	32 236.3	1.667	1.666	2.776	21
22	30 948.5	.00003	.00002	.6000	51 579.2	1.667	1.666	2.777	22
23	49 517.6	.00002	.00001	.6000	82 527.6	1.667	1.666	2.777	23
24	79 228.1	.00001	.00001	.6000	132 045.2	1.667	1.666	2.777	24
25	126 765.0	.00001		.6000	211 273.4	1.667	1.666	2.777	25
26	202 824.0			.6000	338 038.4	1.667	1.667	2.778	26
27	324 518.4			.6000	540 862.4	1.667	1.667	2.778	27
28	519 229.5			.6000	865 380.9	1.667	1.667	2.778	28

Continuous Compounding—Single Payment Factors

rn	Compound Amount Factor e^{rn} Find F Given P F/P	Present Worth Factor e^{-rn} Find P Given F P/F
.01	1.0101	.9900
.02	1.0202	.9802
.03	1.0305	.9704
.04	1.0408	.9608
.05	1.0513	.9512
.06	1.0618	.9418
.07	1.0725	.9324
.08	1.0833	.9231
.09	1.0942	.9139
.10	1.1052	.9048
.11	1.1163	.8958
.12	1.1275	.8869
.13	1.1388	.8781
.14	1.1503	.8694
.15	1.1618	.8607
.16	1.1735	.8521
.17	1.1853	.8437
.18	1.1972	.8353
.19	1.2092	.8270
.20	1.2214	.8187
.21	1.2337	.8106
.22	1.2461	.8025
.23	1.2586	.7945
.24	1.2712	.7866
.25	1.2840	.7788
.26	1.2969	.7711
.27	1.3100	.7634
.28	1.3231	.7558
.29	1.3364	.7483
.30	1.3499	.7408
.31	1.3634	.7334
.32	1.3771	.7261
.33	1.3910	.7189
.34	1.4049	.7118
.35	1.4191	.7047
.36	1.4333	.6977
.37	1.4477	.6907
.38	1.4623	.6839
.39	1.4770	.6771
.40	1.4918	.6703
.41	1.5068	.6637
.42	1.5220	.6570
.43	1.5373	.6505
.44	1.5527	.6440
.45	1.5683	.6376
.46	1.5841	.6313
.47	1.6000	.6250
.48	1.6161	.6188
.49	1.6323	.6126
.50	1.6487	.6065

rn	Compound Amount Factor e^{rn} Find F Given P F/P	Present Worth Factor e^{-rn} Find P Given F P/F
.51	1.6653	.6005
.52	1.6820	.5945
.53	1.6989	.5886
.54	1.7160	.5827
.55	1.7333	.5769
.56	1.7507	.5712
.57	1.7683	.5655
.58	1.7860	.5599
.59	1.8040	.5543
.60	1.8221	.5488
.61	1.8404	.5434
.62	1.8589	.5379
.63	1.8776	.5326
.64	1.8965	.5273
.65	1.9155	.5220
.66	1.9348	.5169
.67	1.9542	.5117
.68	1.9739	.5066
.69	1.9937	.5016
.70	2.0138	.4966
.71	2.0340	.4916
.72	2.0544	.4868
.73	2.0751	.4819
.74	2.0959	.4771
.75	2.1170	.4724
.76	2.1383	.4677
.77	2.1598	.4630
.78	2.1815	.4584
.79	2.2034	.4538
.80	2.2255	.4493
.81	2.2479	.4449
.82	2.2705	.4404
.83	2.2933	.4360
.84	2.3164	.4317
.85	2.3396	.4274
.86	2.3632	.4232
.87	2.3869	.4190
.88	2.4109	.4148
.89	2.4351	.4107
.90	2.4596	.4066
.91	2.4843	.4025
.92	2.5093	.3985
.93	2.5345	.3946
.94	2.5600	.3906
.95	2.5857	.3867
.96	2.6117	.3829
.97	2.6379	.3791
.98	2.6645	.3753
.99	2.6912	.3716
1.00	2.7183	.3679